Volume 2
2ª edição

Módulo 2

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

Cálculo I

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Volume 2
Cálculo I
cederj

ISBN 85-89200-08-6
9 788589 200080

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense
UERJ
uff
UNIRIO
FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I

Volume 2 - Módulo 2
2ª edição

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Anna Maria Osborne
Ana Tereza de Andrade
Leonardo Villela
Laura da Silveira Paula

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe Cederj

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Equipe Cederj

ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni
Fabio Muniz

CAPA
Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

P784c

Pombo Jr, Dinamérico Pereira
Cálculo I. v.2 / Dinamérico Pereira Pombo Jr. 2. ed. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009.
130p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-89200-08-6

1. Derivação. 2. Funções crescentes. 3. Funções decrescentes. 3. Funções trigonométricas inversas. I. Gusmão, Paulo Henrique C. II. Título.

CDD: 515.15

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2009/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Cálculo I

Volume 2 - Módulo 2

SUMÁRIO

Módulo 2

Derivação e Aplicações

Quando consideramos, por exemplo, a função $f(x) = x^2$, já sabemos do Pré-Cálculo que seu gráfico é uma parábola. Algumas perguntas naturais que podemos fazer são: Se tomarmos dois pontos do gráfico da função, digamos (1,1) e (2,4), o que nos garante que a parte do gráfico compreendida entre esses dois pontos é realmente como a desenhamos? O que nos garante que o gráfico entre eles não é, por exemplo, "ondulado" ? Será que em algum pedaço do gráfico aparece uma "quina"? Enfim, essas e outras questões nos levam, naturalmente, à seguinte questão geral: Como esboçar, de maneira razoavelmente fiel, o gráfico de uma determinada função?

O objetivo deste módulo é desenvolver, a partir do conceito de derivada introduzido no Módulo 1, conceitos e técnicas que nos permitam responder a essas e outras questões. Você verá ao longo do módulo que cada novo conceito apresentado está intimamente ligado a certas propriedades importantes dos gráficos de funções. Assim, após cada etapa, você estará mais apto a compreender o comportamento do gráfico de funções e, portanto, a esboçá-los mais fielmente. Você verá, também, que a derivada permitirá o cálculo de certos limites que, com as técnicas vistas no Módulo 1, não éramos capazes de calcular. Finalmente, estudaremos mais profundamente as funções trigonométricas inversas, já introduzidas na disciplina de Pré-Cálculo.

Aula 16 – O Teorema do valor médio.

Referências: Aulas 9, 10, 11 e 12.

Objetivo

Usar os conceitos de continuidade e derivabilidade para obter determinadas propriedades geométricas do gráfico de funções.

Vamos começar com a seguinte observação intuitiva sobre gráficos de funções: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe pelo menos um ponto P do gráfico de f, situado entre $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto P é paralela à reta que contém A e B (ver a Figura 16.1).

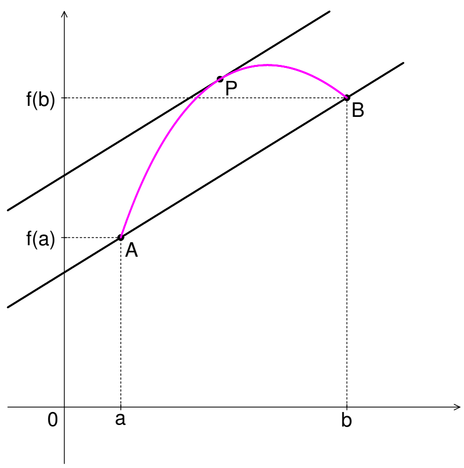


Figura 16.1

O coeficiente angular de uma reta r é a tangente do ângulo que a reta r faz com o eixo x das abscissas.

A observação acima envolve dois fatos já vistos anteriormente. Com efeito, vimos na aula 9 que se f é *derivável em todo ponto do intervalo* (a, b), então *o gráfico de f possui reta tangente em qualquer ponto entre* $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ e a derivada $f'(x)$ num ponto x é exatamente o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto $(x, f(x))$. Por outro lado, dizer que *duas retas são paralelas* significa dizer que *elas possuem o mesmo coeficiente angular*.

Nos exemplos que seguem, utilizaremos estes fatos para determinar P.

Exemplo 16.1

Considere a função $f(x) = x^2$, sejam $A = (1, f(1)) = (1, 1)$ e $B = (2, f(2)) = (2, 4)$ dois pontos do gráfico de f e r a reta que contém A e B (ver a Figura 16.2).

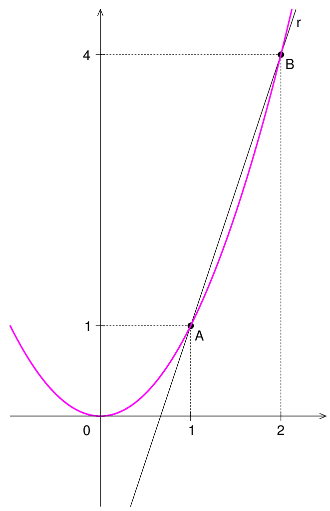


Figura 16.2

Vamos mostrar que existe pelo menos um ponto intermediário P, do gráfico de f, tal que a reta tangente em P é paralela à reta r.

O coeficiente angular da reta r é dado por $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3$. Assim, para encontrarmos o ponto P, precisamos encontrar um ponto $c \in (1,2)$ tal que $f'(c) = 3$ pois, neste caso, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (c, f(c))$ terá o mesmo coeficiente angular que a reta r e será, portanto, paralela a esta última (ver a Figura 16.3).

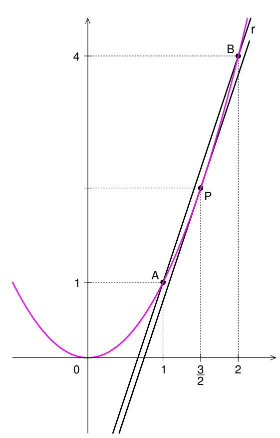


Figura 16.3

Ora, $f'(x) = 2x$ para todo $x \in (1,2)$; logo, $f'(x) = 3$ se, e somente se, $2x = 3$, ou seja, $x = \frac{3}{2}$. Vemos assim que o ponto procurado é $P = \left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

Vamos agora determinar a equação da reta tangente ao gráfico que passa por P. Como seu coeficiente angular é igual a 3, sua equação é da forma $y = 3x + b$. Por outro lado, como ela passa pelo ponto $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, temos que $\frac{9}{4} = 3 \times \frac{3}{2} + b$, ou seja, $b = -\frac{9}{4}$. Portanto, a equação da reta procurada é $y = 3x - \frac{9}{4}$.

Exemplo 16.2

Considere a função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e sejam $A = (0, f(0)) = (0, 0)$ e $B = (8, f(8)) = (8, 2)$ dois pontos do gráfico de f. Queremos determinar um ponto $(c, f(c))$ do gráfico tal que a reta tangente por esse ponto seja paralela à reta r que contém A e B (ver a Figura 16.4).

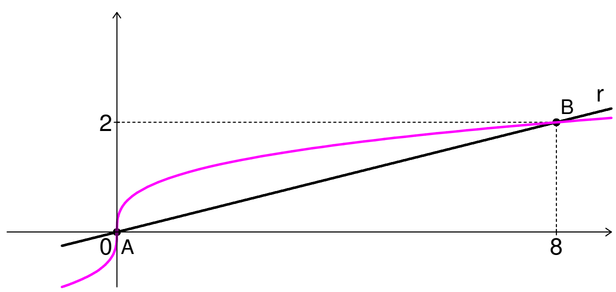


Figura 16.4

A função f é derivável em todo ponto $x \in (0, 8]$ (mas não é derivável em $x = 0$); portanto, seu gráfico possui reta tangente em todo ponto entre A e B. O coeficiente angular da reta r é $\frac{f(8)-f(0)}{8-0} = \frac{1}{4}$. Queremos, portanto, determinar um ponto $c \in (0, 8)$ tal que $f'(c) = \frac{1}{4}$.

Ora, $f'(x) = \frac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2}$; assim, o número c procurado é tal que $\frac{1}{3(c^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{4}$, ou seja, $c = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = 1,5396\cdots$ e o ponto procurado é $(c, f(c)) = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

De um modo geral, temos o seguinte teorema:

Teorema 16.1 (Teorema do valor médio)

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Uma demonstração rigorosa deste Teorema será vista na disciplina de Análise.

No Exemplo 16.1, temos $a = 1$, $b = 2$ e $f(x) = x^2$; e, no Exemplo 16.2, $a = 0$, $b = 8$, e $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. O coeficiente angular da reta r em cada um dos casos é o número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Em ambos os casos, o número $c \in (a, b)$ encontrado é único, ou seja, a reta tangente ao gráfico e paralela à reta r, é única. Entretanto, pode haver mais de um número c satisfazendo a conclusão do Teorema do valor médio, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 16.3

Sejam $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, $A = (-2,-8)$ e $B = (2,8)$ dois pontos do gráfico de f e r a reta contendo A e B (ver a Figura 16.5).

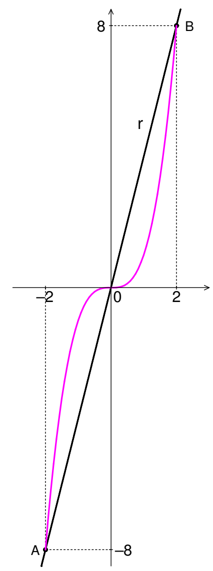


Figura 16.5

O coeficiente angular da reta r é igual a $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = 4$. Por outro lado, para todo $x \in (-2,2)$, $f'(x) = 3x^2$. Queremos determinar os valores de x para os quais $f'(x) = 4$. Como $3x^2 = 4$ se, e somente se, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, vemos que há dois valores $c \in (-2,2)$ para os quais $f'(c) = 4$.

Agora, uma pergunta natural é a seguinte:

A hipótese "f *derivável em* (a,b)" é realmente necessária para a validade do Teorema do valor médio?

Vejamos:

Exemplo 16.4

Seja a função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, e sejam $A = (-1,1)$ e $B = (1,1)$ dois pontos de seu gráfico (ver a Figura 16.6).

Note que o gráfico de f não possui reta tangente paralela à reta r que contém os pontos A e B. Realmente, o coeficiente angular da reta r é $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 0$. Por outro lado, f é derivável em todo ponto $x \in (-1,1)$, exceto em $x = 0$. Além disso, já vimos que $f'(x) = -1$ para todo $-1 < x < 0$, e que $f'(x) = 1$ para todo $0 < x < 1$.

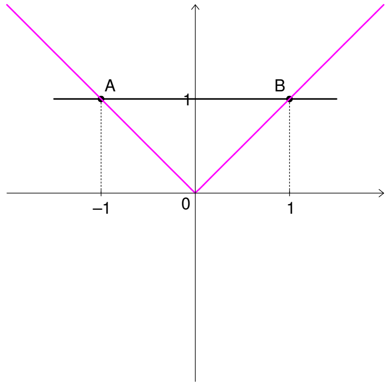


Figura 16.6

Vemos, assim, que a conclusão do Teorema do valor médio falha no exemplo acima, o que nos mostra a real necessidade da hipótese de derivabilidade em todo ponto do intervalo aberto.

O exemplo a seguir nos mostra que a **hipótese "f contínua em $[a, b]$" é também necessária para assegurar a validade do Teorema do valor médio.**

Exemplo 16.5

Sejam $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{4-x}$ se $x \neq 4$ e $f(x) = 0$ se $x = 4$, $A = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e $B = (4, 0)$ dois pontos do gráfico de f.

Vemos que a reta r que contém A e B não é paralela a qualquer reta tangente ao gráfico de f. Com efeito, em todo ponto $x \in [0, 4)$, sua derivada é $f'(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$, que é sempre um número positivo. Por outro lado, o coeficiente angular da reta r é igual a $-\frac{1}{16}$ (ver a Figura 16.7).

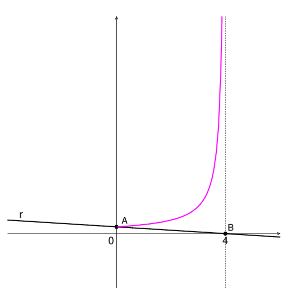


Figura 16.7

Uma observação geométrica bastante intuitiva que podemos fazer é que se o gráfico de uma função f possui reta tangente em todo ponto entre $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto intermediário de modo que a reta tangente naquele ponto é paralela ao eixo x das abscissas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 16.6

Seja $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ definida no intervalo $[a, b] = [0, 2]$ (ver a Figura 16.8).

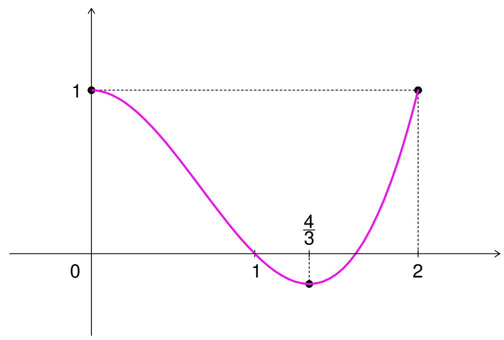


Figura 16.8

Note que $f(0) = 1$ e $f(2) = 1$. Assim, se considerarmos os dois pontos $A = (0, 1)$ e $B = (2, 1)$ do gráfico de f, vemos que o coeficiente angular da reta r que contém A e B é igual a zero, ou seja, a reta r é paralela ao eixo x das abscissas. Por outro lado, como $f'(x) = 3x^2 - 4x$, vemos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$. Logo, há um único $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$, a saber, $c = \frac{4}{3}$.

De maneira geral, temos o seguinte Teorema:

Teorema 16.2 (Teorema de Rolle)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Aplicando o Teorema do valor médio a f, concluímos que existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Como $f(b) = f(a)$, segue que $f'(c) = 0$.

O exemplo abaixo mostra que pode existir mais de um número c em (a, b) para o qual $f'(c) = 0$.

Michel Rolle nasceu em 21 de abril de 1652 em Ambert, Basse-Auvergne, França. Ele teve pouca educação formal, tendo sido na verdade um autodidata. Seus trabalhos versavam sobre Análise Diofantina, Álgebra e Geometria. Entretanto, ficou mais conhecido pelo Teorema que leva seu nome, publicado num obscuro livro em 1691, em cuja prova foi usado um método de Hudde. Vale lembrar que Rolle era um forte opositor ao Cálculo, tendo afirmado: *O Cálculo é uma coleção engenhosa de falácias.*

Veremos, na disciplina de Análise, que embora o Teorema de Rolle seja um caso particular do Teorema do valor médio, este último é uma conseqüência do primeiro.

Exemplo 16.7

Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a qual satisfaz $f(-1) = f(3) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ ou $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$. Como $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ pertencem a $(-1, 3)$, vemos que há dois números $c \in (-1, 3)$ tais que $f'(c) = 0$.

Resumo

Nesta aula, vimos dois importantes Teoremas que nos mostram como as retas tangentes ao gráfico de uma função nos dão informações geométricas sobre o seu comportamento. Como as retas tangentes são determinadas essencialmente pelo seu coeficiente angular, ou seja, pela derivada da função, vemos a relevância desse conceito para o entendimento das funções.

Lembrete

Esta aula é de fundamental importância, pois ela contribui para sedimentar o conceito de derivada e sua interpretação geométrica. Estaremos, até a aula 24, explorando o conceito de derivada como uma ferramenta para aprofundar nosso entendimento sobre o comportamento de funções. Assim é muito importante que você resolva os exercícios que se seguem pois, através deles, você terá a oportunidade de fixar o significado dos teoremas vistos acima.

Exercícios

1. Verifique se cada uma das funções abaixo, definidas no intervalo $[a, b]$, satisfaz ou não as hipóteses do Teorema do valor médio. Em caso afirmativo, determine um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   a) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $[a, b] = [1, 5]$;

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \text{ se } x \neq 1 \\ 2 \text{ se } x = 1 \end{cases} \quad [a, b] = [0, 1]$;

   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \text{ se } x \neq 1 \\ 4 \text{ se } x = 1 \end{cases} \quad [a, b] = [0, 1]$;

   d) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[a, b] = [1, 3]$.

2. Em cada um dos itens abaixo, determine qual das hipóteses do Teorema do valor médio não é válida. Justifique sua resposta.

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-3} \text{ se } x \neq 3 \\ 1 \text{ se } x = 3 \end{cases} \quad [a, b] = [1, 6]$;

   b) $f(x) = 1 - |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$;

   c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ se } x \leq 3 \\ 5x - 6 \text{ se } x > 3 \end{cases} \quad [a, b] = [1, 5]$;

   d) $f(x) = 3(x-4)^{\frac{2}{3}}$, $[a, b] = [0, 4]$.

3. Para a função $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3$ determine três conjuntos de valores para a e b, tais que as hipóteses do Teorema de Rolle sejam satisfeitas no intervalo $[a, b]$. Depois, encontre para cada um deles o valor conveniente para c que satisfaça a conclusão do teorema.

4. Se $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, então $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$. Use o Teorema de Rolle para mostrar que a equação $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ possui pelo menos uma solução no intervalo $(0, 1)$.

5. Para as funções definidas em cada intervalo correspondente, determine quais hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas e quais, se existir alguma, não são satisfeitas. Para aquelas funções que satisfazem todas as hipóteses do Teorema de Rolle, determine um ponto do gráfico cuja reta tangente é paralela ao eixo x das abscissas.

   a) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}}$, $[0, 4]$;

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-5x+3}{x-1} \text{ se } x \neq 1 \\ -1 \text{ se } x = 1 \end{cases}$, $\left[1, \frac{5}{2}\right]$;

   c) $f(x) = \frac{x^2-x-12}{x-3}$, $[-3, 2]$.

6. A recíproca do Teorema de Rolle não é verdadeira. Em cada um dos itens abaixo, construa um exemplo satisfazendo a conclusão do teorema mas tal que:

   a) f não é contínua em $[a, b]$ mas é derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$;

   b) f é contínua em $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ mas f não é derivável em (a, b);

   c) f é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) mas $f(a) \neq f(b)$.

Desafio

Use o Teorema de Rolle para demonstrar que a equação $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ tem exatamente uma raiz no intervalo $(0, 1)$.

Auto-avaliação

Em todos os exercícios você deve demonstrar total domínio dos conceitos de continuidade e derivabilidade de funções pois, em cada um deles, você deve verificar a validade das hipóteses dos Teoremas vistos nesta aula. É também exigido de você a compreensão do significado dos Teoremas para poder aplicá-los; é o caso principalmente dos Exercícios 4,5, 6 e, também, do Desafio. Se você encontrar alguma dificuldade em qualquer um dos Exercícios de 1 a 6, releia esta aula com mais cuidado.

Aula 17 – Funções crescentes e decrescentes.

Referências: Aulas 9, 10, 11, 12 e 16.

Objetivo

Usar o conceito de derivada para compreender as propriedades de crescimento e decrescimento de funções.

A idéia de função crescente ou decrescente é bastante simples. Quando estamos percorrendo um determinado caminho numa montanha, nos deparamos com três tipos de percurso: o primeiro tipo de percurso é aquele que, ao ser percorrido, a altitude sempre aumenta, isto é, estamos sempre subindo; o segundo é aquele que, ao ser percorrido, a altitude é sempre constante, isto é, estamos caminhando horizontalmente em relação ao nível do mar; o terceiro é aquele cuja altitude sempre diminui, quando o percorremos, isto é, estamos sempre descendo. Se denotarmos por $f(x)$ a altitude do ponto x do percurso, podemos representar os três tipos de percurso pelo seguinte gráfico:

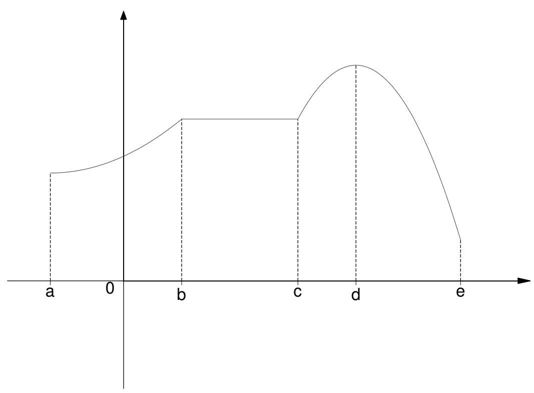


Figura 17.1

Note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in [a,b] \cup [c,d]$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, isto é, o gráfico de f entre a e b e entre c e d representa, cada um deles, um percurso do primeiro tipo. Por outro lado, para quaisquer $x_1, x_2 \in [d,e]$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, isto é, o gráfico de f entre d e e representa um percurso do terceiro tipo. Dizemos então que em $[a,b] \cup [c,d]$ a função f é crescente e que em $[d,e]$ a função f é decrescente.

De maneira geral, temos a seguinte definição:

Definição 17.1 Uma função f é dita crescente (respectivamente decrescente) num intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$) para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$.

Voltando ao gráfico da Figura 17.1, note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in [b, c]$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, neste intervalo o gráfico de f representa um percurso do segundo tipo. Concluímos, assim, que no intervalo $[a, d]$ a função f não decresce. Isso nos leva à seguinte definição:

Definição 17.2 Uma função f é dita não decrescente (respectivamente não crescente) no intervalo I se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Considere, agora, uma função f cujo gráfico tem reta tangente em todo ponto (ver a Figura 17.2). Observe que nos intervalos onde f é crescente, o coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico é sempre positivo. Analogamente, nos intervalos onde ela é decrescente, o coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico é sempre negativo.

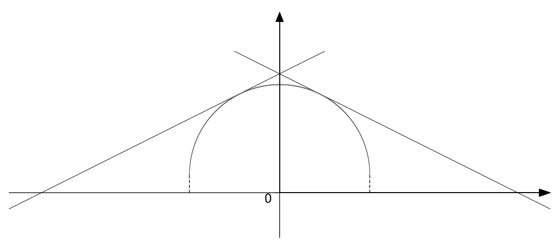


Figura 17.2

Já vimos, por outro lado, que se f é derivável num ponto x, então ela possui reta tangente ao gráfico no ponto $(x, f(x))$, e que o coeficiente angular dessa reta é o número $f'(x)$. Assim, se f é derivável num intervalo I e crescente em I, então $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Analogamente, se f é derivável num intervalo I e decrescente em I, então $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$. A proposição a seguir mostra que a recíproca destas afirmações também é verdadeira.

Proposição 17.1
Seja f uma função derivável num intervalo não trivial I. Então:

(a) *Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, f é constante em I.*

(b) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, f é crescente em I.*

(c) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, f é decrescente em I.*

Demonstração: Sejam x_1, x_2 dois pontos arbitrários de I com $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do valor médio, existe um ponto $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) .$$

Agora, se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, obtemos $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$, isto é, $f(x_1) = f(x_2)$. Como x_1 e x_2 são arbitrários, concluímos que f é constante em I, o que prova (a).

Suponha, agora, $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Assim, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ e, como $x_2 - x_1 > 0$, obtemos $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Sendo x_1 e x_2 arbitrários, concluímos que f é crescente em I, o que prova (b).

A demonstração de (c) é análoga $\Big($neste caso, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0\Big)$.

Corolário 17.1

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis num intervalo não trivial I tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$. Então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Consideremos a função $f - g$ que, como sabemos, é derivável em I. Como

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo $x \in I$, segue do item (a) da Proposição 17.1 que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) - g(x) = c$ para todo $x \in I$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 17.1

Vamos mostrar que

$$cos^2 x + sen^2 x = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, fato que você já estudou em Pré-Cálculo.

De fato, definamos $f(x) = cos^2 x + sen^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -2(cosx)(senx) + 2(senx)(cosx) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 17.1 (a), temos que a função f é constante. Como $f(0) = 1$, concluímos que $cos^2 x + sen^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 17.2

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Vamos determinar os intervalos onde f é crescente e aqueles onde f é decrescente.

Pela Proposição 17.1, f é crescente nos intervalos onde a derivada é positiva. Ora, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Conseqüentemente, $f'(x) > 0$ se $x^2 - 1 > 0$, ou seja, se $x < -1$ ou $x > 1$. Por outro lado, $f'(x) < 0$ se $-1 < x < 1$. Portanto, f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e f é decrescente em $(-1, 1)$.

Os dados acima nos permitem obter um esboço do gráfico de f. Com efeito, temos $f(-2) = -1$. Como f é crescente em $(-\infty, -1)$, para valores de x menores ou iguais a -2, o gráfico de f estará abaixo do eixo x das abscissas e "subindo" em direção ao ponto $(-2, -1)$. Sendo $f(-1) = 3$ e f ainda crescente no intervalo $(-2, -1)$, o gráfico continua "subindo"até o ponto $(-1, 3)$. Como $f(1) = -1$ e f é decrescente em $(-1, 1)$ fica claro que, neste intervalo, o gráfico "desce" do ponto $(-1, 3)$ ao ponto $(1, -1)$. Finalmente, como $f(2) = 3$ e f é de novo crescente em $(1, +\infty)$, a partir do ponto $(1, -1)$ o gráfico de f "sobe" indefinidamente.

Reunindo as informações acima, podemos, agora, esboçar o gráfico de f (ver a Figura 17.3).

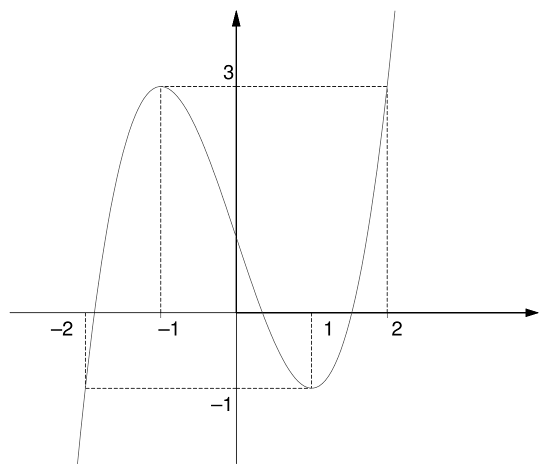


Figura 17.3

Exemplo 17.3

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 9 \text{ se } x \leq -2, \\ x^2 + 1 \text{ se } x > -2. \end{cases}$$

Vamos determinar os intervalos onde f é crescente e aqueles onde f é decrescente. De novo, com as informações obtidas, esboçaremos o gráfico de f.

Para $x < -2$, $f'(x) = 2$; e, para $x > -2$, $f'(x) = 2x$. Além disso, verifica-se que $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = 2$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = -4$. Portanto, f não é derivável em $x = -2$. Sendo a derivada de f positiva para $x < -2$, temos que f é crescente no intervalo $(-\infty, -2)$. Por outro lado, a derivada de f é negativa no intervalo $(-2, 0)$, zero em $x = 0$ e positiva no intervalo $(0, +\infty)$. Concluímos, assim, que f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e decrescente em $(-2, 0)$.

Já sabemos, pela própria definição de f, que seu gráfico no intervalo $(-\infty, -2]$ é uma reta. Sendo $f(-2) = 5$, $f(0) = 1$ e f decrescente em $(-2, 0)$, seu gráfico entre os pontos $(-2, 5)$ e $(0, 1)$ "desce", "subindo" indefinidamente a partir do ponto $(0, 1)$ (ver a Figura 17.4).

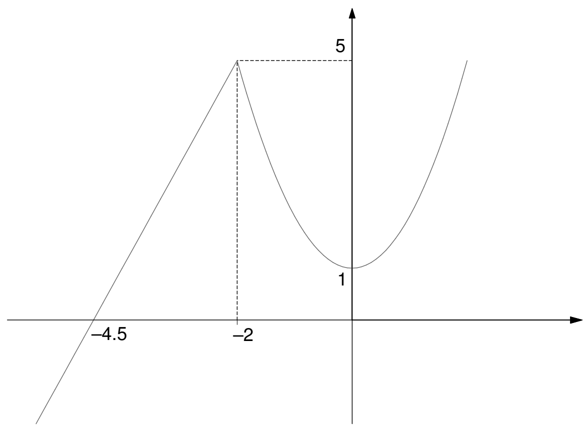


Figura 17.4

Exemplo 17.4

Considere a função

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}} .$$

Vamos determinar os intervalos onde f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Em seguida, esboçaremos o gráfico de f.

A função f não é derivável em $x = -1$ e $x = 2$. Para $x \neq -1$ e $x \neq 2$, temos $f'(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$, isto é, $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Desenvolvendo, obtemos:

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}} .$$

Sendo a derivada um quociente, seu sinal será aquele resultante do produto dos sinais do numerador, $x - 1$, e do denominador, $(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}$, nos intervalos onde a derivada existe. Além disso, como $f'(x) = 0$ somente para $x = 1$, é preciso também conhecer o sinal da derivada para valores menores do que 1 e para valores maiores do que 1. Devemos, assim, estudar os sinais de $x-1$ e $(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}$ nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, +\infty)$. Para facilitar nossa vida, elaboramos uma tabela como na Figura 17.5.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$	$+$	$-$	$+$	$+$

Figura 17.5

As colunas são separadas pelos pontos onde a derivada não existe e aqueles onde a derivada é zero, dispostos, da esquerda para a direita, em ordem crescente, ou seja, -1, 1 e 2. Na primeira coluna, colocamos nas linhas 1 e 2 as funções do numerador e do denominador, respectivamente; na segunda, os respectivos sinais do numerador e do denominador para valores menores do que -1; na terceira, os respectivos sinais no intervalo $(-1,1)$; na quarta, os respectivos sinais no intervalo $(1,2)$; e, na quinta, os sinais para os valores maiores do que 2. A última linha da tabela corresponde ao sinal resultante do produto dos sinais de $x-1$ e $(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}$, nos respectivos intervalos.

Claramente, $x-1<0$ equivale a $x<1$ e $x-1>0$ equivale a $x>1$. Agora, como $(x-2)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(x-2)^2}>0$ para todo $x\neq 2$, o sinal de $(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}$ fica determinado pelo sinal de $(x+1)^{\frac{1}{3}}$, daí o sinal negativo para valores de $x<-1$ e positivo para valores de $x>-1$.

Estamos, agora, aptos a esboçar o gráfico de f (ver a Figura 17.6).

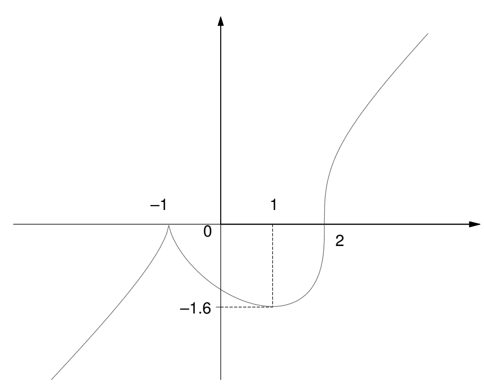


Figura 17.6

Exemplo 17.5

Seja f uma função derivável em todos os pontos, exceto em $x=-2$ e $x=2$, cuja derivada é $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$. Vamos determinar os intervalos onde f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Temos que $f'(x)=0$ para $x=-1$

e $x = 1$. Dispondo em ordem crescente os pontos onde f não é derivável e aqueles onde a derivada é zero vemos, como no exemplo anterior, que devemos estudar o sinal de f' nos intervalos, $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, +\infty)$. Analisando os sinais do numerador e do denominador temos: $x^2 - 1 > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $x^2 - 1 < 0$ para $x \in (-1, 1)$; $x^2 - 4 > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e $x^2 - 4 < 0$ para $x \in (-2, 2)$. Colocando essas informações na tabela (ver a Figura 17.7), concluímos que f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ e decrescente em $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

-2 -1 1 2

$x^2 - 1$	+	+	−	+	+
$x^2 - 4$	+	−	−	−	+
$\frac{x^2-1}{x^2-4}$	+	−	+	−	+

Figura 17.7

Até aqui usamos informações sobre o sinal da derivada de uma função para obter informações sobre seu crescimento ou decrescimento. Entretanto, o fato de uma função ser, por exemplo, crescente num intervalo I, não nos permite concluir de que maneira ela cresce. Isso fica mais claro no seguinte exemplo:

Exemplo 17.6

Sejam $f, g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos são como na Figura 17.8.

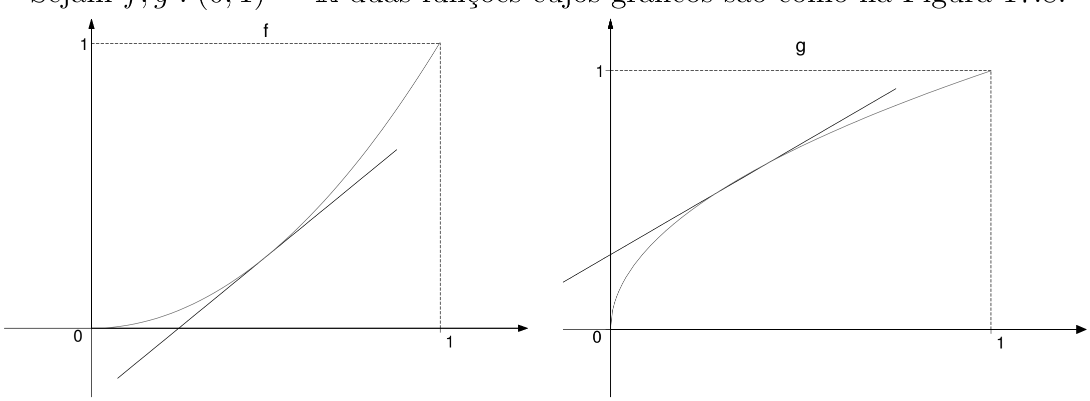


Figura 17.8

Ambas as funções são crescentes em $(0, 1)$. Entretanto, há uma diferença fundamental entre seus gráficos: para todo $x \in (0, 1)$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ está **sob** o gráfico de f ao passo que a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(x, g(x))$ está **sobre** o gráfico de g. Geometricamente, isto se reflete nos gráficos de f e g de maneira evidente.

Você deve neste momento estar se perguntando de que maneira pode ter certeza de que os esboços dos gráficos dos Exemplos 2, 3 e 4 são de fato aqueles indicados nas figuras. A resposta será dada na próxima aula, onde veremos rigorosamente como distinguir os dois comportamentos.

Resumo

Nesta aula estudamos, a partir do conceito de derivada, propriedades de crescimento e decrescimento de funções. Como vimos, essas informações são muito importantes para compreendermos o comportamento de funções, visando um esboço mais preciso de seu gráfico.

Exercícios

1. Para cada uma das funções abaixo, encontre os intervalos onde ela é crescente e aqueles onde ela é decrescente. Esboce o gráfico.

a) $f(x) = x^3 - 12x + 11$ b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

c) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$ d) $f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ f) $f(x) = x^{\frac{7}{5}} - 8x^{\frac{3}{5}}$

g) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ h) $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 \text{ se } x < 4, \\ 10 - 3x \text{ se } x \geq 4. \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3 \text{ se } x \leq 5, \\ \frac{1}{2}(x+7) \text{ se } x > 5. \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} \text{ se } x \leq 4, \\ 7 - x \text{ se } x > 4. \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x - 6 \text{ se } x \leq 6, \\ -\sqrt{4 - (x-8)^2} \text{ se } 6 < x \leq 10, \\ 20 - 2x \text{ se } x > 10. \end{cases}$

2. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Trace um esboço de um possível gráfico de f sabendo que: f é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$, exceto em $x = -3$ e $x = 1$; $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 1)$; $f'(x) > 0$ se $x \in (-3, 0) \cup (1, +\infty)$; $f'(0) = 0$.

3. Seja f uma função como no Exercício 2. Trace um possível esboço do gráfico de f em cada um dos seguintes casos, onde é satisfeita a seguinte condição adicional:

   (a) $f'(x) = -1$ se $x \in (-\infty, -3)$ e $f'(x) = 2$ se $x \in (1, +\infty)$;

   (b) $\lim\limits_{x \to -3^-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = 1$ e $f'(x) \neq f'(y)$ para $x \neq y$.

4. Prove que a composta de duas funções crescentes é uma função crescente, valendo o mesmo para funções decrescentes..

5. Seja f uma função crescente em I. Prove que: (a) Se $g(x) = -f(x)$, então g é decrescente em I; (b) Se $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ e $h(x) = \frac{1}{f(x)}$, então h é decrescente em I.

Auto-avaliação:

Em todos os exercícios, é exigido de você o perfeito entendimento da definição de função crescente e decrescente, principalmente nos de número 4 e 5. A realização dos exercícios de número 1 a 3 requer de você a compreensão da Proposição 17.1 para o estudo do comportamento de funções. Para isso, o domínio do estudo do sinal de funções em intervalos, e das regras de derivação, bem como a interpretação geométrica da derivada, são absolutamente necessários. Tendo alguma dificuldade na execução dos mesmos releia a aula e tente novamente. Permanecendo dúvidas, procure o tutor no pólo.

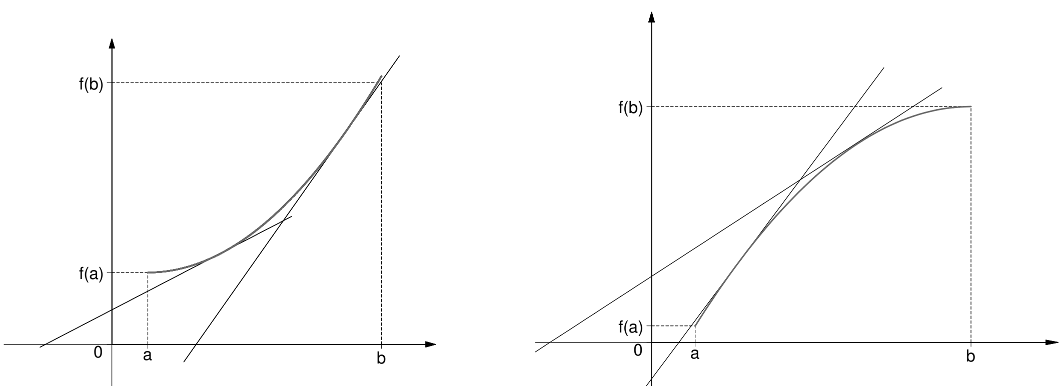
Aula 18 – Concavidade do gráfico de funções.

Referências: Aulas 9, 10, 11, 12, 16 e 17.

Objetivo

Usar a derivada segunda para identificar os diferentes tipos de comportamento de funções crescentes ou decrescentes.

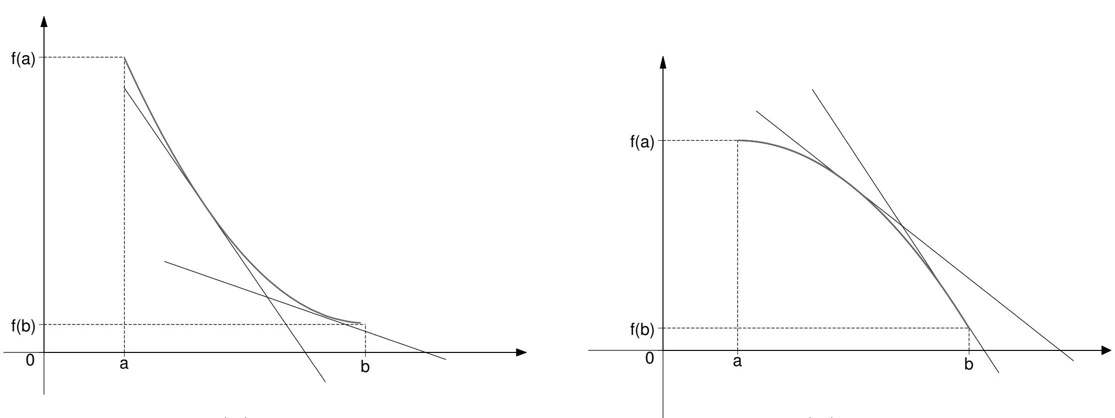
Ao final da aula 17 (Exemplo 17.6), chamamos sua atenção para o fato de que para uma função f crescente no intervalo I, temos duas possibilidades para o comportamento do seu gráfico entre dois de seus pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$: um, como na Figura 18.1a e, outro, como na Figura 18.1b.



(a) (b)

Figura 18.1

Analogamente, se f é decrescente em I, temos também as duas possibilidades de comportamento, indicadas nas Figuras 18.2a e 18.2b.



(a) (b)

Figura 18.2

Nesta aula, veremos que esses diferentes tipos de comportamento podem ser bem determinados a partir da compreensão do comportamento da derivada da função f.

Façamos, primeiramente, uma consideração de caráter puramente geométrico.

Observe que, nas situações das Figuras 18.1a e 18.2a, ao nos deslocarmos sobre o gráfico, de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, as retas tangentes giram no sentido anti-horário, enquanto nas situações das Figuras 18.1b e 18.2b, elas giram no sentido horário. Isso significa que, no primeiro caso, o coeficiente angular das retas tangentes aumenta à medida que nos deslocamos de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$; por outro lado, no segundo caso, ele diminui.

Agora, se f é derivável em I, sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em um ponto $(x, f(x))$ é $f'(x)$. Assim, dizer que o coeficiente angular das retas tangentes aumenta (respectivamente, diminui) quando nos deslocamos de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ equivale a dizer que a derivada f' é uma função crescente (respectivamente, decrescente) em (a, b).

De maneira geral temos a seguinte definição:

Definição 18.1 Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I. Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para cima** em I se a derivada f' é uma função crescente em I; e tem **concavidade para baixo** em I se a derivada f' é uma função decrescente em I.

Antes de prosseguir, vejamos um exemplo simples que nos permite fixar o conceito de concavidade.

Exemplo 18.1

Considere as duas funções crescentes $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. As duas funções são deriváveis em $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Como para quaisquer x_1, $x_2 \in (0, +\infty)$ com $x_1 < x_2$, $f'(x_1) < f'(x_2)$ e $g'(x_1) > g'(x_2)$, temos que f' é crescente em $(0, +\infty)$ e g' é decrescente em $(0, +\infty)$.

Assim, f tem concavidade para cima em $(0, +\infty)$ e g tem concavidade para baixo em $(0, +\infty)$, sendo seus gráficos como na Figura 18.3.

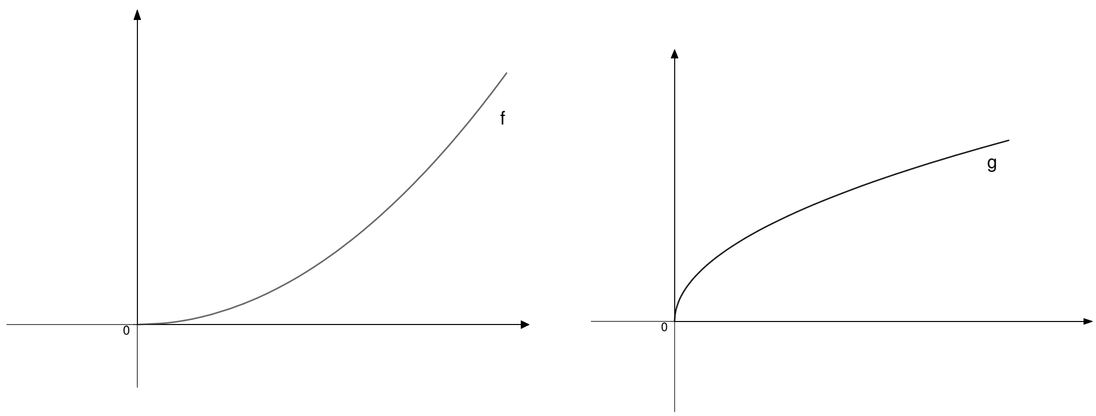


Figura 18.3

Vimos, na aula 17, que os sinais da derivada determinam os intervalos onde uma função é crescente ou decrescente. Suponha então que uma função f definida em um intervalo aberto I é tal que sua derivada f' é derivável em I. Neste caso dizemos que f é *duas vezes derivável em* I e denotamos por f'' a derivada da função f', chamada *derivada segunda de* f. Os sinais de f'' em I determinam então, em quais intervalos f' é crescente e em quais ela é decrescente e, portanto, determinam em quais intervalos o gráfico de f tem concavidade para cima e em quais ele tem concavidade para baixo.

Temos, assim, a seguinte proposição:

Proposição 18.1
Seja f uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I.

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, o gráfico de f tem concavidade para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.

No Exemplo 18.1, $f''(x) = 2 > 0$ para $x \in (0, +\infty)$ e $g''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$ para $x \in (0, +\infty)$, mostrando que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(0, +\infty)$ e o gráfico de g tem concavidade para baixo em $(0, +\infty)$.

Exemplo 18.2

Considere a função $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$ do Exemplo 17.4. A função f só não é derivável em $x = -1$ e $x = 2$, e sua derivada para $x \neq -1$ e $x \neq 2$ é $f'(x) = \frac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$. Vimos que f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 1)$. Vamos, agora, estudar a concavidade do gráfico de f. Por propriedades de funções deriváveis, f' é derivável em $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{(x-2)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}\left(1-(x-1)\left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(x-2)}\right)\right)}{(x-2)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{1-\frac{x-1}{3(x+1)} - \frac{2(x-1)}{3(x-2)}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{-6}{3(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}$$

Para estudar o sinal de f'', utilizamos, como na aula anterior, o auxílio da tabela de sinais (ver a Figura 18.4).

	-1		2
-6	−	−	−
$3(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}$	−	−	+
$\frac{-6}{3(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}}$	+	+	−

Figura 18.4

Pela Proposição 18.1, concluímos que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty,-1)\cup(-1,2)$ e concavidade para baixo em $(2,+\infty)$.

Você pode, agora, conferir o esboço do gráfico indicado na Figura 17.6.

Exemplo 18.3

Considere a função $f(x)=x+\frac{1}{x}$, definida para $x\neq 0$. Vamos determinar os intervalos onde f é crescente, aqueles onde ela é decrescente, os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima, e aqueles onde o gráfico de f tem concavidade para baixo.

A função f é derivável em todo ponto $x\neq 0$ e $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. Colocando em ordem crescente os pontos onde a derivada se anula, devemos estudar o sinal de f' nos intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,+\infty)$.

A tabela de sinais de f' (Figura 18.5) nos mostra que f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

-1 0 1

$x^2 - 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-1}{x^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Figura 18.5

Para estudar a concavidade, observe primeiro que $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ para todo $x \neq 0$. Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ e $f''(x) > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$, concluímos que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(0, +\infty)$ e concavidade para baixo em $(-\infty, 0)$.

Você deve também observar que $f(x) < 0$ se $x < 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$. Além disso, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f, visto que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Agora, vamos reunir todas as informações obtidas, para esboçar o gráfico de f.

Assíntotas verticais: aula 5; assíntotas horizontais: aula 8.

A função f assume valores negativos para $x < 0$; ela é crescente em $(-\infty, -1)$, $f(-1) = -2$ e seu gráfico tem concavidade para baixo nesse intervalo. No intervalo $(-1, 0)$ ela é decrescente, seu gráfico também tem concavidade para baixo e a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Concluímos, portanto, que no intervalo $(-\infty, 0)$ o gráfico de f é como indicado na Figura 18.6.

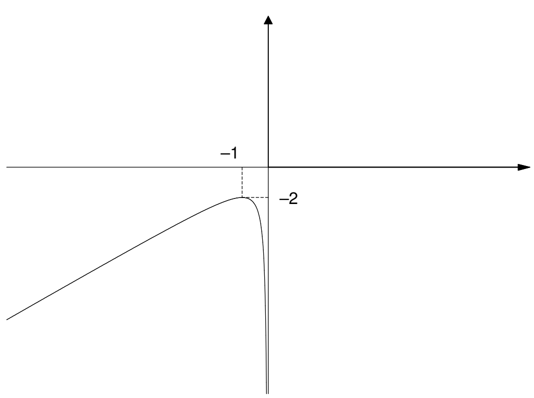


Figura 18.6

A função f assume valores positivos para $x > 0$; ela é decrescente em $(0, 1)$, $f(1) = 2$, ela é crescente em $(1, +\infty)$ e seu gráfico tem concavidade para cima em $(0, +\infty)$. Temos, portanto, que o gráfico de f é como na Figura 18.7.

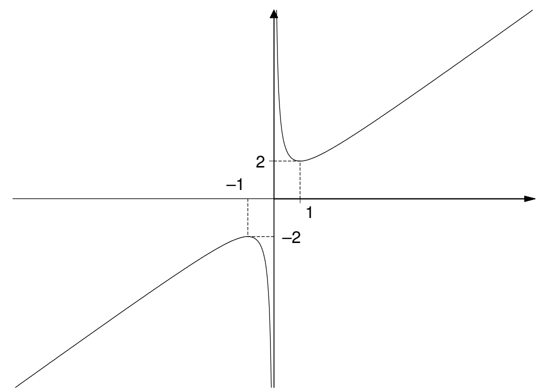


Figura 18.7

Exemplo 18.4

Considere a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Sendo f uma função polinomial, ela é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; logo, $f'(1) = f'(3) = 0$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (1, 3)$, f é crescente em $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ e decrescente em $(1, 3)$. Agora, f' é derivável e sua derivada é $f''(x) = 6x - 12$. Como $f''(x) < 0$ se $x < 2$ e $f''(x) > 0$ se $x > 2$, o gráfico de f tem concavidade para baixo em $(-\infty, 2)$ e concavidade para cima em $(2, +\infty)$.

Dispondo as informações obtidas nas respectivas tabelas de sinais de f' e f'', como indicado na Figura 18.8,

	1	2	3	
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Figura 18.8

Podemos, agora, esboçar o gráfico de f (ver a Figura 18.9).

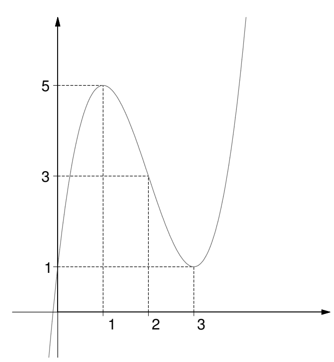


Figura 18.9

Você deve ter notado que o ponto $(2,3)$, do gráfico do Exemplo 18.4, tem uma certa particularidade; antes dele, o gráfico de f tem concavidade para baixo e, após ele, o gráfico de f tem concavidade para cima. De outra maneira, podemos dizer que o ponto $(2,3)$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico. O mesmo ocorre com o ponto $(2,0)$, do Exemplo 18.2, só que, neste caso, antes dele o gráfico de f tem concavidade para cima e, após ele, o gráfico de f tem concavidade para baixo. Estes pontos são denominados *pontos de inflexão* e serão estudados em detalhe na próxima aula.

Exemplo 18.5

Considere a função $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos fazer o estudo do crescimento e decrescimento da função f e da concavidade de seu gráfico.

Derivando e simplificando, obtemos $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^4}$. Como o denominador é positivo para qualquer valor de x, o sinal de f' fica determinado pelo sinal do numerador, $-2x^2+2$. Assim, $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ se $x \in (-1,1)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Concluímos, portanto, que f é crescente em $(-1,1)$ e decrescente em $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

A função f' é derivável em todo ponto e

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2+1)^4(-4x) - (-2x^2+2)4(x^2+1)^3 2x}{(x^2+1)^8} = \\
&= \frac{(x^2+1)(-4x) - (-2x^2+2)8x}{(x^2+1)^5} = \\
&= \frac{12x^3 - 20x}{(x^2+1)^5}.
\end{aligned}
$$

O sinal de f'' é determinado pelo sinal do numerador, ou seja, $x(12x^2 - 20)$. Os valores para os quais o numerador se anula são $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Dispondo esses valores em ordem crescente na tabela de sinais (ver a Figura 18.10), concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $\big(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}\big) \cup \big(0, \sqrt{\frac{5}{3}}\big)$ e concavidade para cima em $\big(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0\big) \cup \big(\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\big)$.

$-\sqrt{\frac{5}{3}}$ $\qquad\qquad$ 0 $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{5}{3}}$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$12x^2 - 20$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Figura 18.10

Para esboçar o gráfico de f, necessitamos de mais algumas informações. Observe que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ somente se $x = -1$. Temos também, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$, ou seja, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

Vamos, agora, reunir as informações obtidas para esboçar o gráfico de f: f é decrescente em $(-\infty, -1)$, $f(-1) = 0$ e f é crescente em $(-1, 1)$. Seu gráfico tem concavidade para baixo em $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ e concavidade para cima em $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0\right)$. No intervalo $(-\infty, 0]$ o gráfico de f é, então, como na Figura 18.11.

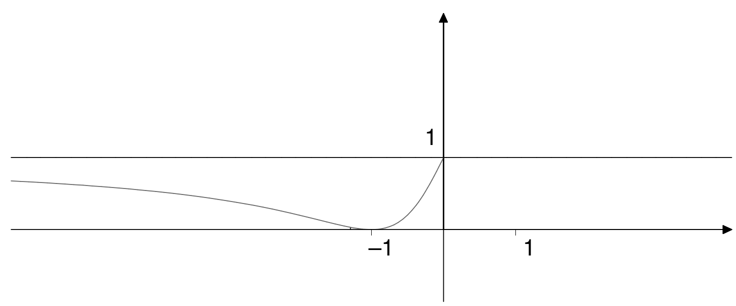


Figura 18.11

A função f é decrescente em $(1, +\infty)$, $f(1) = 2$, o gráfico de f tem concavidade para baixo em $\left(0, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ e concavidade para cima em $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$. O esboço do gráfico de f é, então, como indicado na Figura 18.12.

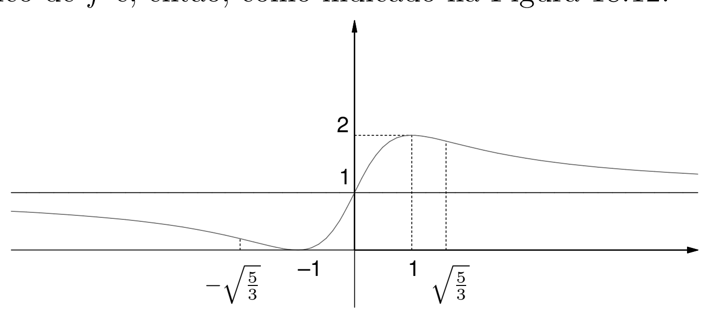


Figura 18.12

Você deve ter observado que, para esboçar o gráfico de uma função f, temos até agora quatro etapas a considerar:

1) determinar, caso existam, os pontos de descontinuidade de f;

2) determinar, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de f;

3) fazer o estudo do sinal de f';

4) fazer o estudo do sinal de f''.

É importante ressaltar que para o estudo de sinais de f' (respectivamente, f'') utiliza-se a tabela de sinais, onde dispomos em ordem crescente os pontos onde f' (respectivamente, f'') não existe e aqueles onde f' (respectivamente, f'') se anula para, em seguida, determinarmos o sinal de f' (respectivamente, f'') nos intervalos determinados por tais pontos.

Resumo

Nesta aula você aprendeu como calcular a derivada segunda de uma função e como essa pode contribuir para o estudo da concavidade de seu gráfico.

Exercícios

1. Para cada uma das funções abaixo determine:

   (i) os intervalos onde ela é crescente e aqueles onde ela é decrescente;

   (ii) os intervalos onde o gráfico tem concavidade para cima e aqueles onde a concavidade é para baixo.

   Finalmente, faça o esboço do gráfico.

   (a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ (b) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$

   (d) $f(x) = x^{\frac{7}{5}} - 8x^{\frac{3}{5}}$ (e) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 12$

   (f) $f(x) = x^2(12 - x^2)$ (g) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ (h) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

   (i) $f(x) = x^2(x+4)^3$ (j) $f(x) = 3x^5 + 5x^4$ (k) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$

   (l) $f(x) = \begin{cases} -x^3 \text{ se } x < 0 \\ x^3 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ (m) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^3 \text{ se } x < 1 \\ (x-1)^3 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$

2. Em cada um dos itens abaixo, esboce o gráfico de uma função contínua com as propriedades indicadas.

   (a) $f(-1) = -2,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(3) = 0,\ f(4) = 1,\ f(x) < 0$ se $x < 0,\ f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3),\ f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 1) \cup (3, +\infty),\ f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, \frac{3}{2}) \cup (4, +\infty)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (-\frac{3}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, 4)$.

   (b) $f(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty),\ f(0) = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0,$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty,$ $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty),\ f'(x) < 0$ se $x \in (-2, 1) \cup (1, 2),$ $f''(x) < 0$ se $x \in (0, 1)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$.

3. Na Figura 18.13 quatro gráficos de funções são apresentados, todas elas definidas no intervalo $[a, e]$. Em cada caso, o intervalo $[a, e]$ está dividido em quatro subintervalos $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$ e $[d, e]$. Suponha que as funções que eles representam são duas vezes deriváveis no interior de cada subintervalo. Determine em quais destes intervalos

   (i) a função dada é crescente;

   (ii) a função dada é decrescente;

   (iii) o gráfico tem concavidade para cima;

   (iv) o gráfico tem concavidade para baixo.

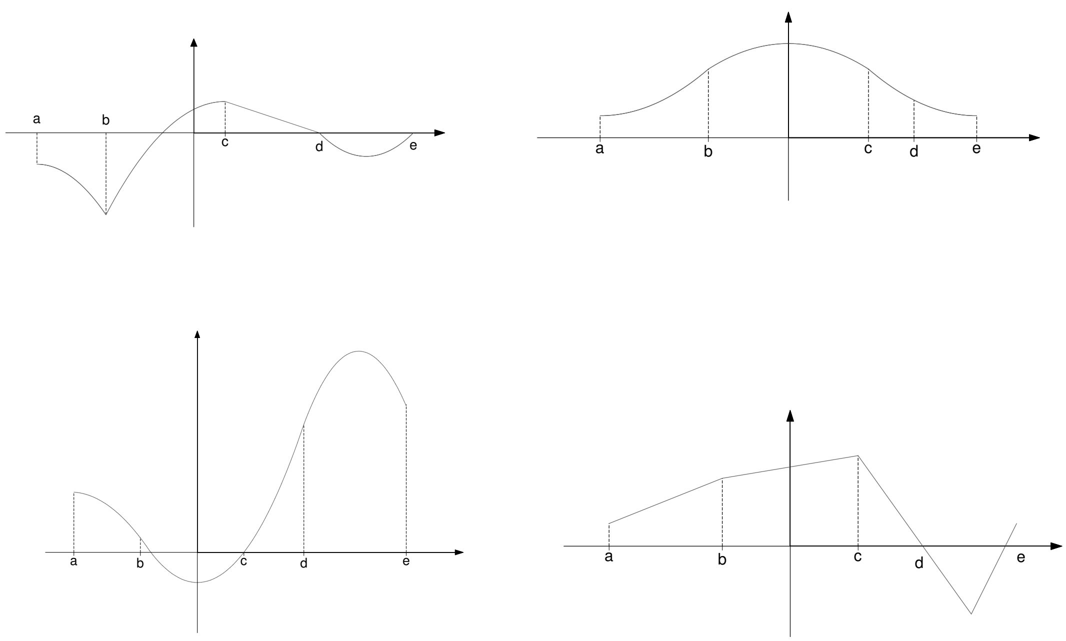


Figura 18.13

4. Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Suponha que em I o gráfico de f tem concavidade para cima (segundo a Definição 18.1). Mostre que se $a, b \in I$ e $a < b$, então $f(b) > f(a) + f'(a)(b - a)$.

   Sugestão: use o Teorema do valor médio (aula 16).

Desafio

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Suponha que o gráfico de f tem concavidade para cima em I. Prove que para quaisquer $a, b \in I$ tem-se $f(ta + (1 - t)b) < tf(a) + (1 - t)f(b)$ para todo $t \in (0, 1)$.

Auto-avaliação

Nos Exercícios 1, 2 e 3, você deve mostrar que realmente absorveu os conceitos envolvidos na aula anterior e nesta aula. Neles, como nos exercícios da aula 17, você deve dominar o estudo do sinal de funções. Não prossiga para a aula seguinte caso tenha dificuldade nesses exercícios. O exercício de número 4 e o Desafio são mais sutis mas devem ser tentados com empenho.

Aula 19 – Pontos de inflexão. Derivadas de ordem superior.

Objetivo

Usar o conceito de derivada para identificar os pontos onde ocorrem mudanças de concavidade no gráfico de uma função.

Chamamos sua atenção, na aula 18, para os pontos do gráfico de uma função onde ocorrem mudanças de concavidade.

Referências: Aulas 9, 10, 11, 12, 16, 17 e 18.

Veremos que tais pontos podem ter características distintas e estaremos interessados apenas naqueles onde o gráfico possui reta tangente. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 19.1

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 1, \\ -2x^2 + 3 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$$

O gráfico de f é como na Figura 19.1.

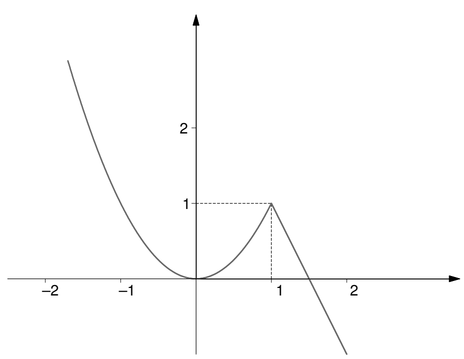


Figura 19.1

Note que $f''(x)$ existe para todo $x \neq 1$, $f''(x) = 2 > 0$ se $x < 1$ e $f''(x) = -4 < 0$ se $x > 1$. Assim, o ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico de f.

Agora, como

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(-2x^2+3)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2(x+1)(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} -2(x+1) = -4,$$

temos que f não é derivável em $x=1$. O fato dos dois limites laterais acima serem distintos, nos mostra, além da não derivabilidade de f no ponto 1, a inexistência de reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$. Assim, o ponto $(1,1)$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico de f, mas neste ponto ele não possui reta tangente.

Lembramos que se f é derivável num ponto c, então seu gráfico possui reta tangente em $(c, f(c))$. Entretanto, a recíproca é falsa, isto é, o gráfico de uma função pode possuir reta tangente em um ponto $(c, f(c))$ de seu gráfico sem, no entanto, a função ser derivável em c. É exatamente o caso do Exemplo 19.2.

Vejamos, agora, um exemplo de um ponto $(c, f(c))$ onde o gráfico de f muda de concavidade, f não é derivável em c, mas seu gráfico possui reta tangente em $(c, f(c))$.

Exemplo 19.2

Considere a função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Para $x \neq 0$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{\frac{5}{3}}$. Assim, $f''(x) < 0$ se $x \in (0,+\infty)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0)$, ou seja, o ponto $(0,0)$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico de f.

Agora,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty,$$

mostrando que f não é derivável em $x=0$. Por outro lado, você pode ver que o fato dos limites laterais $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ coincidirem e serem iguais a $+\infty$, significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0)$ é a reta vertical $x=0$. Assim, o ponto $(0,0)$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico de f, o qual admite reta tangente no ponto (0,0) (ver a Figura 19.2).

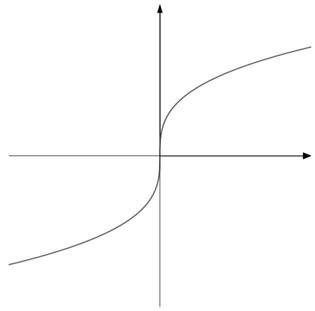


Figura 19.2

No exemplo a seguir, o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico de f tal que f é derivável em $x = c$.

Exemplo 19.3

Considere a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, do Exemplo 18.4. Como $f''(x) = 6x - 12$, temos que $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, 2)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (2, +\infty)$, ou seja, o ponto $(2, 3)$ é um ponto de mudança de concavidade do gráfico de f. Sendo f derivável em todo ponto, seu gráfico possui, em particular, reta tangente no ponto $(2, 3)$.

Os exemplos acima motivam a seguinte definição:

Definição 19.1 Seja f uma funcão derivável em um intervalo aberto I contendo c, exceto possivelmente em $x = c$. O ponto $(c, f(c))$ é dito um **ponto de inflexão do gráfico de** f se o gráfico de f possui reta tangente em $(c, f(c))$ e se existem $a, b \in I$, com $a < c < b$, tais que:

(a) $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$

ou

(b) $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f''(x) > 0$ para todo $x \in (c, b)$.

Você pode constatar, a partir da Definição 19.1, que o ponto $(1, 1)$ do Exemplo 19.1 não é um ponto de inflexão pois, embora seja um ponto de mudança de concavidade (satisfaz (a)), ele é um ponto onde o gráfico não admite reta tangente.

No dicionário de Antônio Houaiss, ele se utiliza de uma citação para exemplificar o significado literário de ponto de inflexão. A citação diz: "Antes de atingir a foz, o rio inflectía-se no rumo oeste". Vemos aqui, que é como se o rio mudasse suavemente de direção rumo à oeste. Podemos, de fato, perceber uma certa semelhança com o conceito matemático de ponto de inflexão, sendo este último mais preciso, como veremos ao longo da aula.

Você deve ter notado também que, na definição de ponto de inflexão, nada é dito a respeito da derivada segunda de f no ponto c. Veja que, no Exemplo 19.2, $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, mas $f''(0)$ não existe. Já no Exemplo 19.3, $(2, 3)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f, $f''(2)$ existe e $f''(2) = 0$.

A proposição a seguir, mostra que o que ocorre no Exemplo 19.3 não é uma mera coincidência.

Proposição 19.1

Se $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de uma função f e, se além disso, $f''(c)$ existe, então $f''(c) = 0$.

Demonstração: Considere a função $g(x) = f'(x)$. Por definição de ponto de inflexão, existem $a, b \in I$, com $a < c < b$, tais que ou (a) ou (b) é satisfeito. Faremos o caso em que (a) é satisfeito; o outro caso é análogo. Como $g'(x) = f''(x)$, temos por (a) que g é crescente em (a, c) e decrescente em (c, b).

Por outro lado, $f''(c)$ existe, por hipótese e, por definição,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Agora, se $x \in (a, c)$, $g(x) - g(c) < 0$, donde $\frac{g(x)-g(c)}{x-c} > 0$. Concluímos, assim, que $f''(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \geq 0$. Para $x \in (c, b)$, ao contrário, $\frac{g(x)-g(c)}{x-c} < 0$, donde concluímos que $f''(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \leq 0$. Portanto, $f''(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

É importante notar que a recíproca da proposição é falsa, isto é, se a derivada segunda de uma função é zero em um ponto c, não é necessariamente verdadeiro que $(c, f(c))$ seja um ponto de inflexão. Vejamos um exemplo:

Exemplo 19.4

A função $f(x) = x^4$ satisfaz $f''(0) = 0$, mas $f''(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Assim $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão, pois não é um ponto de mudança de concavidade.

Por outro lado, se $f''(c)$ existe e $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < c < b$ e $f''(x)$ tem sinais distintos em (a, c) e (c, b), então $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão. Com efeito, por hipótese, f'' satisfaz (a) ou (b) da Definição 19.1. Como $f''(c)$ existe, temos que $f'(c)$ também existe; logo, o gráfico de f possui reta tangente em $(c, f(c))$, o que mostra a afirmação. Em particular, pela Proposição 19.1, $f''(c) = 0$. Concluímos, assim, que para determinar os pontos de inflexão de uma função duas vezes derivável em um intervalo I, basta determinar os pontos $c \in I$ que satisfazem $f''(c) = 0$ e verificar se existem $a, b \in I$, com $a < c < b$, tais que $f''(x)$ possua sinais distintos em (a, c) e (c, b).

Exemplo 19.5

Considere a função $f(x) = (1 - 4x)^3$. Temos $f'(x) = -12(1 - 4x)^2$ e $f''(x) = 96(1 - 4x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, f é decrescente em $\mathbb{R}$, e como $f''(\frac{1}{4}) = 0$, $f''(x) > 0$ se $x \in (-\infty, \frac{1}{4})$ e $f''(x) < 0$ se $x \in (\frac{1}{4}, +\infty)$, concluímos que o ponto $(\frac{1}{4}, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f (ver a Figura 19.3).

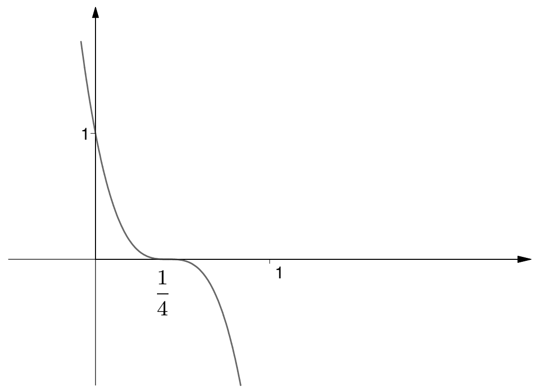


Figura 19.3

Derivadas de ordem superior

Vimos na aula anterior e na primeira parte desta aula, o interesse da derivada segunda f'' de uma função f para o estudo do comportamento de seu gráfico. Em alguns exemplos, observamos que o fato da derivada primeira $f'(t)$ existir, para t em um intervalo não trivial contendo x, não garante a existência da derivada de f' em x, $f''(x)$, dita a *derivada de segunda ordem de f em x*. Quando $f''(x)$ existe, dizemos que f *é duas vezes derivável em x*. Analogamente, se $f''(t)$ existe para t em um intervalo não trivial contendo x, podemos estudar a derivabilidade de f'' em x. Quando f'' é derivável em x, dizemos que f *é três vezes derivável em x* e denotamos por $f'''(x)$ a derivada de f'' em x, usualmente chamada a *derivada de terceira ordem de f em x*. Em geral, se n é um inteiro positivo tal que $f^{(n-1)}(t)$ existe para t em um intervalo não trivial contendo x, podemos estudar a derivabilidadede $f^{(n-1)}$ em x. Quando $f^{(n-1)}$ é derivável em x, dizemos que f *é n vezes derivável em x* e denotamos por $f^{(n)}(x)$ a derivada de $f^{(n-1)}$ em x, usualmente chamada a *derivada de ordem n de f em x*.

A função $f^{(n)}$, que a cada x associa o número real $f^{(n)}(x)$ (definida no conjunto dos x para os quais $f^{(n)}(x)$ existe), é dita a *derivada de ordem n* de f. No caso em que $n = 2$, $f^{(2)}$ é dita a derivada segunda de f e, no caso em que $n = 3$, $f^{(3)}$ é dita a derivada terceira de f.

Exemplo 19.6

Considere a função $f(x) = x^6 + 2x^4 - x^3 + 2x + 1$. Note que $f^{(n)}(x)$ existe para todo inteiro positivo n e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= f'(x) = 6x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 2, \\ f^{(2)}(x) &= f''(x) = 30x^4 + 24x^2 - 6x, \\ f^{(3)}(x) &= f'''(x) = 120x^3 + 48x - 6, \\ f^{(4)}(x) &= 360x^2 + 48, \\ f^{(5)}(x) &= 720x, \\ f^{(6)}(x) &= 720\ . \end{aligned}$$

Como $f^{(6)}$ é uma função constante, temos

$$\begin{aligned} f^{(7)}(x) &= 0, \\ f^{(8)}(x) &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou seja, $f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \geq 7$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 19.7

Considere a função $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, definida para $x \neq 1$. Vamos determinar $f'(0)$, $f''(2)$, $f'''(0)$.

Realmente, para todo $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{-2}{(x-1)^2}, \\ f''(x) &= \tfrac{4}{(x-1)^3}, \end{aligned}$$

e

$$f'''(x) = \frac{-12}{(x-1)^4}\ .$$

Assim, $f'(0) = -2$, $f''(2) = 4$ e $f'''(0) = -12$.

Uma outra notação utilizada para derivadas de ordem superior é a notação de Leibniz: Se f é uma função da variável x, a derivada de primeira ordem é denotada por $\frac{df}{dx}$, a de segunda ordem por $\frac{d^2f}{dx^2}$ e a derivada de ordem n é denotada por $\frac{d^nf}{dx^n}$.

Na aula 13, você aprendeu a derivar funções que são definidas implicitamente. O exemplo seguinte ilustra como encontrar derivadas de ordem superior para funções definidas implicitamente.

Exemplo 19.8

Seja y uma função da variável x, duas vezes derivável, $y > 0$, definida implicitamente por $3x^2 + 4y^2 = 9$. Vamos determinar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Derivando implicitamente, temos

$$6x + 8y\frac{dy}{dx} = 0,$$

de maneira que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x}{8y}.$$

Para determinarmos $\frac{d^2y}{dx^2}$ devemos encontrar a derivada de um quociente, tendo em mente que y é uma função de x. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{8y(-6) - (-6x)\left(8\frac{dy}{dx}\right)}{64y^2} = \\
&= \frac{-48y - (-48x)\left(\frac{-6x}{8y}\right)}{64y^2} = \\
&= \frac{-48y - \left(\frac{36x}{y}\right)}{64y^2} = \\
&= \frac{-48y^2 - 36x}{64y^3} .
\end{aligned}$$

Resumo

Nesta aula, você aprendeu o conceito de ponto de inflexão do gráfico de uma função, e como determiná-los. Em seguida, você aprendeu como a operação de derivação pode ser realizada repetidas vezes.

Exercícios

1. Para cada função abaixo, determine onde ela é crescente, onde é decrescente, onde o gráfico da função é côncavo para cima, onde é côncavo para baixo e encontre, se existirem, os pontos de inflexão. Esboce o gráfico.

   (a) $f(x) = x^3 + 7x$

   (b) $g(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 7x + 2$

   (c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$

   (d) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

   (e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

   (f) $g(x) = (x-2)^{\frac{1}{5}}$

   (g) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 0 \\ -x^2 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

   (h) $g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 1 \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 3 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$

2. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine a, b e c tais que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$ e tais que o coeficiente angular da reta tangente neste ponto seja -2.

3. Em cada item abaixo, trace o esboço da parte do gráfico de uma função f que passe pelo ponto $(c, f(c))$ e satisfaça a condição dada. Se as condições forem incompletas ou inconsistentes, explique porque. Supõe-se sempre que f seja contínua em um intervalo aberto contendo c.

   (a) $f^{'}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{'}(x) < 0$ se $x > c$; $f^{''}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{''}(x) < 0$ se $x > c$.

   (b) $f^{'}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{'}(x) > 0$ se $x > c$; $f^{''}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{''}(x) < 0$ se $x > c$.

   (c) $f^{''}(c) = 0$; $f^{'}(c) = 0$; $f^{''}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{''}(x) > 0$ se $x > c$.

   (d) $f^{'}(c) = 0$; $f^{'}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{''}(x) > 0$ se $x > c$.

   (e) $f^{''}(c) = 0$; $f^{'}(c) = \frac{1}{2}$; $f^{''}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{''}(x) < 0$ se $x > c$.

   (f) $f^{'}(c)$ não existe; $f^{''}(x) > 0$ se $x < c$; $f^{''}(x) > 0$ se $x > c$.

4. Encontre as derivadas primeira e segunda de cada uma das funções abaixo.

   (a) $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9$ (b) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

   (c) $f(t) = (2t^3 + 5)^{\frac{1}{3}}$ (d) $g(y) = \frac{2-\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}}$

   (e) $f(x) = xsen(x^2 + x + 3) + \frac{1}{x}$ (f) $f(x) = \frac{xsenx}{x+1}$.

5. Sabendo que $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{2}} = 6$, encontre $\frac{d^3y}{dx^3}$.

6. Encontre $\frac{d^2y}{dx^2}$, onde y é dada implicitamente por $x^3 + y^3 = 1$.

7. Encontre $f^{'}(x)$, $f^{''}(x)$ e estabeleça os domínios de $f^{'}$ e $f^{''}$ para

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Auto-avaliação

Se você compreendeu o conceito de ponto de inflexão e, portanto, domina as relações entre derivabilidade de uma função em um ponto e a existência de reta tangente ao gráfico da função, você não terá dificuldade para resolver os exercícios de números 1, 2 e 3. Os exercícios restantes só exigem o domínio das técnicas de derivação.

Aula 20 – Exercícios resolvidos.

Objetivos

Fixar os conceitos vistos até agora, visando o esboço do gráfico de funções.

Referências: Aulas 5, 6, 8, 16, 17, 18 e 19.

Até agora, aprendemos vários conceitos e técnicas que são fundamentais para o esboço do gráfico de funções, a saber:

(i) continuidade,

(ii) assíntotas verticais e horizontais,

(iii) crescimento e decrescimento de funções,

(iv) concavidade do gráfico de funções e

(v) pontos de inflexão.

Nesta aula, vamos utilizar todo este ferramental para esboçar o gráfico de funções. Em cada um dos exercícios estudaremos, um a um, os conceitos listados acima para, em seguida, esboçar o gráfico da função.

Exercício 1: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 \text{ se } x \leq 0, \\ -\frac{1}{x} \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

Solução: (i) Continuidade de f. Como $p(x) = x^2+2x+3$ é um polinômio e $\frac{1}{x}$ é contínua em $(0, +\infty)$, f é contínua em todo ponto $x \neq 0$. Vamos, então, estudar a continuidade de f em $x = 0$. Para isso, devemos determinar os limites laterais em $x = 0$.

Ora,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + 3) = 3$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Concluímos, então, que não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ e, portanto, f não é contínua em $x = 0$.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

Acabamos de ver que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

ou seja, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f. Como para todo ponto $a \neq 0$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, a reta $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Para as assíntotas horizontais devemos determinar os limites no infinito. Como

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(x^2 + 2x + 3) = \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0,$$

temos que a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal ao gráfico de f.

(iii) Crescimento e decrescimento de f.

A função f só não é derivável em $x = 0$, $f^{'}(x) = 2x+2$ para $x \in (-\infty, 0)$ e $f^{'}(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \in (0, +\infty)$. Assim, $f^{'}(x) > 0$ se $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ e $f^{'}(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1)$, ou seja, f é crescente em $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ e decrescente em $x \in (-\infty, -1)$.

(iv) Concavidade do gráfico de f.

Podemos observar do item (iii) que f é duas vezes derivável em todo $x \neq 0$, $f^{''}(x) = 2$ se $x \in (-\infty, 0)$ e $f^{''}(x) = -\frac{2}{x^3}$ se $x \in (0, +\infty)$. Assim, $f^{''}(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0)$ e $f^{''}(x) < 0$ se $x \in (0, +\infty)$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty, 0)$ e concavidade para baixo em $(0, +\infty)$.

(v) Pontos de inflexão.

Como $f^{''}$ só muda de sinal em $x = 0$, o ponto $(0, f(0))$ seria o único candidato a ponto de inflexão do gráfico de f. Entretanto, f não é sequer contínua em $x = 0$, logo o gráfico de f não possui reta tangente em $(0, f(0)) = (0, 3)$. Assim, concluímos que o gráfico de f não possui pontos de inflexão.

Reunindo todas as informações obtidas, podemos, agora, esboçar o gráfico (ver a Figura 20.1).

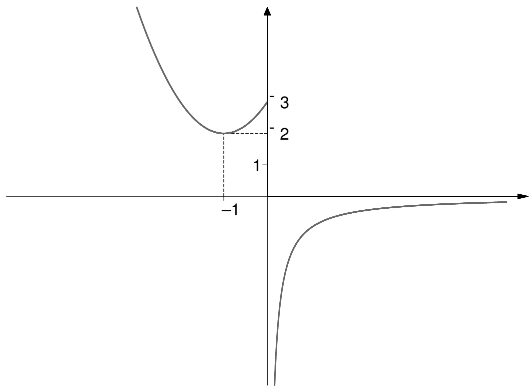


Figura 20.1

Exercício 2: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 1, \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 3 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$

Solução: (i) Continuidade de f.

Sendo $p(x) = x^2$ contínua em $(-\infty, 1)$ e $h(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ contínua em $(1, +\infty)$, a função f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Resta, portanto, analisar a continuidade de f em $x = 1$. Para isso, devemos determinar os limites laterais em $x = 1$.

Ora,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 - 4x^2 + 7x - 3) = 1.$$

Assim, existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$, donde concluímos que f é contínua em $x = 1$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Assim, o gráfico de f não possui assíntota vertical.

Agora, visto que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 7x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, vemos que o gráfico de f não possui assíntota horizontal.

(iii) Crescimento e decrescimento de f.

Vemos, claramente, que f é derivável em $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, sendo $f'(x) = 2x$ se $x \in (-\infty, 1)$ e $f'(x) = 3x^2 - 8x + 7$ se $x \in (1, +\infty)$. Resta, portanto, analisar a derivabilidade de f em $x = 1$. Calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^3 - 4x^2 + 7x - 3) - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 4}{x - 1} .$$

Fatorando o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$, obtemos $p(x) = (x^2 - 3x + 4)(x - 1)$. Assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x^2-3x+4)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 3x + 4) = 2$.

Vemos, portando, que f é derivável em $x = 1$ e $f'(1) = 2$. Note que $f'(x) = 2x < 0$ se $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 2x > 0$ se $x \in (0, 1)$ e $f'(x) = 3x^2 - 8x + 7 > 0$ se $x \in (1, +\infty)$. Assim, f é crescente em $(0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0)$.

(iv) Concavidade do gráfico de f.

Segue do item (iii) que f é duas vezes derivável em $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $f''(x) = 2$ se $x \in (-\infty, 1)$ e $f''(x) = 6x - 8$ se $x \in (1, +\infty)$. Resta, portanto, analisar a derivabilidade de f' em $x = 1$. Calculando os limites laterais de f' em $x = 1$, obtemos:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{x - 1} = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(3x^2 - 8x + 7) - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2 - 8x + 5}{x - 1} .$$

Fatorando $p(x) = 3x^2 - 8x + 5$, obtemos $p(x) = (3x - 5)(x - 1)$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(3x-5)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x - 5) = -2$, mostrando que não existe a derivada segunda de f em $x = 1$. Para determinar a concavidade do gráfico de f, devemos estudar o sinal de $f''(x)$ nos intervalos determinados pelos pontos onde a derivada segunda não existe, no nosso caso, $x = 1$ e pelos pontos onde ela se anula, no nosso caso, $x = \frac{4}{3}$. Ora, $f''(x) = 2 > 0$ se $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) = 6x - 8 < 0$ se $x \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$ e $f''(x) = 6x - 8 > 0$ se $x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. Concluímos, então, que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ e concavidade para cima em $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

(v) Pontos de inflexão.

Pelo item (iv), os pontos onde ocorrem mudanças de concavidade do gráfico de f são $(1, f(1)) = (1, 1)$ e $\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{43}{27}\right)$. Sendo f derivável em ambos os pontos, $x = 1$ e $x = \frac{4}{3}$, o gráfico de f possui reta tangente em $(1, 1)$ e $\left(\frac{4}{3}, \frac{43}{27}\right)$, mostrando que esses são os pontos de inflexão do gráfico de f.

O esboço do gráfico de f é como indicado na Figura 20.2.

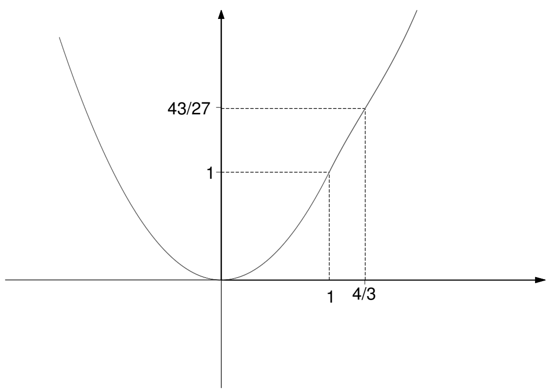


Figura 20.2

Exercício 3: Considere a função $f(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{1}{3}} & \text{se } x < 1, \\ (x-1)^{\frac{2}{3}} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Solução:

(i) Continuidade de f.

Claramente, f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Resta, então, estudar a continuidade de f em $x = 1$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1)^{\frac{1}{3}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{3}} = 0$, e $f(1) = 0$, vemos que f é contínua em $x = 1$ e, portanto, contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Assíntotas horizontais e verticais.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, vemos que o gráfico de f não possui assíntotas horizontais.

Agora, sendo f contínua em todo $x \in \mathbb{R}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ tem-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, mostrando que o gráfico de f também não possui assíntotas verticais.

(iii) Crescimento e decrescimento de f.

Como $(x-1)^{\frac{1}{3}}$ é derivável para todo $x<1$ e $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ é derivável para todo $x>1$, temos que f é derivável para todo $x \in (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ com $f'(x)=\frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ se $x\in(-\infty,1)$ e $f'(x)=\frac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$ se $x\in(1,+\infty)$. Resta-nos, então, estudar a derivabilidade de f em $x=1$.

Ora, como $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = +\infty$, vemos que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ e, portanto, f não é derivável em $x=1$.

Concluímos, então, que $f'(x)>0$ se $x<1$ e $f'(x)>0$ se $x>1$. Portanto, f é crescente em $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(iv) Concavidade do gráfico de f.

Do item (iii) vemos que f' não está definida para $x=1$ e é derivável em todo $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, com $f''(x)=\frac{-2}{9(x-1)^{\frac{5}{3}}}$ se $x\in(-\infty,1)$ e $f''(x)=\frac{-2}{9(x-1)^{\frac{4}{3}}}$ se $x\in(1,+\infty)$. Assim, $f''(x)>0$ se $x\in(-\infty,1)$ e $f''(x)<0$ se $x\in(1,+\infty)$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty,1)$ e concavidade para baixo em $(1,+\infty)$.

(v) Pontos de inflexão.

Pelo item (iv), o único ponto do gráfico de f onde ocorre mudança de concavidade é o ponto $(1,f(1))=(1,0)$. Por outro lado, vimos no item (iii) que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$. Assim, como foi visto na aula 9, o gráfico de f possui reta tangente no ponto $(1,f(1))=(1,0)$, donde concluímos que $(1,0)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

O gráfico de f é, então, como indicado na Figura 20.3.

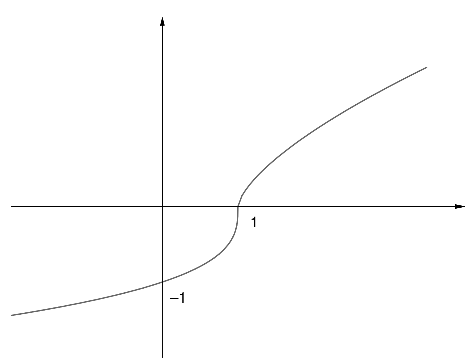


Figura 20.3

Resumo

Nesta aula utilizamos como ferramenta os conceitos de continuidade, assíntotas verticais e horizontais, crescimento e decrescimento de funções, concavidade e pontos de inflexão, para esboçar o gráfico de funções. Esses exercícios comentados devem ter contribuído para sua compreensão de alguns itens do programa. Além disso, você deve ter sanado algumas dúvidas em exercícios nos quais teve dificuldade ou não conseguiu resolver. Se esse for o caso, retorne a eles e refaça-os.

Aula 21 – Máximos e mínimos relativos.

Objetivo

Utilizar o conceito de derivada para determinar pontos de máximo e mínimo relativos de funções.

Referências: Aulas 9, 16, 17, 18 e 19.

Quando olhamos uma montanha, identificamos facilmente os picos da montanha e os fundos dos vales. Uma maneira ingênua de descrever esses pontos seria: um pico é um ponto da montanha tal que a partir dele, em qualquer direção que se caminhe, estaremos ou na mesma altitude ou descendo a montanha. Por outro lado, para o fundo de um vale acontece exatamente o contrário: a partir dele, em qualquer direção que se caminhe, estaremos ou na mesma altitude ou subindo a montanha.

Por exemplo, o Pão de Açúcar possui três picos e dois fundos de vale, o mesmo ocorrendo com o Dedo de Deus, montanha situada na Serra dos Órgãos (ver a Figura 21.1).

Figura 21.1

Poderíamos abstrair um pouco e representar essas duas montanhas pelas duas figuras a seguir, que suporemos representar o gráfico de duas funções (ver a Figura 21.2).

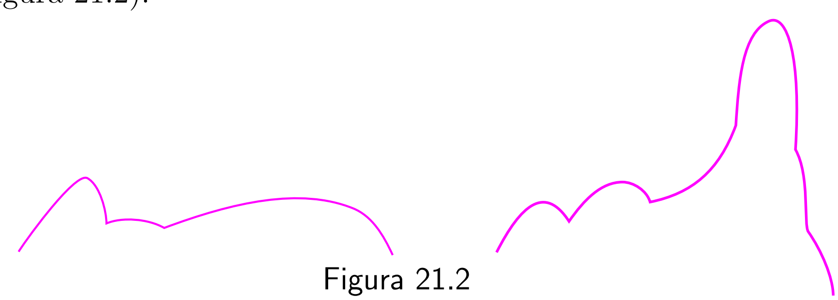


Figura 21.2

Nada impede, também, que picos e fundos de vale sejam como na Figura 21.3.

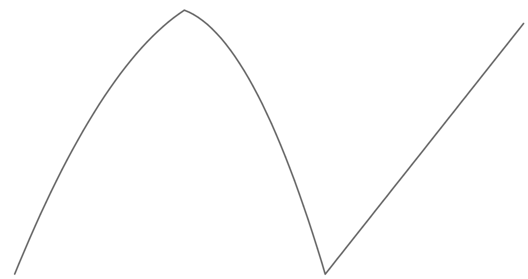


Figura 21.3

Recorra à aula 17 caso você não lembre a definição de função não crescente ou função não decrescente.

Podemos observar que, em quaisquer das situações consideradas, tais pontos se caracterizam intuitivamente pelas seguintes propriedades:

Um pico é um ponto $(a, f(a))$ que separa o gráfico de f em dois pedaços: um, à esquerda, onde para algum número $c \in \mathbb{R}$, com $c < a$, f é não decrescente em (c, a) e outro, à direita, onde para algum número $d \in \mathbb{R}$, com $d > a$, f é não crescente em (a, d).

O fundo de um vale é um ponto $(b, f(b))$ que separa o gráfico de f em dois pedaços: um, à esquerda, onde para algum número $c \in \mathbb{R}$, com $c < b$, f é não crescente em (c, b) e outro, à direita, onde para algum número $d \in \mathbb{R}$, com $d > b$, f é não decrescente em (b, d).

Os picos e fundos de vale correspondem, no contexto da Matemática, aos *pontos de máximo e mínimo relativos do gráfico de uma função* e serão, a partir de agora, nosso objeto de estudo.

Definição 21.1 Uma função f possui um **máximo relativo** (ou **máximo local**) em um ponto c se existe um intervalo aberto I contendo c tal que f esteja definida em I e $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que o ponto $(c, f(c))$ é um **ponto de máximo relativo do gráfico de** f.

Definição 21.2 Uma função f possui um **mínimo relativo** (ou **mínimo local**) em um ponto c se existe um intervalo aberto I contendo c tal que f esteja definida em I e $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.Neste caso, dizemos que o ponto $(c, f(c))$ é um **ponto de mínimo relativo do gráfico de** f.

Quando uma função f possui um máximo ou um mínimo relativo em um ponto c, dizemos que ela possui um **extremo relativo** em c.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 21.1

Considere a função $f(x) = 1 - x^2$. Você pode ver facilmente que $f(0) = 1 > f(x)$ para todo $x \neq 0$. Assim, f possui um máximo relativo em $x = 0$. Por outro lado, a função $g(x) = x^2 - 1$ possui um mínimo relativo em $x = 0$, já que $g(0) = -1 < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Note que, em ambos os casos, as funções são deriváveis em $x = 0$ com $f'(0) = 0 = g'(0)$, ou seja, o gráfico de f admite reta tangente em $(0, f(0)) = (0, 1)$ paralela ao eixo x das abscissas, o mesmo ocorrendo com o gráfico de g no ponto $(0, g(0)) = (0, -1)$.

Exemplo 21.2

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x < 0, \\ 1 - x \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$

Vemos, claramente, que f possui um máximo relativo em $x = 0$. Entretanto, f não é derivável em $x = 0$ e seu gráfico não possui reta tangente no ponto $(0, f(0)) = (0, 1)$.

O gráfico de f é como na Figura 21.4.

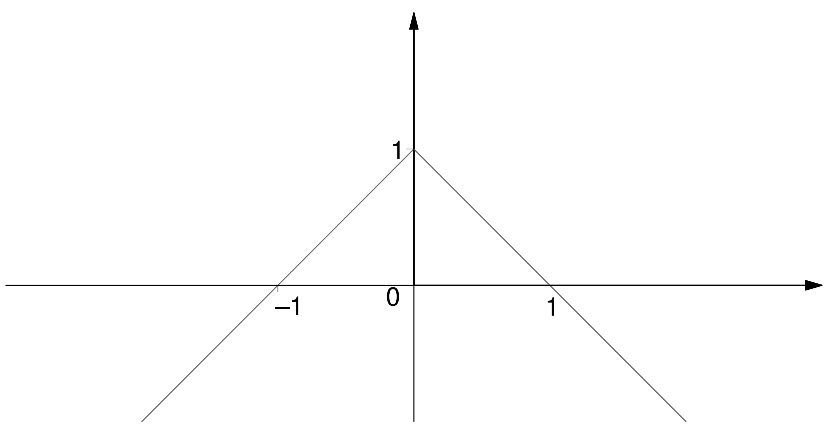


Figura 21.4

Agora, a função $g(x) = |x|$ possui um mínimo relativo em $x = 0$. Assim como f, g não é derivável em $x = 0$ e seu gráfico não possui reta tangente no ponto $(0, g(0)) = (0, 0)$.

Exemplo 21.3

Considere a função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ se } x \geq 0, \\ \sqrt{-x} \text{ se } x < 0. \end{cases}$

O gráfico de f é como na Figura 21.5.

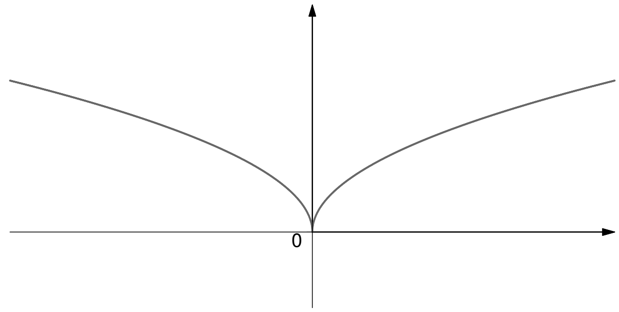


Figura 21.5

Como
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(-x)^{\frac{1}{2}}}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(-x)^{\frac{1}{2}}}=-\infty$$
e
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=+\infty,$$
concluímos que f não é derivável em $x=0$. Entretanto, sendo $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=+\infty$, o gráfico de f possui reta tangente no ponto $(0,f(0))=(0,0)$ (lembrar a aula 9).

Considere, agora, a função $g(x)=-f(x)$. Vemos que g possui um máximo relativo em $x=0$, seu gráfico possui reta tangente em $(0,0)$ e g não é derivável em $x=0$.

Definição 21.3 Sejam I um intervalo não trivial de $\mathbb{R}$ e f uma função definida em I. Um ponto $c\in I$ é chamado um **ponto crítico** de f se ocorre um dos dois casos seguintes:

(a) f não é derivável em $x=c$

ou

(b) $f^{'}(c)=0$.

Note que, em cada um dos Exemplos 21.1, 21.2 e 21.3, o ponto $x=c$ onde a função posssui um extremo relativo é um ponto crítico da função. A proposição a seguir mostra que este fato não é uma mera coincidência.

Proposição 21.1
Se $x=c$ é um extremo relativo de f, então c é um ponto crítico de f.

Demonstração: Vamos fazer o caso em que c é um mínimo relativo. O caso em que c é máximo relativo é análogo. Se f não é derivável em $x=c$, segue, da Definição 21.3, que c é um ponto crítico de f, e nada há a provar. Suponha, então, que f seja derivável em $x = c$. Logo, existe

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Precisamos provar que $f'(c) = 0$. Considere os limites laterais

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

e

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Por definição de mínimo relativo, existe um intervalo (a, b) contendo c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in (a, b)$. Como para $x \in (a, c)$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, obtemos que $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Por outro lado, como para $x \in (c, b)$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, obtemos que $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Visto que $f'(c)$ existe, os limites laterais têm que ser iguais a $f'(c)$. Portanto, $f'(c) \leq 0$ e $f'(c) \geq 0$, o que implica $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

Veremos, agora, dois exemplos que mostram que a recíproca da Proposição 21.1 é falsa, isto é, há funções cujos pontos críticos não são extremos relativos.

Exemplo 21.4

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x < 1, \\ x^2 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$$

Vemos, claramente, que $f'(x)$ existe e é diferente de zero para todo $x \neq 1$. Por outro lado, $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$, enquanto $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Assim, $x = 1$ é o único ponto crítico de f. Como $f(x) < 1$ se $x < 1$ e $f(x) > 1$ se $x > 1$, vemos que f não possui extremo relativo em $x = 1$. Note que, neste exemplo, $x = 1$ é um ponto crítico, pois satisfaz a condição (a), da Definição 21.3.

Vejamos agora um exemplo em que o ponto crítico satisfaz a condição (b), da Definição 21.3.

Exemplo 21.5

Considere a função $f(x) = x^3$. Sabemos que f é derivável em todo ponto. O único ponto crítico de f é $x = 0$, visto que $f'(x) = 3x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Entretanto, $f(x) < f(0) = 0$ se $x < 0$ e $f(x) > f(0) = 0$ se $x > 0$, mostrando que f não possui extremo relativo em $x = 0$.

Até agora, vimos que os extremos relativos de uma função f fazem parte do conjunto dos pontos críticos de f. Entretanto, até o momento, a única maneira de que dispomos para determinar se um ponto crítico de f é um extremo relativo é comparar $f(x)$ com $f(c)$ para x em um intervalo aberto (a, b) contendo c o que, em muitos casos, pode não ser muito simples. A proposição a seguir mostra como a derivada f' da função f pode ser útil para determinar se um ponto crítico é ou não um extremo relativo de f. Na verdade, o significado da proposição é bastante claro: ela diz que se f é crescente no intervalo (a, c) e decrescente em (c, b), então f possui um máximo relativo em c. Por outro lado, se f é decrescente no intervalo (a, c) e crescente em (c, b), então f possui um mínimo relativo em c. Mais precisamente, temos:

Proposição 21.2

(Teste da derivada primeira) Seja f uma função contínua em um intervalo aberto (a, b). Seja $c \in (a, b)$ e suponha que f seja derivável em (a, b), exceto possivelmente em c.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$, então f possui um máximo relativo em c.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, c)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, b)$, então f possui um mínimo relativo em c.

Demonstração: Faremos somente o caso (a); o caso (b) é demonstrado de maneira análoga. Com efeito, como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$, f é crescente em (a, c). Assim, $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a, c)$. Agora, como $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$, f é decrescente em (c, b) e, portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (c, b)$. Obtemos assim que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (a, b)$, ou seja, f possui um máximo relativo em $x = c$.

Nos dois exemplos que se seguem vamos aplicar a Proposição 21.2 para determinar os extremos relativos de uma função dada.

Exemplo 21.6

Considere a função $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$ do Exemplo 19.2. Como vimos, f só não é derivável em $x = -1$ e $x = 2$ e sua derivada para valores de $x \neq -1$ e $x \neq 2$ é $f'(x) = \frac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$. Como $f'(x) = 0$ se, e somente se,

$x = 1$, concluímos que os pontos críticos de f são $x = -1$, $x = 1$ e $x = 2$. Vimos, também, que f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 1)$. Assim, visto que $f^{'}(x) > 0$ se $x < -1$ e $f^{'}(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$, pela Proposição 21.2 f possui um máximo relativo em $x = -1$. Note que f não possui extremo relativo em $x = 2$, pois $f^{'}(x) > 0$ para $x \in (1, 2)$ e $f^{'}(x) > 0$ se $x > 2$. Finalmente, como $f^{'}(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$ e $f^{'}(x) > 0$ se $x \in (1, +\infty)$, concluímos que f possui um mínimo relativo em $x = 1$. Confira as informações que acabamos de obter com o esboço do gráfico de f (ver a Figura 17.6).

Exemplo 21.7

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x < 2, \\ x^3 - 12x^2 + 45x - 47 \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$$

Então $f^{'}(x) = 1$ se $x < 2$ e $f^{'}(x) = 3x^2 - 24x + 45$ se $x > 2$. Para determinar se f é ou não derivável em $x = 2$, devemos determinar os limites laterais $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Ora,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x + 1) - 3}{x - 2} = 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x^3 - 12x^2 + 45x - 47) - 3}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 12x^2 + 45x - 50}{x - 2}. \end{aligned}$$

Fatorando o polinômio $p(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$, obtemos

$$p(x) = (x - 2)(x^2 - 10x + 25).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x - 2)(x^2 - 10x + 25)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 10x + 25) = 9. \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que f não é derivável em $x = 2$; logo, $x = 2$ é um ponto crítico de f. Como $f^{'}(x) = 0$ se, e somente se, $x = 3$ ou $x = 5$, os pontos críticos de f são 2, 3, e 5. Utilizando a tabela de sinais para o estudo do sinal de f' (ver a Figura 21.6),

$2 \qquad 3 \qquad 5$

$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$

Figura 21.6

obtemos que f possui um máximo relativo em $x = 3$ e um mínimo relativo em $x = 5$.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado ao conceito de extremo relativo de uma função, e estudou um critério, a Proposição 21.2, que permite determinar tais extremos relativos. A referida proposição reforça, mais uma vez, a importância da derivada como ferramenta para a compreensão do comportamento de uma função.

Exercícios

1. Para cada uma das funções f abaixo determine, se existirem, todos os pontos onde a função possui um extremo relativo.

   (a) $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ (b) $f(x) = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ se } x \geq 1 \\ 1 - x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$

   (d) $f(x) = x^4 - 4x$ (e) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}}$ (f) $f(x) = \frac{3x}{x^2+9}$.

2. Para cada uma das funções f abaixo, determine, se existirem:

   (i) os pontos de descontinuidade de f,

   (ii) as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de f,

   (iii) os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente,

   (iv) os intervalos nos quais o gráfico de f possui concavidade voltada para cima ou para baixo,

   (v) todos os pontos onde ocorrem os extremos relativos de f e

   (vi) os pontos de inflexão do gráfico de f.

Finalmente, esboce o gráfico de f.

(a) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3 \text{ se } x \leq 5 \\ \frac{1}{2}(x+7) \text{ se } x > 5 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 \text{ se } x < -4 \\ 12 - (x+1)^2 \text{ se } x \geq -4 \end{cases}$

(c) $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

(d) $f(x) = (x-1)^{\frac{8}{3}} + (x-1)^2$

(e) $f(x) = \frac{5x}{x^2+7}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$

(h) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+4}$.

Auto-avaliação

Todos os exercícios exigem de você a compreensão do conceito de extremo relativo e da Proposição 21.2, vistos nesta aula. Você também deve demonstrar domínio do conteúdo estudado desde a aula 17. Caso tenha dúvidas, faça uma releitura cuidadosa da aula relativa ao conceito ou resultado ainda não bem entendido. Se as dúvidas persistirem, procure o tutor no pólo.

Aula 22 – O teste da derivada segunda para extremos relativos.

Objetivo:

Utilizar a derivada segunda para determinar pontos de máximo e mínimo relativos de funções.

Referências: Aulas 9, 16, 17, 18, 19 e 21.

Você viu nas aulas 18 e 19 que a derivada segunda é uma ferramenta bastante importante para a compreensão do comportamento do gráfico de uma função. Nesta aula, veremos que a derivada segunda de uma função nos permite, também, determinar os pontos onde a função possui extremos relativos.

Considere uma função f, derivável em um intervalo aberto I e $c \in I$ com $f^{'}(c) = 0$ (portanto, c é um ponto crítico de f). Você já sabe que o fato de $f^{'}(c)$ ser zero implica que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela ao eixo x das abscissas. Suponha, além disso, que o gráfico de f tenha concavidade para baixo em um intervalo aberto $(a, b) \subset I$ contendo c. De posse desses dados, podemos esboçar o gráfico de f no intervalo (a, b) e constatar que o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de máximo relativo do gráfico de f. A Figura 22.1 representa a situação. É claro que se o gráfico de f tivesse concavidade para cima em (a, b), o ponto $(c, f(c))$ seria um ponto de mínimo relativo do gráfico de f.

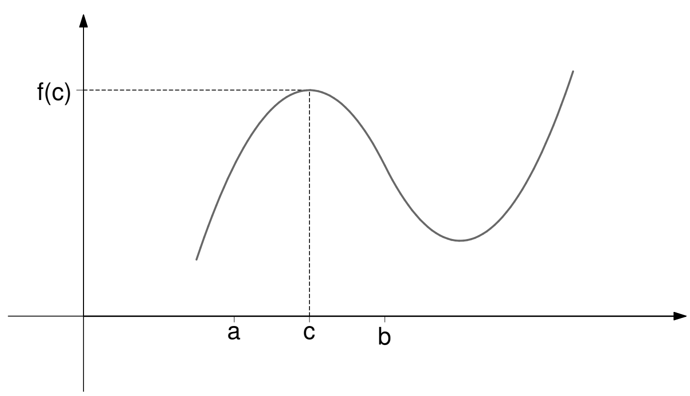


Figura 22.1

Essa observação de caráter puramente geométrico é de fato simples, mas pressupõe o conhecimento das propriedades de crescimento ou decrescimento de $f^{'}$ em (a, b), pois são elas que determinam a concavidade do gráfico de f.

No caso de f ser duas vezes derivável em (a,b), já vimos na aula 18 que o sinal de f'' em (a,b) determina a concavidade do gráfico de f em (a,b).

O teorema que veremos a seguir nos mostra que em vez de estudar essas propriedades da função f em (a,b), basta conhecermos o sinal de f'' em $x = c$ para garantir que f possui um extremo relativo em $x = c$.

Teorema 22.1

(Teste da derivada segunda) Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e $c \in I$ com $f'(c) = 0$ e tal que $f''(c)$ exista. Então:

(a) Se $f''(c) < 0$, f possui um máximo relativo em $x = c$.

(b) Se $f''(c) > 0$, f possui um mínimo relativo em $x = c$.

Demonstração: Vamos demonstrar somente o caso (a), pois (b) é análogo e será deixado para você como exercício (ver o Exercício 3). Por hipótese, $f''(c) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} < 0$ e, como $f'(c) = 0$, temos que $f''(c) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{x-c} < 0$. Assim, para valores de x próximos de c, $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < c < b$ e $(a,b) \subset I$ tais que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in (a,b)$, $x \neq c$. Como $x - c < 0$ para todo $x \in (a,c)$, obtemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,c)$. Por outro lado, como $x - c > 0$ para todo $x \in (c,b)$, obtemos que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$. Pelo teste da derivada primeira concluímos que f possui um máximo relativo em $x = c$, como queríamos demonstrar.

Você pode observar que o teste da derivada segunda não diz nada no caso em que $f''(c) = 0$. De fato, neste caso nada se pode concluir a respeito do ponto crítico $x = c$, como veremos a seguir.

Exemplo 22.1

Considere a função $f(x) = x^4$. Temos $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$; assim, $f'(0) = f''(0) = 0$. Como $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que f possui um mínimo absoluto em $x = 0$.

Exemplo 22.2

Para a função $g(x) = -x^4$, temos $g'(x) = -4x^3$, $g''(x) = -12x^2$ e, portanto, $g'(0) = g''(0) = 0$. Como $g(x) = -x^4 \leq 0 = g(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que g possui um máximo absoluto em $x = 0$.

Exemplo 22.3

A função $h(x) = x^3$ é tal que $h^{'}(x) = 3x^2$ e $h^{''}(x) = 6x$. Assim, $h^{'}(0) = h^{''}(0) = 0$; entretanto, $x = 0$ não é um extremo relativo de f, visto que $h(x) < h(0)$ para $x < 0$ e $h(x) > h(0)$ para $x > 0$.

Nos três exemplos a derivada segunda da função se anula no ponto crítico $x = 0$. Entretanto, no primeiro, o ponto crítico é um mínimo relativo, no segundo, um máximo relativo e, no terceiro, o ponto crítico não é nem máximo nem mínimo relativo da função.

Vamos, agora, usar o teste da derivada segunda para determinar os máximos e mínimos relativos de algumas funções. É importante ressaltar que esse teste só vale para pontos críticos nos quais a derivada primeira se anula.

Exemplo 22.4

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \text{ se } x \leq 0, \\ x^2 - 4x + 3 \text{ se } x > 0. \end{cases}$

Vimos, na aula 21, que os pontos críticos de f são os candidatos a extremos relativos. Temos que f é derivável para todo $x < 0$ e $f^{'}(x) = 2x+4$ se $x < 0$. Analogamente, f é derivável para todo $x > 0$ e $f^{'}(x) = 2x - 4$ se $x > 0$. Agora, como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{(x^2 + 4x + 3) - 3}{x} = \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x + 4)}{x} = \\ &= \lim_{x \to 0^-} (x + 4) = 4. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{(x^2 - 4x + 3) - 3}{x} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x - 4)}{x} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} (x - 4) = -4, \end{aligned}$$

concluímos que f não é derivável em $x = 0$. Os pontos críticos de f são $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$. Sendo $f^{'}(-2) = f^{'}(2) = 0$, f duas vezes derivável em $x = -2$ e $x = 2$ e $f^{''}(-2) = f^{''}(2) = 2 > 0$, podemos aplicar o teste da derivada segunda e concluir que f possui um mínimo relativo em $x = -2$ e outro em $x = 2$. Quanto ao ponto crítico $x = 0$, podemos aplicar o teste da derivada primeira. Realmente, para $x \in (-2, 0)$, $f'(x) > 0$ e, para $x \in (0, 2)$, $f'(x) < 0$. Assim, concluímos que f possui um máximo relativo em $x = 0$. O gráfico de f é indicado na Figura 22.2.

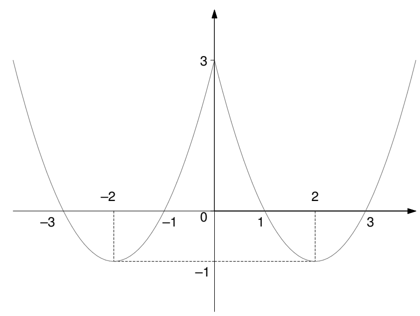


Figura 22.2

Exemplo 22.5

Considere a função $f(x) = x^3 + 3x + 2$. Como f é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 + 3$ nunca se anula, concluímos que f não possui extremos relativos (ver a Figura 22.3).

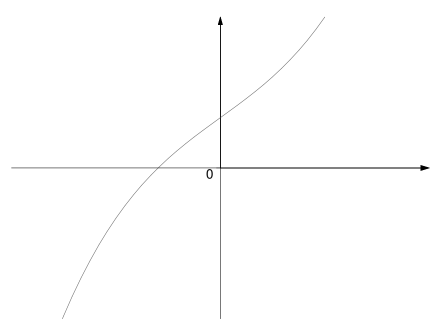


Figura 22.3

Exemplo 22.6

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$, definida em $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Como f é derivável em todo ponto do seu domínio e $f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$, o único ponto crítico de f

é $x = -\frac{1}{2}$. Derivando f', obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2+x)^2(-2) - (-2x-1)(2(x^2+x)(2x+1))}{(x^2+x)^4} = \\ &= \frac{(x^2+x)[-2(x^2+x) + 2(2x+1)^2]}{(x^2+x)^4} = \\ &= \frac{-2(x^2+x) + 2(2x+1)^2}{(x^2+x)^3}. \end{aligned}$$

Assim, $f''(-\frac{1}{2}) = -32$ e, pelo teste da derivada segunda, f possui um máximo relativo em $x = -\frac{1}{2}$ (ver Figura 22.4).

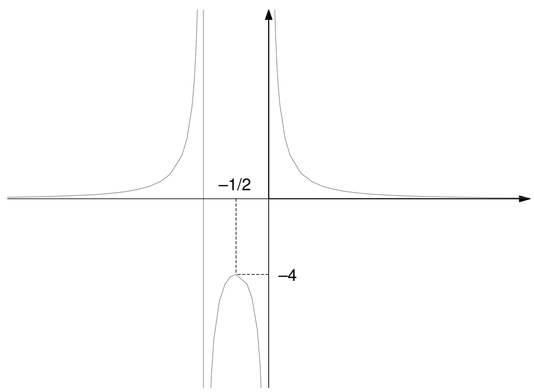


Figura 22.4

Resumo

Nesta aula, você aprendeu a identificar máximos e mínimos relativos de funções usando a derivada segunda. Você deve ter notado que o teste da derivada segunda é mais fácil de ser usado do que o teste da derivada primeira.

Exercícios

1. Para cada uma das funções abaixo, use o teste da derivada segunda para determinar, se existirem, os pontos de máximo e mínimo relativos da função.

   (a) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$ (b) $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$

   (c) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ (d) $f(x) = (x-1)^{\frac{8}{3}} + (x-1)^2$

   (e) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ (f) $f(x) = \frac{5x}{x^2+7}$.

2. Para cada uma das funções dadas, determine, caso existam:

   (i) as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de f,

   (ii) os intervalos onde f é crescente ou decrescente,

   (iii) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima ou concavidade para baixo,

   (iv) os extremos relativos de f,

   (v) os pontos de inflexão.

   Finalmente, esboce o gráfico de f.

   (a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ (b) $f(x) = x^4 + 4x$

   (c) $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$ (d) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^3 \text{ se } x < 0 \\ (x-1)^4 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

   (f) $f(x) = (x+2)\sqrt{-x}$.

3. Sejam f uma função derivável em um intervalo aberto I e $c \in I$ com $f'(c) = 0$. Mostre que se $f''(c)$ existe e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo relativo em $x = c$.

4. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c e d tais que o gráfico de f tenha um extremo relativo em $(0, 3)$ e um ponto de inflexão em $(-1, 1)$.

Auto-avaliação

O exercício de número 1 depende apenas do teste da derivada segunda. Os demais, exigem de você o domínio de todos os conceitos e resultados vistos até agora visando a compreensão do comportamento de funções. Se você tiver qualquer dúvida relativa a um desses conceitos ou resultados, retorne à aula correspondente e faça uma releitura detalhada. Caso persista a dúvida, procure o tutor no pólo.

Aula 23 – Exercícios resolvidos.

Objetivo

Fixar o conteúdo visto desde a aula 16.

Referências: Aulas 9, 16, 17, 18, 19, 21 e 22.

Exercício 1: Verifique se cada uma das funções abaixo, definidas no intervalo $[a, b]$, satisfaz ou não as hipóteses do Teorema do valor médio. Em caso afirmativo, determine um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(a) $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$, $[a, b] = [2, 4]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} \text{ se } x < 2, \\ 6 - x \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$, $[a, b] = [-3, 3]$.

Solução: (a) Considere $f_1(x) = x^2 - 4$ para $x \in [2, 4]$ e $f_2(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. É claro que $f = f_2 \circ f_1$. Como f_1 é contínua em $[2, 4]$ e f_2 é contínua em $[0, +\infty)$, então f é contínua em $[2, 4]$.

Além disso, sendo $f_1(x) > 0$ para todo $x \in (2, 4]$, f_1 derivável em $(2, 4]$ e f_2 derivável em $(0, +\infty)$, então pela regra da cadeia $f = f_2 \circ f_1$ é derivável em $(2, 4]$ e

$$f'(x) = (f_2 \circ f_1)'(x) = f_2{}'(f_1(x))f_1{}'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

para todo $x \in (2, 4]$. Em particular, f é derivável em $(2, 4)$.

Assim, as hipóteses do teorema do valor médio são todas satisfeitas. A reta que passa por $A = (2, f(2)) = (2, 0)$ e $B = (4, f(4)) = (4, \sqrt{12})$ tem coeficiente angular igual a $\frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$. Queremos, portanto, determinar $c \in (2, 4)$ tal que $\frac{c}{(c^2-4)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$, isto é, $\frac{c^2}{c^2-4} = 3$, isto é, $c^2 = 6$. Como $c \in (2, 4)$, o número c procurado é $c = \sqrt{6}$.

(b) A função f é claramente contínua em $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Resta-nos, portanto, estudar a continuidade em $x = 2 \in [-3,3]$. Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (6-x) = 4$$

obtemos que existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, mostrando que f é contínua em 2. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$ e, em particular, no intervalo $[-3,3]$.

A função f é derivável para $x < 2$, pois ela é um quociente de funções deriváveis cujo denominador não se anula em $(-\infty, 2)$ (lembrar a aula 10). Sendo f um polinômio para $x > 2$, ela é derivável em $(2, +\infty)$. Resta-nos, portanto, estudar a derivabilidade de f em $x = 2$. Determinando os limites laterais temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\dfrac{x^2-4}{x-2} - 4}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)-4}{x-2} = 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(6-x)-4}{x-2} \qquad = \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{x-2} = -1\ .\end{aligned}$$

Concluímos, assim, que f não é derivável em $x = 2$ não satisfazendo, portanto, a hipótese de derivabilidade no intervalo aberto $(-3,3)$.

Exercício 2 (Desafio, da aula 16): Use o Teorema de Rolle para demonstrar que a equação $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ possui exatamente uma raiz no intervalo $(0, 1)$.

Solução: A função $f(x) = x^5+x^3+2x-3$ é contínua em $[0, 1]$. Como $f(0) = -3 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, pelo teorema do valor intermediário (aula 7) existe $a \in (0, 1)$ tal que $f(a) = 0$. Isso mostra que a equação $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ possui uma raiz no intervalo $(0, 1)$. Vamos mostrar que ela é única. Com efeito, suponha que $b \in (0, 1)$ seja uma outra raiz da equação com, digamos, $a < b$. Então temos que $f(a) = f(b)$ e, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Mas $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ para todo $x \in (0, 1)$; portanto, tal b não pode existir.

Exercício 3: Para cada uma das funções a seguir determine, se existirem:

(i) os pontos de descontinuidade de f,

(ii) as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico de f,

(iii) os intervalos onde f é crescente ou decrescente,

(iv) os extremos relativos de f,

(v) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima ou para baixo,

(vi) os pontos de inflexão do gráfico de f.

Finalmente, esboce o gráfico de f.

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$ (Exercício 1 (k), da aula 18);

(b) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 7}$.

Solução: (a) (i) A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois é uma soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

(ii) Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, o gráfico de f não possui assíntotas verticais. Ele também não possui assíntotas horizontais, pois $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = +\infty$.

(iii) A função f só não é derivável em $x = 0$, visto que $x^{\frac{1}{3}}$ só não é derivável neste ponto e $x^{\frac{4}{3}}$ é derivável em todos os pontos. Para $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x} + \frac{8}{3}\right)$. Assim, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -\frac{1}{8}$. Os pontos críticos de f são, portanto, $x = -\frac{1}{8}$ e $x = 0$. Usando a tabela de sinais (conforme a Figura 23.1) para o estudo do sinal de $f'(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x} + \frac{8}{3}\right)$, obtemos

	$-\frac{1}{8}$	0	
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Figura 23.1

que f é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$ e crescente em $\left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$.

(iv) Pelo teste da derivada primeira, vemos que f possui um mínimo relativo em $x = -\frac{1}{8}$. O ponto crítico $x = 0$ não é nem máximo nem mínimo relativo, pois pelo sinal da derivada vemos que f é crescente em um pequeno intervalo aberto contendo o ponto $x = 0$.

(v) A função f' só não é derivável em $x = 0$, sendo $f''(x) = x^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{2}{9x} + \frac{8}{9}\right)$ para $x \neq 0$; logo, $f''(x) = 0$ se, e somente se, $x = \frac{1}{4}$. Assim, os pontos $x = 0$ e $x = \frac{1}{4}$ determinam os intervalos onde devemos estudar o sinal de f''.

Utilizando a tabela de sinais para f'', como indicado na Figura 23.2, obtemos

	0	$\frac{1}{4}$	
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Figura 23.2

que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ e concavidade para baixo em $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Você pode observar, neste momento, que f'' existe em $x = -\frac{1}{8}$ e $f''\left(-\frac{1}{8}\right) > 0$. Pelo teste da derivada segunda, f possui um mínimo relativo em $x = -\frac{1}{8}$, como já havíamos visto.

(vi) Os candidatos a pontos de inflexão são aqueles onde ocorrem mudanças de concavidade, ou seja, $(0, f(0)) = (0,0)$ e $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. Como f é derivável em $x = \frac{1}{4}$, o gráfico de f possui reta tangente em $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$. Tendo f'' sinais contrários nos intervalos $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico de f. Quanto ao ponto $x = 0$, devemos determinar se o gráfico de f possui reta tangente em $(0, f(0)) = (0,0)$.

Como
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + 2x^{\frac{1}{3}}\right) = +\infty,$$
o gráfico de f possui reta tangente vertical em $(0,0)$, mostrando que $(0,0)$ também é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Podemos, agora, esboçar o gráfico de f, como indicado na Figura 23.3.

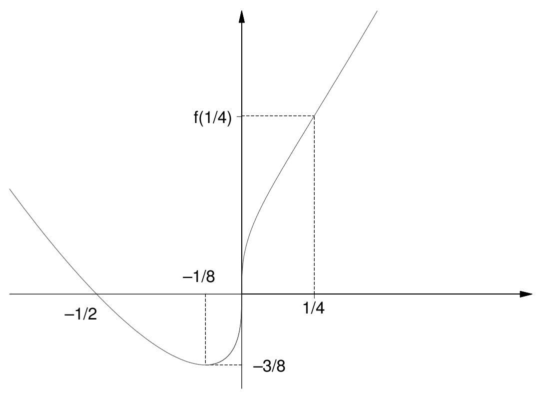


Figura 23.3

Solução: (b) (i) A função $f(x) = \frac{5x}{x^2+7}$ está definida e é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$, pois é um quociente de polinômios cujo denominador nunca se anula.

(ii) Como, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, o gráfico de f não possui assíntotas verticais. Agora, como

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x^2+7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2}\frac{5}{x}\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x^2}} = 0\ ,$$

temos que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

(iii) A função f é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-5x^2+35}{(x^2+7)^2}$ e, portanto, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \pm\sqrt{7}$. O sinal de f' é determinado pelo sinal do numerador. Assim, vemos facilmente ($-5x^2 + 35$ tem como gráfico uma parábola com concavidade para baixo interceptando o eixo x das abscissas em $x = \pm\sqrt{7}$) que $f'(x) < 0$ em $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$ e $f'(x) > 0$

em $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$. Concluímos, então, que f é decrescente em $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$ e crescente em $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

(iv) Pelo item (iii), os pontos críticos de f são $x = \pm\sqrt{7}$. De posse dos sinais de $f'(x)$ temos, pelo teste da derivada primeira, que f possui um mínimo relativo em $x = -\sqrt{7}$ e um máximo relativo em $x = \sqrt{7}$. Poderíamos usar o teste da derivada segunda para chegar a mesma conclusão. Com efeito, $f''(x) = \frac{10x^3 - 210x}{(x^2+7)^3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(-\sqrt{7}) = f'(\sqrt{7}) = 0$, $f''(-\sqrt{7}) > 0$ e $f''(\sqrt{7}) < 0$, segue do teste da derivada segunda que f possui um mínimo relativo em $x = -\sqrt{7}$ e um máximo relativo em $x = \sqrt{7}$.

(v) Como f' é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f''(x) = \frac{10x^3 - 210x}{(x^2+7)^3} = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{21}$, para determinar os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima ou para baixo, devemos estudar o sinal de f'' em $(-\infty, -\sqrt{21}) \cup (-\sqrt{21}, 0) \cup (0, \sqrt{21}) \cup (\sqrt{21}, +\infty)$. Sendo o denominador $(x^2 + 7)^3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f'' fica determinado pelo sinal do numerador. Como $10x^3 - 210x = x(10x^2 - 210)$, o sinal de f'' é o produto dos sinais das funções $g(x) = x$ e $h(x) = 10x^2 - 210$. Dispondo esses dados na tabela de sinais, conforme a Figura 23.4,

	$-\sqrt{21}$	0	$\sqrt{21}$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Figura 23.4

obtemos que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\sqrt{21}, 0) \cup (\sqrt{21}, +\infty)$ e concavidade para baixo em $(-\infty, -\sqrt{21}) \cup (0, \sqrt{21})$.

(vi) Pelo item (v), os únicos pontos de mudança de concavidade do gráfico de f são $(-\sqrt{21}, f(-\sqrt{21}))$, $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(\sqrt{21}, f(\sqrt{21}))$. Como o gráfico de f possui reta tangente em cada um deles (f é derivável em 0, $-\sqrt{21}$ e $\sqrt{21}$), eles são os únicos pontos de inflexão do gráfico de f.

Reunindo todas as informações podemos, agora, esboçar o gráfico de f (ver a Figura 23.5).

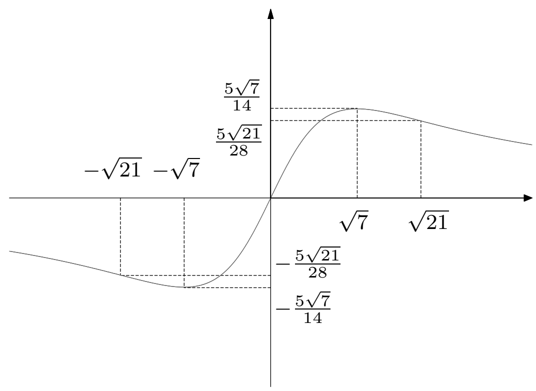


Figura 23.5

Exercício 4: Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c, e d tais que o gráfico de f possua um ponto de inflexão em $(1, 2)$ e tais que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f neste ponto seja -2.

Solução: Primeiramente, como $(1, 2)$ deve ser um ponto do gráfico de f, temos que $f(1) = 2$, ou seja, $a + b + c + d = 2$. Em segundo lugar, como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto $(1, 2)$ é dado por $f'(1)$, obtemos de $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f'(1) = -2$ que $3a + 2b + c = -2$. Finalmente, como queremos que $(1, 2)$ seja ponto de inflexão e como $f''(1)$ existe, pela Proposição 19.1 devemos ter $f''(1) = 0$, ou seja, $6a + 2b = 0$. Obtemos, assim, o sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2, \\ 3a + 2b + c = -2, \\ 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $b = -3a$, $c = -2 + 3a$ e $d = 4 - a$. Assim, para qualquer valor de a, obtemos b, c, e d tais que a respectiva função f satisfaz as propriedades desejadas. Por exemplo, se tomarmos $a = 1$, obtemos $b = -3$, $c = 1$ e $d = 3$, ou seja, a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ satisfaz as propriedades desejadas. Forneça outros exemplos de funções satisfazendo as propriedades desejadas.

Resumo

Esses exercícios avaliam todo o conteúdo visto até aqui nesse módulo. A partir dessas resoluções você pode, inclusive, tirar dúvidas de exercícios de aulas anteriores nos quais tenha tido dúvida ou não tenha conseguido resolver. Nesses casos, retorne à(s) aula(s) em questão e refaça-os. Se persistir a dúvida, procure o tutor no pólo.

Aula 24 – Extremos absolutos.

Objetivo

Aplicar o Teorema de Weierstrass, visto na aula 7, para resolver problemas de máximos e mínimos absolutos.

Referências: Aulas 7, 21 e 22.

Na aula 21 você foi apresentado aos conceitos de máximo e mínimo relativo de funções. Uma pergunta natural a se fazer é: qual a justificativa para a utilização do termo relativo quando se fala de máximos e mínimos? Para responder a essa pergunta, vejamos dois exemplos.

Exemplo 24.1

Considere a função $f(x) = x^3+2x^2-4x+1$. Sendo f duas vezes derivável em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o teste da derivada segunda para determinar os pontos de máximo e mínimo relativos de f. Como $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$, temos que $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -2$ ou $x = \frac{2}{3}$. Sendo $f''(x) = 6x+4$, $f''(-2) = -8 < 0$ e $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 8 > 0$, segue que f possui um máximo relativo em $x = -2$ e um mínimo relativo em $x = \frac{2}{3}$. Por outro lado, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, existem valores de x para os quais $f(x) > f(-2)$ e existem valores de x para os quais $f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right)$. É por esse motivo que falamos em máximo relativo e em mínimo relativo. No nosso exemplo, $f(-2)$ não é o valor máximo assumido por f se considerarmos todos os valores de x no domínio de f assim como $f\left(\frac{2}{3}\right)$ não é o valor mínimo assumido por f se considerarmos todos os valores de x no domínio de f.

Um esboço do gráfico de f é apresentado na Figura 24.1.

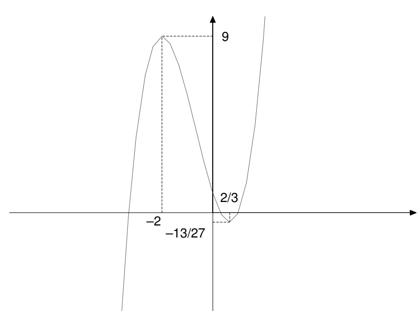


Figura 24.1

Por outro lado, temos:

Exemplo 24.2

Considere a função $f : [-3,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, isto é, restringimos a função do Exemplo 24.1 ao intervalo $[-3,1]$. É fácil ver que os valores $f(-2)$ e $f\left(\frac{2}{3}\right)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo assumidos por f dentre todos os valores de $x \in [-3,1]$, isto é, $f\left(\frac{2}{3}\right) \leq f(x) \leq f(-2)$ para todo $x \in [-3,1]$.

Isso justifica a definição a seguir:

Definição 24.1 Dizemos que uma função f possui um **máximo absoluto** em um ponto x_1, se $f(x_1) \geq f(x)$ para todo x no domínio de f. Analogamente, f possui um **mínimo absoluto** em um ponto x_2, se $f(x_2) \leq f(x)$ para todo x no domínio de f. No primeiro caso, dizemos que $f(x_1)$ é o **valor máximo absoluto de** f e, no segundo caso, dizemos que $f(x_2)$ é o **valor mínimo absoluto de** f. Um ponto onde f possui um máximo ou mínimo absoluto é chamado de **extremo absoluto de** f.

O Exemplo 24.1 mostra que uma função pode admitir máximo e mínimo relativo sem, entretanto, admitir máximo ou mínimo absoluto. Por outro lado, na aula 7, você foi apresentado ao Teorema de Weierstrass que dá uma condição para a existência de extremos absolutos. Ele pode ser enunciado como se segue:

Teorema 24.1
Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f possui um máximo e um mínimo absoluto em $[a,b]$.

Agora, note que um extremo absoluto de uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ou é um extremo relativo de f ou um extremo do intervalo. Para que uma função tenha um extremo relativo em um número c é condição necessária que c seja um ponto crítico. Assim, para determinar os extremos absolutos de f, você deve proceder da seguinte maneira:

(a) determine os pontos críticos de f em (a,b);

(b) determine $f(a)$ e $f(b)$.

Compare, então, os valores assumidos por f nos pontos críticos, com $f(a)$ e $f(b)$; o maior dentre eles será o valor máximo absoluto assumido por f em $[a,b]$; o menor dentre eles será o valor mínimo absoluto assumido por f em $[a,b]$.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 24.3

Considere a função $f : [-4, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, isto é, restringimos, agora, a função do Exemplo 24.1 ao intervalo $[-4, 1]$. Vimos que f possui um máximo relativo em $x = -2$ e um mínimo relativo em $x = \frac{2}{3}$. Além disso, $f(-4) = -15$, $f(-2) = 9$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{27}$ e $f(1) = 0$. Assim, f possui um máximo absoluto em $x = -2$ e um mínimo absoluto em $x = -4$.

Vamos, a partir de agora e até o fim desta aula, aplicar o teorema de Weierstrass para resolver alguns problemas interessantes.

Exemplo 24.4

Um campo retangular, beirando um rio, vai ser cercado. O proprietário do terreno exigiu que o lado do campo que beira o rio não seja cercado. Se o material da cerca custa R\$2,00 por metro para os extremos do campo e R\$3,00 por metro para o lado paralelo ao rio, qual a dimensão do campo de maior área possível que pode ser cercado com um custo de R\$1.200,00?

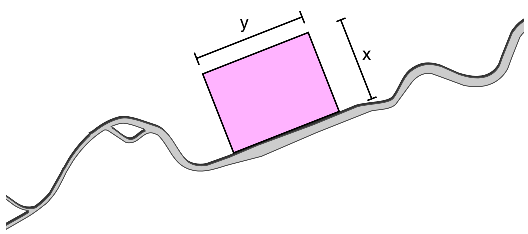


Figura 24.2

Queremos maximizar a área do campo a ser cercado levando-se em conta o custo limite de R\$1.200,00. Sejam

$x =$ o número de metros de comprimento de um extremo do campo;

$y =$ o número de metros de comprimento do lado paralelo ao rio;

$A =$ o número de metros quadrados da área do campo.

Então, $A = xy$.

Como o custo do material de cada extremo é de R\$2,00 por metro e o comprimento de um extremo é de x metros, o custo total para cercar um extremo é de R\$2x. Analogamente, o custo total para cercar o lado paralelo ao rio é de R\$3y. Temos, assim,

$$2x + 2x + 3y = 1.200.$$

Queremos, agora, expressar a área A em termos de uma única variável. Tirando y como função de x na equação acima e substituindo na equação da área, obtemos

$$A(x) = x\left(400 - \frac{4}{3}x\right).$$

Devemos, agora, determinar o intervalo de definição dessa função. Ora, como x e y não podem ser negativos, devemos ter $x \geq 0$ e $y = 400 - \frac{4}{3}x \geq 0$, donde $x \leq 300$. Desde que A é contínua no intervalo fechado $[0, 300]$, concluímos pelo teorema de Weierstrass que A possui um máximo absoluto neste intervalo.

Vamos determinar os pontos críticos de $A(x) = 400x - \frac{4}{3}x^2$.

Temos $A'(x) = 400 - \frac{8}{3}x$; assim, os pontos críticos de f são os valores de x para os quais $A'(x) = 0$, ou seja, $x = 150$, que pertence ao intervalo $(0, 300)$. Portanto, o máximo absoluto de A é assumido em 0, 150 ou 300. Como $A(0) = 0$, $A(150) = 30.000$ e $A(300) = 0$, concluímos que A assume seu máximo absoluto em $x = 150$ metros. Assim, a maior área que pode ser cercada com R\$1.200 é de 30.000 metros quadrados e isto é obtido quando o lado paralelo ao rio possuir 200 metros de comprimento e cada um dos extremos possuir 150 metros de comprimento.

Exemplo 24.5

Duas cidades, A e B, ambas com energia elétrica, se situam em pontos opostos um ao outro nas margens de um rio reto de 30 km de largura. Uma terceira cidade C se situa a 60km rio abaixo da cidade B e não tem energia elétrica. Uma companhia de energia elétrica decidiu fornecer-lhe energia. Visto que a energia seria fornecida pela usina situada na cidade A e sendo o custo por km de cabeamento por água 25% mais caro que o custo por km do cabeamento por terra, qual deveria ser o cabeamento feito pela companhia para que o custo final fosse o mais barato?

Queremos determinar um ponto P entre as cidades B e C de maneira que o cabeamento por água mais o cabeamento por terra de P a C tenha o menor custo final.

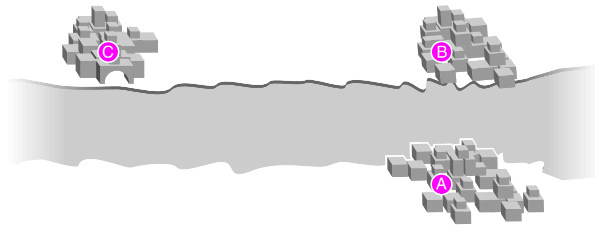


Figura 24.3

Sejam

$x =$ a distância (em quilômetros) de B a P;

$c =$ o custo por quilômetro do cabeamento por água.

Como a distância de A a B é de 30km, temos que a distância de A a P é a hipotenusa do triângulo retângulo ABP, isto é, $\sqrt{900+x^2}$. Sendo o cabeamento de A a P feito por água, o custo para a ligação é de $c\sqrt{900+x^2}$. O custo do cabeamento de P a C é de $\frac{100}{125}c(60-x)$, visto que o custo por terra T mais $\frac{25}{100}T$ é igual ao custo por água c e a distância de P a C é $60-x$. Assim, o custo total é de $C(x) = c\sqrt{900+x^2} + \frac{100}{125}c(60-x)$ (ver a Figura 24.4). Como x varia de 0 a 60, queremos encontrar o mínimo absoluto da função contínua $C(x)$ no intervalo $[0, 60]$.

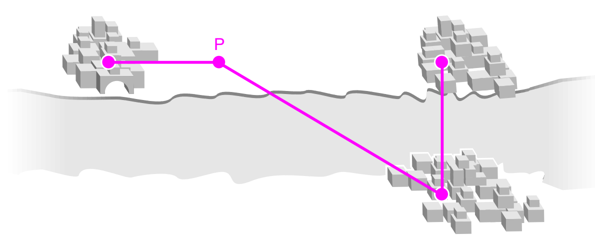


Figura 24.4

Temos que $C'(x) = \frac{cx}{\sqrt{900+x^2}} - \frac{100c}{125}$. Assim, os pontos críticos são os valores de x para os quais $C'(x) = 0$, ou seja, $\frac{x}{\sqrt{900+x^2}} = \frac{100}{125}$, ou seja, $x^2 = 1600$. Obtemos, portanto, $x = 40$km. Como $C(0) = 78c$, $C(40) = 66c$ e $C(60) = c\sqrt{4.500}$, concluímos que o cabeamento mais barato para a companhia é ligar, por água, a cidade A a um ponto P distante de B 40km rio abaixo e, em seguida, por terra, ligar P a C.

Exemplo 24.6

Um monopolista determina que o custo total de produção de x unidades de certa mercadoria é $C(x) = 25x + 20.000$. A equação de demanda é $x + 50p = 5.000$, onde são solicitadas x unidades por semana a um preço de p reais por unidade. Se o lucro semanal deve ser maximizado, determine: (a) o número de unidades que se deve produzir a cada semana; (b) o preço de cada unidade; (c) o lucro semanal.

A função preço por unidade ao se demandar x unidades por semana da mercadoria é $P(x) = \frac{5.000-x}{50}$, onde $x \in [0, 5.000]$, pois x e $P(x)$ devem ser não negativos. Assim, a receita ao se vender x unidades por semana é $R(x) = xP(x) = x\frac{5.000-x}{50}$. Sendo o lucro igual a receita menos despesa, obtemos que o lucro é dado pela função $L(x) = x\frac{5.000-x}{50} - 25x - 20.000$, definida para $x \in [0, 5.000]$. Determinemos qual a produção para que se obtenha lucro máximo.

Um máximo relativo de L em $(0, 5.000)$ é um ponto x tal que $L^{'}(x) = 0$ e $L^{''}(x) < 0$. Temos $L^{'}(x) = 100 - \frac{2x}{50} - 25 = 0$ se, e somente se, $x = 1.875$. Como $L^{''}(x) = -\frac{2}{50} < 0$ para todo $x \in (0, 5.000)$, L possui um máximo relativo em $x = 1.875$. Agora, sendo $L(0) = -20.000$, $L(1.875) = 50.312,5$ e $L(5.000) = -145.000$, temos que L possui um máximo absoluto em $x = 1.875$. Assim, o lucro máximo é obtido ao se produzir 1.875 unidades da mercadoria por semana. O preço de cada unidade será $P(1875) = \frac{5.000-1.875}{50} = 62,5$ reais e o lucro semanal será de $L(1875) = 50.312,5$ reais.

Exemplo 24.7

O navio A está 60km a leste do navio B viajando para o sul a 20km por hora, enquanto o navio B está indo para o leste a uma velocidade de 15km por hora. Se os navios continuam seus respectivos cursos, determine a menor distância entre eles e quando isto ocorrerá.

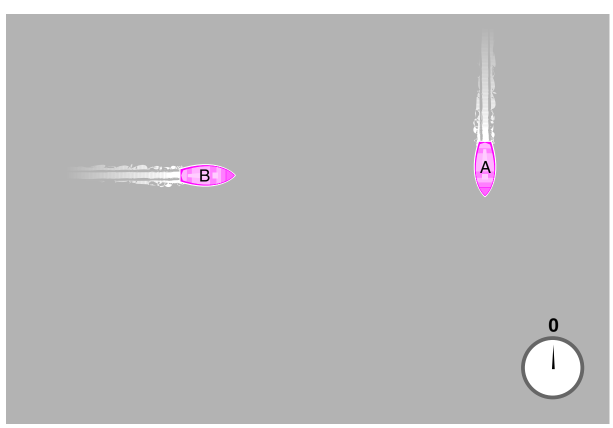


Figura 24.5

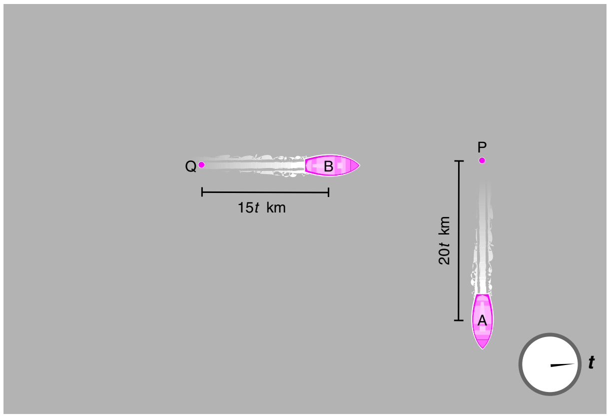


Figura 24.6

Na Figura 24.5, P representa a posição original do navio A e Q a posição original do navio B. Após t horas, o navio A terá se deslocado $20t$ km enquanto o navio B terá se deslocado $15t$ km. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância entre os dois neste momento será de

$$y = y(t) = \sqrt{(20t)^2 + (60 - 15t)^2} = \sqrt{625t^2 - 1800t + 3600}\text{km}.$$

É claro que $y(t)$ será mínima quando $625t^2 - 1800t + 3600$ for mínima. Seja então $f(t) = 625t^2 - 1800t + 3600$, definida para $t \in [0. + \infty)$. Como $f'(t) = 1250t - 1800$, o único ponto crítico de f é $t = \frac{180}{125}$. Além disso, $f'(t) < 0$ para $t \in \left(0, \frac{180}{125}\right)$ e $f'(t) > 0$ para $t > \frac{180}{125}$; logo, f é decrescente em $\left(0, \frac{180}{125}\right)$ e crescente em $\left(\frac{180}{125}, +\infty\right)$. Vemos, assim, que $t = \frac{180}{125}$ é o ponto de mínimo absoluto de f. Portanto, a distância mínima entre os dois navios ocorre após ter passado $\frac{180}{125} = 1,44$ horas e é dada por $y(1,44) = \sqrt{(28,8)^2 + (21,6)^2} = \sqrt{1296} = 36\text{km}$.

Resumo

Nesta aula você aprendeu a determinar os extremos absolutos de uma função definida em um intervalo fechado e limitado, percebendo, através das aplicações que fizemos, a importância do teorema de Weierstrass na resolução de problemas concretos.

Exercícios

1. Determine os extremos absolutos das funções dadas nos intervalos indicados.

   (a) $f(x) = (x+1)^2$ em $[-2, 1]$

   (b) $f(x) = sen(\pi x^2 - \pi x - \frac{3\pi}{2})$ em $\big[-\frac{3}{2}, 3\big]$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ se } x < 1, \\ x^2 - 3x + 5 \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$ em $[-6, 5]$

   (d) $f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}}$ em $[-4, 3]$

   (e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ em $[-2, 3]$

   (f) $f(x) = |x-4| + 1$ em $[0, 6]$

   (g) $\sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$.

2. Uma área retangular é cercada por 1500m de grade. Determine as dimensões do retângulo de área máxima.

3. Encontre dois números reais positivos cuja soma seja 16 e o produto seja máximo.

4. Uma folha de papel dispõe de 18 centímetros quadrados para impressão de um texto informativo. As margens superior e inferior estão a 2 centímetros da extremidade correspondente do papel. Cada margem lateral deve ser de 1 centímetro. Quais as dimensões da folha de papel para que sua área total seja mínima?

5. Determine as dimensões do cilindro de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio igual a 6 centímetros.

6. Uma lâmpada L de vapor de sódio será colocada no topo de um poste de altura x metros para iluminar um jardim J situado em um espaço público bastante visitado (Figura 24.7). O pé P do poste precisa estar localizado a 40 metros de J. Se $r = |LJ|$ é a distância da lâmpada ao jardim J e α é o ângulo PJL, então a intensidade de iluminação I em J é proporcional ao seno de α e inversamente proporcional a r^2; assim, $I = \frac{csen\alpha}{r^2}$, onde c é uma constante. Ache o valor máximo de x que maximiza I.

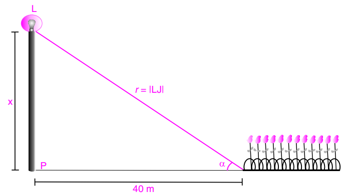


Figura 24.7

7. Uma empresa de porte médio observou que uma secretária trabalha efetivamente 30 horas por semana. Entretanto, se outras secretárias forem empregadas, o resultado de sua conversa provocará uma redução no número efetivo de horas trabalhadas por semana e por secretária de $\frac{30(x-1)^2}{33}$ horas, onde x é o número total de secretárias empregadas. Quantas secretárias devem ser empregadas para produzir o máximo de trabalho efetivo por semana?

8. A equação de demanda de uma certa mercadoria é

$$10^6 px = 10^9 - 2.10^6 x + 18.10^3 x^2 - 6x^3,$$

onde x é o número de unidades produzidas semanalmente, p reais é o preço de cada unidade e $x \geq 100$. O custo de produção da cada unidade é dado por $c(x) = \frac{1}{50}x - 24 + 11.10^3 x^{-1}$. Encontre o número de unidades que devem ser produzidas semanalmente e o preço de cada unidade para que o lucro semanal seja máximo.

9. Dada a circunferência $x^2 + y^2 = 9$, encontre a menor distância do ponto $(4, 5)$ a um ponto da circunferência.

Auto-avaliação

Nesta aula, você deve demonstrar domínio dos conteúdos vistos nas aulas 21 e 22. Entretanto para que você tenha êxito na resolução dos exercícios você deve demonstrar, também, conhecimento de geometria plana e espacial (área e perímetro de polígonos, volume e área da superfície de sólidos), geometria analítica (equações de cônicas, distância entre dois pontos, no plano e no espaço) e dominar alguns conceitos básicos de contabilidade, tais como, receita, despesa, lucro, etc... Caso persista alguma dúvida, procure o tutor no seu pólo.

Aula 25 – Exercícios resolvidos.

Referência: Aula 24.

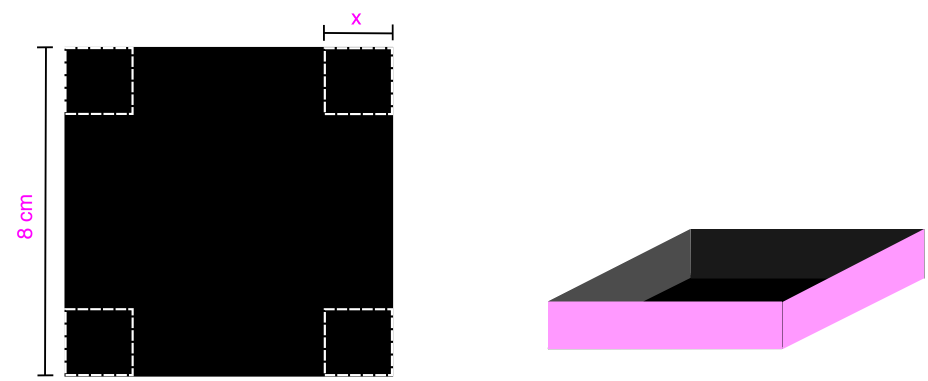
Objetivo

Fixar o conteúdo da aula 24 dando ênfase à resolução de problemas aplicados.

Exercício 1: Determine o volume da maior caixa, sem tampa, que pode ser feita com um pedaço quadrado de papelão de 8cm de lado através do corte de quadrados iguais nos quatro cantos do papelão e dobrando-se os lados.

Solução: Sejam x o lado dos quadrados do papelão a serem recortados e V o volume (em centímetros cúbicos) da caixa.

As dimensões em centímetros da caixa são x, $(8-2x)$ e $(8-2x)$. A Figura 25.1a representa o pedaço de papelão e a Figuta 25.1b representa a caixa.



(a) (b)

Figura 25.1

O volume da caixa é, portanto, $V = V(x) = x(8-2x)^2$. Se $x = 0$ ou $x = 4$, $V(x) = 0$. Assim, o valor de x procurado está no intervalo $[0,4]$. Um máximo relativo de $V(x)$ em $(0,4)$ é um ponto $x \in (0,4)$ tal que $V'(x) = 0$ e $V''(x) < 0$. Como $V'(x) = 3x^2 - 16x + 16$, $V'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 4$ ou $x = \frac{4}{3}$; o único ponto crítico de $V(x)$ em $(0,4)$ é, portanto, $x = \frac{4}{3}$. Além disso, $V''(x) = 6x - 16$, donde $V''\left(\frac{4}{3}\right) < 0$, mostrando que $x = \frac{4}{3}$ é o ponto de máximo relativo em $(0,4)$. Como $V(0) = V(4) = 0$ e $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1024}{27}$, concluímos que o volume máximo que pode ser obtido é de $\frac{1024}{27}$ centímetros cúbicos e isto ocorre quando os lados dos quadrados recortados medem $\frac{4}{3}$ centímetros.

Exercício 2: Encontre as dimensões do cone circular de volume máximo que pode ser inscrito em uma esfera de 4 centímetros de raio.

Solução: O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, onde h é a altura do cone e r o raio da base do cone. Na Figura 25.2, O é o centro da esfera e A o centro da base circular do cone.

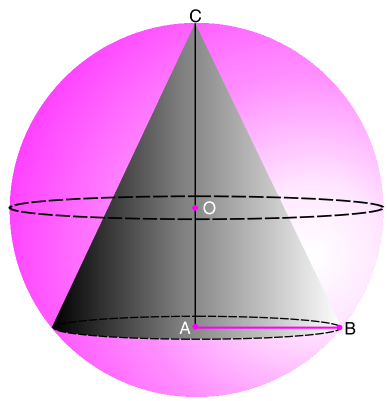


Figura 25.2

Denotamos por $|\overline{OA}|$ o comprimento do segmento ligando os pontos O e A.

Assim, $h = |\overline{AC}| = 4 + |\overline{OA}|$ e $r = |\overline{AB}|$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OAB, obtemos $r^2 = 16 - |\overline{OA}|^2$. Por outro lado, $|\overline{OA}|^2 = (h-4)^2$, ou seja, $r^2 = 16 - (h-4)^2$.

Portanto, o volume do cone é dado por

$$V = V(h) = \frac{1}{3}\pi(16 - (h-4)^2)h = \frac{8}{3}\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3, h \in [0, 8]\ .$$

Como $V'(h) = \frac{16}{3}\pi h - \pi h^2$, segue que o ponto crítico de $V(h)$ em $(0, 8)$ é $h = \frac{16}{3}$. Como $V(0) = V(8) = 0$ e $V\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{2048}{81}\pi$, o volume máximo é atingido quando $h = \frac{16}{3}$ centímetros e $r = \sqrt{16 - \left(\frac{16}{3} - 4\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$ centímetros.

Exrcício 3: Um arremessador de peso lança sua bola de ferro de tal forma que a altura em metros atingida pela bola é expressa por

$$y(x) = mx - (m^2 + 1)\frac{x^2}{800}\ ,$$

onde m é o coeficiente angular da trajetória no momento do arremesso e x é a distância do ponto de lançamento até a projeção, no nível horizontal, da posição da bola em um instante dado (ver a Figura 25.3) . Determine o valor de m para o qual o arremesso é o melhor possível.

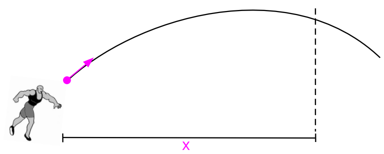


Figura 25.3

Solução: Estamos procurando o valor de m para o qual, ao tocar o chão, a distância x percorrida pela bola seja máxima. Para qualquer valor de m, a bola toca o chão quando $y = 0$, isto é, quando $mx = (m^2 + 1)\frac{x^2}{800}$. Determinando x, obtemos

$$x = x(m) = \frac{800m}{m^2 + 1} .$$

Nosso problema é, portanto, encontrar o valor de m que maximize a função $x(m)$, $m \in (0, +\infty)$. Derivando $x(m)$, temos $x'(m) = 800\frac{1-m^2}{(m^2+1)^2}$; $m = 1$ é, portanto, o único ponto crítico. A solução $m = 1$ indicaria que para se obter o melhor arremesso a bola deveria partir com uma inclinação de 45° e, neste caso, a distância atingida seria de 400 metros. Não é difícil acreditar que, de fato, o coeficiente angular $m = 1$ maximiza $x(m)$. Por via das dúvidas, comprovemos nossa crença. O sinal de $x'(m)$ é determinado pelos sinal do numerador $1 - m^2$. Como $x'(m) > 0$ em $(0, 1)$ e $x'(m) < 0$ em $(1, +\infty)$, segue que $x(m)$ possui um máximo absoluto em $m = 1$.

Uma outra pergunta que poderíamos fazer é: fixado um coeficiente angular m, a que distância x do lançamento a altura y da bola seria máxima?

Neste caso, o valor m é uma constante e procuramos o valor de $x \in (0, +\infty)$ para o qual $y(x) = mx - (m^2 + 1)\frac{x^2}{800}$ é máximo.

Visto que $\frac{dy}{dx} = m - \frac{(m^2+1)x}{400} = 0$ se, e somente se, $x = \frac{400m}{m^2+1}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{m^2+1}{400} < 0$ para todo $x > 0$, concluímos que $y(x)$ possui um máximo relativo em $x = \frac{400m}{m^2+1}$. Pelo sinal da derivada, vemos que y é crescente em $\left(0, \frac{400m}{m^2+1}\right)$ e decrescente em $\left(\frac{400m}{m^2+1}, +\infty\right)$. Concluimos, portanto, que y possui um máximo absoluto em $x = \frac{400m}{m^2+1}$.

Comparemos, agora, com a resposta da primeira pergunta: ao tomarmos $m = 1$ vemos que a altura máxima é obtida quando $x = 200$ metros, isto é, a meio caminho entre o lançamento e o ponto onde a bola toca o chão. Bastante razoável você não acha?

Exercício 4: Um hotel de um andar com área retangular de 14.000 metros quadrados será construído. Segundo a legislação vigente, constatou-se que a construção deve ser feita de maneira que se tenha uma área livre de 22 metros na frente, 22 metros nos fundos e 15 metros de cada lado. Encontre as dimensões do lote de área mínima no qual pode ser construído este hotel.

Solução: A Figura 25.4 representa o lote e o hotel vistos de cima, respeitadas as exigências da legislação.

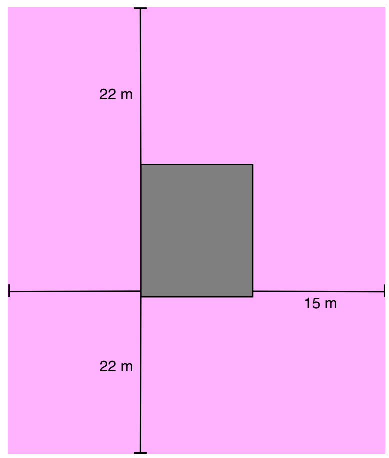


Figura 25.4

Sendo as dimensões do lote dadas por l e h, segue que os lados do hotel são $l - 30$ e $h - 44$. Assim, $14.000 = (l - 30)(h - 44)$, donde $l = \frac{11.880+30h}{h-44}$. Sendo a área do lote dada por $A = lh$, substituindo a expressão de l, obtemos

$$A = A(h) = \frac{11.880h + 30h^2}{h - 44}$$

Note que, pelos dados do problema, $h > 44$. Como

$$A'(h) = \frac{3h^2 - 264h - 56.672}{(h - 44)^2}$$

os pontos críticos de $A(h)$ são os valores de $h \in (44, +\infty)$ que satisfazem $3h^2 - 264h - 56.672 = 0$. Logo, o único ponto crítico é $h = 44(1 + \sqrt{10})$. Note que, pelo sinal da derivada, $A(h)$ é decrescente em $(44, 44(1 + \sqrt{10}))$ e crescente em $(44(1 + \sqrt{10}), +\infty)$. Concluímos, assim, que $A(h)$ possui um mínimo absoluto em $h = 44(1 + \sqrt{10})$ e as dimensões do lote de área mínima são dadas por $h = 44(1 + \sqrt{10})$ metros e $l = 30(1 + \sqrt{10})$ metros.

Exercício 5: Para produzir uma determinada peça do sistema de freios de um automóvel, uma fábrica de autopeças tem $C(x)$ reais de custo para produzir semanalmente x unidades da referida peça, onde $C(x) = 50x + 300$. Se a demanda por x unidades semanais é de $x + 15p = 950$, onde p reais é o preço por unidade, determine o número de peças que devem ser produzidas para se obter o lucro máximo.

Solução: Como o preço por unidade é $p = \frac{950-x}{15}$ reais, $x \in [0, 950]$ (x e p são não negativos), a receita por x unidades da peça é $R(x) = x\frac{950-x}{15}$. Sendo o lucro $L(x)$ igual a receita menos a despesa, temos

$$L(x) = \frac{950x - x^2}{15} - 50x - 300\ .$$

Um ponto de máximo relativo de L em $(0, 950)$ é um ponto x tal que $L'(x) = 0$ e $L''(x) < 0$.

Sendo $L'(x) = \frac{-2x+200}{15}$ e $L''(x) = -\frac{2}{15}$ para todo $x \in (0, 950)$, concluímos que $x = 100$ é o único ponto de máximo relativo em $(0, 950)$. Finalmente, como $L(0) = -300$, $L(100) = \frac{1.100}{3}$ e $L(950) < 0$, para obter o lucro máximo a fábrica deve produzir 100 peças por semana e vender cada peça por R$56,66.

Exercício 6: No Exercício 5, suponha, também, que o governo exija 80 centavos de imposto por unidade produzida. Quantas unidades devem ser produzidas semanalmente para se obter o lucro máximo?

Solução: Com o imposto acrescentado, o custo total passa a ser $C(x) = 50x + 300 + 0,80x$; portanto, a função lucro passa a ser $L(x) = \frac{950x-x^2}{15} - 50,8x - 300$, $x \in [0, 950]$. Como $L'(x) = \frac{-2x+188}{15}$ e $L''(x) = -\frac{2}{15} < 0$ para todo $x \in (0, 950)$, concluímos, como no Exercício 6, que $x = 94$ é o ponto de máximo absoluto, ou seja, para obter lucro máximo a fábrica deve produzir 94 peças por semana e vender cada peça por R$57,06.

É interessante notar que, ao compararmos os resultados dos Exercícios 5 e 6, o aumento total de 80 centavos não deve ser repassado integralmente para o consumidor para que o lucro semanal máximo seja atingido. O fabricante deve repassar somente 40 centavos para o consumidor. O que esse resultado está nos dizendo é que o consumidor resiste a grandes variações de preço.

Exercício 7: Uma empresa de seguro de saúde fez um acordo com a Associação de Docentes de uma universidade no qual, a partir do 12° professor, cada novo professor segurado teria um desconto de 2 por cento no valor do plano individual. Adimitindo-se que no acordo não se pode incluir dependentes, qual o número de professores necessários para que a empresa tenha receita máxima?

Solução: Sejam x o número de professores segurados e R$$a$ o valor do seguro sem desconto por professor. Se $x \leq 12$, a receita da empresa é dada por ax reais. Por outro lado, se $x > 12$, o número de professores que receberão o desconto de 2 por cento é igual a $(x - 12)$, ou seja, devemos diminuir de ax o valor de $\frac{2}{100}(x-12)ax$ reais. Assim, a receita total da empresa é dada por

$$R(x) = \begin{cases} ax \text{ se } 0 \leq x \leq 12, \\ ax - \left[\dfrac{2}{100}(x-12)\right]ax \text{ se } x > 12. \end{cases}$$

Temos que R é contínua em $[0, +\infty)$, não é derivável em $x = 12$ e

$$R^{'}(x) = \begin{cases} a \text{ se } 0 \leq x < 12, \\ \dfrac{124}{100}a - \dfrac{4}{100}ax \text{ se } x > 12. \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos de R são $x = 12$ e $x = 31$. Como $R^{'}(x) > 0$ em $(0, 12)$ e também em $(12, 31)$, temos que R é crescente em $[0, 31]$. Mas $R^{'}(x) < 0$ para $x > 31$; logo, $x = 31$ é o ponto de máximo absoluto de R. Assim, com 31 professores a empresa terá receita máxima.

Resumo

Esses exercícios comentados devem ter contribuído para sua compreensão da aula 24. Além disso, você deve ter sanado algumas dúvidas em exercícios nos quais teve dificuldade ou não conseguiu resolver. Se esse for o caso, retorne a eles e refaça-os.

Aula 26 – A regra de L'Hôpital.

Referência: Aulas 3, 4, 5 e 10.

Objetivo

Usar a derivada para determinar certos limites onde as propriedades básicas de limites, vistas nas aulas 3, 4, e 5, não se aplicam.

Você se lembra de que, na aula 3, do módulo 1, vimos como conseqüência das Proposições 3.2 e 3.3 que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, com $l_2 \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

No caso em que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ esta regra não pode ser aplicada. É o caso, por exemplo, do $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ que, como vimos, não existe. É o caso, também, do $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$. Para determinar este limite lançamos mão da fatoração de polinômios. Obtemos que este limite é igual a

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x-3} = -1 \ .$$

O $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen x}{x}$, visto na aula 4, é um outro exemplo dessa situação. Mostramos que este limite é igual a 1 usando outras técnicas.

Uma pergunta natural a se fazer é: existe uma maneira mais simples de determinar limites de funções quando as propriedades elementares por nós conhecidas não se aplicam? Daremos a resposta a esta pergunta em alguns casos.

O que veremos agora é que, sob certas hipóteses, podemos usar a derivada para determinar $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no caso em que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Iniciemos pela **forma indeterminada** $\frac{0}{0}$.

Definição 26.1 Quando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, dizemos que a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em a

Veremos, agora, um método geral para encontrar o limite de uma função que tem a forma indeterminanda $\frac{0}{0}$ em um número a. Este método é atribuído ao matemático amador francês Guillaume François de L'Hôpital (1661-1707), que escreveu o primeiro livro de Cálculo, publicado em 1696. Este método é conhecido como *regra de L'Hôpital*.

Teorema 26.1 (regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Suponha que para todo $x \neq a$ em I, $g^{'}(x) \neq 0$. Suponha, além disso, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Então, se $\lim\limits_{x \to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L$, segue que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

O que o teorema nos diz é que se $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em a e se a derivada do numerador $f^{'}(x)$ e do denominador $g^{'}(x)$ são tais que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L$, então $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

O teorema também é válido se todos os limites forem limites à direita ou se todos os limites forem limites à esquerda. É o caso, por exemplo, quando o ponto a for o extremo inferior de I ou o extremo superior de I.

Antes de demonstrar o teorema, vamos ilustrar seu uso em alguns exemplos.

Exemplo 26.1

Usando fatoração de polinômios, vimos que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = -1$. Como $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 6) = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{2x - 5} = -1 \, .$$

Exemplo 26.2

Já sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$. Como $\lim\limits_{x \to 0} senx = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{cosx}{1} = 1 \, .$$

Exemplo 26.3

Vamos determinar o $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2cos^2x - 2}{sen^2x}$.

Temos $\lim\limits_{x \to 0}(2cos^2x - 2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} sen^2x = 0$; aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{2cos^2x - 2}{sen^2x} = \lim_{x \to 0} \frac{4(cosx)(-senx)}{2(senx)(cosx)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2cosx}{cosx} = -2 \, .$$

O exemplo a seguir mostra que a regra de L'Hôpital pode ser aplicada repetidas vezes desde que em cada etapa as condições do Teorema 26.1 sejam satisfeitas.

Exemplo 26.4

Determinemos o $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-cos(2x)}$.

Como a função $\frac{x^2}{1-cos(2x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em $a=0$, podemos aplicar a regra de l'Hôpital para obter

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2sen(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(2x)}\ .$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} sen(2x) = 0$, podemos, de novo, aplicar a regra de l'Hôpital para obter

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2cos(2x)} = \frac{1}{2}\ .$$

Na aula 16 você foi apresentado ao teorema do valor médio. Agora, para demonstrar o Teorema 26.1, necessitamos do teorema conhecido como o *teorema do valor médio de Cauchy* que é uma extensão do teorema do valor médio. Este teorema é atribuído ao matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Teorema 26.2

(Teorema do valor médio de Cauchy) Sejam f e g duas funções tais que:

(a) f e g são contínuas no intervalo fechado $[a,b]$;

(b) f e g são deriváveis no intervalo aberto (a,b);

(c) $g^{'}(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Então existe pelo menos um número $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}\ .$$

Demonstração: Observe que, se $g(a) = g(b)$, então pelo teorema de Rolle (visto na aula 16) existe $x \in (a,b)$ tal que $g^{'}(x) = 0$, o que contraria a hipótese do teorema. Portanto, $g(a) \neq g(b)$, isto é, $g(b)-g(a) \neq 0$. Considere a função h definida por

$$h(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x) \text{ para } x \in [a,b]\ .$$

Evidentemente, h é contínua em $[a,b]$, pois f e g são contínuas em $[a,b]$. Analogamente, como f e g são deriváveis em (a,b), segue que h é derivável em (a,b) e

$$h^{'}(x) = [f(b)-f(a)]g^{'}(x) - [g(b)-g(a)]f^{'}(x) \text{ para } x \in (a,b)\ .$$

Agora,

$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

e

$$h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \; .$$

ou seja, $h(a) = h(b)$. Podemos, portanto, aplicar o teorema de Rolle à função h e concluir que existe um número $c \in (a, b)$ tal que $h^{'}(c) = 0$, isto é,

$$0 = [f(b) - f(a)]g^{'}(c) - [g(b) - g(a)]f^{'}(c) \; .$$

Como $g(b) - g(a) \neq 0$ e, por hipótese, $g^{'}(c) \neq 0$, concluímos da última igualdade que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} \; ,$$

provando assim o teorema.

Você pode observar que se a função g é dada por $g(x) = x$, então $g^{'}(x) = 1$ e a conclusão do teorema se reduz à conclusão do teorema do valor médio.

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 26.1. Note que, se provarmos a regra de l'Hôpital para o caso em que x se aproxima de a pela direita e o caso em que x se aproxima de a pela esquerda, o teorema estará provado, pois a igualdade dos limites laterais garante a conclusão do teorema.

Faremos a demonstração para o limite à direita; o outro caso é análogo.

Demonstração do Teorema 26.1: Vamos mostrar que se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L$, então $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Considere as funções F e G definidas por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq a, \\ 0 \text{ se } x = a; \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) \text{ se } x \neq a, \\ 0 \text{ se } x = a. \end{cases}$$

Seja $b \in I$ tal que $b > a$. Como f e g são deriváveis em I, exceto possivelmente em $x = a$, temos que F e G são deriváveis em $(a, x]$ para todo $x \in (a, b)$ e, portanto, contínuas em $(a, x]$ para todo $x \in (a, b)$. Note também que, como $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0 = F(a)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} G(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0 = G(a)$, concluímos que F e G são contínuas em cada intervalo $[a, x]$, para todo $x \in (a, b)$. Vemos, assim, que F e G satisfazem as hipóteses do teorema do valor médio de Cauchy em cada intervalo $[a, x]$, para $x \in (a, b)$. Segue, então, que para cada $x \in (a, b)$ existe $c_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)},$$

ou seja,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} .$$

É importante observar que o número c_x depende de x visto que, para cada $x \in (a, b)$, o intervalo (a, x) ao qual c_x pertence, varia. Por outro lado, quando $x \to a^+$, também $c_x \to a^+$; conseqüentemente,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L ,$$

o que prova o teorema.

Veremos, agora, que a regra de l'Hôpital também é válida no caso em que $x \to +\infty$ e no caso em que $x \to -\infty$. Enunciaremos e demonstraremos somente o primeiro caso; o segundo, deixaremos como exercício (ver o Exercício 3).

Teorema 26.3

Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo aberto $(a, +\infty)$, sendo a uma constante positiva e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$. Suponha que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Então, se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L ,$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Demonstração:

Fazendo $t = \frac{1}{x}$ para $x > a$, segue que $x = \frac{1}{t}$ com $0 < t < \frac{1}{a}$ e $t \to 0^+$ quando $x \to +\infty$. Considere as funções F e G definidas por

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ e } G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \text{ para } t \in \left(0, \frac{1}{a}\right) .$$

Note que $\lim_{t \to 0^+} F(t) = \lim_{t \to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Analogamente, $\lim_{t \to 0^+} G(t) = \lim_{t \to 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Pela regra da cadeia, F e G são deriváveis em $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ e

$$F^{'}(t) = -\frac{1}{t^2} f^{'}\left(\frac{1}{t}\right) \text{ e } G^{'}(t) = -\frac{1}{t^2} g^{'}\left(\frac{1}{t}\right) \text{ para } t \in \left(0, \frac{1}{a}\right).$$

Aplicando o Teorema 26.1 às funções F e G no intervalo $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F^{'}(t)}{G^{'}(t)};$$

logo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F^{'}(t)}{G^{'}(t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f^{'}(\frac{1}{t})}{g^{'}(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L,$$

o que completa a prova do teorema.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 26.5

O $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{sen\left(\frac{2}{x}\right)}$ é tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} sen\left(\frac{2}{x}\right) = 0$. Podemos, assim, aplicar o Teorema 26.3 para obter

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{sen\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{2}{x^2}cos\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{cos\left(\frac{1}{x}\right)}{cos\left(\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Agora, passaremos ao estudo de outras formas indeterminadas.

Vejamos **a forma indeterminada** $\frac{\infty}{\infty}$

Se você quiser determinar o $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sec^2 x}{sec^2(3x)}$, você não pode aplicar a propriedade do quociente, pois $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} sec^2 x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} sec^2(3x) = +\infty$. Veremos, agora, que a regra de l'Hôpital também se aplica a uma forma indeterminada deste tipo.

Definição 26.2 Quando $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, dizemos que a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ em a.

Você deve observar na definição que as formas $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ e $\frac{+\infty}{-\infty}$ são, todas elas, indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

O teorema que veremos a seguir é a *regra de l'Hôpital* para a forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Sua demonstração será omitida, pois está além dos objetivos deste curso.

Teorema 26.4

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I. Suponha, além disso, que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Então, se

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

segue que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L\ .$$

O Teorema 26.4 também vale no caso em que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, sendo ainda válido se considerarmos limites laterais.

Exemplo 26.6

Determinemos o $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{7tgx}{5 + secx}$.

Como $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 7tgx = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (5 + secx) = -\infty$, podemos aplicar o Teorema 26.4 para obter

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{7tgx}{5 + secx} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{7sec^2x}{(secx)(tgx)} = \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{7secx}{tgx} = \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{7}{cosx}}{\frac{senx}{cosx}} = \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{7}{senx} = 7\ . \end{aligned}$$

Exemplo 26.7

Determinemos o $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{cos\left(\frac{1}{x}\right) - x}$.

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(cos\left(\frac{1}{x}\right) - x\right) = -\infty$, podemos aplicar a regra de l'Hôpital para obter

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{cos\left(\frac{1}{x}\right) - x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1} = \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1} = +\infty\ . \end{aligned}$$

Veremos, agora, mais dois casos de formas indeterminadas. São elas **as formas indeterminadas** $\infty.0$ **e** $\infty - \infty$.

Definição 26.3 Se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, dizemos que o produto $f(x).g(x)$ tem a forma indeterminada $\infty.0$.

Para determinar $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$, escrevemos $f(x).g(x)$ como $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ ou como $\frac{f(x)}{1/g(x)}$. No primeiro caso, obtemos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ e, no segundo caso, obtemos a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. A escolha de uma das duas formas dependerá de qual delas é a mais conveniente, em cada caso.

Exemplo 26.8

Calculemos o $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) sec(5x)$.

Como $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} sec(5x) = +\infty$, temos uma forma indeterminada do tipo $\infty.0$. Escrevendo $\left(x-\frac{\pi}{2}\right) sec(5x)$ como $\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{sec(5x)}}$, obtemos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de l'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) sec(5x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{sec(5x)}} = \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{-5sec(5x).tg(5x)}{sec^2(5x)}} = \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{-5tg(5x)}{sec(5x)}} = \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{-5tg(5x)}{sec^2(5x)}} = \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1/cos(5x)}{-5sen(5x)/cos(5x)} = \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} -\frac{1}{5sen(5x)} = -\frac{1}{5}\,.
\end{aligned}$$

Você deve estar se perguntando porque não foi feita a escolha de se escrever $\left(x-\frac{\pi}{2}\right) sec(5x)$ como $\frac{sec(5x)}{\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}$. O motivo é que ao derivar o numerador e o denominador deste quociente, obtemos $\frac{5sec(5x)tg(5x)}{\frac{-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}$ o que, convenhamos, não ajuda em nada. Por isso, a escolha entre as duas formas de escrita do produto $f(x).g(x)$ como um quociente deve ser feita levando-se em conta qual dentre elas facilita a aplicação da regra de l'Hôpital.

É claro, também, que poderíamos ter determinado este limite muito mais facilmente escrevendo $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)sec(5x)$ como $\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{cos(5x)}$, obtendo a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ que, neste caso, tem solução bem mais simples. A opção pela solução apresentada teve como objetivo ilustrar a técnica no caso de uma indeterminação da forma $\infty.0$.

Definição 26.4 Se $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, dizemos que a diferença $f(x)-g(x)$ tem a forma indeterminada $\infty-\infty$.

Para resolver este tipo de indeterminação escreva $f(x)-g(x)$ como $\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)g(x)}$, observando que esse último quociente tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Exemplo 26.9

Calculemos o $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)$.

Claramente $\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}$ tem a forma indeterminada $\infty-\infty$. Escrevendo $\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}$ como $\frac{x-senx}{xsenx}$, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-senx}{xsenx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-cosx}{senx+xcosx},$$

que, de novo, tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a regra de l'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-senx}{xsenx}= \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-cosx}{senx+xcosx}= \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{2cosx-xsenx}=\frac{0}{2}=0\ .\end{aligned}$$

A regra de l'Hôpital se aplica a outras formas de indeterminação, a saber, 0^0, ∞^0 e 1^∞. Entretanto, para tratá-las, necessitaremos das funções logarítmica e exponencial, que serão estudadas nas aulas 36, 37, 38 e 39.

Resumo

Nesta aula você constatou, mais uma vez, a importância da derivada que, neste caso, através da regra de L'Hôpital, se mostrou extremamente eficaz para o cálculo de certos limites.

Exercícios

1. Encontre todos os valores de c, no intervalo $[a, b]$ dado, que satisfaçam a conclusão do teorema do valor médio de Cauchy para o par de funções dadas.

   (a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$; $[a, b] = [0, 2]$.

   (b) $f(x) = cosx$, $g(x) = senx$; $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$.

   (c) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $[a, b] = [0, 2]$.

   (d) $f(x) = tg\, x$, $g(x) = \frac{4x}{\pi}$; $[a, b] = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

   (e) $f(x) = x^2(x^2 - 2)$, $g(x) = x$; $[a, b] = [-1, 1]$.

2. Use a regra de l'Hôpital para calcular cada um dos limites abaixo:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sen(\pi x)}{2-x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{tg\, x}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen(2/x)}{1/x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2 x}{sen(x^2)}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{cosx - cos(3x)}{sen(x^3)}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(2/x)}{tg(3/x)}$ (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen(7/x)}{5/x}$.

3. Enuncie e demonstre o Teorema 26.3 no caso em que $x \to -\infty$.

4. Use a regra de l'Hôpital para calcular cada um dos limites abaixo:

   $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1 + secx}{tg\, x}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{sec(3\pi x)}{tg(3\pi x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} xsen(\dfrac{\pi}{x})$

   (d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tgx\; tg(2x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

   (f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x}$

   (h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{1-senx} - \dfrac{2}{cos^2 x}\right)$.

5. Mostre que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Auto-avaliação

Nesta aula você aprendeu uma nova técnica para calcular limites. Os exercícios propostos exigem o domínio das regras de derivação e a identificação, em cada caso, da forma de indeterminação da regra de l'Hôpital a ser aplicada. Caso persista alguma dúvida, releia a aula com atenção ou procure o tutor no seu pólo.

Aula 27 – O Teorema da função inversa.

Referência: Aulas, 9,10 e 12.

Objetivos

Relembrar a noção de inversa de uma função e estudar a derivabilidade da inversa de uma função derivável.

Inicialmente, relembremos o conceito de *inversa de uma função*, já estudado na disciplina de Pré-Cálculo (aulas 36 e 39, do módulo 4). Por questões de objetividade, nos restringiremos às funções contínuas definidas em intervalos.

Exemplo 27.1

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Note que a imagem de f é o conjunto $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$. A pergunta que queremos responder é: dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $y = f(x) \in [-1, +\infty]$, é possível encontrar uma função $g : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $g(f(x)) = g(y) = x$? Responder a essa pergunta equivale a determinar se a solução da equação $y = x^2 - 1$ nos dá a variável x como uma função da variável y, concorda? Ora, resolvendo a equação, obtemos $x = \pm\sqrt{y+1}$, ou seja, para cada $y \in (-1, +\infty)$ há dois valores de x para os quais $f(x) = y$. Assim, x não pode ser obtido como uma função de y, pois para que pudéssemos definir uma tal função, o valor de x, para um y dado, deveria ser único. Isso mostra que uma tal função g não existe.

Exemplo 27.2

Considere, agora, a função $f : [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 1$, como no Exemplo 1. A pergunta do Exemplo 1 passa a ser, neste caso, a seguinte: dado qualquer $x \in [0, +\infty)$ e $y = f(x) \in [-1, +\infty)$, existe uma função $g : [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que $g(f(x)) = g(y) = x$? Analogamente, resolvendo a equação $y = x^2 - 1$ para valores de $x \in [0, +\infty)$, obtemos como solução $x = \sqrt{y+1}$. Assim, a função g procurada é $g(y) = \sqrt{y+1}$.

Note que $g(f(x)) = \sqrt{f(x)+1} = \sqrt{(x^2-1)+1} = x$, como queríamos, e que $f(g(y)) = (g(y))^2 - 1 = (\sqrt{y+1})^2 - 1 = (y+1) - 1 = y$.

Você pode observar que da igualdade $g(f(x)) = x$ pode-se dizer, de maneira ingênua, que o que a função f faz com um ponto $x \in [0, +\infty)$ a função g desfaz. Da mesma maneira, da igualdade $f(g(y)) = y$ pode-se dizer que o que a função g faz com um ponto $y \in [-1, +\infty)$ a função f desfaz.

Neste sentido dizemos que g é a inversa da função f e f é a inversa da função g. Uma definição precisa da inversa de uma função, no caso particular em que estaremos interessados, é a seguinte:

Definição 27.1 Sejam I um intervalo não trivial e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I. Dizemos que f é inversível, se existe uma função $g : f(I) \to \mathbb{R}$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in I$. Uma tal função g é necessariamente única, é denominada a inversa da função f e é denotada por f^{-1}.

Antes de continuar, façamos algumas observações relevantes a respeito da definição acima.

(a) f é injetora: realmente, sejam $x_1,\ x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$; então $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$, ou seja, $x_1 = x_2$. Assim, f é injetora.

(b) $f : I \to f(I)$ é bijetora: isto é claro em vista de (a), já que $f(I) = \{f(x); x \in I\}$.

(c) $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(I)$: realmente, seja $y \in f(I)$; então $y = f(x)$, para $x \in I$. Logo, $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(f(x))) = f(x) = y$.

(d) $f^{-1} : f(I) \to I$ é bijetora: realmente, o fato de f^{-1} ser sobrejetora segue da própria definição e o fato de f^{-1} ser injetora segue de (c).

(e) $f(I)$ é um intervalo não trivial: realmente, o fato de que $f(I)$ é um intervalo foi provado na aula 7 (lembrar que f é contínua) e o fato de que $f(I)$ não é um conjunto unitário decorre de (a).

Considere, agora, os dois gráficos de funções, indicados nas Figuras 27.1a e 27.1b.

(a) (b)

Figura 27.1

Note que as duas funções são contínuas, a primeira sendo crescente e a segunda decrescente. Intuitivamente pode-se observar que ambos os gráficos têm a seguinte propriedade: ao se traçar qualquer reta horizontal passando por um ponto da imagem da função, esta reta interceptará o gráfico em um único ponto. Uma outra maneira de dizer isso é a seguinte: se f denota a função cujo gráfico é esboçado, digamos, na Figura 27.1a, então para cada y na imagem de f existe um único x no domínio de f tal que $f(x) = y$. Assim, podemos definir uma função g tal que, para cada y na imagem de f, $g(y) = x$, onde x é o único ponto que satisfaz $f(x) = y$. A função g, assim definida, satisfaz $g(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f, ou seja, g é a inversa da função f.

É importante observar que, na discussão imediatamente acima, a hipótese das funções serem crescentes ou decrescentes é realmente necessária, pois caso contrário não teríamos a unicidade do ponto x para um dado y na imagem da função f. A Figura 27.2 ilustra uma tal situação.

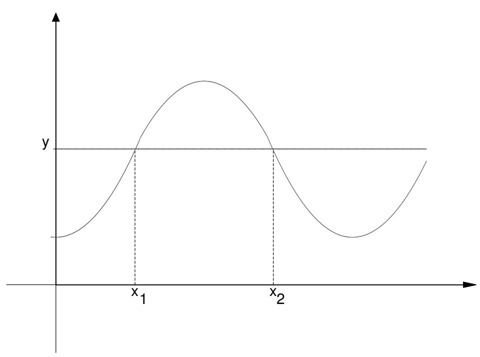


Figura 27.2

O próximo teorema prova o que acabamos de dizer.

Teorema 27.1

Sejam I um intervalo não trivial e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente(respectivamente decrescente). Então

(a) f possui uma inversa f^{-1} (que é definida em $f(I)$);

(b) f^{-1} é crescente (respectivamente decrescente) em $f(I)$;

(c) f^{-1} é contínua em $f(I)$.

O item (c) será demonstrado na disciplina de Análise.

Demonstração: Faremos a demonstração de (a) e (b) no caso em que f é crescente; o caso em que f é decrescente é análogo.

(a) Para cada $y \in f(I)$ existe pelo menos um valor de $x \in I$ tal que $f(x) = y$. Vamos mostrar que x é único. Com efeito, se $w \in I$ e $w \neq x$, então $w < x$ ou $w > x$. No primeiro caso, $f(w) < f(x)$ e, no segundo caso, $f(w) > f(x)$, pois estamos supondo f crescente. Assim, $f(w) \neq f(x) = y$, mostrando a unicidade de x. Defina $g\colon f(I) \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira: para cada $y \in f(I)$, faça $g(y) = x$, onde x é o único elemento de I tal que $f(x) = y$. Temos, assim, que $g(f(x)) = g(y) = x$ para todo $x \in I$, mostrando que f é inversível.

(b) Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$, com $y_1 < y_2$. Devemos mostrar que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Ora, se $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$, temos que $f(x_1) = y_1 < f(x_2) = y_2$. Como f é crescente, conclui-se que $x_1 < x_2$, isto é, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Exemplo 27.3

Seja f a função definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ em $\mathbb{R} - \{-1\}$. Como $f^{'}(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$ para $x \neq -1$, segue que f é crescente em $\mathbb{R} - \{-1\}$. Pelo Teorema 27.1 (a), (b), f é inversível e f^{-1} é crescente. Para encontrar f^{-1}, considere a equação $y = f(x)$; tirando x como função de y, obtemos

$$y = \frac{2x-3}{x+1},$$

$$xy + y = 2x - 3,$$

$$2x - xy = y + 3,$$

$$x(2-y) = y + 3,$$

donde

$$x = \frac{y+3}{2-y}\ .$$

Assim, $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2-y}$, sendo f^{-1} definida em $\mathbb{R} - \{2\}$. O gráfico de f^{-1} é indicado na Figura 27.3.

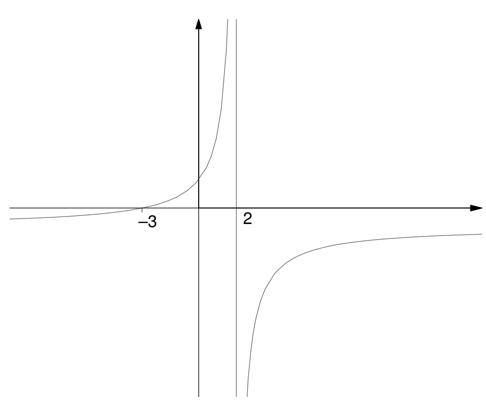


Figura 27.3

Veremos, agora, um teorema que estabelece, no caso de funções inversíveis, uma relação entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa.

Teorema 27.2

(Teorema da função inversa) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável e crescente ou decrescente em um intervalo não trivial I. Se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então f^{-1} é derivável em $f(I)$ e para todo $x \in I$, tem-se

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \, .$$

O Teorema 27.2 nos diz que para determinar a derivada da inversa f^{-1} em um ponto $f(x) \in f(I)$ do seu domínio, basta determinar a derivada $f'(x)$ de f em $x \in I$, ou seja, não é necessário conhecer f^{-1} para conhecer sua derivada. Antes de demonstrar o Teorema 27.2, vejamos dois exemplos.

Exemplo 27.4

Constatemos a validade do Teorema 27.2 para a função $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, do Exemplo 27.3, cuja inversa é $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2-y}$. Como $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, segue do Teorema 27.2 que f^{-1} é derivável em $\mathbb{R} - \{2\}$ e $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{(x+1)^2}{5}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Vamos comprovar este fato diretamente. Derivando f^{-1} em um ponto $y = f(x)$, temos

$$(f^{-1})'(y) = \frac{5}{(y-2)^2} \, .$$

Substituindo $y = \frac{2x-3}{x+1}$ na igualdade acima, obtemos

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{5}{\left(\frac{2x-3}{x+1} - 2\right)^2} = \frac{5}{\left(\frac{2x-3-2x-2}{x+1}\right)^2} = \frac{5}{\left(\frac{-5}{x+1}\right)^2} = \frac{(x+1)^2}{5} = \frac{1}{f'(x)} \, .$$

Exemplo 27.5

Seja $f(x) = x^3 + 2x - 5$, cuja derivada é $f'(x) = 3x^2 + 2$. Portanto, $f'(x) > 0$ para todo número real; assim, podemos aplicar os Teoremas 27.1 e 27.2 para concluir que f possui uma inversa f^{-1} e

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{3x^2 + 2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração do Teorema 27.2: Seja $x \in I$ e mostremos que f^{-1} é derivável em $y = f(x) \in f(I)$. De fato, sendo f crescente ou decrescente, para $w \neq 0$

tal que $y+w \in f(I)$, existe $h \neq 0$ tal que $x+h \in I$ e $f(x+h) = y+w$. Como $x = f^{-1}(y)$ e $x+h = f^{-1}(y+w)$, segue que $h = f^{-1}(y+w) - f^{-1}(y)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y+w)-f^{-1}(y)}{w} = \frac{h}{w} = \frac{h}{f(x+h)-y} &= \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}\,.\end{aligned}$$

Além disso, como f^{-1} é contínua em y pelo Teorema 27.1(c), segue que $\lim\limits_{w\to 0} h = \lim\limits_{w\to 0}(f^{-1}(y+w) - f^{-1}(y)) = 0$. Por outro lado, como f é contínua em x (pois é derivável em x), segue que $\lim\limits_{h\to 0} w = \lim\limits_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = 0$. Assim, $h \to 0$ se, e somente se, $w \to 0$. Aplicando a propriedade do quociente, obtemos

$$\lim_{w\to 0}\frac{f^{-1}(y+w)-f^{-1}(y)}{w} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Isto prova que f^{-1} é derivável em $y = f(x)$ e $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

O Teorema da função inversa nos dá a expressão da derivada de f^{-1} em cada ponto $f(x)$ de seu domínio $f(I)$. Se quiséssemos, poderíamos reescrever esta expressão da seguinte forma: cada elemento $x \in f(I)$ se escreve de modo único na forma $x = f(t)$, onde $t \in I$; logo,

$$(f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Exemplo 27.6

Seja n um inteiro positivo, $n \geq 2$.Vamos aplicar o Teorema da função inversa para mostrar que a derivada de $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é $g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ para todos os valores de x para os quais $\sqrt[n]{x}$ está definida, exceto para $x = 0$ (ver a aula 12).

Inicialmente, lembremos que g estará definida em $[0, +\infty)$ para n par e em $\mathbb{R}$ para n ímpar.

A função g é a inversa da função $f(x) = x^n$. Como $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ para todo $x \neq 0$, pelo Teorema da função inversa g é derivável e

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{nx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

para todo $x \neq 0$.

Exemplo 27.7

Considere a função $f : [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{sen\ x}{x}$. Como $xcos\ x > 0$ e $sen\ x < 0$ para todo $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, segue que $f^{'}(x) = \frac{xcos\ x - sen\ x}{x^2} > 0$ para todo $x \in \big[-\pi, -\frac{\pi}{2}\big]$. Logo, f é crescente em $\big[-\pi, -\frac{\pi}{2}\big]$, e do Teorema 27.1(a) resulta que f é inversível. Pelo Teorema da função inversa, f^{-1} é derivável e

$$(f^{-1})^{'}(f(x)) = \frac{x^2}{xcos\ x - sen\ x} \text{ para todo } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right].$$

Vamos, agora, determinar a derivada de f^{-1} no ponto $\frac{3}{7\pi}$. Pelo Teorema da função inversa, basta determinar para que valor de x $f(x) = \frac{sen\ x}{x} = \frac{3}{7\pi}$. Ora, como $\frac{3}{7\pi} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{7\pi}{6}} = \frac{sen\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}{-\frac{7\pi}{6}}$ e visto que $-\frac{7\pi}{6} \in \big[-\pi, -\frac{\pi}{2}\big]$, obtemos que $x = -\frac{7\pi}{6}$ é o ponto procurado. Assim,

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{'}\left(\frac{3}{7\pi}\right) = (f^{-1})^{'}\left(f\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) &= \frac{\left(-\frac{7\pi}{6}\right)^2}{-\frac{7\pi}{6}cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - sen\left(-\frac{7\pi}{6}\right)} = \\ &= \frac{\left(-\frac{7\pi}{6}\right)^2}{-\frac{7\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Resumo

Nesta aula você foi apresentado ao Teorema da função inversa, o qual será estudado mais profundamente na disciplina de Análise. Nas aulas 28 e 29 usaremos este teorema para estudar a derivabilidade das funções trigonométricas inversas.

Exercícios

1. Encontre, se existir, a inversa da função dada e determine seu domínio.

   (a) $f(x) = x^2 + 4$; (b) $f(x) = \frac{3x-1}{x}$; (c) $f(x) = x^3$;

   (d) $f(x) = x + 3|x|$; (e) $f(x) = \frac{4}{x^3+2}$; (f) $f(x) = \frac{4}{3+|x|}$.

2. Para cada uma das funções do Exercício 1, use o Teorema 27.1 para determinar o maior subconjunto do seu domínio onde f é inversível.

3. Mostre que cada uma das funções abaixo satisfaz as hipóteses do Teorema da função inversa no conjunto I e aplique-o para determinar a derivada da inversa no ponto a.

   (a) $f(x) = \sqrt{x-4}$, $I = (4, +\infty)$, $a = 4$;

   (b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $I = (0, +\infty)$, $a = 0$;

   (c) $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$, $I = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, $a = 0$;

   (d) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$, $I = (0, +\infty)$, $a = 0$.

4. Use as informações dadas e o Teorema da função inversa para calcular $(f^{-1})'(a)$ (admita que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas).

   (a) $a = 4$, $f(3) = 4$, $f'(3) = 1$;

   (b) $a = 2$, $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$;

   (c) $a = 0$, $f(5) = 0$, $f'(5) = 4$;

   (d) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Auto-avaliação

Nos exercícios propostos você deve demonstrar a compreensão do conceito de inversa de uma função, do significado dos Teoremas 27.1 e 27.2, bem como saber aplicá-los. Caso persista alguma dúvida, releia a aula com atenção ou procure o tutor no pólo.

Aula 28 – Funções trigonométricas inversas.

Referências: Aulas, 9, 10, 12 e 27.

Objetivos

Recordar as funções trigonométricas inversas e estudá-las no que diz respeito a sua derivabilidade.

Na aula 39, de Pré-Cálculo, você estudou as funções trigonométricas inversas: arco seno, arco cosseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante. O objetivo principal desta aula é estudar a derivabilidade das funções trigonométricas inversas, usando como ferramenta o Teorema da função inversa.

Sabemos que as funções trigonométricas são funções periódicas. Assim, dado um ponto y da imagem de uma tal função, existe uma infinidade de pontos do domínio que tem por imagem o ponto y. Portanto, todas elas são funções não inversíveis. Entretanto, ao restringirmos cada uma delas a intervalos convenientes, obtemos que elas são inversíveis. Aqui, nos concentraremos no estudo da derivabilidade das funções arco seno, arco cosseno e arco tangente.

Iniciemos com **a função arco seno**.

A função seno é contínua em $\mathbb{R}$ e tem por imagem o intervalo $[-1,1]$. Sendo uma função periódica de período 2π, segue que a função seno não é inversível.

Note, entretanto, que no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a função seno é crescente e $\left\{sen\ x;\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}=[-1,1]$. Pelo Teorema 27.1, a função sen : $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ é inversível, sendo sua inversa contínua em $[-1,1]$. A inversa em questão é a função arco seno, denotada por $arcsen$. Assim, $arcsen:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ é definida por $arcsen\ x=y$ se, e somente se, $x=sen\ y$.

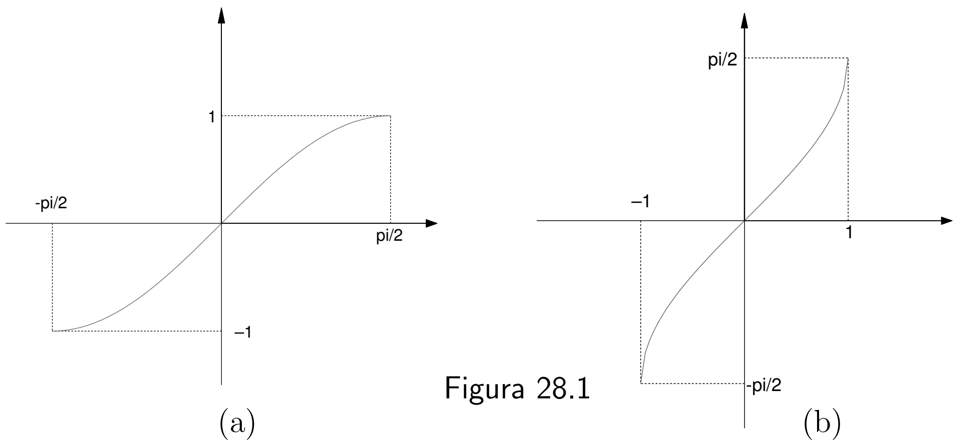
Pela definição de função inversa, podemos afirmar que

$$sen(arcsen\ x)=x \text{ para todo } x\in[-1,1]$$

e

$$arcsen(sen\ x)=x \text{ para todo } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Na Figura 28.1a, apresentamos o gráfico da função seno $\big($restrita ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\big)$ e, na Figura 28.1b, apresentamos o gráfico da função arco seno.



(a) (b)

Figura 28.1

Exemplo 28.1

Vamos calcular $arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

No primeiro caso, temos que determinar o valor de $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para o qual $sen\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $y = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $sen\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se que $arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Analogamente, como $y = -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $sen\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tem-se que $arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Proposição 28.1

A função arco seno é derivável em $(-1,1)$ e sua derivada é

$$(arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ para todo } x \in (-1,1)\ .$$

Demonstração: Para facilitar a compreensão da demonstração, escrevamos $f(x) = sen\, x$; logo, $f^{-1}(x) = arcsen\, x$ $(x \in [-1,1])$. Como $f'(x) = cos\, x > 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, segue do Teorema da função inversa que f^{-1} é derivável em $f\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1)$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos\ (f^{-1}(x))}$$

para todo $x \in (-1,1)$.

Da identidade $cos^2(f^{-1}(x)) = 1 - sen^2(f^{-1}(x))$ e visto que $cos\ (f^{-1}(x)) > 0$ para todo $x \in (-1,1)$, segue que $cos\ (f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - sen^2\ (f^{-1}(x))}$. Mas, $sen^2\ (f^{-1}(x)) = (sen\ (arcsen\ x))^2 = x^2$. Assim,

$$(f^{-1})'(x) = (arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in (-1,1)$.

Exemplo 28.2

Vamos calcular a derivada da função $f(x) = arcsen(x^2-1)$ para $x \in (0, \sqrt{2})$. Note que, se $h(x) = x^2-1$, então $h((0,\sqrt{2})) = (-1,1)$; logo, $f(x) = (g \circ h)(x)$ para todo $x \in (0,\sqrt{2})$, onde $g(x) = arcsen\ x$. Sendo g derivável em $(-1,1)$ e h derivável em $\mathbb{R}$ (logo, em $(0,\sqrt{2})$), a regra da cadeia garante que f é derivável em $(0,\sqrt{2})$ e

$$f^{'}(x) = g^{'}(h(x))h^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}2x = \frac{2}{\sqrt{-x^2+2}}\ .$$

Exemplo 28.3

Vamos usar a derivação implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$, onde y é uma função derivável da variável x dada pela equação $xarcsen\ y = x+y$ para $x, y \in (-1,1)$.

Derivando implicitamente ambos os lados da equação, obtemos

$$arcsen\ y + x(arcsen)^{'}(y)\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx},$$

ou seja,

$$arcsen\ y + x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}\ .$$

Assim,

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} - 1\right)\frac{dy}{dx} = 1 - arcsen\ y,$$

isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-arcsen\ y}{\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} - 1}\ .$$

Estudemos, agora, **a função arco cosseno**.

A função cosseno é contínua em $\mathbb{R}$ e tem por imagem o intervalo $[-1,1]$. Sendo uma função periódica de período 2π, segue que a função cosseno não é inversível.

Note, entretanto, que no intervalo $[0,\pi]$ a função cosseno é decrescente e $\{cos\ x;\ x \in [0,\pi]\} = [-1,1]$. Pelo Teorema 27.1, a função $cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ é inversível, sendo sua inversa contínua em $[-1,1]$. A inversa em questão é a função arco cosseno, denotada por $arccos$. Assim,

$arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ é definida por $arccos\ x = y$ se, e somente se, $x = cos\ y$.

Pela definição de função inversa, podemos afirmar que

$$cos(arccos\ x) = x \text{ para todo } x \in [-1, 1]$$

e

$$arccos(cos\ x) = x \text{ para todo } x \in [0, \pi]\ .$$

Na Figura 28.2a, apresentamos o gráfico da função cosseno (restrita ao intervalo $[0, \pi]$) e, na Figura 28.2b, apresentamos o gráfico da função arco cosseno.

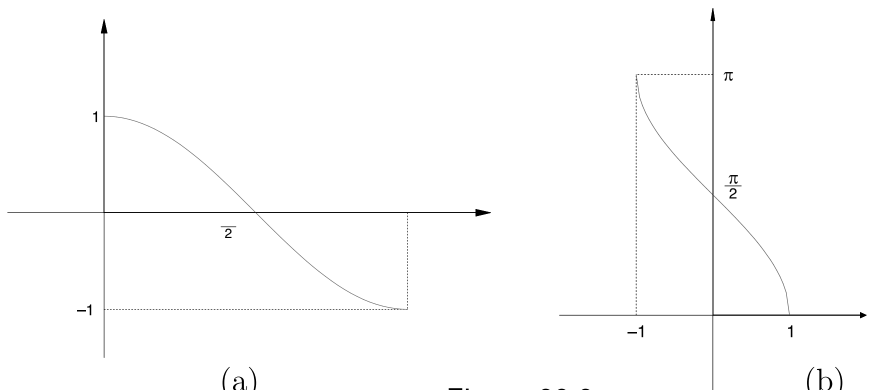


Figura 28.2

Proposição 28.2
A função arco cosseno é derivável em $(-1, 1)$ e sua derivada é

$$(arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Demonstração: Escrevamos $f(x) = cos\ x$; logo, $f^{-1}(x) = arccos\ x$ ($x \in [-1, 1]$). Como f é derivável em $(0, \pi)$ e $f'(x) = -sen\ x < 0$ para todo $x \in (0, \pi)$, segue do Teorema da função inversa que f^{-1} é derivável em $f((0, \pi)) = (-1, 1)$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{sen\ (f^{-1}(x))}$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Sendo $sen^2(f^{-1}(x)) = 1 - cos^2\ (f^{-1}(x))$ e $sen\ (f^{-1}(x)) > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$, obtemos que $sen\ (f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - cos^2\ (f^{-1}(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Assim,

$$(f^{-1})'(x) = (arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Exemplo 28.4

Considere a função $f(x) = arccos\ \frac{x^2-1}{x}$. Vamos determinar o domínio de f e estudar sua derivabilidade. Como o domínio da função arco cosseno é o intervalo $[-1,1]$, para determinar o domínio de f, devemos encontrar os valores de $x \neq 0$ para os quais $\frac{x^2-1}{x} \in [-1,1]$. O gráfico da função $h(x) = \frac{x^2-1}{x}$ é indicado na Figura 28.3.

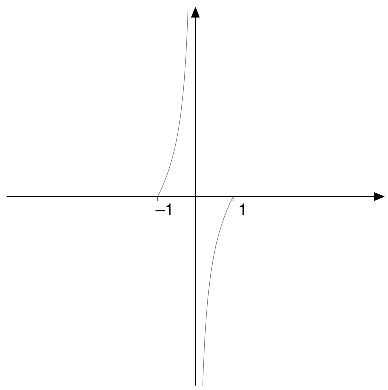


Figura 28.3

Os valores de x para os quais $h(x) = 1$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por outro lado, os valores de x para os quais $h(x) = -1$ são $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Sendo h uma função crescente em $\mathbb{R} - \{0\}$, temos que $h\Big(\Big[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big]\Big) = [-1,1]$ e $h\Big(\Big[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big]\Big) = [-1,1]$. Assim, o domínio de f é $\Big[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big] \cup \Big[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big]$. Pela regra da cadeia, f é derivável em $\Big(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) \cup \Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)$ e sua derivada é

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2}}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

para todo $x \in \Big(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) \cup \Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)$.

Vejamos, agora, **a função arco tangente.**

A função tangente é contínua no seu domínio de definição, a saber, $\mathbb{R} - \Big\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ímpar}\Big\}$. Sendo uma função periódica de período π, segue que a tangente não é inversível.

Note, entretanto, que no intervalo $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ ela é crescente e $\Big\{tg\ x;\ x \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\Big\} = \mathbb{R}$. Pelo Teorema 27.1, a função $tg : \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \mathbb{R}$ é inversível, sendo sua inversa contínua em $\mathbb{R}$. A inversa em questão é a função arco tangente, denotada por $arctg$. Assim,

$arctg : \mathbb{R} \to \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ é definida por $arctg\ x = y$ se, e somente se, $y = tg\ x$.

Pela definição de função inversa, podemos afirmar que

$$tg(arctg\ x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

e

$$arctg(tg\ x) = x \text{ para todo } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Na Figura 28.4a, apresentamos o gráfico da função tangente (restrita ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) e, na Figura 28.4b, apresentamos o gráfico da função arco tangente.

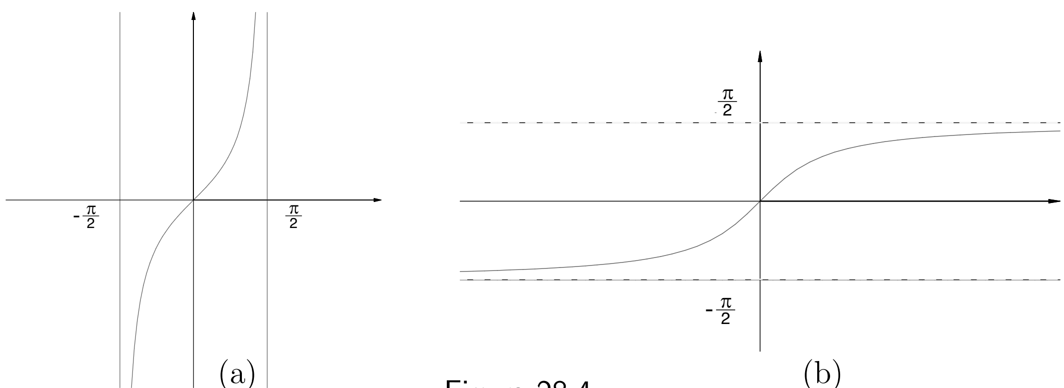


Figura 28.4

Proposição 28.3
A função arco tangente é derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada é

$$(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Escrevamos $f(x) = \text{tg}\ x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; logo, $f^{-1}(x) = arctg\ x$, $x \in \mathbb{R}$. Como f é derivável em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $f'(x) = sec^2\ x = \frac{1}{cos^2\ x} > 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue do Teorema da função inversa que f^{-1} é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{sec^2(f^{-1}(x))}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Da identidade $sec^2\ (f^{-1}(x)) = 1 + tg^2\ (f^{-1}(x)) = 1 + (tg(arctg\ (x))^2 = 1 + x^2$, segue que

$$(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 28.5

Vamos calcular a derivada da função $f(x) = arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Temos que $f(x) = (g \circ h)(x)$, onde $g(x) = arctg\ x$ e $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}$. Sendo g derivável em $\mathbb{R}$ e h derivável em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, a regra da cadeia garante que f é derivável em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e

$$\begin{aligned} f^{'}(x) = g^{'}(h(x)).h^{'}(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Resumo

Nesta aula, você estudou as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente no que diz respeito a seus intervalos de definição e a sua derivabilidade. Você pôde constatar a importância do Teorema da função inversa que nos permitiu determinar a derivada de tais funções.

Exercícios

1. Para cada uma das funções abaixo, determine:

   (i) o domínio da função;

   (ii) os pontos onde ela é derivável;

   (iii) a derivada da função.

   (a) $f(x) = arcsen\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

   (b) $f(x) = arccos(sen x)$

   (c) $f(x) = arctg\sqrt{x^2-1}$

   (d) $f(x) = arcsen\sqrt{-x^2-x+2}$

   (e) $f(x) = arccos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

   (f) $arctg\sqrt{\frac{x^2+4x-5}{x+1}}$

   (g) $f(x) = \frac{arcsen\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^2+1}$

   (h) $f(x) = \frac{arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{x-1}$.

2. Para cada uma das funções abaixo, determine:

   (i) o domínio da função;

   (ii) os intervalos onde a função é crescente ou decrescente;

   (iii) as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico da função, caso existam;

   (iv) os intervalos onde a função tem concavidade para cima e aqueles onde a função tem concavidade para baixo;

   (v) os extremos relativos e os extremos absolutos da função, caso existam.

   Finalmente, esboce o gráfico da função.

   (a) $f(x) = arcsen(x^2 - 1)$ (b) $f(x) = arctg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

   (c) $f(x) = arccos(x^2 - 2x)$ (d) $f(x) = artg(sen\ x)$

   (e) $f(x) = arcsen(tg\ x)$ (f) $f(x) = arccos(sen\ x)$.

Auto-avaliação

Em todos os exercícios, é exigido de você o bom entendimento das funções estudadas nesta aula, e das proposições apresentadas. O Exercício 2 será importante também para você rever e aplicar todo o ferramental visto neste módulo, visando ao esboço de gráfico de funções. Caso tenha alguma dificuldade, releia a aula com atenção ou procure o tutor no seu pólo.

Aula 29 – Funções trigonométricas inversas. Continuação.

Referência: Aulas, 9, 10, 12 e 28.

Objetivos

Recordar as funções arco cotangente, arco secante e arco cossecante e estudá-las em relação a sua derivabilidade.

Na aula 28, recordamos as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente e estudamos cada uma no que diz respeito a sua derivabilidade. Nesta aula, faremos o mesmo com as funções arco tangente, arco secante e arco cossecante.

Iniciemos com **a função arco cotangente.**

A função cotangente é contínua em seu domínio $\mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ e tem $\mathbb{R}$ por imagem. Sendo uma função periódica de período π, segue que a cotangente não é inversível.

Note, entretanto, que no intervalo $(0, \pi)$ a função cotangente é decrescente e $\{cotg\ x; x \in (0, \pi)\} = \mathbb{R}$. Pelo Teorema 27.1, a função $cotg : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ é inversível, sendo sua inversa contínua em $\mathbb{R}$. A inversa em questão é a função arco cotangente, denotada por $arccotg$. Assim,

$arccotg : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ é definida por $arccotg\ x = y$ se, e somente se, $x = cotg\ y$.

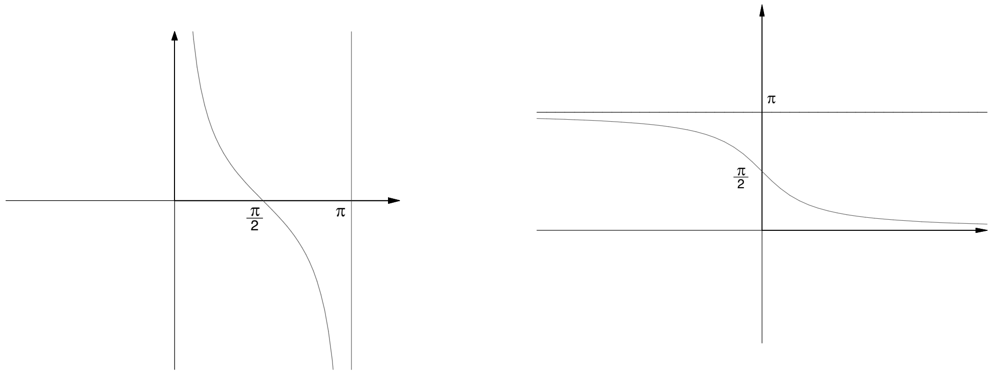
Pela definição de função inversa, podemos afirmar que

$$cotg(arccotg\ x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

e

$$arccotg(cotg\ x) = x \text{ para todo } x \in (0, \pi)\ .$$

Na Figura 29.1a, apresentamos o gráfico da função cotangente (restrita ao intervalo $(0, \pi)$) e, na Figura 29.1b, apresentamos o gráfico da função arco cotangente.



(a) (b)

Figura 29.1

Proposição 29.1

A função arco cotangente é derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada é

$$(arccotg)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Para facilitar a compreensão da demonstração, escrevamos $f(x) = cotg\ x$ $(x \in (0,\pi))$; logo, $f^{-1}(x) = arccotg\ x$ $(x \in \mathbb{R})$. Como $f'(x) = -cossec^2\ x = -\frac{1}{sen^2\ x} < 0$ para todo $x \in (0,\pi)$, segue do Teorema da função inversa que f^{-1} é derivável em $f((0,\pi)) = \mathbb{R}$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{cossec^2(f^{-1}(x))}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Da identidade

$$cossec^2\ (f^{-1}(x)) = 1 + cotg^2\ (f^{-1}(x)) = 1 + (cotg(arccotg\ (x))^2 = 1 + x^2\ ,$$

segue que

$$(f^{-1})'(x) = (arccotg)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 29.1

Considere a função $f(x) = arccotg\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Sendo a função $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$ derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$, $h(x) = arccotg\ x$ derivável em $\mathbb{R}$ e $f(x) = (h \circ g)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, segue da regra da cadeia que f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 29.2

Um quadro de 2 metros de altura está pendurado em uma parede de maneira que sua borda inferior fique situada a 2 metros acima do nível dos olhos de um observador. A que distância da parede deve ficar o observador para que o ângulo determinado pelas bordas superior e inferior do quadro e os olhos do observador seja o maior possível?

Sejam x a distância do observador à parede, α o ângulo determinado pela borda superior do quadro e o nível dos olhos do observador e β o ângulo determinado pela borda inferior do quadro e o nível dos olhos do observador (ver a Figura 29.2).

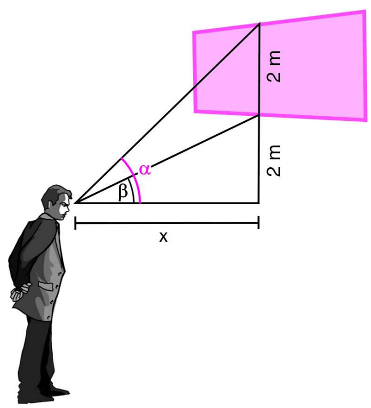


Figura 29.2

Note que $cotg\ \alpha = \frac{x}{4}$ e $cotg\ \beta = \frac{x}{2}$. Assim, $\alpha = arccotg\left(\frac{x}{4}\right)$ e $\beta = arccotg\left(\frac{x}{2}\right)$. O ângulo determinado pelo quadro é, portanto, $\theta(x) = arccotg\left(\frac{x}{4}\right) - arccotg\left(\frac{x}{2}\right)$ e queremos determinar o máximo absoluto da função θ em $(0, +\infty)$.

Como θ é derivável em $(0, +\infty)$ e

$$\theta^{'}(x) = -\frac{4}{16 + x^2} + \frac{2}{4 + x^2}\ ,$$

os pontos críticos de θ são os valores de x para os quais $\theta^{'}(x) = 0$, ou seja,

$$-4(4 + x^2) + 2(16 + x^2) = 0,\ \text{donde}\ x = \sqrt{8}\ .$$

Portanto, o único ponto crítico de θ é $x = \sqrt{8}$. Como $\theta^{'}(x) > 0$ para todo $x \in (0, \sqrt{8})$ e $\theta'(x) < 0$ para todo $x \in (\sqrt{8}, +\infty)$, segue do teste da derivada primeira que $x = \sqrt{8}$ é um ponto de máximo absoluto da função θ. Assim, o observador deverá posicionar-se a $\sqrt{8}$ metros da parede.

Vejamos, agora, **a função arco secante.**

A função secante é contínua no seu domínio de definição, a saber, $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ímpar}\right\}$ e tem $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ por imagem. Sendo uma função periódica de período 2π, segue que a secante não é inversível.

Note, entretanto, que em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ela é crescente e $\left\{sec\ x; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Pelo Teorema 27.1, a função $sec : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ é inversível, sendo sua inversa contínua em $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A inversa em questão é a função arco secante, denotada por *arcsec*. Assim,

$arcsec : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ é definida por $arcsec\ x = y$ se, e somente se, $x = sec\ y$.

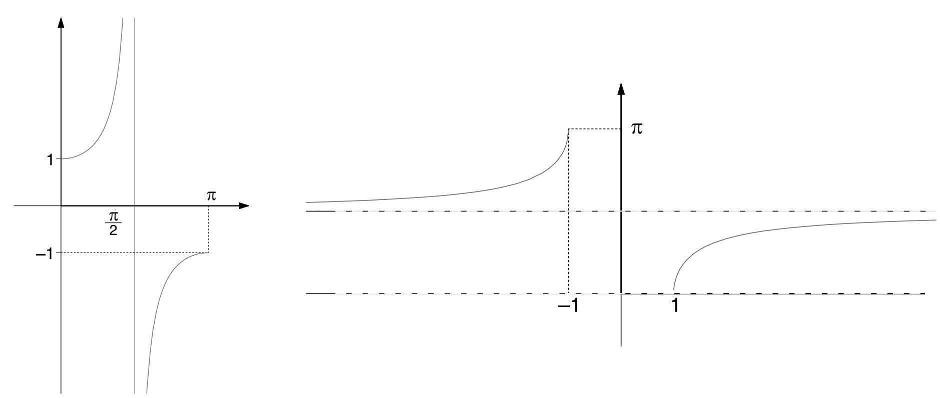
Pela definição de função inversa, podemos afirmar que

$$sec(arcsec\ x) = x \text{ para todo } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

e

$$arcsec(sec\ x) = x \text{ para todo } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Na Figura 29.3a, apresentamos o gráfico da função secante (restrita a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$) e, na Figura 29.3b, apresentamos o gráfico da função arco secante.



(a) (b)

Figura 29.3

Proposição 29.2

A função arco secante é derivável em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e sua derivada é

$$(arcsec)'(x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \text{ para todo } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\,.$$

Demonstração: Vamos mostrar que $arcsec\ x = arccos\ \frac{1}{x}$ para todo $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Com efeito, suponha que $y=arcsec\ x$; logo, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ e $sec\ y=x$, isto é, $\frac{1}{cos\ y}=x$, o que equivale a $cos\ y=\frac{1}{x}$. Como $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ e $cos\ y=\frac{1}{x}$, segue que $y=arccos\left(\frac{1}{x}\right)$, ou seja, $arcsec\ x=arccos\left(\frac{1}{x}\right)$. Assim, pela regra da cadeia, a função arco secante é derivável em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e

$$(arcsec)'(x)=(arccos)'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}$$

para todo $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Finalmente, como $\sqrt{x^2}=|x|$ e $\frac{x^2}{|x|}=|x|$, obtemos

$$(arcsec)'(x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \text{ para todo } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\,.$$

Exemplo 29.3

Considere a função $f(x)=\frac{arcsec(x^2-1)}{x^2-1}$. Vamos determinar o domínio de f e estudar a sua derivabilidade.

Como a função arco secante tem $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ por domínio e visto que $g(x)=x^2-1$ tem $[-1,+\infty)$ por imagem, segue que $arcsec(x^2-1)$ está definida em $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{2},+\infty)$. Concluímos, portanto, que o domínio de f é o conjunto $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{2},+\infty)$.

Agora, como $g(x)=x^2-1$ é derivável em $\mathbb{R}$ (e, em particular, em $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$), $g(x)\neq 0$ para todo $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$ e a função arco secante é derivável em $g((-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty))=(1,+\infty)$, segue da regra da cadeia e da regra de derivação do quociente que f é derivável em $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ e sua derivada é

$$f'(x)=\frac{\frac{(x^2-1)2x}{|x^2-1|\sqrt{(x^2-1)^2-1}}-2x\,arcsec(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

para todo $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

Finalmente, vejamos **a função arco cossecante.**

A função cossecante é contínua no seu domínio de definição, a saber, $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ e tem $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ por imagem. Sendo uma função periódica de período 2π, segue que ela não é inversível. Entretanto, em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ela é decrescente e $\left\{cossec\ x; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Pelo Teorema 27.1, a função $cossec : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ é inversível, sendo sua inversa contínua em $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A inversa em questão é a função arco cossecante, denotada por $arccossec$. Assim,

$arccossec : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ é definida por $arccossec\, x = y$ se, e somente se, $x = cossec\ y$.

Pela definição de função inversa, podemos afirmar que

$$cossec(arccossec\ x) = x \text{ para todo } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

e

$$arccossec(cossec\ x) = x \text{ para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Na Figura 29.4a, apresentamos o gráfico da função cossecante $\left(\text{restrita a } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ e, na Figura 29.4b, apresentamos o gráfico da função arco cossecante.

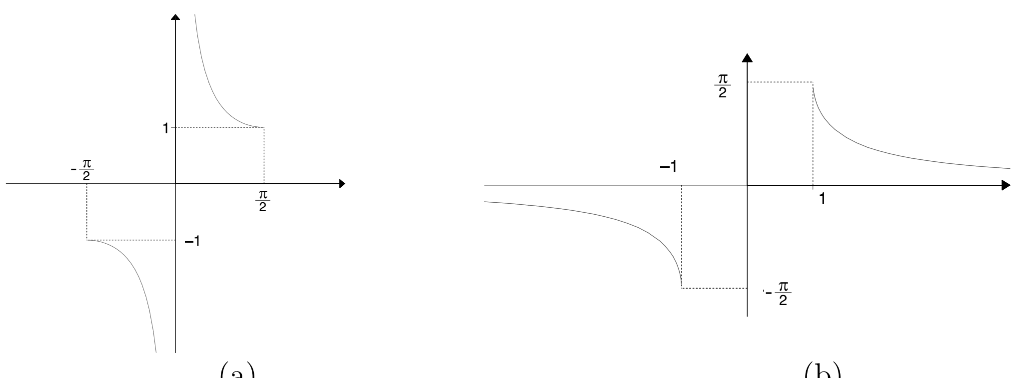


Figura 29.4

Proposição 29.3

A função arco cossecante é derivável em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e sua derivada é

$$(arccossec)'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Demonstração: Como na demonstração da Proposição 29.2, podemos mostrar que $arcossec\ x = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (ver o Exercício 1). Assim, pela regra da cadeia, a função arco cossecante é derivável em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e

$$(arccossec)'(x) = (arcsen)'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}$$

para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Finalmente, como $\sqrt{x^2} = |x|$ e $\frac{x^2}{|x|} = |x|$, obtemos

$$(arccossec)'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Resumo

Nesta aula, concluímos o estudo das funções trigonométricas inversas, recordando as funções arco cotangente, arco secante e arco cossecante no que diz respeito a seus domínios de definição, e estudando a derivabilidade das mesmas. Você pôde constatar a importância do Teorema da função inversa, que nos permitiu determinar a derivada de tais funções.

Exercícios

1. Mostre que $arccossec\ x = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2. Determine o domínio e estude a derivabilidade de cada uma das funções abaixo:

   (a) $f(x) = arccotg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (b) $f(x) = arccotg(x^2 - 5x + 6)$

   (c) $f(x) = arcsec\left(\frac{x^2-5x+6}{x-1}\right)$ (d) $f(x) = \frac{arcsec(x^2+1)}{x-2}$

   (e) $f(x) = arccossec\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right)$ (f) $f(x) = \frac{arccossec(x^2-9x)}{x-2}$.

3. Um quadro de h unidades de altura está pendurado em uma parede de maneira que sua borda inferior esteja a unidades acima do nível dos olhos de um observador. A que distância da parede deve ficar o observador para que o ângulo determinado pelas bordas superior e inferior do quadro e os olhos do observador seja máximo?

4. Determine o ângulo agudo entre as tangentes aos gráficos de $f(x) = arcsec\ x$ e $g(x) = arccossec\ x$ no ponto de interseção.

5. Use derivação implícita nas equações abaixo para determinar $\frac{dy}{dx}$.

   (a) $arctg\ x + arccotg\ y = \frac{\pi}{2}$ (b) $arcsec\ x + arccossec\ y = \frac{\pi}{2}$.

6. Uma escada de 5 metros de altura está encostada em uma parede vertical. Se a parte inferior da escada é puxada horizontalmente para fora da parede de tal forma que a parte superior escorregue verticalmente à razão de 3m/seg, com que velocidade está variando a medida do ângulo formado pela escada e o solo, quando a parte inferior da escada está a 3 metros da parede?

Auto-avaliação

Nos Exercícios 2, 4 e 5, é exigido de você o bom entendimento das funções estudadas nesta aula, e das proposições apresentadas. Nos Exercícios 3 e 6, você deve demonstrar capacidade de modelar matematicamente as situações apresentadas em cada um deles e aplicar seus conhecimentos de extremos absolutos e taxas de variação (aulas 24 e 14). Caso tenha alguma dificuldade, releia a aula com atenção ou procure o tutor no seu pólo.