

**Área:** ENGENHARIAS E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Projeto:** Formas Diferenciais Aplicadas a Problemas Eletrostáticos e Magnetostáticos

**Autores:** NOME DO BOLSISTA: CAIO SALAZAR ALMEIDA NAZARETH - BIC/UFJF NOME DO RESPONSÁVEL PELO PROJETO (ORIENTADOR): ALEX SANDER DE MOURA

**Resumo:**

Neste trabalho é mostrado o uso da teoria das formas diferenciais e sua contraparte descrita através de cálculo exterior discreto para resolver problemas eletromagnéticos. Apresenta a teoria de dedução de equações discretas para potenciais elétricos e magnéticos. Resolve dois problemas, um magnetostático e outro eletrostático e avalia a precisão e a convergência do método para estas classes de problemas.

## I. Introdução

A partir do século XX, é o surgimento de um novo formalismo matemático para tratar as equações de Maxwell: Formas Diferenciais [1]. Em comparação com a análise vetorial e o cálculo tensor. Formas diferenciais são destacadas pelo fato de unir o melhor das duas teorias, ou seja, tem uma generalidade em formas diferenciais e em conceitos eletromagnéticos, como no caso do cálculo tensor e a simplicidade da análise vetorial. Uma aplicação de formas diferenciais de tratamento seria a propagação das ondas no domínio do tempo e de frequência [2]. Neste trabalho apresenta-se a aplicação de formas diferenciais, os problemas eletrostáticos e magnetostáticos, e a versatilidade do método para tratar esta classe de problemas. Apresentamos também o cálculo das taxas de convergência para o método.

## II. Formas Diferenciais

Nesta seção, apresentamos um breve resumo da teoria de formas diferenciais e a versatilidade de modelar os problemas estáticos do eletromagnetismo [3], [4].

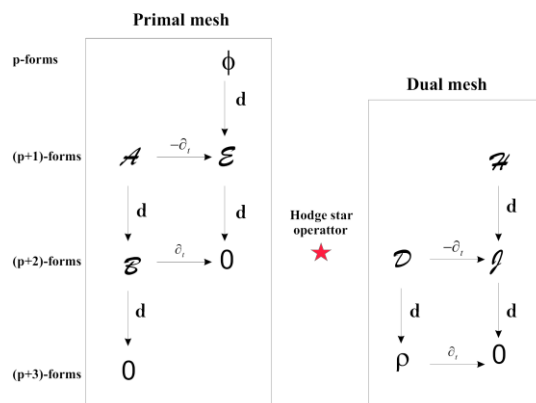


Figura 1: Formas diferenciais para o eletromagnetismo e operadores.

Figura 1 mostra como o uso de forma diferencial simplifica a representação das leis eletromagnéticas. O lado esquerdo do diagrama cobre a lei de Faraday (1), a lei de Gauss para o Campo Magnético (2) e a representação do campo elétrico em termos de potencial (3).

$$d\varepsilon + \partial_t B = 0 \quad (1)$$

$$dB = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon J + \partial_t A \quad (3)$$

O lado direito do diagrama abrange a lei do Ampere (4), a lei de Gauss para o campo elétrico (5), e a continuidade da equação (6).

$$dH - \partial_t D = J \quad (4)$$

$$dD = \rho \quad (5)$$

$$dJ + \partial_t \rho = 0 \quad (6)$$

Nas equações (1) - (6),  $d$  é o operador da derivada exterior e ambos os lados dos diagramas são ligados pelas relações constitutivas representadas pelo operador Estrela de Hodge. Neste artigo escrevemos que os problemas devido ao potencial tanto no caso eletrostático e para o caso magnetostático. É usada a teoria do Cálculo Exterior Discreto para chegar em contraste às equações discretas, equações discretas podem ser escritas em termos de Matrizes Galerkin-Hodge, as matrizes de incidência e vetores de graus de liberdade estes representam um sistema linear esparso.

### **A. Problemas Eletrostáticos**

Para problemas eletrostáticos consideramos as Eq. (1) e Eq.(5), considerando os problemas eletrostáticos, temos que o tempo derivados são nulas e  $\rho = 0$ , então podemos escrever (1) e (2) do seguinte modo:

$$d\varepsilon = 0 \quad (7)$$

$$dD = 0 \quad (8)$$

Por (7),  $\varepsilon$  é uma 1 – forma fechada, então existe uma 0-forma  $\phi$ , que é o potencial escalar fisicamente elétrico, de modo que:

$$\varepsilon = -d\phi \quad (9)$$

Agora, usando a relação constitutiva  $D = \star_e E$ , tem então a seguinte equação que descreve o nosso problema:

$$d \star_e d\phi = 0 \quad (10)$$

Este problema se reduz a encontrar o  $\phi$  0 – forma, por esta desratização é usada como interpolação de 0 – forma função de Whitney  $\omega^n$ [5].

$$\phi = \sum u_i \omega_i^n \quad (11)$$

Onde  $u_i$  é o potencial no nó  $i$ . Imediatamente a contrapartida discreta de (11) vai ser escrita como,

$$G' M_1(\epsilon) G \phi = 0 \quad (12)$$

onde  $G$  é a matriz de incidência no nó de ponta e  $M_1(\epsilon)$  é a matriz Hodge.

### **B. Problemas Magnetostáticos**

Magnetostática é uma área de eletromagnetismo em que as variáveis eletromagnéticas são constantes ao longo do tempo, com a presença de um campo magnético. Em magnetostática pode haver a presença ou ausência de correntes elétricas, mas elas são constantes no tempo. Considerando-se um meio isotrópico e negligenciando variações temporais, as equações do eletromagnetismo são simplificadas para,

$$dB = 0 \quad (13)$$

$$dH = J \quad (14)$$

$$H = \star_v B \quad (15)$$

Pela equação (13)  $B$  é uma 1 – forma fechada, então não há um 0 – forma  $A$  de tal modo que

$$B = dA \quad (16)$$

Em que  $A$  é o Vetor Potencial Magnético. Usando as Eq. (14) - (15). Existe o problema magnetostático escrito como uma função de potencial magnético  $A$

$$d \star_v dA = J \quad (17)$$

Considerando-se uma malha simplicial 2D com triângulos  $N_t$ , bordas  $N_e$  e nós  $N_n$  e usando a teoria do Cálculo Exterior Discreto pode escrever a forma discretizada da Eq. (17) como se segue:

$$G' M_1(v) G_a = j \quad (18)$$

Onde  $G$  é uma matriz de tamanho  $N_e \times N_n$  representa a Derivada Exterior Discreta atuando em 0 – forma distintas.  $G$  é uma Matriz de Incidência [6], composta apenas dos números 1, 0 e  $-1$ , que determinam a orientação de nós em relação às bordas da malha.

$M1(\nu)$  é a Matriz de Hodge  $N_e \times N_n$  [6] e  $j$  são vetores de graus de liberdade estes representam o Vetor Potencial Magnético nos nós da malha primária e a densidade de corrente nas faces da malha dupla, respectivamente.

### III. Simulação Numérica

#### A. Caixa retangular infinitamente longa, com paredes metálicas

Considerando a caixa retangular infinitamente longa com paredes metálicas. A calha é infinitamente longa na direção do eixo  $z$ . Ao manter uma ligeira separação em comparação com as outras dimensões da calha, é colocada numa cobertura condutora com o potencial  $V_0 = 1$  volt  $y = 1$ . Suponha que a região dentro da calha é homogênea como  $\epsilon_r = 1$ .

A solução analítica  $\phi^A$  deste problema [7], é dado pela expressão seguinte:

$$\phi^A(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x) \sinh((2k-1)\pi x)}{\sinh((2k-1)\pi)} \quad (19)$$

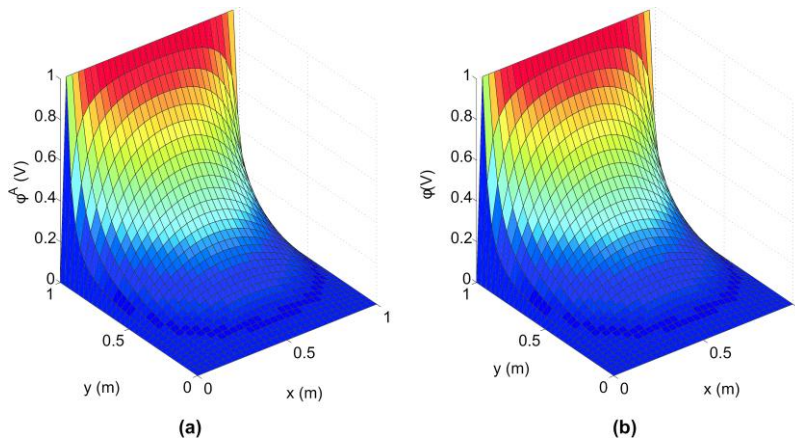


Figura 2: Solução para o problema da calha 2D. (a) solução analítica, (b) solução usando formas diferenciais.

Figura 2 mostra a solução analítica e a solução obtida através da utilização de formas diferenciais. Observou-se que o método consegue uma boa aproximação para a solução do problema.

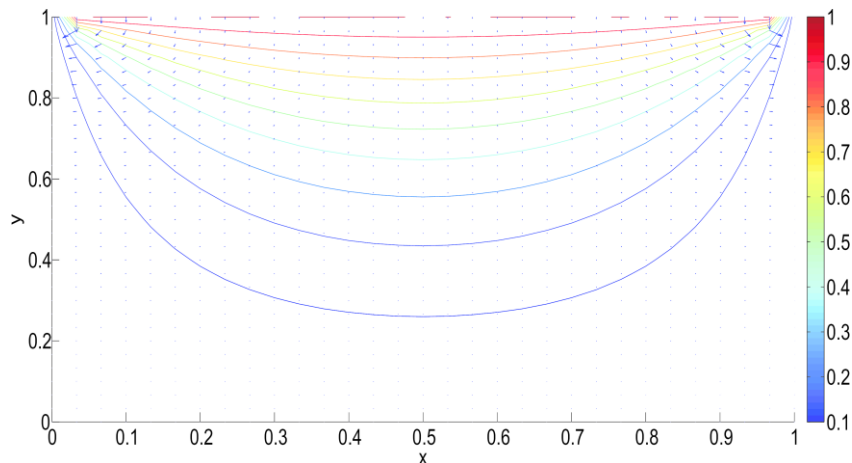


Figura 3: Equipotencial e distribuição de campo elétrico em caixa retangular infinitamente longa, com paredes metálicas.

Figura 3 mostra os 10 equipotenciais e a distribuição do campo elétrico.

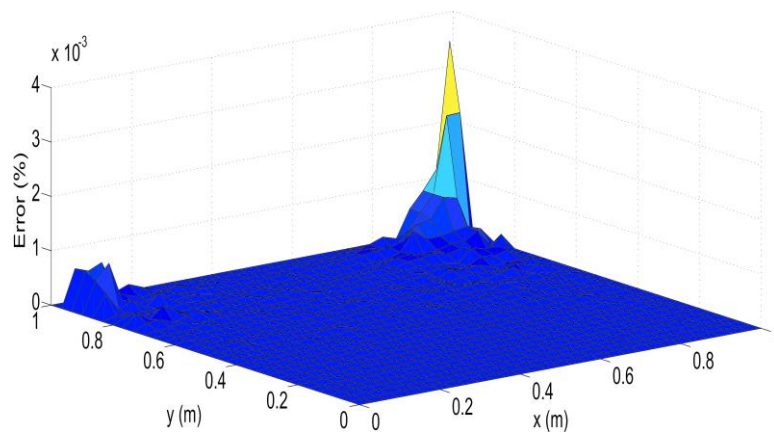


Figura 4: Erro absoluto  $E_r$  (%) calculado para o potencial.

Figura 4 mostra o comportamento do erro em toda a geometria, observa-se que os cantos da região de erro são maiores, devido à descontinuidade do potencial para estes pontos. Realmente, espera-se que isto ocorra independentemente do método numérico utilizado. Mas no resto da geometria percebemos coerência com a solução analítica. Para calcular o erro desta aproximação é usada a seguinte fórmula:

$$E_r = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (\phi^A - \phi)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} (\phi^A)^2 d\Omega}} \quad (20)$$

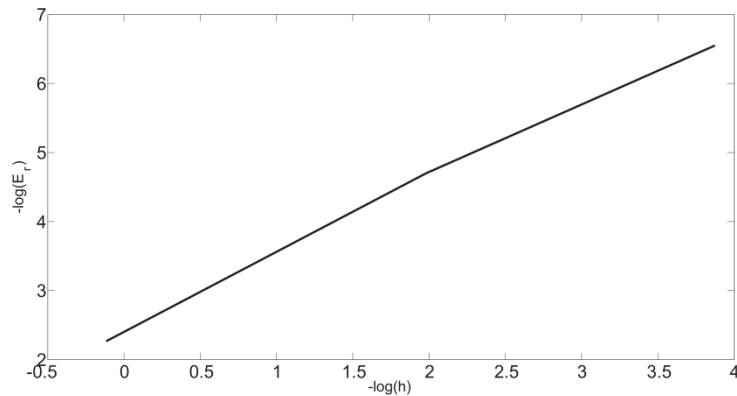


Figura 5: Norma de erro para as formas diferenciais para o problema de eletrostática.  $h$  é o tamanho da extremidade inferior da tela.

Figura 5 mostra o comportamento do erro em relação à aresta inferior da malha. Observa-se que para o problema do método eletrostáticos é convergente. Isto mostra que a utilização de formas diferenciais é viável para os problemas eletrostáticos.

### C. Eletroímã 2D

O Problema do Eletroímã 2D é composto por três materiais nomeadamente ar, ferro e cobre, com refletividade magnética relativa  $\nu_{ar} = \nu_{cobre} = 1$  e  $\nu_{ferro} = 10^{-3}$ . A densidade de corrente é  $J = 0.1MA/m^2$ . A geometria do problema pode estar na Fig. 6.

Figura 6 também mostra as linhas de fluxo magnético, solução obtida através das formas diferenciais. A densidade de fluxo magnético que cruza o ar e o ferro também é calculada.

Figura 7 mostra a comparação entre as formas diferenciais e uma solução de referência calculada pela FEM, com  $10^6$  nós. Note-se que a densidade de fluxo magnético é descontínua nas interfaces entre materiais diferentes, mostrando que a solução com formas diferenciais satisfaz as condições de continuidade do campo na interface entre os dois meios.

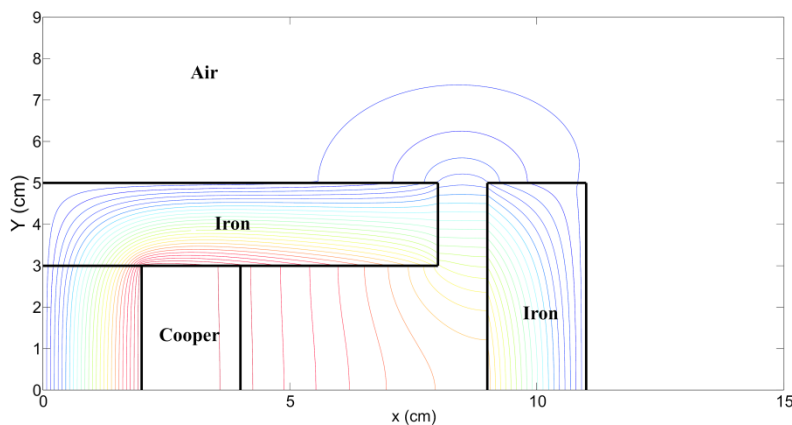


Figura 6: Problema eletroímã e a distribuição potencial vetor magnético avaliado por Formas Diferenciais.

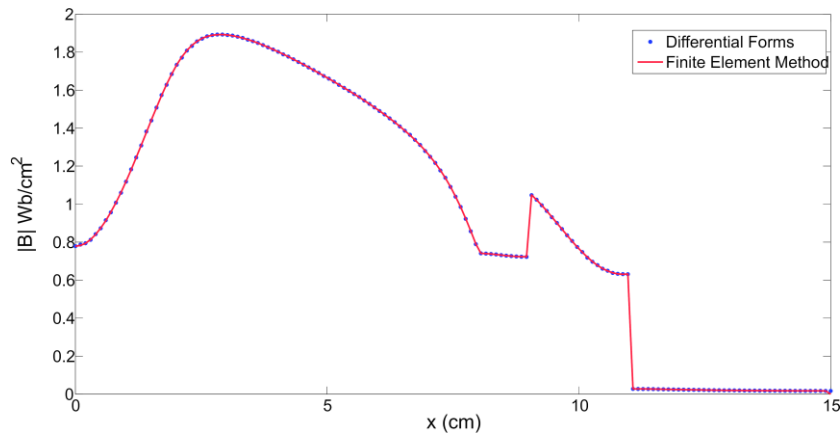


Figura 7: Mostra a densidade de fluxo magnético avaliada pelas formas diferenciais no segmento  $y = 4$  e  $0 \leq x \leq 15$ .

Este segmento de linha foi escolhido por abranger todos os meios de comunicação e mostra a eficácia do método no tratamento de discontinuidades.

A solução de referência é gerada pelo FEM com elementos triangulares de primeira ordem e  $10^6$  nós.

Para calcular a convergência do método para problemas magnetostáticos, usamos a solução aproximada pelo FEM com elementos triangulares de primeira ordem e  $10^6$  nós e demonstrado por  $u_{fem}$ . O erro é calculado como se segue:

$$E_r = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (\phi^A - \phi)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} (\phi^A)^2 d\Omega}} \quad (21)$$

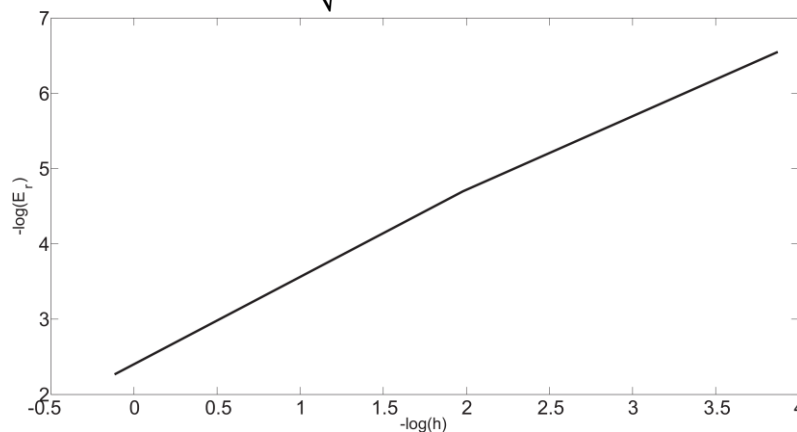


Figura 8: Norma de erro para as formas diferenciais para magnetostáticos problema.  $h$  é o tamanho da extremidade inferior da tela.

Figura 8 mostra o comportamento do erro (21) em relação a borda inferior da malha. Tal como no caso eletrostático, realiza a convergência para o problema magnetostático.

#### IV. Conclusão

Neste trabalho apresentou a eficiência do uso das formas diferenciais para a simulação de problemas estáticos do eletromagnetismo. Mostrou-se que o uso desta teoria é satisfatória para a simulação numérica desta classe de problemas com taxas de convergência comparáveis a outros métodos numéricos.

#### Referências:

1. A. Bossavit, *Computational Electromagnetics: Variational formulation, complementarity, Edge Currents*. San Diego: Academic Press, 1998.
2. A. S. Moura, R. R. Saldanha, E. J. Silva, M. F. Pantoja, A. C. Lisboa, and W. G. Facco, "Discretization of the cfs-pml for computational electromagnetics using discrete differential forms," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 55, no. 2, pp. 351–357, 2013.
3. J. Keranen, J. Kangas, A. Ahola, and L. Kettunen, "Implicit yee-like scheme on tetrahedral mesh," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 2, pp. 717 –720, mar 2002.
4. K. Warnick, R. Selfridge, and D. Arnold, "Teaching electromagnetic field theory using differential forms," *Education, IEEE Transactions on*, vol. 40, no. 1, pp. 53 –68, feb 1997.
5. A. Bossavit, "Whitney forms: a class of finite elements for threedimensional computations in electromagnetism," *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A*, vol. 135, no. 8, pp. 493 –500, nov 1988.
6. A. S. Moura, R. R. Saldanha, E. J. Silva, A. C. Lisboa, W. G. Facco, and N. Z. Lima, "A recursive sparsification of the inverse hodge matrix," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 2, pp. 611 –614, feb. 2012.
7. A. C. Polycarpou, *Introduction to the Finite Element Method in electromagnetics*. Morgan & Claypool, 2006.