4.12 Exercícios

1. Verifique que se f e g são períodicas de periódo T, então $f+g$ e $f\,g$ são períodicas de

   periódo T.

2. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Verifique que:

   a) F é par se f é ímpar

   b) F é ímpar se f é par

3. Seja $f(x) = cos(\alpha\,x) + cos(\beta\,x)$. Verifique que f é periódica se $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

4. Se f é periódica de período $2\,l$, verifique que:

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt,$$

   onde $a_0 \in \mathbb{R}$, é periódica de período $2\,l$.

5. Sejam $P = P_n(x)$ os polinômios de Legendre. Verifique que são ortogonais em $C([-1,1])$:

$$P_n \cdot P_m = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0,$$

   se $n \neq m$ e $P_n \cdot P_n = \dfrac{2}{2\,n+1}$. Utilize a fórmula de Rodrigues.

6. Determine $S[f]$, se:

   a) $f(x) = 2\,x$; $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = f(x+2)$

   b) $f(x) = 2\,x - 1$; $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = f(x+2)$

   c) $f(x) = x^2 + x$; $x \in [-\pi,\pi]$ tal que $f(x) = f(x+2\,\pi)$

   d) $f(x) = e^x$, $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = f(x+2)$

   e) $f(x) = senh(x)$, $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = f(x+2)$

   f) $f(x) = cosh(x)$, $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = f(x+2)$

   g) $f(x) = 2\,cos^2(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$ tal que $f(x) = f(x+2\,\pi)$

h) $f(x) = cos(3\,x) + cos^2(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} - x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$, tal que $f(x) = f(x + 2)$

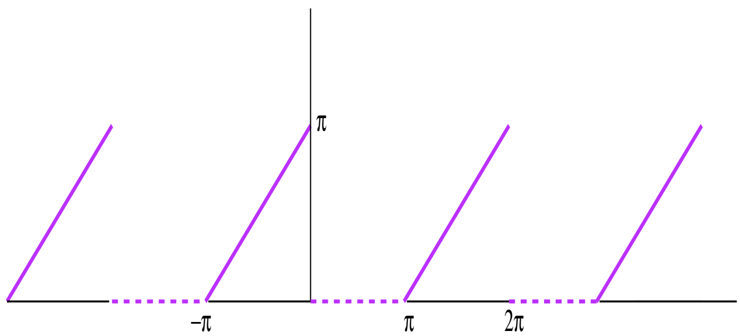
j) $f(x) = \begin{cases} -x + \pi & \text{se} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$, tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$

k) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -3\,\pi \leq x < \pi \\ 1 & \text{se} \quad \pi \leq x < 2\,\pi \\ 2 & \text{se} \quad 2\,\pi \leq x < 3\,\pi \end{cases}$, tal que $f(x) = f(x + 6\,\pi)$

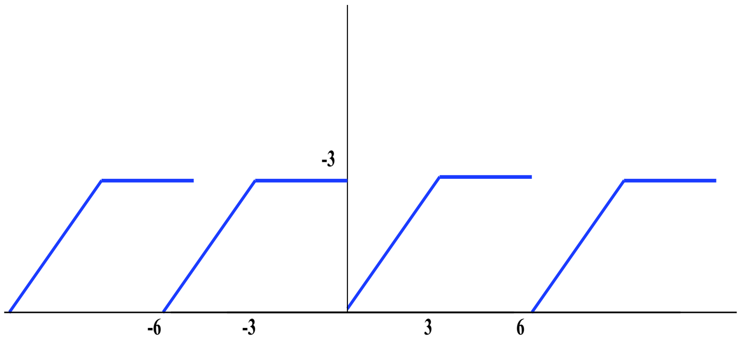
l) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$, tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$

m) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x^3 & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$, tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$

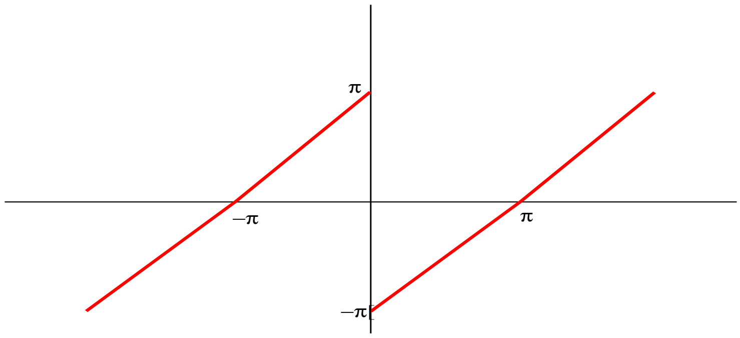
n) A função que tem como gráfico:



o) A função que tem como gráfico:



p) A função que tem como gráfico:



7. Determine $S[f]$, onde:

a) $f(x) = a\,x + b$, $x \in [-l, l]$, tal que $f(x) = f(x + 2\,l)$

b) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, $x \in [-l, l]$, tal que $f(x) = f(x + 2\,l)$

8. Determine a expressão matemática de f_p, f_o e esboce os gráficos de f_p e f_o das funções:

a) $f(x) = 2\,x$, $x \in [0, 1]$

b) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in [0, 1]$

d) $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$

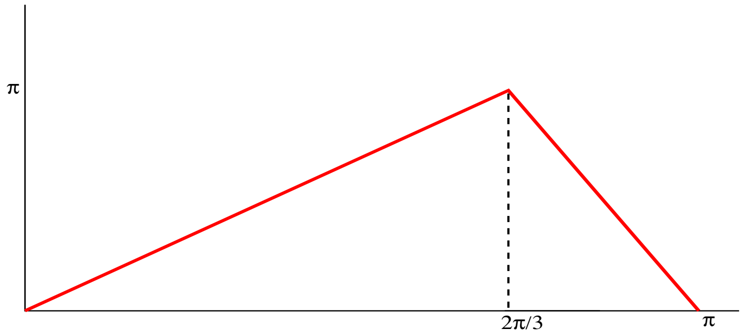
e) $f(x) = cos(\pi\, x)$, $x \in [0,1]$

f) $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$

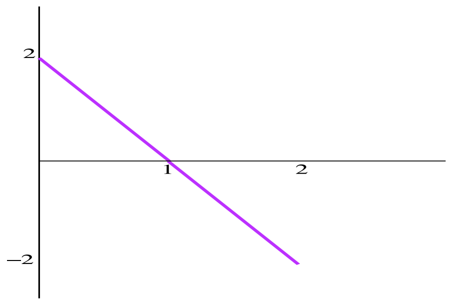
g) $f(x) = cosh(x)$, $x \in [0,1]$

h) $f(x) = senh(x)$, $x \in [0,1]$

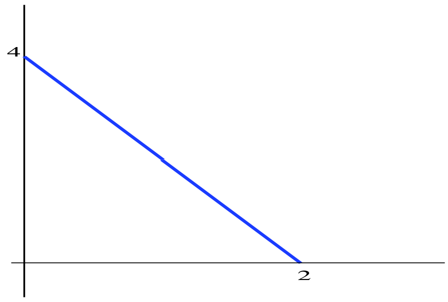
i) A função que tem como gráfico:



j) A função que tem como gráfico:



k) A função que tem como gráfico:



9. Determine a série dos cosenos $S[f_p]$ e dos senos $S[f_o]$, onde f é dada pelo ítem anterior.

10. Esboce os gráficos das somas parciais até de ordem 4, do ítem anterior.

11. Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -5 < x < 0 \\ 3 & \text{se} \quad 0 < x < 5, \end{cases}$ tal que $f(x+10) = f(x)$.

Como se deve redefinir f para que $S[f]$ convirja em $[-5, 5]$.

12. Utilize a série de Fourier de $f(x) = e^x$, $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$ para achar o valor da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

13. Utilize a série de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$ para verificar que:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

14. Esboce o gráfico das séries de Fourier do ítem 1.

15. Utilize a série de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

$f(x) = f(x + 2\,\pi)$, para determinar por integração a série de Fourier de $f(x) = |x|$,
$x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x) = f(x + 2\,\pi)$.

16. Determine se a série de Fourier das seguintes funções convergem uniformemente:

   a) $f(x) = e^x$, $x \in (-1, 1)$

   b) $f(x) = senh(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$

   c) $f(x) = sen(x) + |sen(x)|$, $x \in (-\pi, \pi)$

   d) $f(x) = x + |x|$, $x \in (-1, 1)$

17. Seja $f(x) = x + 1|$, $x \in [-1, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 2)$. Quantos termos deve ter S_n para que $S[f]$ convirga em média para f com um erro menor que 1%?

18. Seja $f(x) = x^2 + x$, $x \in [-1, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 2)$. Quantos termos deve ter S_n para que $S[f]$ convirga em média para f com um erro menor que 1%?