Distribuições e Transformada de Fourier

Jens Mund

Notas *incompletas* de Aula, DF-UFJF, Física Matemática II, 2020-3

Conteúdo

1 Distribuições

1.1 Motivação e definição

Como motivação para a "função delta" de Dirac [Dirac 1926] consideramos uma carga pontual. Recordamos que a carga elétrica é uma grandeza aditiva, permitindo a definição da densidade de carga, ϱ: Ela é definida pela propriedade que para toda região[1] $G \subset \mathbb{R}^3$ a carga $Q(G)$ contida em essa região é dada por

$$\int_G \varrho(\boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{r} = Q(G).$$

Para uma carga pontual q localizada na origem, temos

$$Q(G) = \begin{cases} q, & \mathbf{0} \in G \\ 0, & \mathbf{0} \notin G. \end{cases}$$

[1] Identificamos aquí o espaço físico com $\mathbb{R}^3$.

Qual seria a densidade de carga, $\varrho_{\rm pt}(\boldsymbol{r})$, para essa situação? Vamos normalizar ela e definir

$$\delta(\boldsymbol{r}) := \frac{1}{q}\varrho_{\rm pt}(\boldsymbol{r}).$$

Este objeto tem as duas propriedades

$$(i) \quad \delta(\boldsymbol{r}) = 0 \ \text{ se } \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}, \qquad\qquad (ii) \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{r} = \frac{1}{q}\, Q(\mathbb{R}^3) \equiv 1.$$

Obivamente, não existe uma função com essas propriedades (pois uma função com a propridade (i) teria integral zero).

Para chegar a uma definição rigorosa desse objeto, fazemos a integral do produto de δ com uma função φ contínua. O produto $\varphi(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r})$ é zero para todos $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$. Podemos então substituir $\varphi(\boldsymbol{r})$ pelo valor assumido na origem, $\varphi(\boldsymbol{0})$. Daí, deveria ser válido que

$$\text{“ } \varphi(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{0})\,\delta(\boldsymbol{r}) \text{ “.}$$

(Veremos depois que esta equação realmente vale num sentido rigoroso, ver Eq. (23), mas por enquanto escrevemos ela entre aspas porque o argumento era heurístico.) Em particular, a integral do produto é

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{0}) \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{0}).$$

Então o δ pode ser entendido como um aparelho que pega uma função φ e joga ela no número $\varphi(\boldsymbol{0})$, ou seja, uma aplicação do espaço de funções para os números complexos. Esse ponto de vista é devido a Laurent Schwartz [1945]. Ele chamou tais aplicações de *distribuições*.

Vamos dar as definições num primeiro passo em uma dimensão: Uma distribuição é uma aplicação de uma certa classe de funções, $D(\mathbb{R})$, em $\mathbb{C}$:

$$T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle,$$

que é linear e contínua (num sentido a definir). A classe de funções mais apropriada são as funções em $C^\infty(\mathbb{R})$ com suporte limitado,[2] em símbolos $D(\mathbb{R})$. Elas são chamadas de “funções de teste”. Esta classe de funções é um espaço vetorial com as definições usuais de adição e multiplicação com escalares: Para $c \in \mathbb{C}$ e $\varphi, \chi \in D(\mathbb{R})$ definimos

$$\begin{aligned}\big(\varphi + \chi\big)(x) &:= \varphi(x) + \chi(x)\\ \big(c \cdot \varphi\big)(x) &:= c\,\varphi(x).\end{aligned}$$

Linearidade de uma distribuição T significa que para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$ vale

$$\langle T, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle = c_1\langle T, \varphi_1\rangle + c_2\langle T, \varphi_2\rangle \tag{1}$$

Para explicar a contínuidade precisamos primeiro uma noção de convergência em $D(\mathbb{R})$. Recordamos que uma sequência de funcões contínuas φ_n com suporte num intervalo finito I e dito de convergir *uniformemente* para uma função φ se a sequência de números reais

$$\max\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|,\ x \in I\}$$

converge para zero se $n \to \infty$.

Definição 1 Seja φ_n uma sequência em $D(\mathbb{R})$. Ela é dita de *convergir em D* para uma função φ, em símbolos $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$, se

$i)$ Existe um intervalo finito I contendo todos suportes: $\operatorname{supp}\varphi_n \in I$ para todo n.

$ii)$ A sequência de funções e de todas derivadas converge uniformemente: Para todo $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n^{(\nu)} \to \varphi^{(\nu)}$ uniformemente. □

[2] O suporte suppφ de uma função contínua φ é o fecho do conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ con $\varphi(x) = 0$.

(Aquí, $\varphi^{(\nu)}$ denota a ν-esima derivada.) Agora estamos pronto para a definição no sentido de L. Schwartz:

Definição 2 Uma aplicação $T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$, é uma *distribuição* se ela é *linear* no sentido (1) e *contínua* no seguinte sentido: Se uma sequência $\varphi_n \in D(\mathbb{R})$ converge em D para φ, então a sequência de imagens também converge:

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

$\square$

Exemplo 1 A distribuição δ,

$$\langle \delta, \varphi\rangle := \varphi(0), \qquad \langle \delta_a, \varphi\rangle := \varphi(a)\,. \tag{2}$$

$\square$

Exemplo 2 Distribuições regulares. Uma função f localmente integrável [3], $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, corresponde a uma distribuição T_f conforme

$$\langle T_f, \varphi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

$\square$

Distribuições dessa forma são chamadas de *regulares*. Um fato importante é que toda distribuição pode ser aproximada por distribuições regulares (até com funções suaves):

Definição 3 Uma sequência de funções $f_n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ é dita de convergir para uma distribuiçõ T no sentido de distribuições se para toda função de teste $\varphi \in D(\mathbb{R})$ vale

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle. \tag{4}$$

$\square$

Teorema 1.1 *Para toda distribuição T existe uma sequência de funções $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ que converge para T no sentido de distribuições.*

(Daremos a demonstração no final da Secção 1.7, ver p. 10.)

Exemplo 3 As seguintes sequências de funcões convergem para a distribuição δ no sentido da Definição 3:

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-n^2x^2}, \qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2x^2}, \qquad \frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{\pi x} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx}dk, \qquad \frac{n}{2\cosh(nx)^2}. \tag{5}$$

$\square$

Na verdade, temos [12, p. 176, Pr. 22 (b)]:

Lema 1.2 *Seja f uma função limitada e (absolutamente[4]) integrável com $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Então a sequência*

$$f_n(x) := nf(nx)$$

converge para a distribuição δ no sentido (4).

[3]Recordamos as definições: $L^1(\mathbb{R})$ é o espaço de funções integráveis, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$. Uma função f é chamda de localmente integrável, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, se para todo intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ a integral $\int_I |f(x)|dx$ é finita. Por exemplo, $1/x$ não é localmente integrável, mas $\ln|x|$ e $1/\sqrt{x}$ são sim: Se existe uma função contínua F tal que $f(x) = F'(x)$ para todos $x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, então $\int_I |f(x)|dx < \infty$.

[4]I.e., $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Demonstração. Para qualquer $\varphi \in D(\mathbb{R})$ vale

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx = n\int f(nx)\varphi(x)dx = \int f(x')\varphi(x'/n)dx'.$$

Obviamente, $\varphi(x/n)$ converge puntiformemente para $\varphi(0)$. Como toda função de teste, φ é limitada, $|\varphi(x)| \leq c$ para todo x. Daí, $c|f(x)|$ e uma "função dominante" e o teorema B.1 garante que podemos trocar limite e integração:

$$\int f(x)\varphi(x/n)dx \to \int f(x)\varphi(0)dx \equiv \varphi(0).$$

$\square$

Aviso: O tercerio exemplo de (5) não é da forma anunciada no Lema, pois $\int |\operatorname{sen}(x)/x| = \infty$! Mesmo assim vale:

Lema 1.3 *A sequência de funções*

$$\frac{sen\,(nx)}{\pi x} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx}dk \tag{6}$$

converge para a distribuição δ no sentido (4).

Demonstração. Escrevendo a função de teste φ como $\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0))$, temos

$$\int \varphi(x)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}dx = \int \varphi(0)\frac{\operatorname{sen} nx}{x}dx + \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\operatorname{sen} nx\, dx. \tag{7}$$

Substituindo o valor da integral imprópria $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(nx)/x\, dx = \pi$ (demonstração com o cálculo de resíduo), o primeiro termo é $\pi\varphi(0)$. Falta mostrar que o segundo termo vai para zero se $n \to \infty$. Para esses fins, recordamos o "truque padrão" mostrando que a fração diferencial de uma função suave também é suave: Observamos que

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda x)d\lambda = x\int_0^1 \varphi'(\lambda x)\, d\lambda$$

Daí, a fração diferencial é uma função suave:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(\lambda x)\, d\lambda =: \psi(x) \ \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Com isso podemos integrar o segundo termo em Eq. (7) em partes, escrevendo $\operatorname{sen}(nx) = \frac{-1}{n}\frac{d}{dx}\cos(nx)$:

$$\int \psi(x)\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{-1}{n}\psi(x)\cos(nx)|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{n}\int \psi'(x)\cos nx\, dx.$$

Obviamente, a função ψ cai para zero no infinito como $1/x$, e a derivada ψ' cai para zero como $1/x^2$. Por isso, o primeiro termo é zero, e o segundo termo é limitado por $\frac{1}{n}\int |\psi'(x)|dx$ e vai para zero se $n \to \infty$. $\square$

Em muitos casos, uma distribuição é *definida* como limite de funções suaves no sentido do teorema 1.1, por exemplo:

Exemplo 4 A distribuição $\frac{1}{x+i0}$ é definida por

$$\langle\frac{1}{x+i0}, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T_{\frac{1}{x+i\varepsilon}}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx. \tag{8}$$

(*Primeiro a integral, depois o limite!*) Para ver que isso é bem-definido, observe que $(x+i\varepsilon)^{-1}$ é a derivada da função $\ln(x+i\varepsilon)$, a qual é uma função suave para $\varepsilon>0$. Depois de uma integração em partes, chegamos a

$$\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int \ln(x+i\varepsilon)\varphi'(x)dx. \tag{9}$$

Aquí, limite e integração podem ser trocados.[5] Então temos

$$\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi\rangle = -\int \ln_+(x)\varphi'(x)dx, \tag{10}$$

onde

$$\ln_+(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\ln(x+i\varepsilon), \quad x\neq 0,$$

é o ramo principal do logaritmo, extendido para os números reais negativos através do semi-plano complexo superior.[6] O lançe é que essa função, em contraste a $1/x$, é localmente integravel na origem, pois ela é a derivada da função $x(\ln_+(x)-1)$ que é contínua na origem (ela converge para zero se $x\to 0$). □

1.2 Derivada de distribuições

Para uma distribuição regular T_f com $f\in C^1(\mathbb{R})\cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ é natural definir

$$(T_f)' := T_{f'}.$$

Para uma distribuição T geral, escolhemos uma sequencia f_n que converge para T no sentido $T=\lim_{n\to\infty}T_{f_n}$, e definimos[7]

$$T' := \lim_{n\to\infty} T_{f_n'}, \tag{12}$$

dado que esse limite existe, o que vamos verificar logo. Um pequeno calculo com integração em partes mostra que para $\varphi\in D(\mathbb{R})$ vale

$$\langle T_{f_n'}, \varphi\rangle = -\langle T_{f_n}, \varphi'\rangle,$$

o qual converge para $-\langle T,\varphi'\rangle$ por hipótese. Então, o limite em (12) existe, e é dado por

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle. \tag{13}$$

Essa equação vamos tomar como definição de T'. Consequentemente, a n-esima derivada $T^{(n)}$ é dada por

$$\langle T^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\,\langle T, \varphi^{(n)}\rangle.$$

[5] Para mostrar isso, observamos que $\ln(x)$ é a derivada da função $x(\ln x-1)$ que é contínua na origem, e depois de mais uma integração em partes chegamos em

$$\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int (x+i\varepsilon)(\ln(x+i\varepsilon)-1)\varphi''(x)dx = \int x(\ln_+(x)-1)\varphi''(x)dx.$$

Aquí, temos usado que o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, ver Teorema B.1 no apêndice, afirma que podemos trocar limite e integração. Depois re-fazemos a última integração em partes e chegamos na Eq. (10).

[6] Para $x>0$, isso é simplesmente o logaritmo. Para $x=-r<0$, observe que $e^{i(\pi-\varepsilon)}r\equiv -re^{-i\varepsilon} = -r+ir\varepsilon+O(\varepsilon^2)$, então

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(-r+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln(e^{i(\pi-\varepsilon)}r) = \lim_{\varepsilon\to 0}(i(\pi-\varepsilon)) + \ln r = \ln r + i\pi.$$

Então temos

$$\ln_+(x) = \begin{cases}\ln(x), & x>0\\ \ln(|x|)+i\pi, & x<0,\end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \ln_+(x) = \ln|x| + i\pi H(-x), \tag{11}$$

onde H é a função Heaviside definida em (15).

[7] Dessa maneira, outras operações com funções podem ser extendidas para distribuições, como multiplicação com funções, pull-back, transformada de Fourier, etc.

Exemplo 5 A Eq. (10) implica
$$\frac{1}{x+i0} = \big(T_{\ln_+}\big)'. \tag{14}$$
□

Exemplo 6 Seja H a função *Heaviside*:
$$H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}. \tag{15}$$
Como espera-se heuristicamente, a sua derivada (no sentido de distribuições) é a distribuição δ:
$$\big(T_H\big)' = \delta. \tag{16}$$
Para verificar isso, aplicamos o lado esquerdo em uma função de teste φ:
$$\langle \big(T_H\big)', \varphi\rangle = -\langle T_H, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle.$$
Na pen-última equação usamos o fato que $\varphi(x) = 0$ para todos x maior do que um certo R. □

Exemplo 7 (Heaviside novamente.) Mais perto da intuição, pegamos uma sequência de funções deriváveis que converge puntiformemente para H, por exemplo
$$H_n(x) \doteq \frac{1}{2}\big(1 + \tanh(nx)\big). \tag{17}$$
Como $\tanh(x) \to \pm 1$ se $x \to \pm\infty$, para todos $x \neq 0$ vale $H_n(x) \to H(x)$ se $n \to \infty$. Isso implica que $T_{H_n} \to T_H$. Por nossa definição original (12) temos
$$\big(T_H\big)' = \lim_{n\to\infty} T_{H_n'}. \tag{18}$$
Mas a derivada da função H_n é
$$H_n'(x) = \frac{n}{2\cosh(nx)^2}, \tag{19}$$
a qual é uma sequência-delta, ver Eq. (5). Daí, temos $\big(T_H\big)' = \delta$ novamente.[8] □

Exemplo 8 Seja $f(x) \doteq xH(x)$. Então vale
$$\big(T_f\big)'' = \delta.$$
□

Vamos agora citar um resultado importante que caracteriza a distribuição-δ e suas derivadas. Recordamos que elas têm a seguinte propriedade: Se uma função de teste φ tem supporte disjunto de $\{a\}$, então vale $\langle \delta_a, \varphi\rangle = 0$. Nesse caso, falamos que $\{a\}$ é o *supporte de δ_a*. O mesmo vale para as derivadas de δ_a. Esse fato até caracteriza essas distribuições:

Teorema 1.4 *O suporte de uma distribuição T consiste de um único ponto $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existem números $n \in \mathbb{N}_0$, $c_0, \ldots c_n \in \mathbb{C}$ tal que*
$$T = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\, \delta_a^{(\nu)}.$$
(Aquí, $\delta_a(x) \doteq \delta(x-a)$ e $\delta_a^{(\nu)}$ é a ν-esima derivada.) Demonstração: [14].

[8]Em vez de (20) podemos pegar qualquer sequência da forma
$$H_n(x) \doteq F(nx), \tag{20}$$
onde F é uma função derivável com $F(x) \to 1$ se $x \to \infty$ e $F(x) \to 0$ se $x \to -\infty$. A derivada seria $H_n'(x) = nF'(nx)$. Se a função F' é integrável, ela automaticamente é normalizada, $\int F'(x)dx = \lim_{r\to\infty}\big(F(r) - F(-r)\big) = 1$. Pelo Lema 1.2, a família H_n' é uma sequência-delta.

Derivada de funções descontínuas. Seja $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$. A derivada de f pode não existir no ponto a, e nesse caso nos associamos algum valor, por exemplo $f'(a) := 0$. Seja a tal definida derivada de f localmente integrável. (Ela define uma distribuição regular, a qual independe do valor $f'(a)$.)

Supomos que existam os limites

$$f_\pm(a) := \lim_{\varepsilon \to 0} f(a \pm \varepsilon).$$

O salto da função no ponto a é

$$\sigma_a \doteq f_+(a) - f_-(a).$$

Então vale

$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma_a \, \delta_a. \tag{21}$$

(Demonstração em [11, p. 266].) Um exemplo é a Eq. (16).

1.3 Multiplicação com funções

Recordamos que o produto de duas funções ψ e φ é dado por

$$(\psi \cdot \varphi)(x) := \psi(x)\varphi(x).$$

O produto de uma função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e uma distribuição T é definida por

$$\langle \psi \cdot T, \varphi \rangle := \langle T, \psi \cdot \varphi \rangle \tag{22}$$

(Observe que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$ implica $\psi \cdot \varphi \in D(\mathbb{R})$.) Alguns identidades útis:

$$\psi \cdot \delta_a = \psi(a)\delta_a, \qquad \psi \cdot \delta' = -\psi'(0)\delta + \psi(0)\delta' \tag{23}$$

$$x^n \delta^{(k)} = \begin{cases} 0, & k < n \\ (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}, & k \geq n \end{cases} \tag{24}$$

(Demonstração da Eq. (24) encontra-se em [3].)

Verifique-se facilmente que a derivada satisfaz a regra do produto:

$$(\psi \cdot T)' = \psi' \cdot T + \psi \cdot T'. \tag{25}$$

Vamos verificar essa regra para o Exemplo 8:

$$(xT_H)'' = \big(x'T_H + x(T_H)'\big)' = (T_H + x\delta)' = \delta + \delta + x\delta' = \delta,$$

pois $x\delta' = -\delta$ segundo Eq. (24).

1.4 "Pull-back"

O "pull-back" de uma função f sobre uma transformação $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por $(\Phi^* f)(x) := f(\Phi(x))$. Para uma distribuição T definimos o pull-back sobre uma transformação $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ seguindo nossa receita, ver rodapé 7:

Seja f_n uma sequência de funções que converge para a distribuição T. Então definimos

$$\Phi^* T := \lim_{n \to \infty} T_{\Phi^* f_n}$$

se esse limite existe.[9] È costume escrever "$(\Phi^*T)(x) = T(\Phi(x))$". Se Φ é invertível (ou seja, uma transformação global de variáveis), o limite sempre existe, e coincede com

$$\langle \Phi^* T, \varphi \rangle = \langle T, |(\Phi^{-1})'| \cdot (\Phi^{-1})^* \varphi \rangle.$$

[9] Isso não é o caso para todos Φ e T. Um critério famoso suficiente para existência é dado em [8, Thm. 8.2.4].

Exemplo 9 O pull-back da distribuição delta sobre a translação $\Phi_a(x) \doteq x - a$ é dado por

$$\langle \Phi_a^* \delta, \varphi \rangle = \varphi(a) \equiv \langle \delta_a, \varphi \rangle, \quad \text{ou seja,} \quad \Phi_a^* \delta = \delta_a \,.$$

Escrevemos informalmente $\delta(x-a) = \delta_a(x)$. □

Exemplo 10 Se Φ tem um número finito de zeros simples $x_1, \ldots, x_n$, então

$$\delta(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\Phi'(x_i)|} \, \delta(x - x_i). \tag{26}$$

Ver *Exercise* 1.15.7 em [1]. □

1.5 Valor principal

Como a função $1/x$ não é localmente integravel na origem, ela não define uma distribuição: Ela pode ser integrada apenas com funções de teste que se anulam na origem. Uma extensão para todas funções de teste é dada pelo valor principal, $P\frac{1}{x}$:

$$\langle P\frac{1}{x}, \varphi \rangle := P\!-\!\!\int \frac{\varphi(x)}{x} \, dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx. \tag{27}$$

Para ver se este limite existe, escolhemos um número $a > 0$ tal que o suporte de φ está contido no intervalo $I \doteq [-a, a]$. Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx &= \int_{I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x} \, dx \\ &= \varphi(0) \int_{I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{dx}{x} + \int_{I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx \,. \end{aligned}$$

O primeiro termo na última linha, $\int dx/x$, é zero porque a função $1/x$ é impar e a região de integração $I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ é simétrica. Daí, o limite $\varepsilon \to 0$ também é zero. O integrante do segundo termo é contínuo, pois a função φ é derivável. Concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx, \tag{28}$$

onde a é escolhido de tal maneira que o suporte de φ está contido no intervalo $[-a, a]$. (Veja também [11, Ex. 9.1.5, p. 262].)

Uma família de funções que aproxima o valor principal, no sentido da Definição 3, é dada por $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$ no limite $\varepsilon \to 0$. Mais precisamente, vale

$$\langle P\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) \, dx \tag{29}$$

para toda função de teste φ. Para ver isso, escrevemos como antes

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \, dx = \varphi(0) \int_I \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_I \frac{x\big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)}{x^2 + \varepsilon^2} \, dx \,,$$

onde $I = (-a, a)$ é um intervalo simétrico contendo o suporte de φ. Como antes, o primeiro termo é zero devido a simetria. O integrando do segundo integral converge puntiformemente para $(\varphi(x) - \varphi(0))/x$ se $\varepsilon \to 0$. Aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (detalhes em [11, Tma. 9.15, p. 283]), chegamos em (29).

A seguinte relação entra na dedução das relações de Kramers e Kronig na eletrodinâmica [9, p. 333]

$$P\frac{1}{x} = \frac{1}{x \pm i0} \pm i\pi\delta. \tag{30}$$

Demonstração. Expandindo $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ por $x - i\varepsilon$, temos

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

O primeiro termo converge para $P\frac{1}{x}$ no sentido de distribuições se $\varepsilon \to 0$, veja Eq. (29). O limite do segundo termo (no sentido de distribuições) é o mesmo do que o limite de $\frac{-in}{n^2x^2+1}$ para $n \to \infty$ (fazendo $\varepsilon \doteq 1/n$). Pela Eq. (5), esse limite é $-i\pi$ vezes a distribuição delta. □

Exemplo 11 Mostre que vale $x \cdot P\frac{1}{x} = 1$. □

Exemplo 12 A distribuição $P\frac{1}{x}$ é a derivada do logaritmo $\ln|x|$ no sentido de distribuições:

$$(T_{\ln|x|})' = P\frac{1}{x}. \tag{31}$$

Essa relação pode er verificada diretamente [11, p. 266], porém aquí aplicamos os nossos resultados (30), (14) e (21 – derivada de funções descontínuas): Pela Eq. (11), vale $\ln|x| = \ln_+(x) - i\pi H(-x)$. Tomando as derivadas e usando $(T_{H(-x)})' = -\delta(x)$ pela Eq. (21), temos

$$\big(T_{\ln|x|}\big)' = \big(T_{\ln_+}\big)' + i\pi\delta \; = \frac{1}{x+i0} + i\pi\delta = P\frac{1}{x}.$$

(Usamos (14) e (30).) □

1.6 Divisão

A solução geral da equação

$$x^m \cdot T = 0$$

é dada por

$$T = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu \delta^{(\nu)}, \qquad c_\nu \in \mathbb{C}.$$

(Tma. 9.9 para $m = 1$, e Problema 9.6 em [11].) Consequentemente, a solução geral da equação

$$x \cdot T = 1$$

é dada por

$$T = P\frac{1}{x} + c\delta, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

1.7 Convolução

A convolução de duas funções f, g é definida por

$$(f * g)(x) \doteq \int f(y)g(x-y)dy. \tag{32}$$

Se f e g são deriváveis, verifique-se facilmente que vale

$$(f * g)' = f' * g = f * g'. \tag{33}$$

Para definir a convolução de uma distribuição com uma função, observa que a definição (32) pode ser escrita como $(f * g)(x) = \langle T_f, g_x^\tau \rangle$, onde T_f é a distribuição regular definida por f, e $g_x^\tau(y) \doteq g(x-y)$. Essa definição pode ser extendida para distribuições arbitrárias T:

$$(T * g)(x) \doteq \langle T, g_x^\tau \rangle, \quad g_x^\tau(y) \doteq g(x-y). \tag{34}$$

Exemplo: $\delta * f = f$, e $(\delta_a * f)(x) = f(x-a)$.

A propriedade (33) vale também para distribuições:

Lema 1.5 *Para toda distribuição T e função de teste φ, a convolução $T * \varphi$ é uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$, com derivada*

$$(T * \varphi)' = T' * \varphi = T * \varphi'.$$

Se o suporte de T é compacto, então $T * \varphi$ também tem suporte compacto, ou seja, $T * \varphi \in D(\mathbb{R})$.

Demonstração. A derivada é dada por

$$(T * \varphi)'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \big((T * \varphi)(x+\varepsilon) - (T * \varphi)(x) \big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle T, \frac{\varphi_{x+\varepsilon}^\tau - \varphi_x^\tau}{\varepsilon} \rangle.$$

Usando o fato que $(\varphi_{x+\varepsilon}^\tau(y) - \varphi_x^\tau(y))/\varepsilon$ converge uniformemente para $-(\varphi_x^\tau)'(y)$, e que T é contínuo, temos

$$(T * \varphi)'(x) = -\langle T, (\varphi_x^\tau)' \rangle \equiv \langle T', \varphi_x^\tau \rangle = (T' * \varphi)(x).$$

Também temos $-(\varphi_x^\tau)' = (\varphi')_x^\tau$, então a expressão encima coincede com

$$\langle T, (\varphi')_x^\tau \rangle = (T * \varphi')(x).$$

A propriedade do suporte verifique-se diretamente. $\square$

Verifique-se facilmente que para qualquer função de teste φ vale (ver exercício 7)

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_f * g, \varphi \rangle = \langle T_f, g^\tau * \varphi \rangle, \qquad g^\tau(x) \doteq g(-x).$$

(No meio escrevemos a *função* $T_f * g$ em vez da *distribuição* $T_{T_f * g}$ para não aparacer feio.) Por continuidade, isso implica

$$\langle T_{T*g}, \varphi \rangle = \langle T, g^\tau * \varphi \rangle. \tag{35}$$

Com o Lema 1.5 podemos dar uma

Demonstração do Teorema 1.1. Queremos construir uma sequência f_n de funções suaves que converge para uma dada distribuição T. Para esses fins, pegamos uma sequência-Delta no sentido do Lema 1.2, $j_n(x) \doteq n j(nx)$, com $j \in D(\mathbb{R})$, e definimos

$$f_n \doteq T * j_n^\tau, \quad j^\tau(x) \doteq j(-x).$$

Pelo Lema 1.5, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, e pela Eq. (35) temos para $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle T, j_n * \varphi \rangle.$$

Se $j_n * \varphi$ converge para φ em D, a continuidade de T no sentido da Def. 2 implica que T_{f_n} converge para T, completando a demonstração.

Precisamos ainda mostrar que $j_n * \varphi$ converge para φ em D. Para esses fins, consideramos

$$\begin{aligned}(j_n * \varphi - \varphi)(x) = \int dy \big[j_n(y) \varphi(x-y) \big] - \varphi(x) &= \int dy j_n(y) \big[\varphi(x-y) - \varphi(x) \big] \\ &= \int dy\, j(y) \big[\varphi(x - y/n) - \varphi(x) \big].\end{aligned}$$

(Na segunda igualdade temos usado o fato que $\int dy j_n(y) = 1$.) Mas

$$|\varphi(x - y/n) - \varphi(x)| \leq c\,|y|/n$$

pelo teorema do valor médio e o fato que φ' é limitado. Daí, para todo x vale a cota

$$|(j_n * \varphi - \varphi)(x)| \leq \frac{c}{n} \int dy\,|yj(y)|\; = \frac{c'}{n}.$$

Isso mostra que $j_n * \varphi$ converge uniformemente para φ. O mesmo argumento vale parar todas derivadas de φ, então $j_n * \varphi$ converge para φ em D, completando a demonstração.

Convolução de distribuições. Com o Lema 1.5 podemos definir a convolução de uma distribuição T_1 com uma *distribuição* T_2 com suporte compacto:

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle := \langle T_1, T_2^\tau * \varphi \rangle,$$

onde $T^\tau(x) := T(-x)$ (no sentido do pull-back de distribuições). Isso é bem-definido pois $T_2 * \varphi \in D(\mathbb{R})$ pelo Lema 1.5, e extende o caso quando T_2 é uma função, ver exercício 7. A continuidade de $T_1 * T_2$ é mostrada em [8, Cap. 4.2]. Por exemplo,

$$T * \delta = T. \tag{36}$$

(Exercício!) Usando $(T_2^\tau)' = -(T_2')^\tau$, mostra-se facilmente que a propriedade (33) ainda vale:

$$(T_1 * T_2)' = T_1' * T_2 = T_1 * T_2'. \tag{37}$$

1.8 Distribuições como soluções de EDO's

Consideramos uma EDO da forma

$$a_n \cdot T^{(n)} + \cdots + a_1 \cdot T' + a_0 \cdot T = h, \tag{38}$$

onde $a_\nu \in C^\infty(I)$ são funções suaves dadas num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e h pode ser uma função ou distribuição. A solução T pode ser uma função em $C^n(I)$ ou uma distribuição (neste caso as derivadas são entendidas no sentido de distribuições). No primerio caso ela é chamada de "solução clássica", e no segundo caso de "solução distribucional", ou, se ele é uma distribuição regular, "solução fraca". O seguinte teorema encontra-se no livro de L. Schwartz [14]:

Teorema 1.6 *Se $a_n(x)$ nunca se anula e $h(x)$ é localmente integrável, as únicas soluções da EDO* (38) *são as soluções clássicas.*

Por exemplo, a EDO

$$T' = 0,$$

onde $n = 1$ e $a_1(x) = 1$, possui só a solução clássica, ou seja, a soluçõ geral é $T = cT_1$, $c \in \mathbb{C}$.

Por outro lado, a EDO

$$x^2 T' = 0$$

possui a solução clássica $T = 1$ (=cte.), a solução fraca $T = T_H$ e a solução distribucional $T = \delta$. A solução geral é $T = c_1 + c_2 H + c_3 \delta$, quer dizer,

$$T = c_1 T_1 + c_2 T_H + c_3 \delta.$$

Consideramos agora um operador diferencial P com *coefficientes constantes*,

$$(Pf)(x) = a_n f^{(n)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x), \quad a_\nu \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Supomos que G é uma distribuição que satisfaz

$$PG = \delta \tag{40}$$

no sentido de distribuições. Neste caso, chamamos G de uma *função de Green* para P. (Apesar do fato que em geral não é uma função mas uma distribuição.) Todo operador diferencial com coeficientes constantes possui funções de Green [8, Thm. 7.3.10].

Proposição 1.7 *Seja G uma função de Green para o operador diferencial P com coefficientes constantes, e seja h alguma função de teste*[10]*. A EDO*

$$Pf = h$$

possui a solução particular $f := G * h$.

Demonstração. $P(G * f) = (PG) * f = \delta * f = f$. (Primeira eq.: Lema 1.5. Segunda eq.: definição da função de Green.) $\square$

Exemplo 13 O operador diferencial $\frac{d}{dx} + \lambda$ possui a função de Green $G(x) = H(x)e^{-\lambda x}$, ver Exercício 3. $\square$

Exemplo 14 (Oscilador harmônico) A trajetoria $x(t)$ de uma partícula com massa m sujeita a uma força elástica, $F_0(x) = -kx$, obdece pela segunda lei de Newton a EDO $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, onde $\omega_0^2 \doteq k/m$. Isso pode ser escrito $Px = 0$, onde P é o operador diferencial[11]

$$(Px)(t) \doteq \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t). \tag{41}$$

Ele possui a função de Green[12]

$$G(t) \doteq H(t)\frac{\operatorname{sen}\omega_0 t}{\omega_0}. \tag{42}$$

Na Secção 2.3, vamos mostrar como *construir* essa função de Green (e outras), usando a transformada de Fourier. Aquí, vamos só mostrar que essa função realmente é uma função de Green no sentido da Eq. (40).

Demonstração. Precisamos verificar que $PG = \delta$. Escrevemos G na forma $G = \psi \cdot T_H$, onde $\psi(t) \doteq \operatorname{sen}(\omega_0 t)/\omega_0$. Temos

$$\begin{aligned}\ddot{G} &= (\dot{\psi}T_H + \psi\dot{T}_H)^{\cdot} = \ddot{\psi}T_H + 2\dot{\psi}\dot{T}_H + \psi\ddot{T}_H \\ &= \ddot{\psi}T_H + 2\dot{\psi}\delta + \psi\dot{\delta},.\end{aligned} \tag{43}$$

onde usamos $\dot{H} = \delta$. Calculamos

$$\dot{\psi}(t) = \cos(\omega_0 t), \qquad \ddot{\psi}(t) = -\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \psi(t).$$

Pelas Eq.s (23), vale $\dot{\psi}\delta = \dot{\psi}(0)\delta = \delta$, e $\psi\dot{\delta} = -\dot{\psi}(0)\delta + \psi(0)\dot{\delta} = -\delta$. Substituindo isso em (43), dá

$$\ddot{G} = -\omega_0^2 \psi T_H + 2\delta - \delta \equiv -\omega_0^2 G + \delta,$$

ou seja, $PG \equiv \ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta$. $\square$

Se o oscilador é sujeito a uma força externa $F(t)$ além da força elástica $F_0(x(t))$, a trajetoria obdece a EDO

$$Px \equiv \ddot{x} + \omega_0^2 = h, \tag{44}$$

onde $h(t) \doteq F(t)/m$. Consideramos aquí o exemplo de uma força externa harmônica, com frequência angular ω, que começa atuar em $t = 0$:

$$h(t) \doteq cH(t)\operatorname{sen}(\omega t).$$

[10] A afirmação também vale para funções mais gerais, por exemplo h pode ser uma distribuição com suporte compacto.

[11] ⚠ Aquí, a variável independente é t, interpretado como tempo, enquanto que x é a variável dependente, a saber, uma função $x(t)$. A derivada é denotada por $\frac{d}{dt}x =: \dot{x}$.

[12] Esta função de Green é chamada de "causal", porque $G(t) = 0$ para $t < 0$, o que implica que a solução $x = G * h$ da EDO (44) é diferente de zero só a partir do momento quando a força externa h começa agir.

Pela Proposição 1.7, uma solução da Eq. (44) é dada por $x = G * h$, onde G é a função de Green de (42). Para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
(G*h)(t) = (h*G)(t) &= \int dt' h(t')G(t-t') = \frac{c}{\omega_0}\int dt' H(t')\,\mathrm{sen}\,(\omega t')H(t-t')\,\mathrm{sen}\,(\omega_0(t-t')) \\
&\overset{(a)}{=} \frac{c}{\omega_0}\int_0^t dt'\,\mathrm{sen}\,(\omega t')\,\mathrm{sen}\,(\omega_0(t-t')) \overset{(b)}{=} \frac{c}{2\omega_0}\int_0^t dt' \Big\{ \cos\big((\omega+\omega_0)t' - \omega_0 t\big) - \cos\big((\omega-\omega_0)t' + \omega_0 t\big)\Big\} \\
&= \frac{c}{2\omega_0}\Big\{ \frac{1}{\omega+\omega_0}\int_{-\omega_0 t}^{\omega t} du \cos u - \frac{1}{\omega-\omega_0}\int_{\omega_0 t}^{\omega t} du \cos u \Big\} \\
&= \frac{c}{2\omega_0}\Big\{ \frac{1}{\omega+\omega_0}\big(\,\mathrm{sen}\,\omega t + \,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\big) - \frac{1}{\omega-\omega_0}\big(\,\mathrm{sen}\,\omega t - \,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\big)\Big\} \\
&\overset{(c)}{=} \frac{c}{\omega_0}\Big\{ \frac{1}{\omega+\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\big)\cos\big(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\big) - \frac{1}{\omega-\omega_0}\cos\big(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\big)\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Em (a), usamos o fato que a função $H(t')H(t-t') = 1$ para $t' \in [0,t]$ e se anula fora desse intervalo. Em (b) e (c), usamos as relações trigonométricas

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big), \qquad \mathrm{sen}\,\alpha \pm \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\big)\cos\big(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\big),$$

respetivamente. Para $t < 0$, a função $H(t')H(t-t')$ é identicamente zero, então $(G*h)(t) = 0$ para $t < 0$. Resumindo, a solução $x \doteq G * h$ da EDO (44) é

$$x(t) = \frac{c}{\omega_0}H(t)\Big\{ \frac{1}{\omega+\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\big)\cos\big(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\big) - \frac{1}{\omega-\omega_0}\cos\big(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\big)\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\big)\Big\}. \quad (45)$$

Consideramos o caso de ressonância, $\omega = \omega_0$: Usando o fato que

$$\lim_{\omega\to\omega_0} \frac{\mathrm{sen}\,\big((\omega-\omega_0)t/2\big)}{\omega-\omega_0} = t/2,$$

temos no caso $\omega = \omega_0$ a solução

$$x(t) = \frac{c}{2\omega_0}H(t)\Big\{\frac{1}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t)\Big\}. \quad (46)$$

Para grandes tempos, a amplitude cresce linearmente devido ao segundo termo: Isso é a catástrofe de ressonância. □

1.9 Distribuições no $\mathbb{R}^n$.

As funções de teste agora são as funções suaves no $\mathbb{R}^n$ com suporte limitado, $D(\mathbb{R}^n)$. "Suave" significa que todas derivadas parciais $\frac{\partial^\nu}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}}\varphi(x)$ existem.[13] Derivada parcial de distribuições:

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}T, \varphi\rangle \doteq -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\rangle. \quad (47)$$

Distribuição Delta:

$$\langle \delta, \varphi\rangle := \varphi(\mathbf{0}).$$

A Proposição 1.7 permanece válida, entendido a convolução no $\mathbb{R}^n$, $(f*g)(\boldsymbol{r}) = \int d^n\boldsymbol{r}' f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}')$.

Recordamos que o operador de Laplace, Δ, é definido por

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,\varphi. \quad (48)$$

[13]Escrevemos frequentemente $\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial x_i}$. A definição (47) só vale para coordenadas canônicas ("Cartesianas").

Lema 1.8 *A coordenada radial $r \doteq \|\boldsymbol{r}\|$ no $\mathbb{R}^3$ satisfaz*

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{49}$$

no sentido de distribuições.

Em outras palavras, a função $G(\boldsymbol{r}) \doteq -(4\pi r)^{-1}$ é uma função de Green para o operador Laplace, $\Delta G = \delta$. (Na Secção 2.4 vamos *construir* essa função de Green.)

Demonstração. O gradiente da função existe como campo vetorial (não só no sentido de distribuições, mas como função com valores vetores):

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{50}$$

A divergência desse campo vetorial (ou seja, $\Delta\frac{1}{r}$) deve ser entendida no sentido de distribuições:[14] Aplicado numa função de teste φ, temos

$$\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi\rangle \equiv \langle \frac{1}{r}, \Delta\varphi\rangle = \int \frac{1}{r}\Delta\varphi \, d^3\boldsymbol{r} = \int \big\{\nabla \cdot \big(\frac{1}{r}\nabla\varphi\big) - \nabla\frac{1}{r}\cdot\nabla\varphi\big\} d^3\boldsymbol{r},$$

onde usamos a relação $\nabla \cdot (f\nabla\varphi) = \nabla f \cdot \nabla\varphi + f\Delta\varphi$. A integral do primeiro termo é zero devido ao Teorema de Gauss e o fato que φ se anula fora de uma região limitada.[15] No segundo termo, vamos usar a Eq. (50), a relação

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi = r\partial_r\varphi,$$

e $d^3\boldsymbol{r} = r^2 dr d\Omega$, onde $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$ é a medida na esfera, para chegar em

$$-\int d^3\boldsymbol{r}\,\nabla\frac{1}{r}\cdot\nabla\varphi = \int d^3\boldsymbol{r}\,\frac{1}{r^2}\partial_r\varphi = \int_{S^2} d\Omega \int_0^\infty dr\partial_r\varphi = -\varphi(\boldsymbol{0})\int_{S^2} d\Omega = -4\pi\varphi(\boldsymbol{0}) = -4\pi\langle\delta,\varphi\rangle,$$

concluindo a demonstração. □

Pela Prop. 1.7, a *equação de Poisson*

$$\Delta V = \frac{-1}{\varepsilon_0}\,\varrho$$

da eletrostática (onde ϱ é a densidade de carga e V é o potencial eletrostático) possui a solução

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{\varepsilon_0}(G * \varrho)(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} d^3\boldsymbol{r}'. \tag{51}$$

Exemplo 15 Para uma carga q pontual localizada no ponto $\boldsymbol{r}_0$, a densidade de carga é dada por $\varrho(\boldsymbol{r}) = q\delta_{\boldsymbol{r}_0}(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$. Como isso é uma distribuição com suporte compacto, a convolução $\frac{1}{r} * \varrho$ existe: O potencial, segundo a Eq. (51), é dado por $V(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, concordando com a fórmula da Física I. □

[14] Como função ela é zero para todo $r \neq 0$:

$$\Delta\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2\partial_r\frac{1}{r}\big) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}.$$

A situação é análoga com a função Heaviside: $H' = 0$ como função em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, mas $T_H' = \delta$.

[15] Mais cuidadosamente, fazemos a integral atravez da região $B_\varepsilon^R \doteq \{\boldsymbol{r} | \varepsilon \leq r \leq R\}$, aplicamos o Teorema de Gauss, e fazemos os limites $\varepsilon \to 0$ e $R \to \infty$ no final. A borda ∂B_ε^R de B_ε^R consiste da esfera com raio R, com elemento de superfície $R^2\hat{\boldsymbol{r}}d\Omega$, e da esfera com raio ε, com elemento de superfície $-\varepsilon^2\hat{\boldsymbol{r}}d\Omega$. O Teorema de Gauss dá

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon^R} \nabla\cdot\big(\frac{1}{r}\nabla\varphi\big)d^3\boldsymbol{r} &= \oint_{\partial B_\varepsilon^R}\big(\frac{1}{r}\nabla\varphi\big)\cdot d\boldsymbol{a} = \oint_{\|\boldsymbol{r}\|=R}\big(\frac{1}{r}\nabla\varphi\big)\cdot R^2\hat{\boldsymbol{r}}d\Omega - \oint_{\|\boldsymbol{r}\|=\varepsilon}\big(\frac{1}{r}\nabla\varphi\big)\cdot\varepsilon^2\hat{\boldsymbol{r}}d\Omega \\ &= \oint_{\|\boldsymbol{r}\|=R} R\partial_r\varphi d\Omega - \oint_{\|\boldsymbol{r}\|=\varepsilon}\varepsilon\partial_r\varphi d\Omega\end{aligned}$$

que vai para zero se $\varepsilon \to 0$ e $R \to \infty$. Na última linha usamos $\nabla\varphi\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = \partial_r\varphi$.

Exemplo 16 Para um dipolo ideal consistente de uma carga $-q$ localizada na origem e uma carga q em $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}$, a densidade de carga é $q(\delta(\boldsymbol{a}) - \delta(\boldsymbol{0}))$. Em grandes distâncias $r \gg a$, os efeitos do dipolo só dependem do momento de dipolo $\boldsymbol{p} \doteq q\boldsymbol{a}$. Podemos substituir o dipolo pelo dipolo ideal "puro" [7, p. 106], obtido pelo limite $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{0}$, $q \to \infty$ com $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$ constante,

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \lim_{q\to\infty} q\big(\delta(\boldsymbol{p}/q) - \delta(\boldsymbol{0})\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \big(\delta(\varepsilon\boldsymbol{p}) - \delta(\boldsymbol{0})\big)/\varepsilon.$$

Aplicado numa função de teste, isso é

$$\langle\varrho, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \big(\varphi(\varepsilon\boldsymbol{p}) - \varphi(\boldsymbol{0})\big)/\varepsilon = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{0}) = \langle -\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta, \varphi\rangle.$$

Concluimos que a densidade de carga do dipolo ideal "puro" localizado na origem é dada por

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta.$$

O potencial gerado por essa configuração é dado por

$$V \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\big(\frac{1}{r} * \varrho\big) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\big(\frac{1}{r} * \boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta\big) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\big(\frac{1}{r} * \delta\big) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\,.$$

Usamos sucessivamente as Eq.s (37) e (36). Usando $\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r} = \frac{-1}{r^2}\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$, temos o resultado

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}.$$

Isso realmente coincede com o potencial do dipolo finito (com separação $\boldsymbol{a}$ e densidade de carga $q(\delta(\boldsymbol{a}) - \delta(\boldsymbol{0})))$ para grandes r ($r \gg a$), módulo termos da ordem $1/r^3$, veja [7, Eq. (3.90)]. □

1.10 Exercícios.

Ex. 1. (Derivada de Distribuições.) Seja f a função

$$f(x) := \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Mostre que vale

$$\big(T_f\big)'' = \delta. \tag{52}$$

(Observe que $f(x) = xH(x)$, onde H é a função de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Então a Eq. (52) significa que vale a equação $\big(xH(x)\big)'' = \delta(x)$ no sentido de distribuições.)

Ex. 2. (Derivada de Distribuições.) Mostre que valem as identidades

$$x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}, \qquad x^n\delta^{(k)} = 0 \quad \text{se } n > k. \tag{53}$$

Ex. 3. (EDO.) Mostre que vale

$$(\frac{d}{dx} + \lambda)\, H(x)e^{-\lambda x} = \delta(x) \tag{54}$$

nos sentido de distribuições.

Ex. 4. Usando o resultado do item anterior, ache uma solução da EDO

$$(\frac{d}{dx} + \lambda)\, f(x) = h(x)$$

para uma função dada h. Dica: Convolução com função de Green.

Ex. 5. Mostre que vale

$$\frac{d}{dx} H(x^2 - 1) = 2x\, \delta(x^2 - 1). \tag{55}$$

Ex. 6. (Uma sequencia Delta.) Mostre que vale

$$\varepsilon\, |x|^{\varepsilon-1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\delta.$$

Dicas: Para todos $x \neq 0$, vale:
1. A funcão $\varepsilon|x|^{\varepsilon-1}$ é a derivada da função $\text{sgn}(x)|x|^{\varepsilon}$, onde "sgn" é a função "sinal": $\text{sgn}(x) = 1$ para $x > 0$ e $\text{sgn}(x) = -1$ para $x < 0$.
2. $|x|^{\varepsilon}$ converge (puntiformemente) para 1 se $\varepsilon \to 0$.

Ex. 7. (Convolução.) Sejam $f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Mostre

$$T_{f*g} = T_f * T_g, \tag{56}$$
$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \langle T_f, g^{\tau} * \varphi\rangle, \tag{57}$$

onde $g^{\tau}(x) := g(-x)$.

Ex. 8. Problemas na literatura: Lemos [11]: Cap. 9, Pr. 9.1, 9.2, (9.4), 9.9*, 9.14, 9.15, 9.16, 9.17*, 9.18*, (9.22). ($*$ = difícil)

2 Transformada de Fourier

2.1 Definição e exemplos

A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ é definida por

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx. \tag{58}$$

Aviso: Na litaratura existem outras convenções; por exemplo o Butkov [4] usa e^{+ikx} na integral; outros livros não tem o fator $(2\pi)^{-1/2}$.

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, esta integral obviamente é finita, e para todo k vale

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \|f\|_1, \qquad \text{onde} \qquad \|f\|_1 \doteq \int |f(x)| dx \tag{59}$$

é a norma em $L^1(\mathbb{R})$. Em particular, a transformada $\hat{f}$ é uma função limitada. Até vale:

Lema de Riemann-Lebesgue: Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, a transformada de Fourier $\hat{f}$ é contínua e cai para zero para $|k| \to \infty$.

Demonstração. Se $k_n \to k$, obviamente a sequência de funções $x \mapsto e^{-ik_n x} f(x)$ converge puntiformemente para a função $e^{-ikx} f(x)$. Como $|e^{-ik_n x} f(x)| = |f(x)|$ (independente de n), a função $|f(x)|$ serve como "função dominante", e o Teorema de Lebesgue B.1 garante a convergência

$$\hat{f}(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ik_n x} f(x) dx \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx = \hat{f}(k).$$

Daí, a função $\hat{f}$ é contínua.

Para mostrar a segunda afirmação, supomos num primeiro passo que f seja em $C^1(\mathbb{R})$, com $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Nesse caso, integração em partes dá

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(k) \equiv \int e^{-ikx} f(x) dx = \frac{i}{k} e^{-ikx} f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{k} \int e^{-ikx} f'(x) dx.$$

O primeiro termo é zero, e o segundo termo é limitado por $\frac{1}{k}\|f'\|_1$, e daí cai para zero se $k \to \infty$.

Num segundo passo pegamos uma sequência de funções $f_n \in C^1$ com $f_n' \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx \to 0 \quad \text{se } n \to \infty. \tag{60}$$

(Tal sequência existe, ver Lema B.2 no apêndice). Pela Eq. (59) vale para todo k

$$|\widehat{f_n}(k) - \hat{f}(k)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f_n(x) - f(x)| dx.$$

O lado direito vai para zero devido a (60), e não depende de k. Isso implica que a sequência $\widehat{f_n}$ converge uniformemente para $\hat{f}$. Em particular, para um dado $\varepsilon > 0$ existe um N tal que para todo k vale

$$|\widehat{f_N}(k) - \hat{f}(k)| \le \varepsilon.$$

Do primeiro passo, sabemos que a função $\widehat{f_N}(k)$ cai para zero quando $|k| \to \infty$. Daí, podemos pegar um K tal que para todo $k > K$ vale $|\widehat{f_N}(k)| < \varepsilon$. Essas duas desigualdades implicam que para $k > K$ vale

$$|\hat{f}(k)| \le |\hat{f}(k) - \widehat{f_N}(k)| + |\widehat{f_N}(k)| < 2\varepsilon.$$

Isso mostra que $\hat{f}(k) \to 0$ para grandes $|k|$, como afirmado. □

Teorema da inversão de Fourier: Se f e $\hat{f}$ são em $L^1(\mathbb{R})$ vale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \tag{61}$$

Demonstração. Usando a definição da transformada, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} dk \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} dk \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') e^{ik(x-x')}.$$

Pelo Teorema de Fubini podemos trocar as integrais dx' e dk, chegando em

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} dk e^{ik(x-x')}}.$$

Mas a sequência em chave converge para $\delta(x' - x)$ no sentido de distribuições, ver Eq. (6). Mais precisamente, seguindo a demonstração do Lema 1.3, o limite da sequência acima é $f(x)$. □

Exemplos:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & x > a \end{cases} \quad (a > 0) : \qquad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(ka)}{k} \tag{62}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & |x| < a \\ 0, & x > a \end{cases} \quad (a > 0) : \qquad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{a} \frac{\operatorname{sen}^2(ka/2)}{k^2} \tag{63}$$

$$f(x) = e^{-\lambda x^2} \quad (\lambda > 0) : \qquad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} e^{-\frac{k^2}{4\lambda}} \tag{64}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0) : \qquad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|a}}{a} \tag{65}$$

Estes exemplos já mostram duas caraterísticas: Primeiro, quanto mais "pontiaguda" a função, tanto mais "achatada" a transformada.[16] Segundo, quanto mais rápido a função cai para zero no infinito, tanto mais suave é a transformada (e vice versa). Essa caraterística será formulada de maneira precisa no seguinte teorema:

Teorema 2.1 *i) Seja $f \in C^n(\mathbb{R})$ e sejam $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. Então vale*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](k) = (ik)^n \hat{f}(k) \quad \text{ e } |k|^n |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1. \tag{66}$$

ii) Sejam $f, xf(x), \ldots, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Então $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ e vale

$$i^n \hat{f}^{(n)}(k) = \mathcal{F}[x^n f(x)](k). \tag{67}$$

Este teorema é uma simples consequência das Eq.s (71) e (72) do seguinte

Lema 2.2 (Propriedades) *Escrevemos $\hat{f} =: \mathcal{F}[f]$, e $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$ (conjugação complexa).*

$$\mathcal{F}[\bar{f}](k) = \overline{\hat{f}(-k)} \tag{68}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(x-a)](k) = e^{-ika}\, \hat{f}(k) \tag{69}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{ik_0 x} f(x)](k) = \hat{f}(k - k_0) \tag{70}$$

$$\mathcal{F}[f'](k) = ik\, \hat{f}(k) \tag{71}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto xf(x)](k) = i\, (\hat{f})'(k) \tag{72}$$

Teorema de Parseval: Para $f, g \in D(\mathbb{R})$ vale

$$\int \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \int \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(k)\, dk.$$

Demonstração. Substituindo a transformada inversa para g, o lado esquerdo equivale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \overline{f(x)} \int dk \hat{g}(k) e^{-ikx}.$$

Como g é C^∞, a transformada de g cai rápidamente para zero no infinito pelo teorema 2.1. Daí podemos trocar a ordem de integrações pelo Fubini, e chegamos em

$$\int dk \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \overline{(f(x) e^{ikx})}}\, \hat{g}(k).$$

Como $\int dx \overline{\varphi(x)} = \overline{\int dx \varphi(x)}$, a expressão embaixo da chave é justamente $\overline{\hat{f}(k)}$, concluindo a demonstração. □

Verifique-se facilmente que a transformada de Fourier entrelaça a convolução com o produto puntiforme, a saber: Para duas funções de teste φ, χ vale

$$\widehat{\varphi * \chi} = \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi} \cdot \hat{\chi}, \qquad \hat{\varphi} * \hat{\chi} = \sqrt{2\pi}\, \widehat{\varphi \cdot \chi}. \tag{73}$$

2.2 Transformada de Fourier de Distribuições

Gostariamos de transferir a transformada de Fourier para distribuições, como toda operação com funções, a saber (ver rodapé 7): Seja T uma distribuição e f_n uma sequência de funções cujas

[16] Isso leva à chamada relação de incerteza na mecânica quântica.

transformadas de Fourier existem e estão em L^1_{loc}, tal que f_n converge para T no sentido de distribuições, $T_{f_n} \to T$. Então definimos

$$\hat{T} := \lim_{n\to\infty} T_{\widehat{f_n}} \tag{74}$$

se esse limite existe. Um pequeno calculo mostra que

$$\langle T_{\widehat{f_n}}, \varphi\rangle = \langle T_{f_n}, \hat{\varphi}\rangle. \tag{75}$$

Porém, a transformada de Fourier de uma função de teste em $D(\mathbb{R})$ não está em $D(\mathbb{R})$ pois ela possui uma extensão holomorfa para o plano complexo e daí não possui suporte compacto. Por isso o limite de (75) pode não existir.

Como saida consideramos um espaço maior de funções de teste, o espaço de *funções de Schwartz.* Ele consiste nas funções suaves que caiem, junto com todas derivadas, rápidamente para zero:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall n, m\, \exists c > 0, \forall x : |x^n \varphi^{(m)}(x)| < c\} \tag{76}$$

Topologia: Uma sequência φ_n converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se para todo k, m a sequênciade funções $x^k\varphi_n^{(m)}(x)$ converge uniformemente para zero. O valor desse espaço está no fato que a transformada de Fourier deixa ele invariante,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Definimos agora as *distribuições temperadas* como as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{C}$. Para elas existe o limite em (75), e nossa definição da transformada de Fourier equivale a

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle \tag{77}$$

para distribuições temperadas.

Exemplos. (T_1 denota a distribuição regular correspondente à função constante $1(x) = 1$.)

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \widehat{T_1} = \sqrt{2\pi}\delta, \qquad \hat{H}(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{k - i\varepsilon}. \tag{78}$$

As Eqs. (69) até (72) também valem para distribuições. Por exemplo, a primeira equação em (78), junto com (69) ou (71), respetivamente, implicam

$$\widehat{\delta_a}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ika}, \qquad \widehat{\delta'}(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}. \tag{79}$$

Convolução de distribuições: A Eq. (73) também vale para distribuições: Seja T uma distribuição temperada e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então a convolução $T * \varphi$ é uma distribuição temperada, com transformada de Fourier

$$\widehat{T * \varphi} = \sqrt{2\pi}\; \hat{\varphi} \cdot \hat{T}. \tag{80}$$

(O mesmo vale ainda se φ é substituido por uma distribuição com suporte compacto [8, Thm. 7.1.15]. A transformada de Fourier de tal distribuição é uma função em C^∞.)

2.3 Solução de EDO's

Devido a propriedade (71), a transformada de Fourier transforma uma EDO com coefficientes constantes numa equação algébrica. Ela pode ser resolvida mais facilmente do que a EDO, e a transformada inversa é uma solução da EDO.

Exemplificamos essa estratégia no oscilador harmônico amortecido e forçado. A posição do oscilador num dado tempo t será denotada or $x(t)$. A "frequência angular natural" (sem atríto e sem força externa) dele seja ω_0. Supondo que uma força externa $F(t)$ age, a EDO é

$$(Px)(t) \doteq \ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = h(t), \tag{81}$$

onde α é uma constante positiva que descreve o atríto, e $h(t) = F(t)/m$. Supomos que $\alpha < \omega_0$ (amortecimento fraco).

Pela Prop. 1.7, sabemos que é suficiente construir a função de Green G para o operador diferencial P, ou seja, a solução da EDO $PG = \delta$. Com G nas mãos, uma solução particular da EDO (81) é simplesmente $x \doteq G * h$.

Para construir uma função de Green G, tomamos as transformadas de Fourier de ambos os lados da EDO $PG = \delta$. Vamos denotar a transformada de Fourier de G por $\hat{G}$, e a variável dessa função (ou distribuição) por ω, $\hat{G}(\omega)$, e a derivada temporal por um ponto, $\dot{G}$. Usando as relações

$$\widehat{(\dot{G})}(\omega) = i\omega\hat{G}(\omega), \quad \widehat{(\ddot{G})}(\omega) = -\omega^2\hat{G}(\omega),$$

ver Eq. (71), e $\hat{\delta}(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}$, a transformada da EDO $PG = \delta$ leva à equação algébrica

$$\big(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2 \big) \hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{82}$$

Uma solução é[17]

$$\hat{G}(\omega) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\alpha\omega} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}, \tag{83}$$

$$\omega_\pm \doteq \pm\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + i\alpha. \tag{84}$$

A propria função de Green achamos pela transformada inversa de Fourier,

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{-1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}. \tag{85}$$

Evaluação da intgral pelo cálculo de resíduo: Interpretamos a integral como integral de caminho no plano complexo da fuunção $f(z) \doteq e^{izt}/(z - \omega_+)(z - \omega_-)$ atraves do caminho $\gamma(s) \doteq s$. Consideramos primeiro o caso $t > 0$. Nesse caso, a função cai para zero mais rápido do que $|z|^{-1}$ no semiplano superior. Daí, a integral coincede com $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos neste semiplano. Os dois polos (simples) $z = \omega_\pm$ são localizados neste semiplano, e os resíduos são

$$\mathrm{Res}_{\omega_+} f = \frac{e^{i\omega_+ t}}{\omega_+ - \omega_-}, \qquad \mathrm{Res}_{\omega_-} f = \frac{e^{i\omega_- t}}{\omega_- - \omega_+}.$$

Concluímos que para $t > 0$

$$G(t) = \frac{-1}{2\pi} 2\pi i \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \big\{ e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t} \big\} = \frac{-i}{2\Omega} e^{-\alpha t} 2i \,\mathrm{sen}\,(\Omega t), \quad \Omega \doteq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

No caso $t < 0$,[18] a função $f(z)$ cai para zero no semiplano *inferior*, onde não tem polos. Daí, a integral em (85) é zero para $t < 0$. Resumindo, achamos função de Green

$$G(t) = H(t) e^{-\alpha t} \frac{\mathrm{sen}\,(\Omega t)}{\Omega}, \tag{86}$$

onde H é a função de Heaviside. Note que para $\alpha = 0$ isso coincede com a função de Green (42) que foi jogada no Exemplo 14.

Consideramos a solução $x = G * h$ da EDO (81):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') h(t') \equiv \int_{-\infty}^{t} dt' G(t - t') h(t'). \tag{87}$$

[17] Sabemos da Secção 1.6 que existem outras, que diferem de nosso $\hat{G}$ por soluções da equação homogênea $\big(\omega^2 - 2i\alpha\omega - \omega_0^2\big) \hat{G}_0(\omega) = 0$, correspondente a soluções da EDO homogênea $PG_0 = 0$.

[18] O valor da função G em $t = 0$ não interessa, por que ela é localmente integrável e daí define uma distribuição regular T_G. Sabemos que tal distribuição não muda se mudamos o valor de G em algum ponto.

É um detalhe importante que apenas os valores de t' com $t' < t$ contribuem à integral, pois $G(t-t') = 0$ para $t' > t$ devido ao fator $H(t-t')$.

Supomos agora que a força externa h começa a atuar em algum instante de tempo t_0, ou seja, $h(t') = 0$ para $t' < t_0$. Como $t < t_0$ implica $t' < t < t_0$ para todos t' que contribuem á integral, neste caso a solução $x(t)$ de (87) também é nula para todos $t < t_0$. Por isso, uma função de Green que contém o fator $H(t)$ é dita de satisfazer o *princípio da causalidade*.

2.4 Transformada de Fourier no $\mathbb{R}^n$

A transformada de Fourier no $\mathbb{R}^n$ é definida da maneira análoga como em $\mathbb{R}$, veja Eq. (58):

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r}) d^n\boldsymbol{r}, \tag{88}$$

onde $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ é o produto escalar euclideano no $\mathbb{R}^n$.

Transformada inversa:

$$f(\boldsymbol{r}) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^n\boldsymbol{r}. \tag{89}$$

O espaço Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é

$$\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall n, m, i_1, \ldots, i_n,\, j_1, \ldots, j_m\, \exists c > 0\, \forall \boldsymbol{r} :\, |x_{i_i} \cdots x_{i_n} \frac{\partial^m}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_m}} \varphi(\boldsymbol{r})| < c\}$$

(Aquí, $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_n)$.)

Transformada de Fourier da distribuição delta:

$$\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}. \tag{90}$$

Vamos construir a função de Green (49) para o operador de Laplace Δ no $\mathbb{R}^3$, definido em (48), ou seja, uma função G que satisfaz $\Delta G = \delta$. Em analogia com a Eq. (71) mostra-se

$$\widehat{(\Delta G)}(\boldsymbol{k}) = -|\boldsymbol{k}|^2\, \hat{G}(\boldsymbol{k}), \tag{91}$$

onde $|\boldsymbol{k}|$ é a norma eulideana no $\mathbb{R}^n$. Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados de $\Delta G = \delta$ dá $-|\boldsymbol{k}|^2\, \hat{G}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-3/2}$. Uma solução é obviamente $\hat{G}(\boldsymbol{k}) = -(2\pi)^{-3/2}|\boldsymbol{k}|^{-2}$. Fazendo a transformada inversa dá

$$G(\boldsymbol{r}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3\boldsymbol{k}\, \hat{G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3\boldsymbol{k}\, \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{k}|^2}. \tag{92}$$

Para calcular a integral, escolhemomos a direção $\hat{\boldsymbol{z}}$ no espaço dos $\boldsymbol{k}$ como $\hat{\boldsymbol{r}}$, tal que $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kr\cos\theta$ com $k \doteq |\boldsymbol{k}|$ e $r \doteq |\boldsymbol{r}|$. A medida $d^3\boldsymbol{k}$ escrevemos como $k^2 dk du d\phi$ com $u \doteq \cos\theta \in [-1, 1]$. Com isso temos

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 du\, e^{ikru} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\, \frac{1}{ikr}(e^{ikr} - e^{-ikr}) = \frac{-2}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk\, \frac{\operatorname{sen} kr}{k}.$$

Usando $\int_0^\infty dk \operatorname{sen}(kr)/k = \pi/2$, dá a função de Green (49) do Lema 1.8,

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{4\pi r}. \tag{93}$$

2.5 Exercícios

Ex. 1. Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = e^{-\kappa|x|}, \qquad \kappa > 0.$$

Ex. 2. Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Ex. 3. Calcule a transformada de Fourier das funções

$$f_1(x) = (x^2 + 3x)e^{-x^2/2}, \qquad f_2(x) = xe^{-\kappa|x|},\ \kappa > 0, \qquad f_3(x) = e^{-(1+x)^2}.$$

Ex. 4. Problemas na literatura: Arfken [1]: Cap.15, Pr. 15.3.1, 15.3.5, 15.3.9, 15.3.10, Butkov [4]: Cap. 7, Pr. 7.2,

A Série de Fourier.

Vamos deduzir a teoria da série de Fourier a partir da transformada de Fourier, usando a teoria de distribuições. A chave é a chamada "distribuição pente" de Dirac com període L, definida por

$$C_L(x) \doteq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - nL).$$

Ela é uma distribuição temperada [8], e daí possui uma transformada de Fourier. De fato, ela coincede essencialmente com a sua própria transformada [8, Thm. 7.2.1]:

Proposição A.1 ("Poisson summation formula") *A transformada de Fourier de C_L é dada por*

$$\widehat{C_L} = \frac{\sqrt{2\pi}}{L}\, C_{\frac{2\pi}{L}}. \tag{94}$$

Usando o fato que $\widehat{\delta_{nL}}(k) = (2\pi)^{-1/2}e^{-iknL}$, ver Eq. (79), essa equação pode ser escrita como

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inkL} = \frac{2\pi}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(k - n\frac{2\pi}{L}). \tag{95}$$

Isso é a chamada fórmula do somatório de Poisson ("Poisson summation formula").

Demonstração. Mostraremos que a distribuição $\widehat{C_L}$ tem as duas propriedades: (i) Ela é periódica com període $2\pi/L$, e (ii) Ela tem suporte no conjunto de pontos $2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$.

Para mostrar (i), observa que $e^{2\pi ix/L}C_L(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ix/L}\delta(x - nL) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi in}\delta(x - nL)$ devido à identidade $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$, ou seja, $e^{2\pi ix/L}C_L(x) = C_L(x)$. Pela propriedade (70), isso implica que

$$\widehat{C_L}(k - \frac{2\pi}{L}) = \widehat{C_L}(k), \tag{96}$$

ou seja, $\widehat{C_L}$ é periódico com període $\frac{2\pi}{L}$. Mostraremos (ii): A periodicidade $C_L(x - L) = C_L(x)$ implica, pela propriedade (71), a identidade $e^{ikL}\widehat{C_L}(k) = \widehat{C_L}(k)$, ou seja,

$$(e^{ikL} - 1)\,\widehat{C_L}(k) = 0.$$

Isso implica[19] que o suporte de $\widehat{C_L}$ está contido no conjunto $\{2\pi n/L,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Essa propriedade implica por sua vez, pelo Teorema 1.4, que $\widehat{C_L}$ é uma soma de deltas ou derivadas de deltas concentradas nos pontos $2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$. As derivadas são exclusas, pois a

[19] Pelo mesmo argumento que já usamos... *(!!)*

identidade $(e^{ikL}-1)\,\delta^{(\nu)}_{2\pi n/L}(k)=0$ é satisfeita apenas para $\nu=0$. Usando ainda a periodicidade (96), concluimos que

$$\widehat{C_L}=c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi n/L}\equiv c\,C_K,\quad K\doteq 2\pi/L,$$

como afirmado. Falta apenas determinar a constante c. Para esses fins, observe que a equação acima significa que para toda função de teste φ vale

$$\sum_n\hat\varphi(nL)=c\sum_n\varphi(nK).$$

Transladando a função $\varphi(k)$ por k', $\chi(k)\doteq\varphi(k+k')$ e usando (69), isso é

$$\sum_n e^{ik'nL}\hat\varphi(nL)=c\sum_n\varphi(nK+k').$$

Integramos essa equação em k' de 0 até $K\equiv 2\pi/L$. No lado esquerdo temos

$$\int_0^{2\pi/L}e^{ik'nL}dk'=\begin{cases}\frac{1}{inL}\big(e^{i2\pi n}-1\big)=0, & n\neq 0,\\ 2\pi/L, & n=0.\end{cases}$$

Em particular, todos termos com $n\neq 0$ se anulam, e concluimos que

$$\frac{2\pi}{L}\,\hat\varphi(0)=c\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^K\varphi(nK+k')dk'\equiv c\int_{\mathbb{R}}\varphi(k')dk'=c\sqrt{2\pi}\,\hat\varphi(0),$$

implicando em $c=K/\sqrt{2\pi}=\sqrt{2\pi}/L$, como afirmado. □

Agora usaremos esse resultado para construir a série de Fourier de uma função (ou até distribuição) periódica f com període L, $f(x+L)=f(x)$, definida na reta real.

Teorema A.2 (Série de Fourier.) *Seja f uma função localmente integravel e periódica com període L. Então vale*[20]

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,e^{inKx},\quad c_n\doteq\frac{1}{L}\int_0^L e^{-inKx}f(x)dx,\quad K\doteq 2\pi/L. \tag{98}$$

Se $f\in C^2(\mathbb{R})$, a convergência é uniforme.

Demonstração. Começamos com o lado direito da Eq. (98):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inKx}\equiv\frac{1}{L}\int_0^L f(y)\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-inK(y-x)}}_{L\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(y-x-nL)}dy=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^L f(y)\delta(y-x-nL)dy, \tag{99}$$

onde usamos a fórmula do somatório de Poisson (95) (!). Usando a periodicidade $f(y)=f(y-nL)$, fazendo a transformação $y-nL=:x'$ e escrevendo $\sum_n\int_{nL}^{(n+1)L}=\int_{\mathbb{R}}$, isso é

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^L f(y-nL)\delta(y-x-nL)dy=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{nL}^{(n+1)L}f(x')\delta(x'-x)dx'=\int_{\mathbb{R}}f(x')\delta(x'-x)dx', \tag{100}$$

[20] A Equ. (98), bem como a convergência da série, vale no sentido de distribuições: A afirmação é que para toda função de teste $\varphi\in D(\mathbb{R})$ vale

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\int_{\mathbb{R}}e^{inKx}\varphi(x)dx. \tag{97}$$

ou seja $f(x)$. Isso mostra a Eq. (98). (Mais rigorosamente, as identidades (99) e (100) valem no sentido de distribuições, veja rodapé 20. De fato temos mostrado que para toda função de teste $\varphi \in D(\mathbb{R})$ vale a Eq. (97).)

Falta mostrar a convergência uniforme. Se $f \in C^2(\mathbb{R})$, duas integrações em partes levam a

$$c_n = \frac{1}{L}\Big(\frac{-i}{nK}\Big)^2 \int_0^L e^{-inKx} f''(x)dx.$$

Daí, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $|c_n\, e^{inKx}| \le c/n^2$. Pelo critério de Weierstrass ("Teste M de Weierstrass" [11, Tma. 7.9]), a série (98) converge uniformemente. □

B Alguns fatos matemáticos.

Em muitos casos queremos trocar, para uma seqência de funções, limite e integração,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

O critério mais geral sob quais condições isso é possível, é o seguinte teorema:

Teorema B.1 (Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja f_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções em $L^1(\mathbb{R})$ que converge* puntiformemente *para uma função f, $f_n(x) \to f(x)$ para quase todo x.*[21] *Se existe uma função $M \in L^1(\mathbb{R})$ tal que para todo n e (quase) todo x*

$$|f_n(x)| \le M(x),$$

então a função f é em $L^1(\mathbb{R})$ e o limite pode ser trocado com a integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

A função M é chamada de "função dominante".

Nas aplicações com funções em $D(\mathbb{R})$, a integral se extende apenas atraves um intervalo limitado fixo (independente de n). Neste caso obviamente a função "dominante", $M(x)$, precisa ser apenas *localmente* integrável, $M \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Mostraremos agora o fato (usado no Lema 2.1 de Riemann- Lebesgue) que $C^1(\mathbb{R})$ é denso em $L^1(\mathbb{R})$, mais preciamente, que toda função em L^1 pode ser aproximada por funções em C^1 com derivada em L^1:

Lema B.2 *Para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$ existe uma sequência f_n de funções em $C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ com $f_n' \in L^1(\mathbb{R})$, tal que*

$$\int |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \qquad \text{se } n \to \infty. \tag{101}$$

Demonstração. (A nossa demonstração é incompleta em que nos não vamos mostrar a continuidade do operador translação (103).) A idéia fundamental é que a convolução de uma função $f \in L^1$ com uma função suave melhora a "suavidade" da função f ("mollifier"). Vamos lá:

Pegue uma sequência-Delta $j_n(x) = nj(nx)$ como no Lema 1.2, onde $j \in D(\mathbb{R})$ com $\int j(x)dx = 1$, e define $f_n \doteq f * j_n$. (A sequência j_n se chama de "approximate identity" [12] ou "mollifier".) Pela Eq. (33), a derivada de f_n é dada por $f_n' = f * j_n'$. Verifique-se pelo teorema de convergência dominada que esta função é contínua, então a função f_n é em $C^1(\mathbb{R})$. Ela também é integrável, pois

$$\int dx |f_n(x)| \le \int dx \int dy \big|j_n(y) f(x-y)\big| = \int dy |j_n(y)| \int dx |f(x-y)| = \int dy |j_n(y)| \int dx |f(x)|$$

[21] Quer dizer, com exceção de um conjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

$(= \int dx|f(x)|)$. Pelo mesmo argumento a derivada $f'_n \equiv f * j'_n$ é integrável. Falta mostrar a convergência em L^1, Eq. (101). Para esses fins, escrevemos[22]

$$\begin{aligned}\int dx|f_n(x) - f(x)| &= \int dx\Big|\Big\{\int dy j_n(y)f(x-y)\Big\} - f(x)\Big| = \int dx\Big|\int dy\{j_n(y)f(x-y) - f(x)\}\Big| \\ &\leq \int dx \int dy|j_n(y)||f(x-y) - f(x)| = \int dy|j(y)| \int dx \cdot |f(x - \frac{y}{n}) - f(x)| \\ &\doteq \int dy|j(y)|\, \|T_{y/n}f - f\|_1, \end{aligned} \tag{102}$$

onde T_a, $a \in \mathbb{R}$, é o operador translação, $(T_a f)(x) \doteq f(x-a)$. Sabe-se [5] que esse operador é contínuo em $L^1(\mathbb{R})$ no sentido que para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|T_\varepsilon f - f\|_1 = 0. \tag{103}$$

Além disso, pela desigualdade do triângulo temos

$$\|T_{y/n}f - f\|_1 \leq \|T_{y/n}f\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1,$$

onde usamos que $\|T_a f\|_1 = \|f\|_1$ (por transformação de variáveis $x - a \to x$). Daí, o integrante em (102) converge puntiformemente para 0 para todo y e possui a função dominante $2\|f\|_1|j(y)|$. O teorema de convergência dominada implica que (102) vai para zero se $n \to \infty$. $\square$

Referências

[1] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 6th ed., 2005)

[2] G. Birkhoff, S. MacLane, *Álgebra Moderna Básica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 4^a edição, 1980)

[3] C. Braga, ...

[4] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro)

[5] R. E. Castillo, H. Rafeiro, *An Introductory Course in Lebesgue Spaces* (Springer, 2016)

[6] H. Feshbach, P.M. Morse, *Methods of Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, New York)

[7] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica* (Pearson, São Paulo, 3ª edição, 2010)

[8] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I* (Springer, Berlin, 1983)

[9] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 3rd edition, 1999)

[10] E. Kreyszig, *Matemática Superior* (John Wiley & Sons, New York, 2^a edição, 1984)

[11] N. A. Lemos, *Convite à Física Matemática* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013)

[12] M. Reed, and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I* (Academic Press, New York, 1975)

[13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (McGraw-Hill, 1986)

[14] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Vol. I e II, (Hermann, Paris, 1957-1959)

[22] A segunda equação vale porque $\int dy j_n(y) = 1$.