

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE QUÍMICA  
GRUPO DE QUÍMICA ANALÍTICA E QUIMIOMETRIA (GQAQ)**

# **Planejamento e Otimização de Experimentos**

**PROF. DR. MARCONE AUGUSTO LEAL DE OLIVEIRA**

# **ESTATÍSTICA BÁSICA**

## **SUMÁRIO ( 1ª PARTE)**

**POPULAÇÕES E AMOSTRAS**

**IMPORTÂNCIA DA FORMA DA POPULAÇÃO**

**DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE GAUSS**

**PARÂMETROS E ESTIMATIVAS**

**TEOREMA DO LIMITE CENTRAL**

**DISTRIBUIÇÃO Z E DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT**

**HIPÓTESES ESTATÍSTICAS**

**MECANISMO DOS ERROS EM UM TESTE ESTATÍSTICO**

**PROTOCOLO PARA A REALIZAÇÃO DE UM TESTE DE HIPÓTESES**

**ESTIMATIVAS POR PONTO**

**ESTIMATIVAS POR INTERVALO**

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉDIAS UTILIZANDO O TESTE T**

**TESTE DE COMPARAÇÃO ENTRE VARIÂNCIAS – TEST F OU HARTLEY- TESTE DE LEVENE**

**CONFIABILIDADE DOS RESULTADOS**

# POPULAÇÕES E AMOSTRAS

Os alunos do curso de química I foram contratados para avaliar o teor de nitrato nas águas do Lago dos Manacás.

É necessário que toda a água do lago seja analisada para que se conclua sobre o teor de nitrato?

- **População:** É o conjunto de todos os indivíduos ou elementos, que compartilham um grupo de características comuns. ( é um ente teórico, em geral, inatingível).
- **População alvo ou população objeto:** conjunto de indivíduos ou elementos que possuem a informação desejada pelo pesquisador.
- **Amostra:** um subconjunto da população alvo, selecionado sob certas regras, que se presta para estimar, de modo confiável, as informações necessárias ao pesquisador.

- **Quanto a forma de escolha** : probabilística ou aleatória e não probabilística ou determinística.

**Amostra aleatória ou probabilística:** É aquela na qual cada elemento da população alvo tem uma probabilidade fixa de ser incluído na amostra.

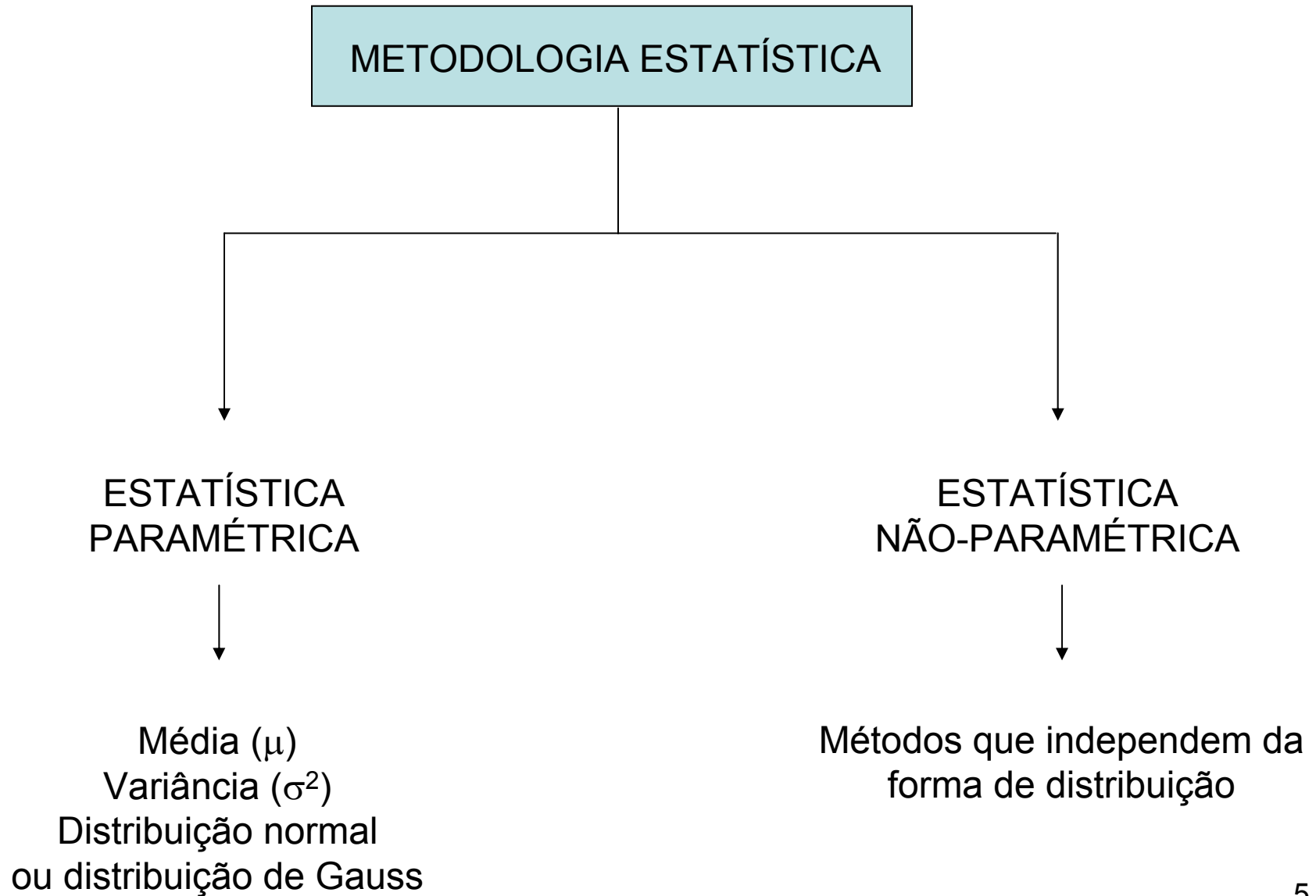
**Amostragem determinística ou não probabilística:** é aquela que não utiliza seleção aleatória, transferindo o critério de seleção para o julgamento pessoal do pesquisador.

- **Quanto à relação entre as respostas dos indivíduos:** as amostras podem ser independentes (homogênea), pareadas ou emparelhadas (heterogênea).

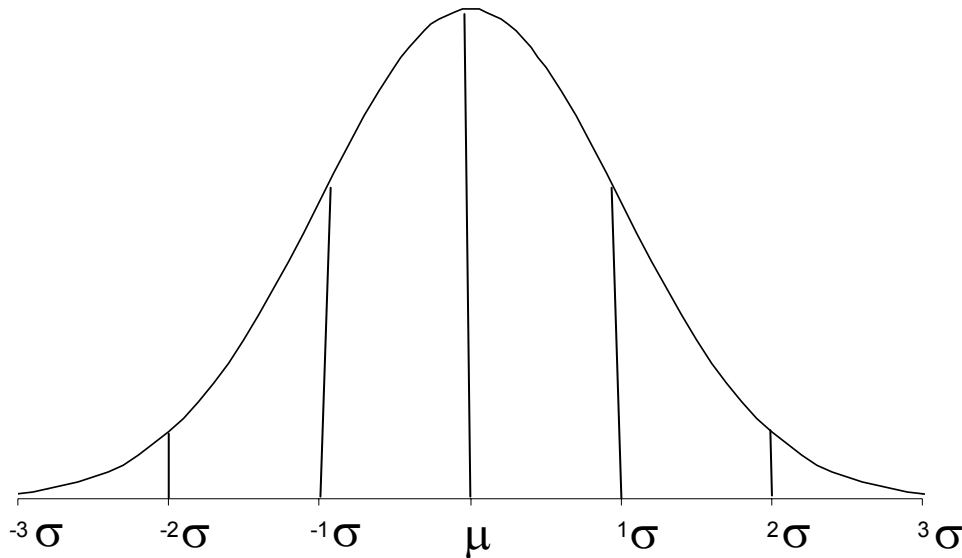
**Amostras independentes:** são aquelas nas quais cada indivíduo é "avaliado ou medido" apenas uma vez durante o período experimental. Isto é, a cada indivíduo está associado a apenas uma resposta.

**Amostras pareadas ou aos pares:** são aquelas em que cada indivíduo é avaliado duas vezes, em tempos, locais e/ou condições diferentes.

# IMPORTÂNCIA DA FORMA DA POPULAÇÃO



# DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU DE GAUSS



$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

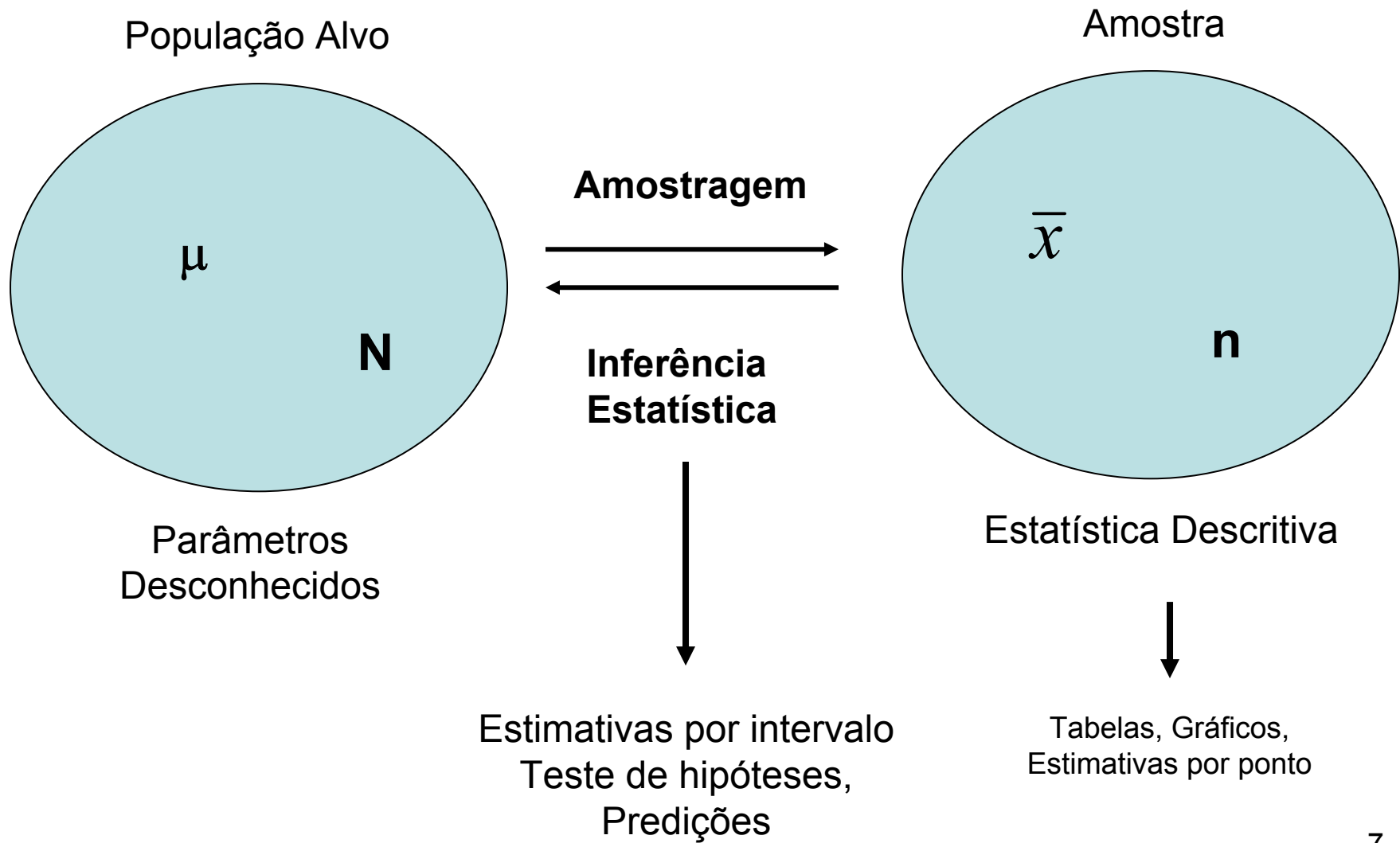
- centrada na média  $\mu$  ou  $x$
- desvio padrão  $\sigma$  ou  $s$
- simétrica
- assintótica

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 0.683$$

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 0.954$$

$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 0.997$$

# PARÂMETROS E ESTIMATIVAS



Suponha como recurso didático que você conheça completamente uma “população”:

Ela tem tamanho  $N = 5$  elementos e está definida através da variável  $X$ :

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\mu_{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\sigma^2_{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu)^2}{5} = \frac{1}{5} [(2-6)^2 + (4-6)^2 + \dots + (10-6)^2] = \frac{40}{5} = 8$$

Suponha ainda que você não saiba que  $\mu_{(x)} = 6,0$  e  $\sigma^2_{(x)} = 8,0$ , e que você deseja estimá-las por ponto

Suponha uma amostragem aleatória de tamanho  $n = 2$  com reposição:

$$X_2 = 4, x_5 = 10, (\bar{x} = 14/2 = 7); \quad x_1 = 2, x_2 = 4, (\bar{x} = 6/2 = 3)$$

**Note que os procedimentos são idênticos, mas como as amostras são aleatórias, isto é, foram obtidas por sorteio, elas podem conter quaisquer dois valores da população (variável  $X$ ), resultando em diferentes estimativas por ponto para a mesma média populacional**



**“É nesse contexto que são definidas estimativas por intervalo, também conhecidos como intervalo de confiança. Desse modo, pode-se obter intervalos que, com um NÍVEL DE CONFIANÇA estabelecido a priori, contém a média populacional  $\mu$ .”**

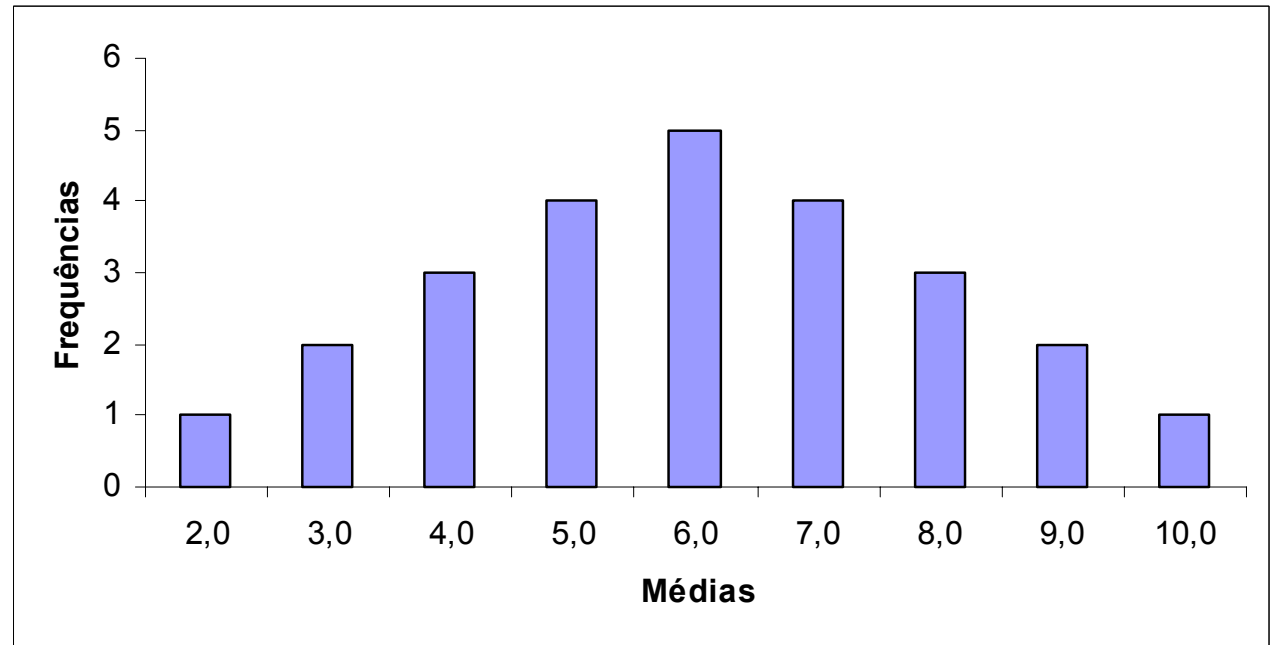
Suponha que sejam retiradas da “ população” em questão. Todas as possíveis amostras aleatórias, com reposição, de tamanho  $n = 2$  elementos.

|        |        |        |        |         |
|--------|--------|--------|--------|---------|
| (2;2)  | (2;4)  | (2;6)  | (2;8)  | (2;10)  |
| (4;2)  | (4;4)  | (4;6)  | (4;8)  | (4;10)  |
| (6;2)  | (6;4)  | (6;6)  | (6;8)  | (6;10)  |
| (8;2)  | (8;4)  | (8;6)  | (8;8)  | (8;10)  |
| (10;2) | (10;4) | (10;6) | (10;8) | (10;10) |

Cada uma dessas 25 amostras fornece estimativas para a média, para a variância e para vários outros parâmetros. No presente caso, as estimativas da média populacional  $\mu_{(x)}$  calculadas são:

|     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0  |
| 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0  |
| 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0  |
| 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0  |
| 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |

| Médias      | Frequências |
|-------------|-------------|
| $\bar{x}_j$ | $f_j$       |
| 2,0         | 1           |
| 3,0         | 2           |
| 4,0         | 3           |
| 5,0         | 4           |
| 6,0         | 5           |
| 7,0         | 4           |
| 8,0         | 3           |
| 9,0         | 2           |
| 10,0        | 1           |
| Total       | 25          |



Calculando-se a média e a variância da distribuição de  $x$ , pela tabela e inspeção do gráfico, verifica-se numérica e graficamente um teorema importantíssimo na teoria da inferência estatística, o **TEOREMA DO LIMITE CENTRAL**

$$\mu_{(\bar{x})} = \mu_{(x)} = 6,0$$

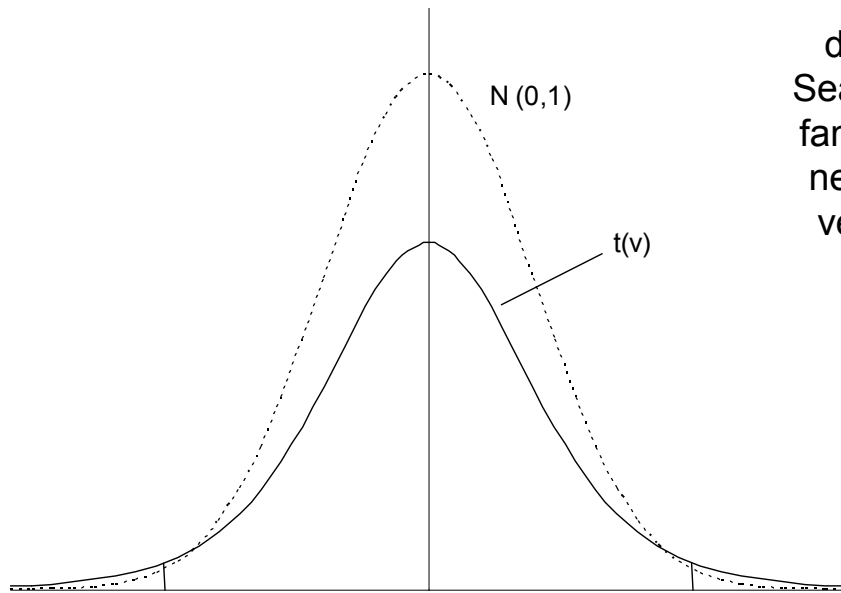
$$\sigma^2_{(\bar{x})} = \frac{\sigma^2_{(x)}}{n} = \frac{8}{2} = 4,0$$

## TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

- As técnicas estatísticas que serão apresentadas são robustas em relação o desvio da normalidade.
- Mesmo que a população de interesse não se distribua normalmente, as técnicas podem ser usadas, porque continuam aproximadamente validas.
- Esta robustez vem em última análise, do TEOREMA DO LIMITE CENTRAL, um dos teoremas fundamentais da estatística, que diz essencialmente o seguinte:

“ SE A VARIAÇÃO TOTAL NUMA CERTA VARIÁVEL ALEATÓRIA FOR O RESULTADO DA SOMA DAS FLUTUAÇÕES DE MUITAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES E DE IMPORTÂNCIA MAIS OU MENSO IGUAL, A SUA DISTRIBUIÇÃO TENDERÁ PARA A NORMALIDADE, NÃO IMPORTA QUAL SEJA A NATUREZA DAS DISTRIBUIÇÕES DAS VARIÁVEIS INDIVIDUAIS.”

## Distribuição z e distribuição t de Student



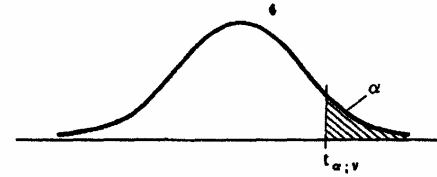
“ As dificuldades do emprego de  $s$  como uma estimativa de  $\sigma$  no cálculo do erro padrão foram estudadas por William Sealy Gosset (1876-1937), pesquisador da empresa Guinness, famosa cervejaria de Dublin, na Irlanda. O interesse de Gosset nesse problema estatístico tinha fortes motivos práticos, uma vez que os métodos empregados na época eram adequados a amostras grandes, muito diferentes das pequenas com as quais tinha de trabalhar”.

“ Quando  $\sigma$  fosse desconhecido, que se substitísse o valor crítico obtido na curva normal pelo valor crítico de uma nova distribuição, a qual foi chamada distribuição t”

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$f(t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} (1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < t < \infty \quad t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

# TABELA PARA DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT



**Nota.** A tabulação é unilateral, isto é, vale para os valores positivos de  $t$ . Para  $|t|$  os valores de  $\alpha$  devem ser duplicados.

| $\nu$    | $\alpha$ |       |        |        |        |        |        |
|----------|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|          | 0,10     | 0,05  | 0,025  | 0,01   | 0,005  | 0,001  | 0,0005 |
| 1        | 3,078    | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 318,31 | 636,62 |
| 2        | 1,886    | 2,920 | 4,303  | 6,965  | 9,925  | 22,326 | 31,598 |
| 3        | 1,638    | 2,353 | 3,182  | 4,541  | 5,841  | 10,213 | 12,924 |
| 4        | 1,533    | 2,132 | 2,776  | 3,747  | 4,604  | 7,173  | 8,610  |
| 5        | 1,476    | 2,015 | 2,571  | 3,365  | 4,032  | 5,893  | 6,869  |
| 6        | 1,440    | 1,943 | 2,447  | 3,143  | 3,707  | 5,208  | 5,959  |
| 7        | 1,415    | 1,895 | 2,365  | 2,998  | 3,499  | 4,785  | 5,408  |
| 8        | 1,397    | 1,860 | 2,306  | 2,896  | 3,355  | 4,501  | 5,041  |
| 9        | 1,383    | 1,833 | 2,262  | 2,821  | 3,250  | 4,297  | 4,781  |
| 10       | 1,372    | 1,812 | 2,228  | 2,764  | 3,169  | 4,144  | 4,587  |
| 11       | 1,363    | 1,796 | 2,201  | 2,718  | 3,106  | 4,025  | 4,437  |
| 12       | 1,356    | 1,782 | 2,179  | 2,681  | 3,055  | 3,930  | 4,318  |
| 13       | 1,350    | 1,771 | 2,160  | 2,650  | 3,012  | 3,852  | 4,221  |
| 14       | 1,345    | 1,761 | 2,145  | 2,624  | 2,977  | 3,787  | 4,140  |
| 15       | 1,341    | 1,753 | 2,131  | 2,602  | 2,947  | 3,733  | 4,073  |
| 16       | 1,337    | 1,746 | 2,120  | 2,583  | 2,921  | 3,686  | 4,015  |
| 17       | 1,333    | 1,740 | 2,110  | 2,567  | 2,898  | 3,646  | 3,965  |
| 18       | 1,330    | 1,734 | 2,101  | 2,552  | 2,878  | 3,610  | 3,922  |
| 19       | 1,328    | 1,729 | 2,093  | 2,539  | 2,861  | 3,579  | 3,883  |
| 20       | 1,325    | 1,725 | 2,086  | 2,528  | 2,825  | 3,552  | 3,850  |
| 21       | 1,323    | 1,721 | 2,080  | 2,518  | 2,831  | 3,527  | 3,819  |
| 22       | 1,321    | 1,717 | 2,074  | 2,508  | 2,819  | 3,505  | 3,792  |
| 23       | 1,319    | 1,714 | 2,069  | 2,500  | 2,807  | 3,485  | 3,767  |
| 24       | 1,318    | 1,711 | 2,064  | 2,492  | 2,797  | 3,467  | 3,745  |
| 25       | 1,316    | 1,708 | 2,060  | 2,485  | 2,787  | 3,450  | 3,725  |
| 26       | 1,315    | 1,706 | 2,056  | 2,479  | 2,779  | 3,435  | 3,707  |
| 27       | 1,314    | 1,703 | 2,052  | 2,473  | 2,771  | 3,421  | 3,690  |
| 28       | 1,313    | 1,701 | 2,048  | 2,467  | 2,763  | 3,408  | 3,674  |
| 29       | 1,311    | 1,699 | 2,045  | 2,462  | 2,756  | 3,396  | 3,659  |
| 30       | 1,310    | 1,697 | 2,042  | 2,457  | 2,750  | 3,385  | 3,646  |
| 40       | 1,303    | 1,684 | 2,021  | 2,423  | 2,704  | 3,307  | 3,551  |
| 60       | 1,296    | 1,671 | 2,000  | 2,390  | 2,660  | 3,232  | 3,460  |
| 120      | 1,289    | 1,658 | 1,980  | 2,358  | 2,617  | 3,160  | 3,373  |
| $\infty$ | 1,282    | 1,645 | 1,960  | 2,326  | 2,576  | 3,090  | 3,291  |

# HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

- **Testes de hipóteses**: regra de decisão que permite, com base em informações contidas nos dados amostrais, concluir sobre parâmetros da população.

- Hipótese estatística é uma suposição sobre algum parâmetro da população, que será posta à prova através do teste de hipóteses. Consideram-se, sempre, duas hipóteses:  $H_0$  e  $H_a$ , denominadas, respectivamente, hipótese de nulidade e hipótese alternativa.

- Hipótese de Nulidade:  $H_0$  hipótese que está sendo posta à prova.

- Hipótese Alternativa:  $H_a$  é a hipótese que será aceita, se  $H_0$  for rejeitada no teste.

Exemplos:

$H_a$ : O pH médio da população alvo é diferente de 5,0 → Teste bilateral

$$H_a: \mu \neq 5,0$$

$H_a$ : O pH médio da população alvo é menor que 5,0 → Teste unilateral à esquerda

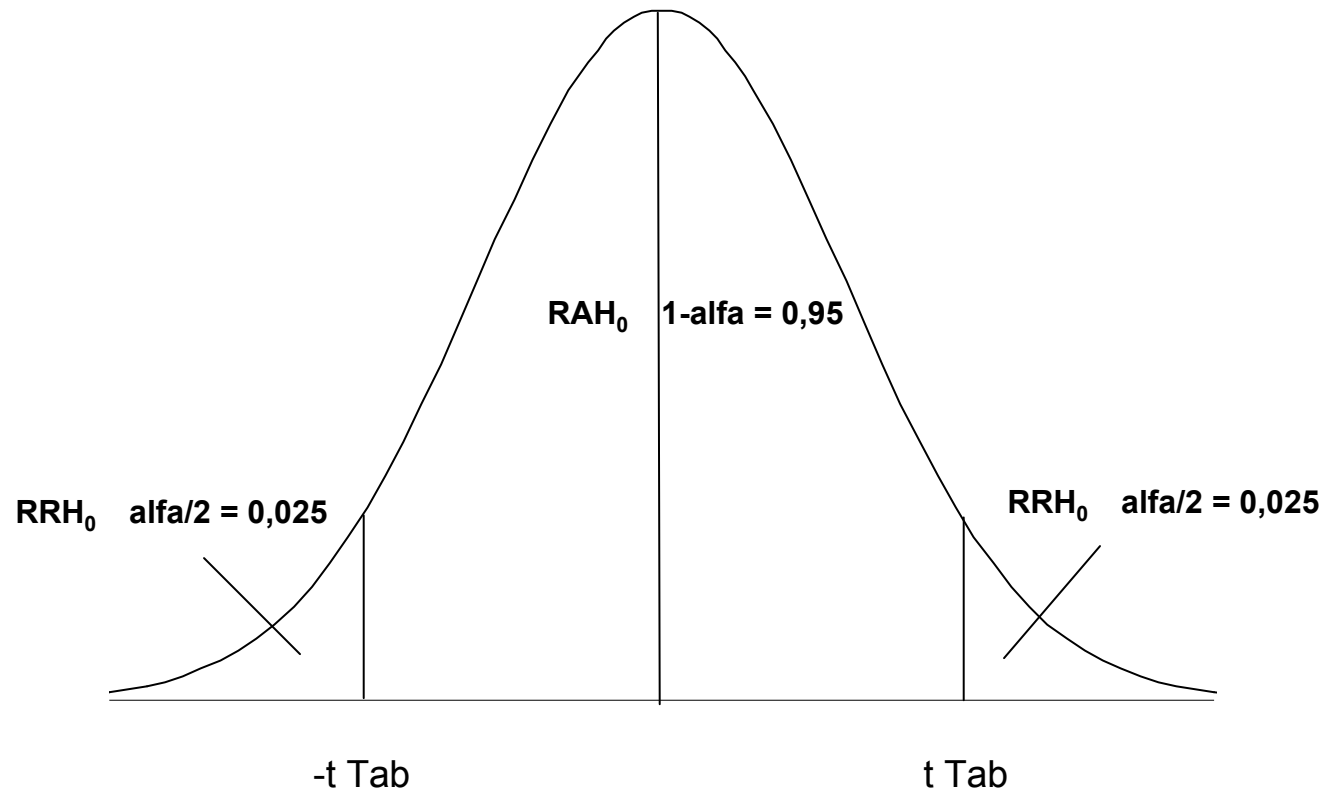
$$H_a: \mu < 5,0$$

$H_a$ : O pH médio da população alvo é maior que 5,0 → Teste unilateral à direita

$$H_a: \mu > 5,0$$

*Apenas uma delas, estabelecida a priori, será utilizada.*

- Regiões críticas são as regiões de não rejeição de  $H_0$ , que denotaremos  $RAH_0$ , e de rejeição de  $H_0$ , que denotaremos  $RRH_0$ .
- Exemplo: esboço de um teste bilateral ou bicaudal, para a média de uma população normal,  $H_a: \mu \neq \mu_0$



## MECANISMOS DOS ERROS NUM TESTE ESTATÍSTICO

| Realidade na População | Resultado do Teste estatístico    |                                   |
|------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
|                        | Não se rejeita $H_0$              | Rejeita-se $H_0$                  |
| $H_0$ é verdadeira     | Resultado correto:<br>Não há erro | Erro do tipo I                    |
| $H_0$ é falsa          | Erro do Tipo II                   | Resultado correto:<br>Não há erro |

***Erro do tipo I ou da primeira espécie: rejeitar  $H_0$ , quando  $H_0$  é verdadeira***

- A probabilidade de se cometer um erro tipo I, também conhecida como **nível de significância** do teste, é denotada por  $\alpha$  e escolhida a priori pelo pesquisador. Em geral, o nível de significância  $\alpha = 0,05$  (5%) é muito bem aceito pela comunidade científica.

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0, \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$$

***Erro do tipo II ou da segunda espécie: não rejeitar  $H_0$ , quando  $H_0$  é falsa***

-A probabilidade de se cometer um erro tipo II é denotada por  $\beta$ .

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0, \text{ quando } H_0 \text{ é falsa})$$

Poder de um teste estatístico: é a probabilidade de rejeitar  $H_0$ , quando  $H_0$  é falsa

$$\mathbf{P} = 1 - \beta$$

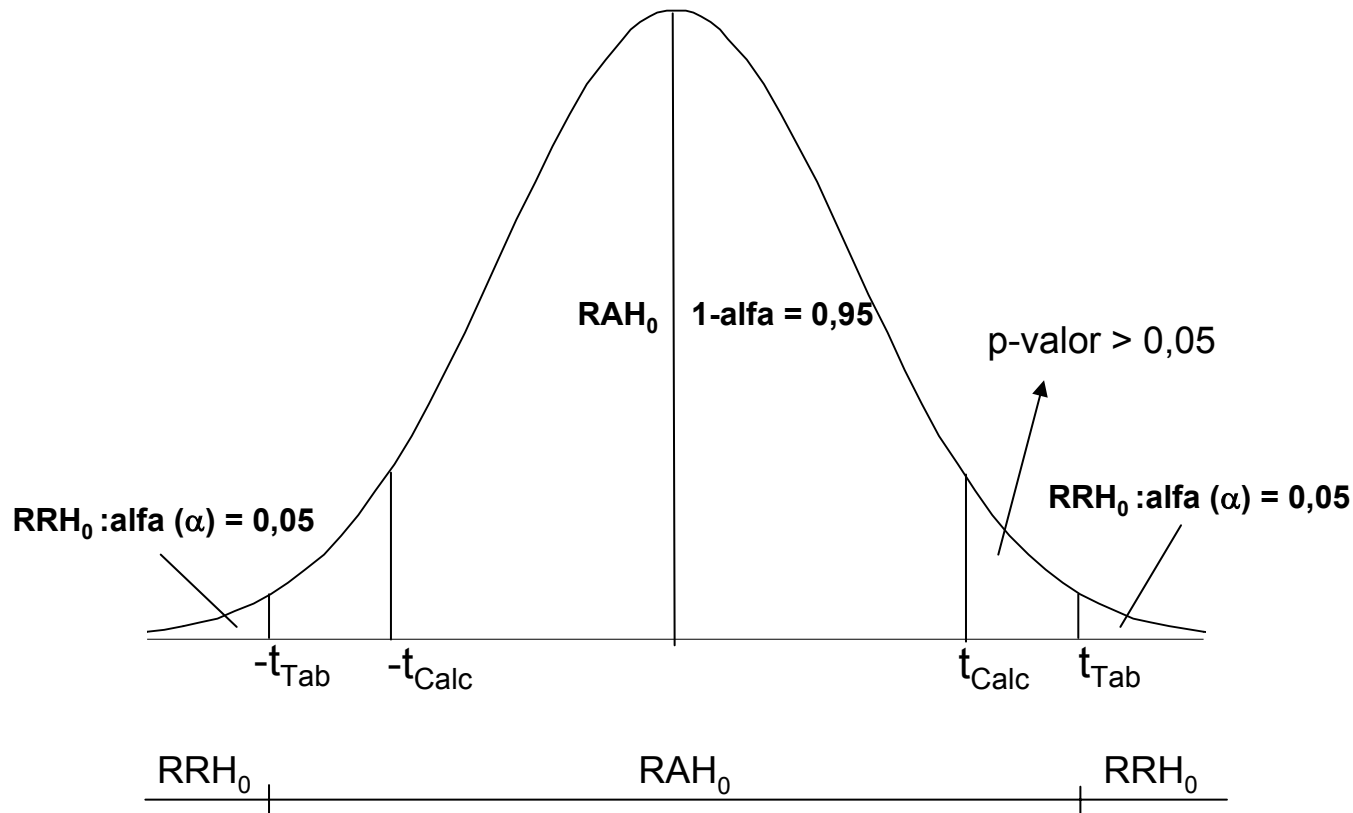


# PROTOCOLO PARA REALIZAÇÃO DE UM TESTE DE HIPÓTESES

- a- Enunciar claramente as hipótese  $H_0$  e  $H_a$ ;
- b- Fixar o nível de significância  $\alpha$  e determinar as regiões críticas do teste. Em geral  $\alpha = 0,05$  (5%) ou  $\alpha = 0,01$  (1%);
- c- Calcular o valor da estatística,  $V$ , do teste, que depende do parâmetro que se quer testar;
- d- Decisão: se  $V \in RA$ , não se rejeita  $H_0$ . Se  $V \in RR$ , rejeita-se  $H_0$ .

## ***Probabilidade de significância, p-valor ou nível descritivo do teste***

- Quando o teste de hipóteses é feito em computador, através de programa estatístico, recebemos como output o *p-valor (p-value)*, *nível descritivo* ou *probabilidade de significância* do teste, que é a probabilidade de ocorrência de valores da variável  $V$  do teste (item c) mais extremos que o obtido através dessa amostra.
- Assim a decisão pode ser feita em termos do p-valor: rejeitamos ou não  $H_0$ , conforme o p-valor seja, respectivamente, menor ou não que o nível  $\alpha$ , de significância, estabelecido a priori.



$\alpha = 0,05$  = nível de significância = área da direita de  $t_{Tab}$  e esquerda de  $-t_{Tab}$   
 $p$  – valor = área à direita de  $t_{Calc}$

**1- Decisão: Se  $t_{Calc} < t_{Tab}$ , aceita-se  $H_0$ , caso contrário, rejeita-se.**

**2- Decisão: Se  $p\text{-valor} > 0,05$  (nível de significância ou seja o alfa  $\alpha$ ) aceita-se  $H_0$ , caso contrário, rejeita-se**

## ESTIMATIVAS POR PONTO

$$\text{Média: } \bar{x} = \frac{\sum_i^N x_i}{N}$$

$$\text{Desvio padrão: } s = \sqrt{\frac{\sum_i^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad \mathbf{S^2 = \text{variância}}$$

Muitas vezes, em situações práticas, precisamos comparar a variabilidade de dois ou mais conjuntos de dados. Ocorre que tais conjuntos podem estar descritos com diferentes unidades de medidas, por exemplo: metros e quilos, impossibilitando a comparação através das variâncias. Para viabilizar comparações desse tipo, definiu-se o **coeficiente de variação ou desvio padrão relativo**, que exprime a variação percentual em relação à média e, independe de unidades de medidas:

$$\text{Coeficiente de variação: } CV\% = \frac{100s}{\bar{x}} \%$$

## ESTIMATIVAS POR INTERVALO

Uma estimativa por intervalo para a média,  $\mu$ , de uma população normal, obtida através de uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , ao nível de confiança  $1-\alpha$ , é dada por:

$$IC[\mu]_{(1-\alpha)} : \bar{x} \pm t_{(\alpha;n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Onde:  $\bar{x}$  é a estimativa por ponto, da média;  $s$  é a estimativa por ponto do desvio padrão;  $n$  é o tamanho da amostra;  $t$  é um valor tabelado da distribuição 't' de Student, obtido com  $n-1$  graus de liberdade e  $\alpha$  bilateral.

Teoricamente, isto significa que se retiramos todas as amostras possíveis de uma população e, com cada uma delas construímos um intervalo de confiança, então, 95% dos intervalos construídos devem conter a média populacional. Em outras Palavras, 5 em cada 100 ou 1 em cada 20 intervalos não deve conter a média populacional.

**EXEMPLO 1:** O teor de carboidrato de uma glicoproteína (uma proteína com açúcares fixados a ela) foi determinado como 12.6, 11.9, 13.0, 12.7 e 12.5 g de Carboidratos por 100 g de proteína através de análises repetidas. Calcule o intervalo de confiança de 90% para o teor de carboidrato.

a- 90% de confiança

- calcular  $\bar{x}$  (12.54) e s (=0.40) para as cinco medidas;
- obter o valor de t na tabela de distribuição t de Student para 4 graus de liberdade;
- calcular a estatística.

$$\mu = \bar{x} \pm t_{(4;0.10)} \frac{s}{\sqrt{n}} = 12.54 \pm \frac{(2.132)(0.40)}{\sqrt{5}} = 12.54 \pm 0.38$$

Esse cálculo significa que existe uma chance de 90% de que  $\mu$  esteja dentro do Intervalo  $12.54 \pm 0.38$  (12.16 a 12.92)

O que acontece com o resultado quando aumentamos ou diminuimos o nível de confiança ?

# COMPARAÇÃO DA MÉDIA COM O TESTE t

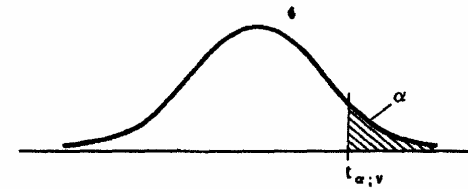
- O teste t é usado para comparar um grupo de medidas com outro, a fim de decidir se eles são ou não diferentes.
- A estatística nos permite obter a probabilidade de que a diferença observada entre duas médias seja devida a **erros de medida puramente aleatórios**

Os três casos possíveis são:

**Caso 1:** Mede-se uma quantidade várias vezes, obtendo-se um valor médio e um desvio-padrão. Compara-se o resultado obtido com um determinado valor que é conhecido e aceito. A média obtida não concorda exatamente com o valor que é aceito. A diferença é aceitável levando-se em conta o **“erro experimental”** ?

**Caso 2 (amostra homogênea)** : Mede-se uma quantidade diversas vezes utilizando dois métodos distintos, que fornecem duas respostas diferentes, cada um com seu desvio-padrão. Levando em conta o **“erro experimental”** , existe uma concordância ou uma discordância entre os dois resultados ?

**Caso 3 (amostra heterogênea)** : A amostra 1 é medida uma vez pelo método A e uma vez pelo método B, que não fornecem exatamente o mesmo resultado. A seguir, uma amostra diferente, denominada 2, é também medida uma vez pelo método A e uma vez pelo método B. Novamente, os resultados não são exatamente iguais entre si. O procedimento é repetido para n amostras diferentes. Se o **“erro experimental”** for levado em conta, os dois métodos concordarão entre si, ou um será sistematicamente diferente do outro?



Nota. A tabulação é unilateral, isto é, vale para os valores positivos de  $t$ . Para  $|t|$  os valores de  $\alpha$  devem ser duplicados.

| $\nu$    | $\alpha$ |       |        |        |        |        |        |
|----------|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|          | 0,10     | 0,05  | 0,025  | 0,01   | 0,005  | 0,001  | 0,0005 |
| 1        | 3,078    | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 318,31 | 636,62 |
| 2        | 1,886    | 2,920 | 4,303  | 6,965  | 9,925  | 22,326 | 31,598 |
| 3        | 1,638    | 2,353 | 3,182  | 4,541  | 5,841  | 10,213 | 12,924 |
| 4        | 1,533    | 2,132 | 2,776  | 3,747  | 4,604  | 7,173  | 8,610  |
| 5        | 1,476    | 2,015 | 2,571  | 3,365  | 4,032  | 5,893  | 6,869  |
| 6        | 1,440    | 1,943 | 2,447  | 3,143  | 3,707  | 5,208  | 5,959  |
| 7        | 1,415    | 1,895 | 2,365  | 2,998  | 3,499  | 4,785  | 5,408  |
| 8        | 1,397    | 1,860 | 2,306  | 2,896  | 3,355  | 4,501  | 5,041  |
| 9        | 1,383    | 1,833 | 2,262  | 2,821  | 3,250  | 4,297  | 4,781  |
| 10       | 1,372    | 1,812 | 2,228  | 2,764  | 3,169  | 4,144  | 4,587  |
| 11       | 1,363    | 1,796 | 2,201  | 2,718  | 3,106  | 4,025  | 4,437  |
| 12       | 1,356    | 1,782 | 2,179  | 2,681  | 3,055  | 3,930  | 4,318  |
| 13       | 1,350    | 1,771 | 2,160  | 2,650  | 3,012  | 3,852  | 4,221  |
| 14       | 1,345    | 1,761 | 2,145  | 2,624  | 2,977  | 3,787  | 4,140  |
| 15       | 1,341    | 1,753 | 2,131  | 2,602  | 2,947  | 3,733  | 4,073  |
| 16       | 1,337    | 1,746 | 2,120  | 2,583  | 2,921  | 3,686  | 4,015  |
| 17       | 1,333    | 1,740 | 2,110  | 2,567  | 2,898  | 3,646  | 3,965  |
| 18       | 1,330    | 1,734 | 2,101  | 2,552  | 2,878  | 3,610  | 3,922  |
| 19       | 1,328    | 1,729 | 2,093  | 2,539  | 2,861  | 3,579  | 3,883  |
| 20       | 1,325    | 1,725 | 2,086  | 2,528  | 2,825  | 3,552  | 3,850  |
| 21       | 1,323    | 1,721 | 2,080  | 2,518  | 2,831  | 3,527  | 3,819  |
| 22       | 1,321    | 1,717 | 2,074  | 2,508  | 2,819  | 3,505  | 3,792  |
| 23       | 1,319    | 1,714 | 2,069  | 2,500  | 2,807  | 3,485  | 3,767  |
| 24       | 1,318    | 1,711 | 2,064  | 2,492  | 2,797  | 3,467  | 3,745  |
| 25       | 1,316    | 1,708 | 2,060  | 2,485  | 2,787  | 3,450  | 3,725  |
| 26       | 1,315    | 1,706 | 2,056  | 2,479  | 2,779  | 3,435  | 3,707  |
| 27       | 1,314    | 1,703 | 2,052  | 2,473  | 2,771  | 3,421  | 3,690  |
| 28       | 1,313    | 1,701 | 2,048  | 2,467  | 2,763  | 3,408  | 3,674  |
| 29       | 1,311    | 1,699 | 2,045  | 2,462  | 2,756  | 3,396  | 3,659  |
| 30       | 1,310    | 1,697 | 2,042  | 2,457  | 2,750  | 3,385  | 3,646  |
| 40       | 1,303    | 1,684 | 2,021  | 2,423  | 2,704  | 3,307  | 3,551  |
| 60       | 1,296    | 1,671 | 2,000  | 2,390  | 2,660  | 3,232  | 3,460  |
| 120      | 1,289    | 1,658 | 1,980  | 2,358  | 2,617  | 3,160  | 3,373  |
| $\infty$ | 1,282    | 1,645 | 1,960  | 2,326  | 2,576  | 3,090  | 3,291  |

# ETAPAS DO TESTE DE HIPÓTESES PARA UMA MEDIDA

## 1- Verificação dos pressupostos:

- Normalidade (teste de Shapiro-wilk  $3 < n < 50$  ou Teste de kolmogorov-Smirnov  $n > 50$ )

## 2- Estabelecimento das hipóteses estatísticas

$$H_0: \mu_A = \mu_0$$

$$H_a: \mu_A \neq \mu_0$$

## 3- Escolha do nível de significância: $\alpha = 0.05$

## 4- Determinação do valor crítico do teste

Vai depender dos graus de liberdade (Tabela de distribuição t de Student)

## 5- Determinação do valor calculado do teste

$$t_{\text{calculado}} = \frac{|\bar{x} - \mu_0 (\text{valor conhecido})|}{s} \sqrt{n}$$

## 6- Decisão

se  $t_{\text{calc}} > t_{\text{crítico}}$ , rejeita-se  $H_0$ ; p-valor  $< 0.05$

se  $t_{\text{calc}} < t_{\text{crítico}}$ , aceita-se  $H_0$ ; p-valor  $> 0.05$

## 7- Conclusão



# Caso 1- Comparando um resultado medido com um valor “conhecido”

**Exemplo 2:** Uma amostra de carvão foi adquirida como sendo um Material Padrão de Referência, certificado pelo Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia (NIST) dos Estados Unidos, contendo 3.19% de enxofre. Os valores medidos são 3.29, 3.22, 3.30 e 3.23% de enxofre, dando uma média de  $\bar{x} = 3.26$  e um desvio padrão de  $s = 0.04$ . Esta resposta concorda com o valor fornecido pelo NIST em um intervalo de 95% de confiança?

1- Verificação de pressupostos:

- normalidade (teste de Shapiro-wilk  $3 < n < 50$  ou Teste de kolmogorov-Smirnov  $n > 50$ )

2- Estabelecimento das hipóteses estatísticas

$$H_0: \mu_A = \mu_0$$

$$H_a: \mu_A \neq \mu_0 ; \mu_a < \mu_0 ; \mu_a > \mu_0$$

3- Escolha o nível de significância:  $\alpha = 0.05$

4- Determinar o valor crítico do teste (tabela t de Student)

$$- t_{(3; 0.05)} = 3.182$$

5- Determinação do valor da estatística

$$t_{calculado} = \frac{|\bar{x} - \mu_0 (\text{valor conhecido})|}{s} \sqrt{n} = \frac{|3.26 - 3.19|}{0.04} \sqrt{4} = 3.41$$

6- Decisão:

se  $t_{\text{calc}} > t_{\text{crítico}}$ , rejeita-se  $H_0$ ; p-valor  $< 0.05$

se  $t_{\text{calc}} < t_{\text{crítico}}$ , aceita-se  $H_0$ ; p-valor  $> 0.05$

Como  $t_{\text{calc}} < t_{\text{tab}}$ , não há evidências de diferenças significativas entre as médias no intervalo de 95% ( $\alpha = 0.05$ ) de confiança.

# ETAPAS DO TESTE DE HIPÓTESES PARA UM GRUPO DE MEDIDAS

## 1- Verificação dos pressupostos:

- Normalidade (teste de Shapiro-wilk  $3 < n < 50$  ou Teste de kolmogorov-Smirnov  $n > 50$ )
- Verificação da relação e dependência ou independência entre as amostra (amostra homogênea ou heterogênea) → gráfico de dispersão x.y
- Teste de Homogeneidade ou homocedasticidade de variâncias (Teste F ou teste de Hartley / Teste de Levene)

## 2- Estabelecimento das hipóteses estatísticas

$$H_0: \mu_A = \mu_0$$

$$H_a: \mu_A \neq \mu_0; \mu_a < \mu_0; \mu_a > \mu_0$$

## 3- Escolha do nível de significância: $\alpha = 0.05$

## 4- Determinação do valor crítico do teste

Vai depender da estatística utilizada (Tabela de distribuição t de student) e dos graus de liberdade

## 5- Determinação do valor calculado do teste

## 6- Decisão

se  $t_{\text{calc}} > t_{\text{crítico}}$ , rejeita-se  $H_0$ ; p-valor  $< 0.05$

se  $t_{\text{calc}} < t_{\text{crítico}}$ , aceita-se  $H_0$ ; p-valor  $> 0.05$

## 7- Conclusão

# GRUPO DE MEDIDA

NORMALIDADE

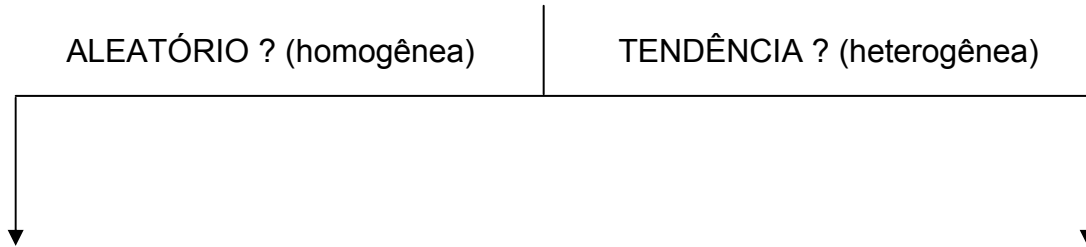


(teste de Shapiro-wilk  $3 < n < 50$  ou Teste de kolmogorov-Smirnov  $n > 50$ )

VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA OU INDEPENDÊNCIA ENTRE AS AMOSTRAS (gráfico de dispersão)

ALEATÓRIO ? (homogênea)

TENDÊNCIA ? (heterogênea)



TESTE t NÃO PAREADO

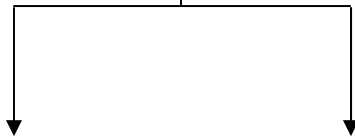
TESTE t PAREADO

HOMOCEDEASTICIDADE

Teste F ou teste de Hartley / Teste de levene

$$\sigma^2_A = \sigma^2_B$$

$$\sigma^2_A \neq \sigma^2_B$$



TEST t  
AGRUPADO

TEST t  
NÃO  
AGRUPADO

# TESTE DE COMPARAÇÃO ENTRE VARIÂNCIAS - TESTE F ou Hartley

## 1- Hipóteses estatísticas

$$H_0: \sigma^2_A = \sigma^2_B = \sigma$$

$$H_a: \sigma^2_A \neq \sigma^2_B$$

## 2- Escolha do nível de significância: $\alpha = 0.05$

## 3- Determinação do valor crítico do teste

$$gl_N = n_N - 1 \quad gl_D = n_D - 1$$

Para se encontrar valores inferiores, usa-se a identidade:

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{F(v_2, v_1)}$$

## 4- Determinação do valor calculado

$$F_{cal} = \frac{S^2_{maior}}{S^2_{menor}}$$

## 5- Decisão

se  $F_{calc} > F_{crítico}$ , rejeita-se  $H_0$ ; p-valor  $< 0.05$

se  $F_{calc} < F_{crítico}$ , aceita-se  $H_0$ ; p-valor  $> 0.05$



# TABELA F : VALORES CRÍTICOS PARA UM TESTE UNILATERAL ( $\alpha = 0,05$ )

| v <sub>2</sub> \ v <sub>1</sub> | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 12    | 15    | 20    | 24    | 30    | 40    | 60    | 120   | ∞     |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                               | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 | 241,9 | 243,9 | 245,9 | 248,0 | 249,1 | 250,1 | 251,1 | 252,2 | 253,3 | 254,3 |
| 2                               | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,50 |
| 3                               | 10,13 | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 8,94  | 8,89  | 8,85  | 8,81  | 8,79  | 8,74  | 8,70  | 8,66  | 8,64  | 8,62  | 8,59  | 8,57  | 8,55  | 8,53  |
| 4                               | 7,71  | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6,16  | 6,09  | 6,04  | 6,00  | 5,96  | 5,91  | 5,86  | 5,80  | 5,77  | 5,75  | 5,72  | 5,69  | 5,66  | 5,63  |
| 5                               | 6,61  | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 4,95  | 4,88  | 4,82  | 4,77  | 4,74  | 4,68  | 4,62  | 4,56  | 4,53  | 4,50  | 4,46  | 4,43  | 4,40  | 4,36  |
| 6                               | 5,99  | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4,28  | 4,21  | 4,15  | 4,10  | 4,06  | 4,00  | 3,94  | 3,87  | 3,84  | 3,81  | 3,77  | 3,74  | 3,70  | 3,67  |
| 7                               | 5,59  | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 3,87  | 3,79  | 3,73  | 3,68  | 3,64  | 3,57  | 3,51  | 3,44  | 3,41  | 3,38  | 3,34  | 3,30  | 3,27  | 3,23  |
| 8                               | 5,32  | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 3,58  | 3,50  | 3,44  | 3,39  | 3,35  | 3,28  | 3,22  | 3,15  | 3,12  | 3,08  | 3,04  | 3,01  | 2,97  | 2,93  |
| 9                               | 5,12  | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3,37  | 3,29  | 3,23  | 3,18  | 3,14  | 3,07  | 3,01  | 2,94  | 2,90  | 2,86  | 2,83  | 2,79  | 2,75  | 2,71  |
| 10                              | 4,96  | 4,10  | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3,22  | 3,14  | 3,07  | 3,02  | 2,98  | 2,91  | 2,85  | 2,77  | 2,74  | 2,70  | 2,66  | 2,62  | 2,58  | 2,54  |
| 11                              | 4,84  | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,20  | 3,09  | 3,01  | 2,95  | 2,90  | 2,85  | 2,79  | 2,72  | 2,65  | 2,61  | 2,57  | 2,53  | 2,49  | 2,45  | 2,40  |
| 12                              | 4,75  | 3,89  | 3,49  | 3,26  | 3,11  | 3,00  | 2,91  | 2,85  | 2,80  | 2,75  | 2,69  | 2,62  | 2,54  | 2,51  | 2,47  | 2,43  | 2,38  | 2,34  | 2,30  |
| 13                              | 4,67  | 3,81  | 3,41  | 3,18  | 3,03  | 2,92  | 2,83  | 2,77  | 2,71  | 2,67  | 2,60  | 2,53  | 2,46  | 2,42  | 2,38  | 2,34  | 2,30  | 2,25  | 2,21  |
| 14                              | 4,60  | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 2,85  | 2,76  | 2,70  | 2,65  | 2,60  | 2,53  | 2,46  | 2,39  | 2,35  | 2,31  | 2,27  | 2,22  | 2,18  | 2,13  |
| 15                              | 4,54  | 3,68  | 3,29  | 3,06  | 2,90  | 2,79  | 2,71  | 2,64  | 2,59  | 2,54  | 2,48  | 2,40  | 2,33  | 2,29  | 2,25  | 2,20  | 2,16  | 2,11  | 2,07  |
| 16                              | 4,49  | 3,63  | 3,24  | 3,01  | 2,85  | 2,74  | 2,66  | 2,59  | 2,54  | 2,49  | 2,42  | 2,35  | 2,28  | 2,24  | 2,19  | 2,15  | 2,11  | 2,06  | 2,01  |
| 17                              | 4,45  | 3,59  | 3,20  | 2,96  | 2,81  | 2,70  | 2,61  | 2,55  | 2,49  | 2,45  | 2,38  | 2,31  | 2,23  | 2,19  | 2,15  | 2,10  | 2,06  | 2,01  | 1,96  |
| 18                              | 4,41  | 3,55  | 3,16  | 2,93  | 2,77  | 2,66  | 2,58  | 2,51  | 2,46  | 2,41  | 2,34  | 2,27  | 2,19  | 2,15  | 2,11  | 2,06  | 2,02  | 1,97  | 1,92  |
| 19                              | 4,38  | 3,52  | 3,13  | 2,90  | 2,74  | 2,63  | 2,54  | 2,48  | 2,42  | 2,38  | 2,31  | 2,23  | 2,16  | 2,11  | 2,07  | 2,03  | 1,98  | 1,93  | 1,88  |
| 20                              | 4,35  | 3,49  | 3,10  | 2,87  | 2,71  | 2,60  | 2,51  | 2,45  | 2,39  | 2,35  | 2,28  | 2,20  | 2,12  | 2,08  | 2,04  | 1,99  | 1,95  | 1,90  | 1,84  |
| 21                              | 4,32  | 3,47  | 3,07  | 2,84  | 2,68  | 2,57  | 2,49  | 2,42  | 2,37  | 2,32  | 2,25  | 2,18  | 2,10  | 2,05  | 2,01  | 1,96  | 1,92  | 1,87  | 1,81  |
| 22                              | 4,30  | 3,44  | 3,05  | 2,82  | 2,66  | 2,55  | 2,46  | 2,40  | 2,34  | 2,30  | 2,23  | 2,15  | 2,07  | 2,03  | 1,98  | 1,94  | 1,89  | 1,84  | 1,78  |
| 23                              | 4,28  | 3,42  | 3,03  | 2,80  | 2,64  | 2,53  | 2,44  | 2,37  | 2,32  | 2,27  | 2,20  | 2,13  | 2,05  | 2,01  | 1,96  | 1,91  | 1,86  | 1,81  | 1,76  |
| 24                              | 4,26  | 3,40  | 3,01  | 2,78  | 2,62  | 2,51  | 2,42  | 2,36  | 2,30  | 2,25  | 2,18  | 2,11  | 2,03  | 1,98  | 1,94  | 1,89  | 1,84  | 1,79  | 1,73  |
| 25                              | 4,24  | 3,39  | 2,99  | 2,76  | 2,60  | 2,49  | 2,40  | 2,34  | 2,28  | 2,24  | 2,16  | 2,09  | 2,01  | 1,96  | 1,92  | 1,87  | 1,82  | 1,77  | 1,71  |
| 26                              | 4,23  | 3,37  | 2,98  | 2,74  | 2,59  | 2,47  | 2,39  | 2,32  | 2,27  | 2,22  | 2,15  | 2,07  | 1,99  | 1,95  | 1,90  | 1,85  | 1,80  | 1,75  | 1,69  |
| 27                              | 4,21  | 3,35  | 2,96  | 2,73  | 2,57  | 2,46  | 2,37  | 2,31  | 2,25  | 2,20  | 2,13  | 2,06  | 1,97  | 1,93  | 1,88  | 1,84  | 1,79  | 1,73  | 1,67  |
| 28                              | 4,20  | 3,34  | 2,95  | 2,71  | 2,56  | 2,45  | 2,36  | 2,29  | 2,24  | 2,19  | 2,12  | 2,04  | 1,96  | 1,91  | 1,87  | 1,82  | 1,77  | 1,71  | 1,65  |
| 29                              | 4,18  | 3,33  | 2,93  | 2,70  | 2,55  | 2,43  | 2,35  | 2,28  | 2,22  | 2,18  | 2,10  | 2,03  | 1,94  | 1,90  | 1,85  | 1,81  | 1,75  | 1,70  | 1,64  |
| 30                              | 4,17  | 3,32  | 2,92  | 2,69  | 2,53  | 2,42  | 2,33  | 2,27  | 2,21  | 2,16  | 2,09  | 2,01  | 1,93  | 1,89  | 1,84  | 1,79  | 1,74  | 1,68  | 1,62  |
| 40                              | 4,08  | 3,23  | 2,84  | 2,61  | 2,45  | 2,34  | 2,25  | 2,18  | 2,12  | 2,08  | 2,00  | 1,92  | 1,84  | 1,79  | 1,74  | 1,69  | 1,64  | 1,58  | 1,51  |
| 60                              | 4,00  | 3,15  | 2,76  | 2,53  | 2,37  | 2,25  | 2,17  | 2,10  | 2,04  | 1,99  | 1,92  | 1,84  | 1,75  | 1,70  | 1,65  | 1,59  | 1,53  | 1,47  | 1,39  |
| 120                             | 3,92  | 3,07  | 2,68  | 2,45  | 2,29  | 2,17  | 2,09  | 2,02  | 1,96  | 1,91  | 1,83  | 1,75  | 1,66  | 1,61  | 1,55  | 1,50  | 1,43  | 1,35  | 1,25  |
| ∞                               | 3,84  | 3,00  | 2,60  | 2,37  | 2,21  | 2,10  | 2,01  | 1,94  | 1,88  | 1,83  | 1,75  | 1,67  | 1,57  | 1,52  | 1,46  | 1,39  | 1,32  | 1,22  | 1,00  |

HIPÓTESES:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  ;  $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ ;  $\mu_1 < \mu_2$ ;  $\mu_1 > \mu_2$

TESTE t NÃO PAREADO COM  
VARIÂNCIA AGRUPADA

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{\text{agrupado}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$S_{\text{agrupado}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$t_{\text{Tabelado}} = t_{(n_1 + n_2 - 2; \alpha/2)}$$

TESTE t NÃO PAREADO COM  
VARIÂNCIA NÃO AGRUPADA

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$*v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$$t_{\text{Tabelado}} = t_{(v; \alpha/2)}$$

**\*NOTA:** Quando as variâncias são diferentes, o teste de médias é aproximado. Em outras palavras, a estatística do teste  $t_{\text{calc}}$  tem distribuição aproximada de “t”, com  $v$  graus de liberdade. O valor  $v$  é obtido através da fórmula de Satterthwaite. Como esse valor não é, em geral, inteiro, recomenda-se utilizar o valor inteiro mais próximo.

## TESTE t PAREADO

HIPÓTESES:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0; \quad \mu_1 - \mu_2 < 0; \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$$t_{calc} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}; \quad d_i = x_i - y_i; i = 1, 2, \dots, n \text{ pares}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_i d_i}{n}; \quad s_d^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_i d_i^2 - \frac{(\sum_i d_i)^2}{n} \right]; \quad s_d = +\sqrt{s_d^2}$$

$$t_{Tabelado} = t_{(n-1; \alpha/2)}$$



## CASO 2 – COMPARANDO MEDIDAS REPETIDAS

**Exemplo 3:** Podemos utilizar um teste t para decidir se dois grupos de medidas repetidas fornecem resultados “idênticos” ou “diferentes”, dentro de um determinado nível de confiança. Um exemplo é dado pelo trabalho de Lorde Rayleigh (John W. Strutt), que atualmente é lembrado por seus estudos sobre espalhamento de luz, sobre a radiação do corpo negro sobre ondas elásticas em sólidos. Ele ganhou o Prêmio Nobel em 1904 pela descoberta do gás inerte argônio. Essa descoberta ocorreu quando ele observou uma pequena discrepância entre dois grupos de medidas da densidade do gás nitrogênio.

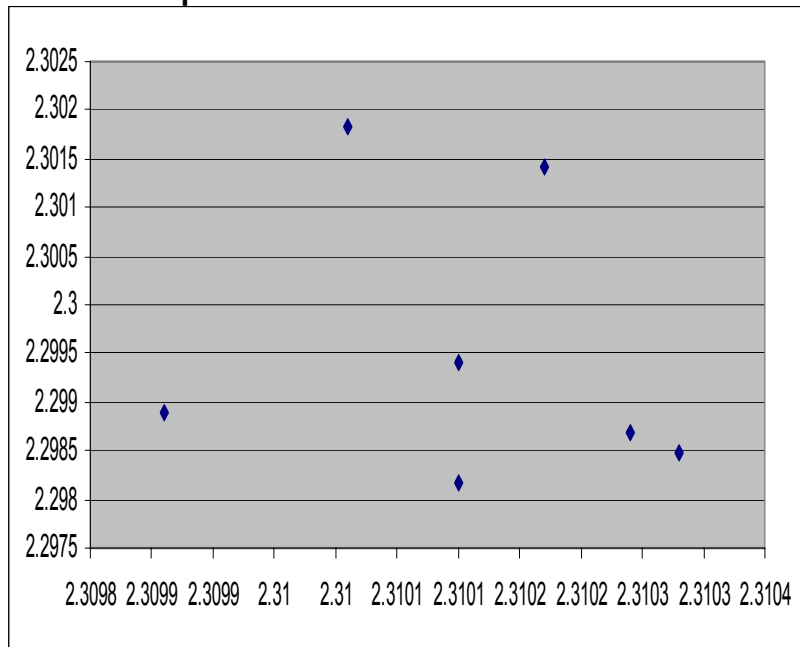
Vejamos como utilizar o teste t para decidir se o gás isolado do ar é “significativamente” mais pesado do que o nitrogênio isolado de fontes químicas.

| MASAS DO GÁS ISOLADO POR LORDE RAYLEIGH                             |                             |
|---|-----------------------------|
| Do ar (g)   | Da decomposição química (g) |
| 2.31017   | 2.30143                     |
| 2.30986   | 2.29890                     |
| 2.31010   | 2.29816                     |
| 2.31001   | 2.30182                     |
| 2.31024   | 2.29869                     |
| 2.31010   | 2.29940                     |
| 2.31028   | 2.29849                     |
|   | 2.29889                     |
| <b>Média</b>  | <b>Média</b>                |
| 2.31011   | 2.29947                     |
| <b>Desvio-padrão</b>  | <b>Desvio-padrão</b>        |
| 0.000143  | 0.00138                     |
| <b>FONTE:</b> R.D. Larsen, <i>J. Chem. Ed.</i> <b>1990</b> , 67,925 |                             |

## Teste de normalidade

| Shapiro-Wilk |         |
|--------------|---------|
| Estatística  | p-valor |
| 0.954        | 0.733   |
| 0.825        | 0.082   |

## Verificação de dependência ou independência entre as amostras



## Teste F ou teste de Hartley

Teste-F: duas amostras para variâncias

|                      | Variável 1 | Variável 2 |
|----------------------|------------|------------|
| Média                | 2.299473   | 2.310109   |
| Variância            | 1.9E-06    | 2.03E-08   |
| Observações          | 8          | 7          |
| gl                   | 7          | 6          |
| F                    | 93.48339   |            |
| P(F<=f) uni-caudal   | 1.06E-05   |            |
| F crítico uni-caudal | 4.206669   |            |

## Determinação do valor calculado do teste

Teste-t: duas amostras presumindo variâncias diferentes

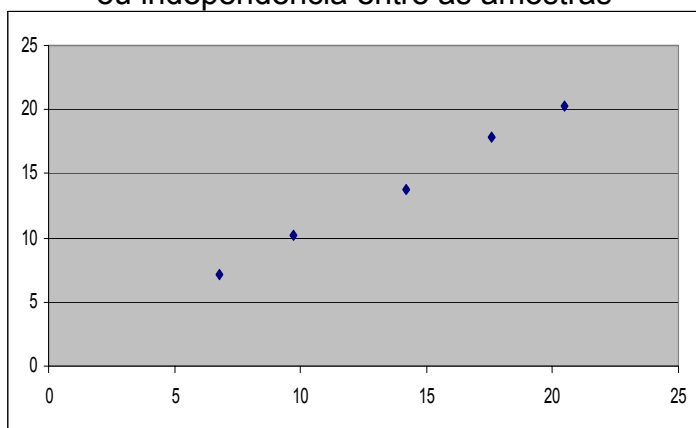
|                                | Variável 1 | Variável 2 |
|--------------------------------|------------|------------|
| Média                          | 2.310109   | 2.299473   |
| Variância                      | 2.03E-08   | 1.9E-06    |
| Observações                    | 7          | 8          |
| Hipótese da diferença de média | 0          |            |
| gl                             | 7          |            |
| Stat t                         | 21.68022   |            |
| P(T<=t) uni-caudal             | 5.6E-08    |            |
| t crítico uni-caudal           | 1.894578   |            |
| P(T<=t) bi-caudal              | 1.12E-07   |            |
| t crítico bi-caudal            | 2.364623   |            |

**Exemplo 3:** O teste t com amostras de composições diferentes ( teste t pareado ou emparelhado). Dois métodos diferentes A e B, foram usados para analisar cinco compostos diferentes de ferro (% de Fe).

| Amostra | Método A | Método B |
|---------|----------|----------|
| 1       | 17.6     | 17.9     |
| 2       | 6.8      | 7.1      |
| 3       | 14.2     | 13.8     |
| 4       | 20.5     | 20.3     |
| 5       | 9.7      | 10.2     |

| Shapiro-Wilk |         |
|--------------|---------|
| Estatística  | p-valor |
| 0.924        | 0.491   |
| 0.922        | 0.485   |

Verificação de dependência ou independência entre as amostras



| Método A | Método B | d     | $d - \bar{d}$ | $(d - \bar{d})^2$ |
|----------|----------|-------|---------------|-------------------|
| 17.6     | 17.9     | + 0.3 | 0.2           | 0.04              |
| 6.8      | 7.1      | + 0.3 | 0.2           | 0.04              |
| 14.2     | 13.8     | - 0.4 | - 0.5         | 0.25              |
| 20.5     | 20.3     | - 0.2 | - 0.3         | 0.09              |
| 9.7      | 10.2     | + 0.5 | 0.4           | 0.16              |

$\sum d = 0.5$                        $\sum (d - \bar{d})^2 = 0.58$   
 $\bar{d} = 0.1$

$$s_d = \sqrt{\frac{0.58}{4}} = + 0.38$$

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\bar{d} \sqrt{5}}{s_d} = \frac{0.10 \sqrt{5}}{0.38} = 0.589$$

# CONFIABILIDADE DOS RESULTADOS

Rejeição de valores:

- após aplicação de teste estatístico apropriado;
- quando existir uma razão química ou instrumental suficiente óbvia que possa justificar a exclusão do resultado.

Exemplo: Os seguintes valores foram questionados para a determinação de cádmio em amostra de poeira: 4.3; 4.1; 4.0; 3.2  $\mu\text{g/g}$ . O último valor deve ser rejeitado ?

$$Q = \frac{|\text{valor questionado} - \text{valor mais próximo}|}{\text{maior valor} - \text{menor valor}}$$

Se o valor de Q for maior que o valor **crítico de Q**, que está na tabela Q, então o valor questionado deve ser rejeitado.

$$Q = \frac{|3.2 - 4.0|}{4.3 - 3.2} = \frac{0.8}{1.1} = 0.727$$

Não há evidências no intervalo de 95% de confiança para rejeição do valor 3.2  $\mu\text{g/g}$

## VALORES CRÍTICOS DE Q (P = 0.05)

| Tamanho da amostra | Valor crítico |
|--------------------|---------------|
| 4                  | 0.831         |
| 5                  | 0.717         |
| 6                  | 0.621         |
| 7                  | 0.570         |
| 8                  | 0.524         |
| 9                  | 0.492         |
| 10                 | 0.464         |

*J. Am. Statist. Assoc.*, 1958, **48**, 531.

# Pensamento ....

**“Podemos ser ludibriados por três formas de preguiça: a que se manifesta como intolerância, que é o desejo de adiar; a que se manifesta como sentimento de inferioridade, que é duvidar da própria capacidade; e a que se manifesta com a adoção de atitudes negativas, que é dedicar um esforço excessivo àquilo que não é virtude.”**

**Dalai-Lama**