Formulação Algébrica da Mecânica Quântica

Jens Mund

Notas de Aula, DF-UFJF, Período 2006-1

Contents

Summário

A Mecânica Quântica Algébrica (MQA) é um formalismo que enquadra os regimes quânticos e clássicos da Física uniformemente. Ela admite a dicussão de sistemas quânticos com restrições do princípio de superposição que possuem, por conseguinte, certas propriedades clássicas. Assim, a relação entre a Física Quântica e a Física Clâssica pode ser discutida convenientemente (e.g. processo de medida, "redução do pacote de onda"), bem como alguns chamados paradoxos no respeito (e.g. paradoxo de Einstein, Podolski e Rosen).

Além disso, para a discussão de sistemas com infinitos graus de liberdade, encontrados e.g. na Teoria Quântica de Campos (TQC) e na Física Estatística, os métodos e noções algébricos são essenciais. Esses sistemas podem possuir observáveis clássicos como carga ou magnetização, que não cabem bem no quadro da MQ tradicional. Como exemplo (simples), a cadeia de spins infinita é discutida.

1 O Princípio da Superposição e seus Restrições

Começamos com a introdução das noções primitivas que nos usaremos: Sistema – Estado – Observável.

Exemplos de *sistemas* são: um elétron movendo no espaço $\mathbb{R}^3$ (sistema quântico), uma bola de tenis movendo no espaço $\mathbb{R}^3$ (sistema clássico). Um *estado* do sistema corresponde, nossa abordagem operacional, a um modo de preparação do sistema por meio de condições macroscópicas (campos eletromagnéticos, telas com fendas etc.). Um *observável* corresponde a um aparelho, junto com uma prescrição, de medição. (Tal aparelho tambem pode servir para preparação de um novo estado.) *Propriedades* são observáveis especiais, a saber com só dois valores ("sim" ou "nao"). Um estado se chama *puro* se as propriedades do sistema são fixados "tanto possivel" pelos condições da preparação. (Isso tem significanças diferentes para propriedades clássicas e quânticas, respetivamente, ver abaixo.) Tal estado represente uma informação maxima sobre o sistema. No outro caso, quando a preparação só da informação parcial (incompleta) sobre o sistema, nos chamamos o estado de *misto*.

1.1 Observáveis Não-Clássicos na MQ

Sobre um sistema clássico (= macroscópico) nos podemos dizer que ele *possui* ou não uma dada propriedade e, equivalente, ele tem valores definidos de todos observáveis. No ato da medida eles são somente registradas. (No caso de um estado misto, nos talvez não tinhamos conhecimento do valor antes da medida, mas no caso de um estado puro nos podiamos calcular o valor que será medido.) Observáveis diferentes podem ser medidos em qualquer ordem sem alterar os valores a serem econtrados. Tais observáveis (e propriedades) nos chamamos de observáveis *clássicos*. Equivalentemente, um observavel clássico é caraterizado pelo fato que em cada estado puro ele tem dispersão zero (!!).

No outro lado, sistemas quânticos (microscópicos) têm proprieds *nao-clássicas*. Por exemplo, se a posição x e a componente-x do momento, p_x, fossem observáveis clássicos, deveria ser possivel preparar um estado com valores "exatos" (dentro qualquer intervalo dado) de x bem como de p_x. Mas a inigualdade de incerteza (??) de Heisenberg prohibe (?) isso. Esse iniqualdade pode ser exemplificada pelo elétron passando uma tela com uma fenda simples: Temos uma tela com uma fenda no plano $y - z$, e uma segunda tela com filme para detetar elétrons paralelo mas distante à primeira. Antes da fenda, o elétron seja preparado como uma onda plana na direção x (perpendicular à tela), i.e. $p_x = 0$ com $\Delta p_x = 0$. Na segunda tela nos observamos, depois um grande número de experiências, um padrão de difração, conhecido da ótica. Isso significa que depois da fenda Δp_x é diferente de zero. (Considerando a distância dos dois primeiros zeros do padrão como uma medida para $\Delta p_x/p$, nos obtemos $\Delta p_x \sim h/a$, onde a é a espessura da fenda.)

Esse experiência tambem exemplifica que x e p_x *não podem ser medidas em qualquer ordem* sem alterar os valores deles, por a seguinte razão. A observável p_x tinha dispersão 0 antes da fenda, e $h/a \neq 0$ logo depois. A fenda mesma serve como aparelho de medir a observável x. Então, a medição de x altera o valor de p_x.

Isso nos leva à terceira caraterzação de observáveis clássicos: Dois observáveis são chamados de *compatíveis* se eles podem ser medidos em ordem arbitrário (em qualquer estado) sem alterar os valores encontrados. Um observável é *clássico* se ele é compativel com todos outros observáveis. (Checkar equivalência com definição!) Na MQ, dois observáveis são compatíveis se e somente se eles commutam. Isso implica que na MQ tradicional (i.e. na ausência de setores de superposição, ver abaixo) não tem nenhum observável classico.

1.2 Princípio da Superposição

A mesma experiência, só com duas fendas paralelas, se chama de "fenda dupla". Discussão claássica: Um corpo puntiforme clássico incede na primeira tela (com fendas) com $p_x = 0$ sem dispersão, mas com x indeterminado. Depois da 1^a tela, o estado e uma *mistura* do estado que passou pela fenda 1 e o estado que passou pela fenda 2. Consequentamente, a probabilidade $\mathrm{Prob}(p_x)$ de ter um certo momento p_x depois da 1^a tela é a soma

$$\mathrm{Prob}(p_x) = \mathrm{Prob}(1; p_x) + \mathrm{Prob}(2; p_x), \tag{1}$$

onde $\mathrm{Prob}(k; p_x)$ é a probabilidade de ser passado pela fenda k e tambem ter o momento p_x $(k = 1, 2)$.

Discussão quântica: Um ensemble de partículas quânticas, e.g. elétrons, mostra um padrão de interferência na 2^a tela. Isso é devido ao *princípio da superposição* que vale na MQ (tradicional): Qualquer vetor no espaço Hilbert corresponde a um estado puro. Particularmente, a soma de dois vetores descreve novamente um estado puro (nos chamamos a soma de "superposição coherente"). Seja $\psi_{1,2}$ o estado entre as duas telas, com somente a fenda 1, respetivamente 2, aberta. Então o estado entre as duas telas, com as duas fendas abertas e descrito pela *soma* $\psi_1 + \psi_2$. Nos calculamos

$$\mathrm{Prob}(p_x) = \mathrm{Prob}(1; p_x) + \mathrm{Prob}(2; p_x) + \mathrm{P}_{\mathrm{int}}, \tag{2}$$

onde $\mathrm{P}_{\mathrm{int}} = 2\cos(p_x b/\bar{h})$, b sendo a distância entre as duas fendas. Esse termo $\mathrm{P}_{\mathrm{int}}$, devido ao princípio da superposição, é o chamado *termo de interferência.* Ele implica que a propriedade "o elétron passou pela fenda 1" (ou 2) não é uma propriedade clássica do elétron.

Um dos objetivos da Abordagem Algébrica à Mechânica Quântica (MQA) é generalizar a MQ tradicional até abrangar o regime clássico, junto com o regime quântico: Especialmente, descrever estados "clássicos" que não obdecem o princípio da superposição, e associar observáveis clássicos com esses estados. Decorre da discussão acima que isso vai implicar restrições do princípio da superposição. Relacionado com isso, a segunda motivação da MQA é a descrição de sistemas com infinitos graus de liberdade, como encontrados na TQC e na Física Estatística. (Eles têm estados "infinitamente diferente" que não podem ser superpostos coherentemente. Nos encontraremos um exemplo: a cadeia infinita de spins.) Em sumário, a MQA é um quadro que abrange, num formalismo unitário, a Mechânica Clássica e Quântica de um sistema fechado com finitos graus de liberdade (=MQ tradicional), a Eletrodinámica Clássica e a TQC, e as teorias de sistemas termodinámicas.

1.3 A MQ Tradicional e Estados Mistos

No domínio quântico, resultados de medições são necessariamente variáveis estochásticas. No formalismo matemático da MQ eles são relacionados com a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos. Revisamos esses noções.

Como vimos acima, o resultado da medição de um observável (mesmo se o sistema for num estado puro) é uma *variável estochástica*, X: X não tem um valor, mas só uma distribuição de probabilidades para os valores. Operacionalmente, as probabilidades são as frequências relativas dos valores, encontradas num *ensemble* de sistemas identicamente preparadas. Matematicamente, X corresponde (bijetivamente) a uma medida μ na reta real[1] com a seguinte interpretação: Para cada subconjunto (Borel, ver Apendice) Δ da reta real, $\mu(\Delta)$ é a probabilidade de encontrar um valor de X em Δ. O valor esperado (=mais provavel) de X, denotado por $\langle X\rangle$, é dado por

$$\langle X\rangle = \int \lambda\, d\mu(\lambda). \tag{3}$$

Exemplo 1 Se X tem valores discretos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente, a medida correspondente é $\mu(\Delta) = \sum_{i:\lambda_i\in\Delta} p_i$ (soma sobre todas indices i t.q. $\lambda_i \in \Delta$). Então a integral encima e evaluado como o seguinte. Nos escolhemos intervalos Δ_i, $i = 1, 2, \ldots$, tal que $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\mathbb{R} = \cup_i \Delta_i$ (uma chamada *partição da reta real*), e tal que em Δ_i se encontra exatamente um dos possíveis valores de X, a saber λ_i. Então o integral em eq. (3) é dado pela soma

$$\langle X\rangle = \sum_i \lambda_i\, p_i. \tag{4}$$

Consideramos o exemplo $X :=$ número de pontos encontrados após jogar um dado. Então $\mu(\Delta) = k/6$, se Δ contem k elementos de $\{1, \ldots, 6\}$, e o valor esperado é $\sum_{i=1}^{6} i \times 1/6 = 3,5$. $\square$

Dado uma função (Borel, limitada) f na reta real, podemos definir uma nova variável estochástica, $f(X)$, a saber a (unica) variável correspondente à medida

$$\mu_f(\Delta) := \mu(f^{-1}\Delta),$$

onde $f^{-1}\Delta$ é a imagem inversa de Δ sob f. (Interpretação: Para cada membro do ensemble, pegue o valor encontrado de X e aplique f. Então a probabilidade de encontrar $f(X)$ num intervalo Δ é igual à probabilidade de encontrar X em $f^{-1}\Delta$.) Para o valor esperado de $f(X)$ nos obtemos

$$\langle f(X)\rangle \equiv \int \lambda'\, d\mu_f(\lambda') = \int f(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

[1] As noções respetivas à medida e integração são revistos no Appendice A.

No caso da função charaterística[2] χ_Δ de um intervalo Δ nos obtemos

$$\langle \chi_\Delta(X) \rangle = \int_\Delta d\mu(\lambda) \equiv \mu(\Delta).$$

Então, não somente os valores esperados são fixados pela medida, mas tambem a medida pode ser reconstruida pelos valores esperados de funções de X:

Proposição 2 *"A medida μ é fixada pelos valores esperados $\langle f(X) \rangle$ de todas funções f de X."*

(Aspas por que deve ser especificada a classe de funções f. Para funções contínuas que caiem para zero no infinito, a Proposição encima se chama de *Teorema de Riesz-Markov.*)

Correlaçãoes. Consideramos duas variáveis estocásticas X_1, X_2 (em $\mathbb{R}$), com medidas correspondentes na reta real μ_1 e μ_2. Recordamos que $\mu_i(\Delta)$ é a probabilidade de encontrar um valor de X_i em $\Delta \subset \mathbb{R}$. O par (X_1, X_2) é uma nova variável estochastica (com valores em $\mathbb{R}^2$), correspondente a uma medida μ em $\mathbb{R}^2$ com a seguinte interpretação: Para $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$, o número $\mu(\Delta_1 \times \Delta_2)$ é a probabilidade de encontrar um valor de X_1 em Δ_1 e de X_2 em Δ_2. X_1 e X_2 são chamadas de *independentes* se isto é o produto das duas probabilidades:

$$\mu(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mu_1(\Delta_1)\, \mu_2(\Delta_2). \tag{5}$$

(Neste caso, a medida μ é chamado de produto das medidas μ_1 e μ_2.) Para uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel e limitada, $f(X_1, X_2)$ é uma nova variável estochastica (com valores em $\mathbb{R}$), com valor esperado $\langle f(X_1, X_2) \rangle = \int f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\mu(\lambda_1, \lambda_2)$. Isto se aplica em particular para o produto $f(X_1, X_2) := X_1 X_2$. Se X_1 e X_2 são independentes, a Eq. (5) implica

$$\begin{aligned} \langle X_1 X_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 \lambda_2\, d\mu(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 \lambda_2\, d\mu_1(\lambda_1) d\mu_2(\lambda_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1\, d\mu_1(\lambda_1) \int_{\mathbb{R}} \lambda_2 d\mu_2(\lambda_2) = \langle X_1 \rangle \, \langle X_2 \rangle. \end{aligned}$$

Nos temos então a seguinte condição necessária para independência.

Proposição 3 *Se X_1 e X_2 são independentes, então vale*

$$\langle X_1 X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle \, \langle X_2 \rangle. \tag{6}$$

(O reciproco só vale sob condições adicionais.)

Agora revisamos a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos. Seja $\mathcal{H}$ um espaço Hilbert. Os operadores contínuos (=limitados) em $\mathcal{H}$ nos denotamos

---

[2] χ_Δ é definido por

$$\chi_\Delta(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Delta, \\ 0, & \text{se } x \notin \Delta. \end{cases} \quad .$$

por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. O *adjunto* de um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, denotado A^*, é definido pela propriedade

$$(\psi, A\phi) = (A^*\psi, \phi) \quad \text{para qualquer } \psi, \phi \in \mathcal{H}.$$

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado de *auto-adjunto* se $A = A^*$. O *espectro* $\mathrm{Sp}A$ de um operador A é o conjunto de números $\lambda \in \mathbb{C}$ para quais o operador $A - \lambda \mathbb{1}$ não tem um inverso contínuo. Exemplos de valores espetrais são os auto-valores. $\lambda \in \mathbb{C}$ é chamado de *auto-valor* (AV) de A se existe um vetor $\psi \neq 0$ em $\mathcal{H}$ tal que $A\psi = \lambda\psi$. Neste caso, ψ é chamado de *auto-vetor*. (Ele é no núcleo de $A - \lambda$, então $A - \lambda$ não tem inverso.) Nos temos

Lemma 4 *i) $Sp(A^*) = \overline{SpA}$. Em particular, o espéctro de um operador auto-adjunto e contido na reta real.*
ii) Se $A = A^*$ (auto-adjunto): Auto-vectores para auto-valores diferentes são orthogonais.

Comprovante. Exercício. □

Os auto-vetores para o mesmo EV λ formam um sub-espaço linear fechado, o chamado auto-espaço de A para EV λ. A correspondente projeção nos denotamos por

$$E_A(\{\lambda\}).$$

Se $\mathcal{H}$ tem dimensão finita, cada operador auto-adjunto tem uma base ortogonal de auto-vetores. Consequentemente, A pode ser decomposto como

$$A = \sum_i \lambda_i \, E_A(\{\lambda_i\}), \quad \lambda_i \in \mathrm{Sp}A. \tag{7}$$

Esse é a chamada *decomposição espectral*. No caso de espaços com dimensão infinita, vale uma decomposição analoga. Neste caso, o espectro de A não precisa ser discreto, mas pode ser contínuo, i.e. conter intervalos abertos. Para cada intervalo Δ na reta real, tem um projetor $E_A(\Delta)$ tal que a familia $E_A(\Delta)$ tem as propriedades de uma medida de probabilidade, e $E_A(\Delta) = 0$ se $\Delta \cap \mathrm{Sp}A = \emptyset$. Ademais, para qualquer $\lambda \in \Delta$ vale

$$\|(A - \lambda)E_A(\Delta)\psi\| \leq |\Delta| \, \|\psi\|,$$

onde $|\Delta|$ é o diámetro do intervalo Δ. Neste caso geral, o operador auto-adjunto tem a decomposição espectral

$$A = \int_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \lambda \, dE_A(\lambda). \tag{8}$$

Exemplo 5 (Analogo do exemplo 1:) Se o espectro de A é discreto, i.e. consiste de auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, então $E_A(\Delta)$ é dado por $E_A(\Delta) = \sum_{i:\lambda_i \in \Delta} E_A(\lambda_i)$. Calculando o integral (8) como no último exemplo, ver eq. (4), dá exatamente a expressão na eq. (7). □

Agora podemos resumir os

Postulados da MQ tradicional.

1. A cada sistema corresponde um espaço Hilbert $\mathcal{H}$. Os estados puros correspondem, bijetivamente, aos fechas $\mathbb{C}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$.

2. Observáveis correspondem, bijetivamente, aos operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$.[3]

3. Seja $P_{A,\psi}(\Delta)$ a probabilidade que a medição de um observável A resulta num valor no intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, se o sistema for preparado no estado correspondente a $\psi \in \mathcal{H}$. Essa probabilidade é dada por

$$P_{A,\psi}(\Delta) = (\,\psi, E_A(\Delta)\psi\,)/\|\psi\|^2. \tag{9}$$

4. ("Postulado de projecção"). Se a medição (ideal) de A no estado ψ resultou num valor no intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, então logo depois da medição o estado corresponde a $E_A(\Delta)\psi$.

5. (Dinámica continua.) Sem interações com aparelhos macroscópicos, a dinámica do sistema (fechado) é continua, e descríta pela equação de Schrödinger.

Remarks. i) As especificações "bijetivamente" em 1. e 2. foram feitas por von Neumann, e foram desprezados depois para admitir setores de superseleção.
ii) Postulado 3 implica que os possíveis valores encontrados na medida de um observavel são exatamente o espectro do operador correspondente.
iii) *Propriedades* correspondem a projetores orthogonais, i.e. operadores auto-adjuntos P satisfazendo $P^2 = P$.

É importante observar que o postulado 3 pode ser substituido por um axioma referente às valores esperados. As probabilidades $P_{A,\psi}(\Delta)$ definidas no postulado 3 têm as propriedades de uma medida. O valor esperado correspondente, definido como na eq. (3), seja denotado por $\langle A\rangle_\psi$. Usando eqs. (8) e (9), nos obtemos

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_\psi &:= \int \lambda\, dP_{A,\psi}(\lambda) = \int \lambda\, d(\,\psi, E_A(\lambda)\psi\,)\\ &= (\,\psi, A\psi\,) \quad \text{se } \|\psi\| = 1.\end{aligned} \tag{10}$$

Assim, os probabilidades do postulado 3. implicam os valores esperados. Mas como nos vimos na Proposição 2, o converso vale tambem: A distribuição de probabilidades pode ser reconstruida pelos valores esperados. (Neste caso, a reconstrução funciona assím: No calculo funcional podem ser construido funções $f(A)$ de um operador auto-adjunto A, e $E_A(\Delta)$ é nada mais do que a função caraterística $\chi_\Delta(A)$ de A. Então a probabilidade na eq. (9) é o valor esperado do operador $\chi_\Delta(A)$.)

Proposição 6 *O postulado 3 é equivalente com: "O valor esperado de um observavel, se o sistema for preparado no estado $\psi \in \mathcal{H}$, é dado por $(\,\psi, A\psi\,)/\|\psi\|^2$."*

[3]Nos vamos frequentemente identificar estados com vetores, e observaveis com operadores.

Estados Mistos. Um estado misto corresponde a um modo de preparação que não da a informação maxima possível sobre o sistema. O exemplo principal para tal estado funciona como o seguinte. O experimentador prepara o sistema com probabilidade (=frequência relativa) w_1 no estado puro ψ_1, com probabilidade w_2 no estado puro ψ_2, etc., onde $\sum_i w_i = 1$, e $\|\psi_i\| = 1$. Chamamos este modo de preparação, por enquanto, de ρ. A probabilidade $\text{Prob}_{A,\rho}(\Delta)$ que a medição de uma observável A resulta num valor no intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, se o sistema for preparado segundo este estado ρ, é dado por

$$\text{Prob}_{A,\rho}(\Delta) = \sum_i w_i \, \text{Prob}_{A,\psi_i}(\Delta) = \sum_i w_i \, (\, \psi_i, E_A(\Delta)\psi_i \,). \tag{11}$$

Como conseguinte, , o valor esperado de A no estado ρ é dado por

$$\langle A \rangle_\rho = \int \lambda \, d\text{Prob}_{A,\rho}(\lambda) = \sum_i w_i \int \lambda \, d(\, \psi_i, E_A(\lambda)\psi_i \,) = \sum_i w_i \, (\, \psi_i, A\psi_i \,). \tag{12}$$

(A 1^a equação é a definição (3), com $\text{Prob}_{A,\rho}(\Delta)$ no papel de $\mu(\Delta)$, e na 2^a e 3^a equação usamos eq.s (11) e (8), respetivamente.) Para simplificar estes expressões, denotamos de ρ o seguinte operador:

$$\rho := \sum w_i \, P_{\psi_i}, \tag{13}$$

onde P_ψ é o projetor sobre ψ,

$$P_\psi \phi := \frac{(\, \psi, \phi \,)\, \psi}{\|\psi\|^2}. \tag{14}$$

Lembrando que o traço de um operador B, $\text{Tr}B$, é definido por

$$\text{Tr}B := \sum_\nu (\, \varphi_\nu, B\varphi_\nu \,), \tag{15}$$

se existe, onde $\{\varphi_\nu\}$ é uma base orthonormal em $\mathcal{H}$, nos podemos expressar os lados direitos das eq.s (11) e (12) na forma

$$\sum_i w_i \, (\, \psi_i, B\psi_i \,) = \text{Tr}(\rho B). \tag{16}$$

Um operador da forma (13), com $\sum_i w_i = 1$, é chamado de *matriz-densidade*. Ele tem as propriedades

$$\text{Tr}\rho = 1, \quad (\, \phi, \rho\phi \,) \geq 0, \; \phi \in \mathcal{H}. \tag{17}$$

(Observa que a equação direita implica que ρ é auto-adjunto!)

Exercício 7 (Mostra:) Conversamente, qualquer operador com essas duas propriedades é uma matriz-densidade [16].

Agora podemos formular uma generalização dos Postulados 1 e 3:

Postulado 1': Os estados correspondem, bijetivamente, às matrizes-densidade.

Postulado 3': A probabilidade $P_{A,\rho}(\Delta)$ que a medição de uma observável A resulta num valor no intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, se o sistema for preparado no estado correspondente a ρ é dado por

$$P_{A,\rho}(\Delta) = \mathrm{Tr}(\rho E_A(\Delta)). \tag{18}$$

O valor esperado correspondente é

$$\langle A \rangle_\rho = \mathrm{Tr}(\rho A). \tag{19}$$

Isso é uma verdadeira generalização dos postulados 1 e 3 pela seguinte razão. Se ρ_1 e ρ_2 são matrizes-densidade, então a chamada combinação convexa

$$\rho := w_1\rho_1 + w_2\rho_2, \tag{20}$$

com $w_1 + w_2 = 1$, tambem é (pois ela têm as propriedades (17)). Em outras palavras, o conjunto de matrizes-densidade é um *conjunto convexo.* Obviamente (compare com nosso "exemplo principal" (13) encima), uma matriz-densidade ρ corresponde a um estado puro se e somente se ela não pode ser decomposto como acima, i.e. se e somente se eq. (20) implica $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Tal elemento de um conjunto convexo é chamado de *ponto extremal.* É um fato matemático [16] que os pontos extremais dos matrizes-densidade são exatamente os projetores unidimensionais, P_ψ. Como $\mathrm{Tr}(P_\psi B) = (\,\psi, B\psi\,)/\|\psi\|^2$, os Postulados 1' e 3' implicam os Postulados 1 e 3 sobre os estados puros.

Exemplo 8 : Matrizes-densidade em $\mathbb{C}^2$. Qualquer operador auto-adjunto em $\mathbb{C}^2$ é uma combinação linear real da unidade $\mathbb{1}$ e as matrizes σ_1, σ_2 e σ_3 de Pauli. Então, as matrizes-densidade são da forma

$$\rho = c(\mathbb{1} + \vec{n}\cdot\vec{\sigma}) := c(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} n_i\sigma_i), \quad \vec{n} \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}.$$

Como as matrizes de Pauli têm traço zero, a condição $\mathrm{Tr}\rho = 1$ implica $c = 1/2$. A determinante de ρ então é $(1 - \vec{n}^2)/4$. Mas a condição da positividade na eq. (17) implica que a determinante seja positiva, então $\|\vec{n}\| \leq 1$. Em summário, as matrizes-densidade são precisamente os operadores da forma

$$\rho_{\vec{n}} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \in \mathbb{R}^3,\ \|\vec{n}\| \leq 1. \tag{21}$$

Observando que $w_1\rho_{\vec{n}_1} + w_2\rho_{\vec{n}_2}$ coincede com $\rho_{w_2\vec{n}_1 + w_2\vec{n}_2}$, nos concluimos que as matrizes-densidade em $\mathbb{C}^2$ são, como conjunto convexo, isomorphico com a bola unitária no $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{n} :\ \|\vec{n}\| \leq 1\}$. Os estados puros, como pontos extremais, correspondem aos *boundary points* (pontos marginais ??), a saber a esfera $\{\|\vec{n}\| = 1\}$.

Uma propriedade importante deste conjunto convexo é que a decomposição de um ponto no interior em pontos extremais obviamente *não é unica.* Isso é tipico para os estados da MQ, e em contraste com a mecânica clássica, onde a decomposição é unica. Por isso, na MQ a interpretação do estado (20) como "o estado é ρ_1 com probabilidade w_1 e ρ_2 com probabilidade w_2" (i.e., Born's interpretação de ignorância) não é válida. $\square$

1.4 Setores de Superseleção

Wick, Wightman e Wigner observaram que têm sistemas quânticas com certas restrições do princípio da superposição. Por exemplo, ninguem jamais observou interferência entre estados correspondente a partículas com cargas diferentes. O segundo exemplo deles é o seguinte: Sejam ψ e ϕ estados puros de um Fermion (spin $\frac{1}{2}$) e um Boson (spin integral), respetivamente. Sob uma rotação de 2π, o Fermion ganha um sinal, enquanto o Boson é invariante: $U(2\pi)\psi = -\psi$, $U(2\pi)\phi = \phi$. No outro lado, os observáveis A são invariante sob esse rotação: $U(2\pi)AU(2\pi)^{-1} = A$. Esses fatos implicam

$$(\psi, A\phi) = (\psi, U(2\pi)^{-1}AU(2\pi)\phi) = (U(2\pi)\psi, AU(2\pi)\phi) = -(\psi, A\phi),$$

então $(\psi, A\phi) = 0$ para qualquer observável A. Então, os termos de interferência das combinações lineares $\alpha\psi + \beta\phi$ são nulos:

$$(\alpha\psi + \beta\phi, A(\alpha\psi + \beta\phi)) = |\alpha|^2(\psi, A\psi) + |\beta|^2(\phi, A\phi). \tag{22}$$

Como consequência, no estado correspondente as combinações lineares $\alpha\psi + \beta\phi$ os observáveis têm os mesmos valores espectados do que no estado correspondente à matriz-densidade

$$|\alpha|^2 P_\psi + |\beta|^2 P_\phi : \tag{23}$$

o estado não é puro, mas misto! Nos digamos que os estados de Fermions e Bosons correspondem a setores diferentes de superseleção:

Definição 9 i) Existe uma *regra de superseleção* entre ψ e ϕ em $\mathcal{H}$ se $(\psi, A\phi) = 0$ para qualquer observável A.

ii) Um subespaço $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ é chamado de um *setor de superseleção* (ou subespaço *coherente*) se não têm regras de superseleção entre vetores em $\mathcal{H}_0$ (i.e., se o princípio da superposição vale em $\mathcal{H}_0$ sem restrições).

Como vimos encima, combinações lineares de vetores de setores diferentes correspondem a estados mistos. Setores diferentes são orthogonais, pois a unidade $\mathbb{1}$ é uma observável com elementos-matriz nulo entre diferents setores.

Por conseguinte, o espaço de Hilbert decompõe como uma soma direta (=orthogonal) de setores de superseleção:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_q \mathcal{H}_q. \tag{24}$$

Os observáveis deixam cada $\mathcal{H}_q$ invariante, i.e. podem ser escrito como

$$A = \sum_q A_q, \quad A_q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_q) \tag{25}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \cdot \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Isso é o "scenário de Wick, Wightman e Wigner". Como vimos acima, um vetor $\psi \in \mathcal{H}$ com componentes em setores diferentes corresponde a um estado misto. Mas em contraste ão caso geral, esse estado tem uma decomposição *única* em estados puros: Pois ψ tem uma unica decomposição $\psi = \psi_q$, $\psi_q \in \mathcal{H}_q$. O valor esperado de *observáveis* neste estado é

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_q \|\psi_q\|^2 \langle A \rangle_{\psi_q}$$

(nos admtimos que $\|\psi\| = 1$.) Em outros palavras, o estado correspondente a ψ coincede, nos observaveis (e só nos observáveis!), com a matriz-densidade

$$\sum_q \|\psi_q\|^2 P_{\psi_q},$$

e esse decomposição em estados puros e único.

De interese particular são os operadores da forma

$$Q = \sum_q \lambda_q \mathbb{1}_q, \quad \lambda_q \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

onde $\mathbb{1}_q$ denota a unidade no espaço $\mathcal{H}_q$. (Eles são observáveis e commutam com todos observáveis.) Para cada q, $\mathcal{H}_q$ e um auto-espaço simultâneo de todos operadores desta forma: eles possuem, simultâneamente, valores definitos (com dispersão zero) num vetor $\phi_q \in \mathcal{H}_q$. Por isso, esses operadores correpondem a *observáveis clássicos.* Na secão seguinte, vamos apprender que estas propriedades são tipicas para os operadores "centrais".

2 Formulação Algébrica

A atitude da MQA é que os observáveis de um sistema correspondem às elementos auto-adjuntos A de uma álgebra-$*$ (abstracta), e os estados correspondem a funcionais $A \mapsto \langle A \rangle \in \mathbb{R}$ com certas propiedades (t.q. eles podem ser interpretados como valores esperados). Vamos definir as noções relevantes.

2.1 Álgebras e Estados

Definição 10 Seja $\mathcal{A}$ um espaço linear.

i) $\mathcal{A}$ é chamado de *álgebra* sse[4] existe um produto associativo. Um produto é uma aplicação bilinear $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A, B \mapsto AB$. Associatividade significa $(AB)C = A(BC)$.

ii) $\mathcal{A}$ é chamado de *álgebra- $*$* sse existe uma chamada involução $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A \mapsto A^*$, com os seguintes propriedades:

$$(\alpha A + \beta B) = \bar{\alpha} A, \alpha + \bar{\beta} B^* \in \mathbb{C} \qquad \text{(Antilinear)} \tag{28}$$

$$(A^*)^* = A \qquad \text{(Involução)} \tag{29}$$

$$(AB)^* = B^* A^*. \tag{30}$$

A é chamado de *auto-adjunto* sse $A^* = A$. A é *positivo* sse existe um $B \in \mathcal{A}$ t.q. $A = B^* B$. Nesse caso, escrevemos $A \geq 0$.

[4]sse:="se e somente se"

Observa que cada elemento A de uma álgebra-* é a somma de dois elementos auto-adjuntos, a saber:

$$A = A_1 + iA_2, \quad A_1 := \frac{1}{2}(A + A^*), \; A_2 := \frac{1}{2i}(A - A^*). \tag{31}$$

Em qualquer álgebra $\mathcal{A}$ pode ser definido o espectro de cada elemento A:

$$\mathrm{Sp}A := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \mathbb{1} \text{ não tem inverso em } \mathcal{A}\}. \tag{32}$$

Proposição 11 *Para $A \in \mathcal{A}$ são equivalente:*
i) A é positivo, i.e. existe um $B \in \mathcal{A}$ t.q. $A = B^*B$,
ii) O espéctro de A é positivo, i.e. $SpA \subset \mathbb{R}_0^+$,
iii) Existe $C = C^* \in \mathcal{A}$ t.q. $A = C^2$.

Comprovante. Ad *iii)* $\Rightarrow$ *ii)*: Sejam $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $\lambda_0^2 = \lambda$. Então $C^2 - \lambda = (C + \lambda_0)(C - \lambda_0)$. Então $C^2 - \lambda$ tem um inverso sse ambos $C \pm \lambda_0$ têm inversos. Então $\lambda \in \mathrm{Sp}(C^2) \Leftrightarrow \lambda_0$ ou $-\lambda_0 \in \mathrm{Sp}C \Leftrightarrow \lambda_0^2 \equiv \lambda \in (\mathrm{Sp}C)^2$, ou seja:

$$\mathrm{Sp}(C^2) = (\mathrm{Sp}C)^2.$$

Em particular o espectro de C^2 é positivo, então *iii)* $\Rightarrow$ *ii)*. Ad *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Seja $A = B^*B$. Observa que $B^*B = B_1^2 + B_2^2$ com B_1, B_2 auto-adjuntos como na equ. (31). Então o espectro de A é a somma dos espectros de B_1^2 e B_2^2, então positivo pelo argumento acima. *iii)* $\Rightarrow$ *i)* é claro. *ii* $\Rightarrow$ *iii)*: Ver [3, Thm. 2.2.10] □

O exemplo principal é $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$: O produto de operadores é simplesmente a aplicação “em sequencia”. A^* é o operador adjunto. Uma *álgebra de operadores* é uma sub-álgebra de um $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Precisamos uma caraterização de estados como valores esperados, independente de uma realização de $\mathcal{A}$ por operadores. São os seguinte duas propriedades:

Definição 12 Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Um funcional (=aplicação linear) $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é chamado de

$$\textit{positivo} \text{ sse} \qquad \omega(A) \geq 0 \quad \text{se } A \geq 0, \tag{33}$$

$$\textit{normalizado} \text{ sse} \qquad \omega(\mathbb{1}) = 1. \tag{34}$$

(Vale mencionar que no caso de uma álgebra C^*, ver abaixo, a positividade implica continuidade.)

Exercício 13 Mostra: ω positivo implica que

$$\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}. \tag{35}$$

Em partiualr, $\omega(A) \in \mathbb{R}$ se A é auto-adjunto. (Dica: “Identidade de polarização”.)

Postulados da MQA. Os observáveis de um sistema correspondem aos elementos auto-adjuntos de uma algebra-* $\mathcal{A}$. Os estados correspondem aos funcionais positivos e normalizados.

$\mathcal{A}$ será chamado a “algebra de observáveis”. Em abuso de linguagem, o termo “estados” será usado para funcionais positivos e normalizados.

Observações aos Postulados. Como no caso da MQ tradicional, os valores espectrais são os possiveis resultados de medidas. (Isso é uma *Consequência* dos postulados, se $\mathcal{A}$ é uma algebra C^*, ver abaixo!) Se $\mathcal{A}$ é uma algebra-*, o espectro de A^* é o conjugado do espectro de A, veja Lema 4, então o espectro de uma observável (=auto-adjunto) é real. Ademais, uma observável positiva tem espectro positivo.[5] Por isso, o valor esperado $\omega(A)$ de A deve ser positivo. Finalmente, o valor esperado do observavel $\mathbb{1}$ (que tem, por definição, o valor 1 em qualquer medição), é claramente 1. Por isso ω deve ser normalizado.

2.2 Formulação Algébrica da Mecânica Clássica

2.3 Cadéia de Spins Infinita

A cadéia de spins tem em cada ponto $x \in \mathbb{Z}$ uma cópia do espaco $\mathbb{C}^2$. A álgebra de observáveis é gerado por elementos que agem num numero finito só de copias. Formalmente, para cada intervalo $\Lambda = \{-N, \ldots, N\}$ definimos

$$\mathcal{A}(\Lambda) := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{A}_x, \quad \mathcal{A}_x := \mathcal{B}(\mathbb{C}^2). \tag{36}$$

Para $x \in \Lambda$, $\mathcal{A}_x$ pode ser identificado com uma sub-algebra de $\mathcal{A}(\Lambda)$ via

$$\mathcal{A}_x \ni \ A \mapsto A(x) := \mathbb{1}_{-N} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{x-1} \otimes A \otimes \mathbb{1}_{x+1} \cdots \otimes \mathbb{1}_N \ \in \mathcal{A}(\Lambda), \tag{37}$$

onde $\mathbb{1}_y$ denota a unidade em $\mathcal{H}_y$. Na mesma maneira, a álgebra de um subintervalo $\Lambda_0 \subset \Lambda$ pode ser identificado com uma sub-algebra de $\mathcal{A}(\Lambda)$:

$$\mathcal{A}(\Lambda_0) \subset \mathcal{A}(\Lambda) \quad \text{se } \ \Lambda_0 \subset \Lambda. \tag{38}$$

Devido a esse fato, a união

$$\mathcal{A}_0 := \bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}, \text{finito}} \mathcal{A}(\Lambda) \tag{39}$$

é uma álgebra. (Sejam $A \in \mathcal{A}(\Lambda_1)$, $B \in \mathcal{A}(\Lambda_2)$. Pega um intervalo $\Lambda \supset \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, então A e B são elementos da álgebra $\mathcal{A}(\Lambda)$ e o produto AB é bem definido nesse algebra. Esse produto não depende do intervalo Λ.) Como espaço linear, $\mathcal{A}$ tem a base

$$\{\mathbb{1}\,,\, \sigma_{i_{-N}}(-N) \cdots \sigma_{i_N}(N) \ N \in \mathbb{N}, i_{-N}, \ldots, i_N \in \{1,2,3\}\}.$$

Observa que as álgebras $\mathcal{A}(\Lambda_1)$ e $\mathcal{A}(\Lambda_2)$ commutam se $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ finito, $\mathcal{A}(\Lambda)$ age naturalmente no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}(\Lambda) := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x, \quad \mathcal{H}_x := \mathbb{C}^2. \tag{40}$$

A algebra $\mathcal{A}_0$ pode ser representado como operadores no produto tensiorial infinito de espaços de Hilbert $\mathbb{C}^2$. Uma possibilidade de definir este espaço é o seguinte. Sejam φ_ε, $\varepsilon = \pm 1$, os auto-vetores normalizados da matriz σ_3 de Pauli. Então para $\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_{-N}, \ldots, \varepsilon_N) \in \{\pm 1\}^{\times 2N+1}$, os vetores $\varphi_{\underline{\varepsilon}} := \varphi_{\varepsilon_{-N}} \otimes \cdots \varphi_{\varepsilon_N}$ são uma

[5] Comprovante: !!

base orthonormal de $\mathcal{H}(\{-N,\dots,N\})$. Em generalização dos tupels, consideramos aplicações $\underline{\varepsilon} : \mathbb{Z} \to \{\pm 1\}$. O conjunto desses aplicações, denotado por S, é não-contavel (pois pode ser identificado com o intervallo real $[-1,1]$ por meio do sistema binário). Como produto tensorial infinito nos definimos

$$\mathcal{H} := \big\{ \psi = \sum_{\underline{\varepsilon} \in S_\psi} c_{\underline{\varepsilon}}\, \varphi_{\underline{\varepsilon}}, \,|\, S_\psi \subset S \text{ contável }, \sum_{\underline{\varepsilon} \in S_\psi} |c_{\underline{\varepsilon}}|^2 < \infty \big\}. \tag{41}$$

(Isto não é a definição mais geral. Por exemplo, $\mathcal{H}(x)$ não contem o "produto infinito" de auto-vetores de σ_1. Ver [18] para uma definição mais geral.) Por construção, $S = \{\underline{\varepsilon} : \mathbb{Z} \to \{\pm 1\}\}$ corresponde a uma base orthonormal em $\mathcal{H}$. Como S é não-conável, o espaço $\mathcal{H}$ é não-separável. Para definir uma representação de $\mathcal{A}_0$ em $\mathcal{H}$, observa que as matrizes de Pauli agem, em termos da base φ_ε, como o seguinte:

$$\sigma_1\, \varphi_\varepsilon = \varphi_{-\varepsilon}, \quad \sigma_2\, \varphi_\varepsilon = i\varepsilon\, \varphi_{-\varepsilon}, \quad \sigma_3\, \varphi_\varepsilon = \varepsilon\, \varphi_\varepsilon.$$

Então definimos

$$\sigma_1(x)\varphi_{\underline{\varepsilon}} := \varphi_{\underline{\varepsilon}_x}, \quad \sigma_2(x)\, \varphi_{\underline{\varepsilon}} = i\underline{\varepsilon}(x)\, \varphi_{\underline{\varepsilon}_x}, \quad \sigma_3(x)\, \varphi_{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}(x)\, \varphi_{\underline{\varepsilon}}, \tag{42}$$

onde $\underline{\varepsilon}_x(y) = \underline{\varepsilon}(y)$ para todos y menos $y = x$, onde $\underline{\varepsilon}_x(x) := -\underline{\varepsilon}(x)$.

Como um observável $A \in \mathcal{A}_0$ só age num número finito de x's, seu elemento-matriz deve ser zero entre certos vetores. Definimos uma relação de equivalência em S via

$$\underline{\varepsilon}' \sim \underline{\varepsilon} \;:\Leftrightarrow\; \underline{\varepsilon}'(x) = \underline{\varepsilon}(x) \;\text{ para quase todos }\; x \in \mathbb{Z}.$$

(Quase todos := todos menos um número finito.) A classe-equivalência denotamos por $[\underline{\varepsilon}]$.[6] Definimos

$$\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}]} := \big\{ \psi = \sum_{\underline{\varepsilon}' \in S_\psi} c_{\underline{\varepsilon}'}\, \varphi_{\underline{\varepsilon}'} \;\in \mathcal{H} \,|\, \underline{\varepsilon}' \in [\underline{\varepsilon}] \,\big\},$$

é claro pelo argumento acima que os elementos-matrizes de observáveis é zero entre subespaços $\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}]}$ e $\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}']}$ se $\underline{\varepsilon} \not\sim \underline{\varepsilon}'$. Então, existe uma regra de superseleção entre tais sub-espaços. Mais ainda, a decomposição orthogonal

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{[\underline{\varepsilon}]} \mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}]}. \tag{43}$$

é, de fato, a decomposição de $\mathcal{H}$ em setores de superseleção:

Proposição 14 *Entre $\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}']}$ e $\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}]}$ existe uma regra de superseleção $\Leftrightarrow$ $[\underline{\varepsilon}'] \neq [\underline{\varepsilon}]$. Em particular, cada vetor em $\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}]}$ define um estado puro.*

Comprovante. A parte $\Rightarrow$, a saber $[\underline{\varepsilon}'] \neq [\underline{\varepsilon}]$ implica uma regra de superseleção, já foi discutido. A parte $\Leftarrow$, a saber que vetores em $\mathcal{H}_{[\underline{\varepsilon}]}$ correspondem a estados puros, vamos mostrar em ... . $\square$

Vamos conrinuar a discussão da cadéia de spns infinita na seção 3.4.

[6] Observa que este é um conjunto contável!

3 Álgebras de Operadores

3.1 Álgebras C*

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-*.

Definição 15 $\mathcal{A}$ é uma álgebra C* sse existe uma norma $\|.\|$ t.q. $\mathcal{A}$ é completo, e para todos A, B $\in \mathcal{A}$ vale:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \tag{44}$$

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \tag{45}$$

Observe que (45) implica $\|A^*\| = \|A\|$. Pois $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|A^*\| \, \|A\|$, então $\|A\| \leq \|A^*\|$, simultaneamente, $\|A^*\| = \|A\|$. A eq. (44) significa que a norma é contínua. A eq. (45) é uma restrição muito grave na norma; na verdade, ela fixa a norma unicamente (dado a álgebra-* $\mathcal{A}$). Se $P \neq 0$ é um projetor ortogonal, i.e., $P^2 = P = P^*$, ento P deve ter norma 1, pois $\|P\| = \|P^2\| = \|P^*P\| = \|P\|^2$, então $\|P\| = 1$ se P$\neq$ 0. (Em particular, $\|\mathbb{1}\| = 1$). Por exemplo, se $U \in \mathcal{A}$ é *unitário*, i.e. $U^* = U^{-1}$, então U deve ter norma 1, por que $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|\mathbb{1}\| = 1$.

Exemplo 16 Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a norma de operadores (95) satisfaz eqs. (44) e (45), e torna $\mathcal{A}$ numa álgebra C*. (Comprovante: **Exercício**.) □

Como mencionado, a norma que torna uma álgebra-* numa álgebra C* (se existe) é única, e tal é uma propriedade intrínseca de $\mathcal{A}$. Essa caracterização intrínseca (=algébrica) se realiza pelo espectro. Embora conheçamos essa noção somente para operadores, o espectro pode ser definido para elementos de qualquer álgebra $\mathcal{A}$: O espectro de $A \in \mathcal{A}$ é definido por:

$$\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ não tem inverso em } A\}. \tag{46}$$

Mais, o *raio espectral*, $\rho(A)$, de A é definido por

$$\varrho(A) := \sup\{|\lambda| \, , \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}. \tag{47}$$

Teorema 17 *i) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-* com norma que satisfaz* (44). *Ento vale, para $A \in \mathcal{A}$:*

$$\varrho(A) \leq \|A\| \, . \tag{48}$$

ii) Numa álgebra C* $\mathcal{A}$ vale $\rho(A) = \|A\|$ para todos elementos auto-adjuntos. Consequentemente, vale:

$$\|A\|^2 = \varrho(A^*A) \tag{49}$$

para todos $A \in \mathcal{A}$.

3.2 Representações

Teorema 18 (Estados puros e Irreducibilidadade) *Seja π uma representação de uma álgebra-C^* $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) π é irredutível.

ii) Cada vetor $\psi \in \mathcal{H}$ corresponde, via

$$\omega_\psi := (\psi, \pi(A)\psi), \tag{50}$$

a um estado puro.

Comprovante. "$i) \Rightarrow ii)$": Seja π irredutível, e seja $\omega_\psi = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ uma decomposição de ω_ψ como combinação convexa. Definindo $\hat{\omega}_1 := \lambda_1\omega_1$, temos claramente $\hat{\omega}_1(C) \geq \omega_\psi(C)$ para $C \geq 0$, isso implica:

$$|\hat{\omega}_1(A^*B)|^2 \leq \hat{\omega}_1(A^*A)\hat{\omega}_1(B^*B) \leq \omega_\psi(A^*A)\omega_\psi(B^*B) = \|\pi(A)\psi\|^2\|\pi(B)\psi\|^2. \tag{51}$$

(A primeira iniguualdade é a de Cauchy-Schwarz). Por isso, para B fixo a aplicação $\pi(B)\psi \mapsto \hat{\omega}_1(A^*B)$ é bem-definido e contínuo. O Lema de Riesz então implica que existe um vetor ϕ (dependente de A), t.q. $\hat{\omega}_1(A^*B) = (\phi, \pi(B)\psi)$. Definimos agora um operador T por $T\pi(A)\psi := \phi$. (Ele é bem-definido, por que $\pi(A)\psi = 0$ implica $\hat{\omega}_1(A^*B) = 0$ pela iniguualdade (51), então $\phi = 0$). Ademais, T é contínuo, por que

$$\|T\pi(A)\psi\| = \sup_B \frac{|(T\pi(A)\psi, \pi(B)\psi)|}{\|\pi(B)\psi\|} \leq \|\pi(A)\psi\|$$

pela iniguualdade de (51). Ademais, temos a relação

$$(T\pi(A)\psi, \pi(B)\psi) = \hat{\omega}_1(A^*B) \tag{52}$$

para todos $A, B \in \mathcal{A}$. Vamos mostrar que $T \in \pi(A)'$: Seja $C \in A$. Pela eq. (52), temos:

$$(T\pi(C)\,\pi(A)\psi, \pi(B)\psi) = \hat{\omega}_1(A^*C^*B).$$

Por outro lado, temos também:

$$(\pi(C)T\,\pi(A)\psi, \pi(B)\psi) = \hat{\omega}_1(A^*C^*B).$$

Como o espaço de vetores $\pi(B)\psi$, $B \in A$, é denso, isso implica que o comutador $[T, \pi(C)]$ é zero em $\pi(\mathcal{A})\psi$, e então é zero. Ou seja, T é um comutante de $\pi(A)$ e deve ser um multíplo da unidade por que π é irredutível: $T = \lambda\mathbb{1}$. Substituindo isso na (52), temos:

$$\hat{\omega}_1(A^*B) = \lambda(\,\pi(A)\psi, \pi(B)\psi\,) = \lambda\omega_\psi(A^*B),$$

ou seja: $\hat{\omega}_1 = \lambda\omega_\psi$. Então,

$$\omega_1 \equiv \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_1(\mathbb{1}\,)} = \frac{\lambda\omega_\psi}{\lambda} = \omega_\psi.$$

Isso implica que ω_ψ é puro, mostrando "$i \Rightarrow ii$".

Para mostrar "$ii \Rightarrow i$", seja $T \in \pi(A)'$ arbitrário. Então, o operador auto-adjunto $S := T + T^*$ também é em $\pi(A)'$, e o mesmo vale para os projetores espectrais dele, $E_S(\Delta)$. Seja E um tal projetor, e seja $\rho(A) := (E\psi, \pi(A)\psi)$. Como $E \in \pi(A)'$, ρ é idêntico com

$$\rho(A) = (E\psi, \pi(A)E\psi)$$

e por isso positivo. Ademais, $\hat{\rho} := \omega - \rho$ também é positivo, por que

$$\omega(A^*A) - \rho(A^*A) = (\pi(A)\Omega, (\mathbb{1} - E)\pi(A)\Omega) \geq 0$$

Se π *não* é irredutível, existe tal $E \in \pi(A)'$ com $E \neq 0, \mathbb{1}$. Então ω é igual a soma $\rho + \hat{\rho}$ de dois funcionais positivos diferentes, (que dão estados depois normalização), e então não é puro. □

Agora vamos mostar que a álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ tem só uma representação irredutível (módulo de equivalência). Começamos com o seguinte fato.

Teorema 19 (Estados em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ s ao matrizes-densidade.) *Qualquer estado sobre a álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é da forma*

$$\omega(A) = Tr(\rho A), \tag{53}$$

onde ρ é uma matriz-densidade em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Um estado ω sobre $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é puro sse ω é forma:

$$\omega(A) = (\phi, A\phi) \tag{54}$$

para um $\phi \in \mathbb{C}^n$.

Comprovante. $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar:

$$(A, B) := Tr(A^*B) \tag{55}$$

Como ω é um funcional (linear e contínuo), o Lema de Riesz (Lema 29) implica que existe um $\hat{\rho} \in \mathcal{A}$ t.q.

$$\omega(A) = (\hat{\rho}, A) = Tr(\hat{\rho}^*A) \equiv Tr(\rho A), \forall A \in \mathcal{A} \tag{56}$$

onde $\rho := \hat{\rho}^*$. Seja $\phi \in \mathbb{C}^n$ e P_ϕ o projetor sobre ϕ. A positividade de ω implica que $\omega(P_\phi)$ é real, então:

$$\omega(P_\phi) \equiv Tr(\rho P_\phi) = (\phi, \rho\phi) \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

Pela identidade de polarização, isso implica que ρ é auto-adjunto. Então tem uma decomposição espectral:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \tag{58}$$

onde $P_i \equiv P_{\varphi_i}$ é o projetor sobre φ_i, $\{\varphi_i, i = 1, \dots n\}$ sendo uma ONB de $\mathbb{C}^n$. A positividade de ρ implica, para $k \in \{1 \dots n\}$:

$$0 \leq \omega(P_k^*P_k) \equiv \omega(P_k) = Tr(\rho P_k) = \lambda_k. \tag{59}$$

Então todos λ_k são positivos, então ρ é positivo. Finalmente, temos $1 = \omega(\mathbb{1}) = Tr(\rho)$. Então ρ é uma matriz-densidade e nós temos demonstrado a primeira parte.

Agora, um estado ω da forma (53), com ρ como na eq. (58) com pelo menos dois $\lambda_i \neq 0$ é uma combinação convexa de dois estados, então não puro. Por isso, ω puro implica que só um dos λ's é diferente de zero, digamos λ_{i_0}. $Tr\rho = 1$ implica $\lambda_{i_0} = 1$, então, $\rho = P_{i_0}$, então:

$$\omega(A) = Tr(P_{i_0}A) = (\varphi_{i_0}, A\varphi_{i_0}). \tag{60}$$

Isso mostra a segunda parte do teorema. □

Como consequência nós temos:

Teorema 20 *Cada representação irredutível,* π*, da álgebra* $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ *é (unitariamente) equivalente à representação canônica* id, $\mathrm{id}(A) := A$, *em* $\mathbb{C}^n$*. Em outras palavras, se* π *age em* $\mathcal{H}$*, existe um isomorfismo isométrico* $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *t.q.*

$$\pi(A) = UAU^{-1}. \tag{61}$$

Comprovante. Consideramos o estado $\omega(A) := (\Omega, \pi(A)\Omega)$ onde $\Omega \neq 0$ é um vetor arbitrário em $\mathcal{H}$. Como π é irredutível, ω é puro e o Teorema 19 implica que existe um vetor $\phi \in \mathbb{C}^n$ t.q.

$$(\Omega, \pi(A)\Omega) = (\phi, A\phi) \tag{62}$$

Para vetores no espaço $\mathcal{D} := \pi(\mathcal{B}(\mathbb{C}^n))\Omega$, definimos $U : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^n$ por

$$U\pi(A)\Omega := A\Phi \tag{63}$$

A eq. (62) implica que:

$$\|\pi(A)\Omega\|^2 \equiv (\Omega, \pi(A^*A)\Omega) = (\phi, A^*A\phi) = \|A\phi\|^2. \tag{64}$$

Então U é bem definido e isométrico. É sobrejetivo também, por que $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)\phi = \mathbb{C}^n$ se $\phi \neq 0$. Como π é irredutível, o domínio $\mathcal{D}$ de U é denso em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{D}$ é a imagem inversa de $\mathbb{C}^n$ sob a aplição contínua U, $\mathcal{D}$ é fechado e então coincide com $\mathcal{H}$. Então, U é um isomorfismo isométrico $\mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$. A propriedade (61) é implicad por:

$$U\pi(A)\,\pi(B)\Omega \equiv U\pi(AB)\Omega = AB\phi = AU\,\pi(B)\Omega. \tag{65}$$

□

3.3 A representação GNS

No seguinte, seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C*.

Teorema 21 (Representação GNS) *Dado um estado* ω *sobre* $\mathcal{A}$*, existe um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}_\omega$*, uma representação* π_ω*:* $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$*, e um vetor* $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ *tal que:*
(i) Para todos $A \in \mathcal{A}$ *vale*

$$\omega(A) = (\,\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega\,), \qquad e \tag{66}$$

(ii) o subespaço $\pi_\omega(\mathcal{A})\,\Omega_\omega$ é denso em $\mathcal{H}_\omega$.

Ademais, a tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ é único modulo equivalência unitária, no seguinte sentido: Se $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ é uma outra tripla com os propriedades (i) e (ii), então existe um isomorfismo isométrico $U : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}$ tal que $U\Omega_\omega = \Omega$ e

$$\pi(A) = U\pi_\omega(A)U^{-1} \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{67}$$

Como é costume identificar estruturas isomorficas, vamos chamar qualquer tripla $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ com as propriedades (i) e (ii) *a tripla-GNS* para ω.

Comprovante. Construimos primeiro o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. Seja

$$\mathcal{N}_\omega := \{A \in \mathcal{A} : \ \omega(A^*A) = 0\}. \tag{68}$$

Pela inigualdade de Cauchy-Schwarz (100), $\mathcal{N}_\omega$ coincede com o espaço

$$\mathcal{N}_\omega = \{A \in \mathcal{A} : \ \omega(B^*A) = 0 \ \forall B \in \mathcal{A}\}, \tag{69}$$

e então é um subespaço linear de $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{D}_\omega$ o espaço-quociente de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{N}_\omega$:

$$\mathcal{D}_\omega := \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega. \tag{70}$$

(Isso significa o seguinte. Em $\mathcal{A}$ definimos uma relação de equivalência "$\sim$" por

$$A \sim B \ :\Leftrightarrow \ A - B \in \mathcal{N}_\omega.$$

Dado $A \in \mathcal{A}$, o conjunto de todos B equivalente a A então é $A + \mathcal{N}_\omega$. Esse conjunto é chamada a *classe* de A com respeito à relação de equivalência $\sim$. O conjunto das classes tem uma estrutura linear pela definição

$$\alpha(A + \mathcal{N}_\omega) + \beta(B + \mathcal{N}_\omega) := (\alpha A + \beta B) + \mathcal{N}_\omega, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ A, B \in \mathcal{A}.$$

(Checkar que é bem-definido!) O espaço linear resultante é o chamado espaço-quociente $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$.) No seguinte, nos vamos denotar a classe $A + \mathcal{N}_\omega$ de A por $\hat{A}$. Em $\mathcal{D}_\omega$, definimos

$$(\,\hat{A}, \hat{B}\,) := \omega(B^*A). \tag{71}$$

(É bem-definido por causa da eq. (69).) Verifique-se que isso define um produto escalar em $\mathcal{D}_\omega$ (ver Definição 27). A completação de $\mathcal{D}_\omega$ com respeito à norma correspondente é o nosso espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. Nos queremos definir a representação π_ω nesse espaço por

$$\pi_\omega(A)\,\hat{B} := \widehat{AB}. \tag{72}$$

Para verificar se esse é bem-definido, temos que mostrar que $B \in \mathcal{N}_\omega$ implica $AB \in \mathcal{N}_\omega$ para todos $A \in \mathcal{A}$ ou seja, que $\mathcal{A}\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega$ (ou seja, que $\mathcal{N}_\omega$ é um ideal-esquerda em $\mathcal{A}$.) Para esse fim, lembramos que para qualquer $A \in \mathcal{A}$ vale

$$\|A^*A\|\mathbb{1} - A^*A \geq 0,$$

ver eq. (**??**). Então,

$$\omega\big((AB)^*AB\big) = \omega(B^*A^*AB) \leq \|A^*A\|\,\omega(B^*B),$$

que implica $\mathcal{A}\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega$. Entáo eq. (72) é bem-definido. Lembrando que $\|A^*A\| = \|A\|^2$, a equação encima tambem implica $\|\pi_\omega(A)\hat{B}\|^2 \le \|A\|^2\|B\|^2$, então $\pi_\omega(A)$ é um operador contínuo. Finalmente, verifique-se facilmente que π_ω é uma representação-$*$. Definido

$$\Omega_\omega := \hat{\mathbb{1}}\,,$$

verifique-se a equação (66), e tambem $\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega = \{A + \mathcal{N}_\omega,\ A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{D}_\omega$, o qual espaço é denso em $\mathcal{H}_\omega$ por construção.

Para comprovar a unicidade, seja $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ uma outra tripla com as propriedades (i) e (ii). Verifique-se que o operador U dado pela equação

$$U\pi_\omega(A)\Omega_\omega := \pi(A)\Omega$$

é bem definido, e satisfaz as propriedades afirmadas no teorema. □

Exemplo 22 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\psi \in \mathcal{H}_\omega$ com $\|\psi\| = 1$, $\omega(A) := (\psi, A\psi)$. Vamos mostrar que a representação GNS π_ω é equivalente à representação em $\mathcal{H}$, $\pi_\omega(A) = A$, com Ω_ω correspondendo a ψ.

Calculando $\mathcal{N}_\omega : \omega(A^*A) = (\psi, A^*A\psi) = \|A\psi\|^2 = 0 \Leftrightarrow A\psi = 0 \Rightarrow \mathcal{N}_\omega = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A\psi = 0\}$. Definimos uma aplicação $U : \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \to \mathcal{H}$ por $U(A + \mathcal{N}_\omega) := A\psi$.

Observe que $A + \mathcal{N}_\omega = 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{N}_\omega \Leftrightarrow A\psi = 0$, então U bem definido e injetivo. Ademais, $\mathcal{U}$ é sobrejetor porque cada vetor $\phi \in \mathcal{H}$ é da forma $\phi = A\psi$ para um $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. (E.g., $A\chi := (\psi, \chi)\phi$.) Como $(\hat{A}, \hat{B})_{\mathcal{H}_\omega} = \omega(A^*B) = (A\psi, B\psi) = (U\hat{A}, U\hat{B})$ (onde $\hat{A} := A + \mathcal{N}_\omega$), U também é isométrico. Isso implica que $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ já é completo (pois é isométrico a $\mathcal{H}$), por isso $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$, e $U : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}$ é um isomorfismo isométrico. Temos

$$U\Omega_\omega = U\hat{\mathbb{1}} = \mathbb{1}\,\psi = \psi \tag{73}$$

Finalmente, para $A, B \in \mathcal{A}$, $U\pi_\omega(A)\hat{B} = U(\hat{AB}) = AB\psi = AU\hat{B}$. Como todos os vetores em $\mathcal{H}_\omega$ ficam da forma $\hat{B}$, $B \in \mathcal{A}$, e U é bijetivo, vem:

$$U\pi_\omega(A)U^{-1} = A \tag{74}$$

Mostramos então que a representação GNS é, modulo a equivalência com U, a representação identica em $\mathcal{H}$, com Ω_ω correspondendo a ψ. □

Exemplo 23 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, ω(A)=Tr(ρA), onde ρ é uma matriz-densidade t.q. ω é misto. Seja:

$$\rho = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \quad P_1 + P_2 = \mathbb{1}\,,\ P_1P_2 = 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{75}$$

a decomposio espectral de ρ (como dim$\mathbb{C}^2 = 2$, só podem aparecer 2 projetores). A soma $\lambda_1 + \lambda_2$ é igual ao traço de ρ, então igual a 1. Se λ_1 ou λ_2 fosse igual a 0, ρ seria puro. Então, pela hipótese:

$$\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2. \tag{76}$$

Como $\rho \ge 0$, existe um $\kappa = \kappa^* \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ t.q. $\rho = \kappa^2$. Aqui, a raiz κ é dada por: $\kappa = \lambda_1^{1/2} P_1 + \lambda_2^{1/2} P_2$ (checar diretamente!). Agora calculamos $\mathcal{N}_\omega$. Como $Tr(AB) = Tr(BA)$, temos:

$$\omega(A^*A) = Tr(\kappa^2 A^*A) = Tr(\kappa A^*A\kappa) = Tr((A\kappa)^*A\kappa). \tag{77}$$

Como $Tr(C^*C) \equiv \sum_i \|C\phi_i\|^2$, $Tr(C^*C) = 0$ implica $C = 0$. Então, eq. (77) implica que $A \in \mathcal{N}_\omega \Leftrightarrow A\kappa = 0$. Mas κ é invertível ($\kappa^{-1} = \lambda^{-1/2}P_1 + \lambda^{-1/2}P_2$), então temos $\mathcal{N}_\omega = \{0\}$. Então, $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \equiv \mathcal{A}$ (já completo por que tem dimensão finita). Mesmo sendo $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{A}/\mathcal{N} = \mathcal{A}$, nós denotamos os elementos de $\mathcal{H}_\omega$ como $\hat{A}$ ao invés de A. Vamos calcular o produto escalar:

$$(\hat{A}, \hat{B})_{\mathcal{H}_\omega} = \omega(A^*B) = Tr((A\kappa^*)B\kappa) \tag{78}$$

Definindo $\mathcal{H} := \mathcal{A}$ com o produto escalar

$$(A, B)_{\mathcal{H}} := Tr(A^*B), \tag{79}$$

a eq. (78) mostra que a aplicação $U : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}$, $U\hat{A} := A\kappa$, bem definida e injetiva por que $\hat{A} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \Leftrightarrow A\kappa = 0$, é uma isometria. U é sobrejetivo também, pois κ é invertível. Observe que, $U\Omega_\omega = \kappa$. Finalmente, para $A, B \in \mathcal{A}$ vale

$$U\pi_\omega(A)\hat{B} = U(\widehat{AB}) = AB\kappa = AU\hat{B}, \tag{80}$$

então, $U\pi_\omega(A)I^{-1} = \pi(A)$, onde $\pi(A)$ denota multiplicação com A da esquerda. Então, a representção GNS é, módulo a equivalência com U, a multiplicação da esquerda em $\mathcal{H}$, com produto escalar denotado por (79), e com Ω_ω correspondendo à raiz de ρ.

Como ρ não é puro, segundo o Teorema (18) essa representação em $\mathcal{H}$ deve ser redutível, i.e., existe um subespço não-trivial invariante sobre $\mathcal{A}$. Na verdade, se E_1 e E_2 são quaisquer projetores ortogonais com $E_1 E_2 = 0$, os subespaços

$$\mathcal{H}_k := \pi(\mathcal{A})E_k \equiv \{AE_k, A \in \mathcal{A}\}, \tag{81}$$

$k = 1, 2$, são invariantes sobre $\mathcal{A}$ por definição, e $\neq 0$. Ademais, $\mathcal{H}_1$ é ortogonal a $\mathcal{H}_2$, por que

$$(\pi(A)E_1, \pi(B)E_2)_{\mathcal{H}} \equiv Tr(E_1A^*BE_2) = Tr(A^*BE_2E_1) = 0 \tag{82}$$

como $E_1E_2 = 0$ por hipótese. Isso implica que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

É interessante ver como o comprovante do teorema (18) funciona nesse exemplo segundo (75), escrevemos,

$$\omega = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 \tag{83}$$

com $\hat{\omega}_1(A) := \lambda_1 Tr(P_1A)$

Segundo o raciocínio no comprovante, deve existir um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ t.q. $\hat{\omega}_1(A^*B)$ coincide com $(T\pi(A)\kappa, \pi(B)\kappa)$. Na verdade, afirmamos que o projetor sobre o subespaço invariante $\mathcal{H}_1 := \mathcal{A}P_1$ serve. Esse projetor $P_{\mathcal{H}_1}$ é dado por

$$P_{\mathcal{H}_1}(A) := AP_1 \tag{84}$$

pois $P_{\mathcal{H}_1}^2 = P_{\mathcal{H}_1} = P_{\mathcal{H}_1}^*$ e $P_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}P_1 = \mathcal{H}_1$. Como $\kappa P_1 \equiv \lambda_1^{1/2}P_1^2 = \lambda_1^{1/2}P_1 = P_1\kappa$, temos:

$$\begin{aligned}(P_{\mathcal{H}_1}\pi(A)\kappa, \pi(B)\kappa)_{\mathcal{H}} &= (A\kappa P_1, B\kappa)_{\mathcal{H}} = Tr(P_1\kappa A^*B\kappa) = Tr(\kappa P_1\kappa A^*) \\ &= \lambda_1 Tr(P_1A^*) = \hat{\omega}_1(A^*B).\end{aligned}$$

(**Continuação:**)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \tag{85}$$

Particularmente $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são não-triviais ($\neq \{0\}, \mathcal{H}$), então as restrições,

$$\pi_i(A) := \pi(A)|_{\mathcal{H}_i}, \quad i = 1, 2,$$

definem duas sub-representações de π. A menor dimensão (:= dimensão do espaço de Hilbert correspondente) possível de uma representação é a de uma representação irredutível. Por isso, o Teorema 20 implica que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ tem dimensão 2, e que π_1 e π_2 são irredutíveis, e unitariamente equivalentes. É interessante ver como estes argumentos abstratos funcionam em nosso exemplo concreto.

Como $E_1E_2 = 0$, $E_1 + E_2 = \mathbb{1}$, existe uma matriz unitária V em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ t.q.

$$E_1 = V^{-1}E_2V. \tag{86}$$

(Seja φ_1, φ_2 uma ONB de $\mathbb{C}^2$ t.q. E_i é o projetor sobre φ_i, $i = 1, 2$. Então a aplicação $V_i : \varphi_1 \mapsto \varphi_2$, $\varphi_2 \mapsto \varphi_1$, serve). Definimos $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ via $UAE_1 := AV^{-1}E_2$. Verifique-se que ($\|\cdot\|$:= norma em $\mathcal{H}$!)

$$\begin{aligned}\|AE_1\|^2 &= (E_1, A^*AE_1) = \mathrm{Tr}(E_1^*A^*AE_1) = \mathrm{Tr}(A^*AV^{-1}E_2V)\\ &= \mathrm{Tr}((AV^{-1})^*AV^{-1}E_2) = \|AV^{-1}E_2\|^2.\end{aligned}$$

Então, U é bem definido e isométrico. Também é sobrejetivo, por que $\mathcal{A}V^{-1}E_2 \equiv \mathcal{A}E^2 \equiv \mathcal{H}_2$. Ademais, temos:

$$U\pi_1(A)\,BE_1 = UABE_1 = ABV^{-1}E_2 = \pi_2(A)BV^{-1}E_2 = \pi_2(A)U\,BE_1. \tag{87}$$

Então U implementa a equivalência das representações π_1 e π_2. □

3.4 Cadéia de Spins Infinita (continuação)

A álgebra $\mathcal{A}_0$ da eq. (39) tem uma norma com as propriedades (44) e (45): Seja $A \in \mathcal{A}_0$. Então existe um intervalo $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ finito t.q. $A \in \mathcal{A}(\Lambda)$. Mas $\mathcal{A}(\Lambda)$ é isomórfico a $\otimes_{x\in\Lambda}\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ e pode ser identificado (ver ...) com $\mathcal{B}(\otimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2)$. Então podemos definir a norma de A, $\|A\|$, pela norma de operadores em $\otimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$. O completamento de $\mathcal{A}_0$ com respeito a essa norma é uma álgebra C^*, que nós vamos denotar por $\mathcal{A}$. Chamamos $\mathcal{A}_0$ a álgebra de *observáveis locais*, e $\mathcal{A}$ a álgebra de observáveis *quase-locais*.

Estados em $\mathcal{A}$. Dadas duas álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ com estados ω_1 e ω_2, define-se o *estado-produto* $\omega_1 \otimes \omega_2$ por:

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(A \otimes B) := \omega_1(A)\omega_2(B), A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2 \tag{88}$$

Seja $(\mathcal{H}_i, \pi_i, \Omega_i)$ a tripla-GNS de ω_i, i=1,2. Então, $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \pi_1 \otimes \pi_2, \Omega_1 \otimes \Omega_2)$ é a tripla-GNS de $\omega_1 \otimes \omega_1$. Aqui, a representação $\pi_1 \otimes \pi_2$ é definida por:

$$(\pi_1 \otimes \pi_2) := \pi_1(A) \otimes \pi_2(B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \tag{89}$$

Exercício 24 a) Verifique que $\omega_1 \otimes \omega_2$ é bem definido por eq. (88)! b) Mostra que a tripla $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \pi_1 \otimes \pi_2, \Omega_1 \otimes \Omega_2)$ satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 21. c) Usa esse fato para comprovar a positividade de $\omega_1 \otimes \omega_2$.

Os estados-produtos não são todos estados em $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Se, por exemplo, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, a dimensão real do espaço de estados em cada fator $\mathcal{A}$ é $n^2 - 1$. (A dimensão do espaço das matrizes auto-adjuntas é $n^2/2$, então a dimensão real é n^2. A condição $Tr\rho = 1$ diminui a dimensão real por um.) Então, a dimensão do espaço de estados-produtos em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ é $(n^2 - 1)^2$, enquanto a dimensão do espaço de todos estados em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}^{n^2})$ é $n^4 - 1 > (n^2 - 1)^2$ (para $n > 1$).

Analogamente, definimos estados-produtos na algebra $\mathcal{A}$ da cadéia de spins infinita. Dada uma família $\omega_x, x \in \mathbb{Z}$, onde ω_x é um estado em $\mathcal{A}_x = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, nós definimos um estado-produto ω_Λ em $\mathcal{A}(\Lambda)$ por:

$$\omega_\Lambda := \otimes_{x \in \Lambda} \omega_x \tag{90}$$

Isso define um estado ω^∞ em $\mathcal{A}_0$:

$$\omega^\infty(A) := \omega_\Lambda(A) \quad \text{se } A \in \mathcal{A}(\Lambda). \tag{91}$$

(Temos que verificar se é bem definido. Se $\Lambda' \supset \Lambda$, então A também é em $\mathcal{A}(\Lambda')$. Mas a diferênia de considerar A como elemento de $\mathcal{A}(\Lambda')$ ou como elemento de $\mathcal{A}(\Lambda')$ é um produto de unidades que não altera o valor de ω^∞ em A.)

A Medidas de Probabilidade

B Elementos da Análise Funcional

Operador := Aplicação linear entre espaços lineares.
Funcional := Operador de um espaço linear sobre os numeros (complexos).

Notação. Dado um espaço linear U e um subespaço linear $U_0 \subset U$, nos vamos escrever

$$v + U_0 := \{v + u, \ u \in U_0\}. \tag{92}$$

etc.!!

B.1 Produto Tensorial

Definição 25 Sejam V_1, V_2 espaços lineares. Um espaço linear V é chamado o *produto tensorial* se existe uma aplicação bilinear $\otimes : V_1 \times V_2 \to V$, $v_1, v_2 \mapsto v_1 \otimes v_2$ tal que

$$(i) \qquad v_1 \otimes v_2 = w_1 \otimes w_2 \quad \text{se e somente se} \tag{93}$$

a) $\exists \alpha \neq 0$: $v_1 = \alpha w_1$ e $v_2 = \alpha^{-1} w_2$, ou b) $v_1 v_2 = 0$ e $w_1 w_2 = 0$, e

$$(ii) \qquad V = \{ \text{ Combinações lineares } \textit{finitos} \text{ da forma } v_1 \otimes v_2\}. \tag{94}$$

Tal espaço V é o unico (modulo isomorfimos), e denotado por $V_1 \otimes_0 V_2$. (O zero em $V_1 \otimes_0 V_2$ é $0 \otimes 0 = u \otimes 0 = 0 \otimes w$.)

Por causa da unicidade, o produto triplo $V_1 \otimes_0 (V_2 \otimes_0 V_3)$ é isomórfico a $(V_1 \otimes_0 V_2) \otimes_0 V_3$, etc. Isso permite a definição do produto n-fold (??)

$$\bigotimes_{i=1}^{n} V_i.$$

Se os espaços V_1, V_2 têm um produto escalar, então $V_1 \otimes_0 V_2$ tem o produto escalar definido por

$$(\, v_1 \otimes v_2, \omega_1 \otimes \omega_2 \,) := (\, v_1, w_1 \,)\, (\, v_2, w_2 \,).$$

No caso de espaços de Hilbert, $V_i = \mathcal{H}_i$, a completação de $\mathcal{H}_1 \otimes_0 \mathcal{H}_2$ é chamado o produto tensorial de Hilbert, denotado por $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Se $\{\phi^i_\nu,\, \nu \in I^i\}$ é uma base orthonormal em $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, então $\{\phi^1_\nu \otimes \phi^2_\mu,\, (\nu, \mu) \in I^1 \times I^2\}$ é uma base orthonormal em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ são álgebras (-*), $\mathcal{A}_1 \otimes_0 \mathcal{A}_2$ é uma álgebra (-*) via

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) := A_1 B_1 \otimes A_2 B_2, \quad (A_1 \otimes A_2)^* := A_1^* \otimes A_2^*.$$

As álgebras $\mathcal{A}_i$ podem ser identificadas com sub-algebras do produto tensorial via

$$\mathcal{A}_1 \ni A \mapsto A(1) := A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}_2}, \quad \mathcal{A}_2 \ni B \mapsto B(2) := \mathbb{1}_{\mathcal{A}_1} \otimes B.$$

Observa que $[A(1), B(2)] = 0$.

Se $\mathcal{A}_i$ é uma algebra de operadores em $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, então $\mathcal{A}_1 \otimes_0 \mathcal{A}_2$ tem uma representação como operadores em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$:

$$(A_1 \otimes A_2)\, (\psi_1 \otimes \psi_2) := A_1 \psi_1 \otimes A_2 \psi_2.$$

B.2 Espaços de Hilbert

Lemma 26 *Sejam X e Y espaços lineares normados, e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. São equivalentes:*

i) T é contínuo;

ii) T é contínuo no ponto 0;

iii) Existe $M > 0$ tal que para todos $x \in X$ vale

$$\|Tx\| \leq M\, \|x\|.$$

Se T é contínuo, a *norma* $\|T\|$ de T é definido como

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{95}$$

Definição 27 Seja $\mathcal{H}$ um espaço linear. Uma *forma sesquilinear* é uma applicação $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\psi, \phi \mapsto (\, \psi, \phi \,)$ antilinear e linear no primeiro e segundo argumento, respetivamente. Ela é chamado de *positivo semidefinido* sse

$$(\, \psi, \psi \,) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \tag{96}$$

e de *positivo definido* sse na inigualdade encima vale igualdade "=" somente se $\psi = 0$. Tal forma é chamada de *produto escalar* em $\mathcal{H}$. Um espaço linear com um produto escalar é chamado de um *espaço de Hilbert* sse ele é completo com respeito a norma

$$\|\psi\| := \sqrt{(\,\psi, \psi\,)}. \tag{97}$$

Observa que eq. (96) implica

$$(\,\phi, \psi\,) = \overline{(\,\psi, \phi\,)} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Pythagoras, Bessel e Cauchy-Schwarz. Um *projetor* é um operador P com $P^2 = P$. ($P^2 := P \circ P$.) Um projetor *orthogonal* é um projetor auto-adjunto. Seja P tal projetor, e $\mathcal{H}_0$ a sua imagem, $\mathcal{H}_0 := P\mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}_0$ é um subespaço fechado, onde P age como a identidade. Em seu complemento orthogonal, definido por

$$(\mathcal{H}_0)^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} : \ (\,\phi, \psi\,) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{H}_0\},$$

P age como o operador zero. Conversamente, seja $\mathcal{H}_0$ um sub-esaço fechado. Então vale o seguinte importante fato: Cada $\psi \in \mathcal{H}$ tem uma *unica* decomposição

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad \text{onde } \ \psi_0 \in \mathcal{H}_0 \ \text{ e } \ \psi_1 \in (\mathcal{H}_0)^\perp.$$

A applicação $\psi \mapsto \psi_0$, então, define um operador P que é um projetor orthogonal com imagem $\mathcal{H}_0$. Esse projetor é chamado do projetor *sobre* $\mathcal{H}_0$. (O projetor sobre $(\mathcal{H}_0)^\perp$, então, é dado por $\mathbb{1} - P$.) Assim, existe uma correspondência 1:1 de subespaços fechados de $\mathcal{H}$ e projetores orthogonais.

Seja $\{\varphi_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ um sistema orthonormal (não completo) em $\mathcal{H}$, i.e. $(\,\varphi_i, \varphi_j\,) = \delta_{i,j}$, e seja $\mathcal{H}_n$ o *span* desse conjunto, i.e. o espaço de combinações lineares $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$. Então o projetor sobre $\mathcal{H}_n$ é dado por

$$P_n \psi = \sum_{i=1}^n (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i.$$

Dado qualquer $\psi \in \mathcal{H}$, a mencionada decomposição de ψ com respeito a $\mathcal{H}_n$ é dado por $\psi = P_n\psi + (\mathbb{1} - P)\psi$. Em paericular, esses dois termos são orthogonais. Isso implica o **Teorema de Pythagoras**:

$$\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^n |(\,\varphi_i, \psi\,)|^2 \ + \ \|\psi - \sum_{i=1}^n (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i\|^2. \tag{98}$$

Como consequência, vale a **Inigualdade de Bessel**:

$$\sum_{i=1}^n |(\,\varphi_i, \psi\,)|^2 \leq \|\psi\|^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{99}$$

Esse inigualdade implica a inigualdade de Cauchy e Schwarz:

Teorema 28 (Cauchy-Schwarz) *Para qualquer ψ, ϕ in $\mathcal{H}$ vale*

$$|(\,\phi, \psi\,)| \leq \|\phi\| \ \|\psi\|. \tag{100}$$

Comprovante. Se $\phi = 0$, a inigualdade é trivial. Então, seja $\phi \neq 0$. Neste caso, $\phi/\|\phi\|$ é um sistema orthonormal, e a inigualdade de Bessel (99) implica

$$\|\phi\|^{-1}\,(\,\phi,\psi\,)| \leq \|\psi\|,$$

que dá (100). □

Lemma 29 (Riesz) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ um funcional contínuo. Então existe um vetor (único) ϕ_F t.q.*

$$F(\psi) = (\,\phi_F, \psi\,) \quad \textit{para todos } \psi \in \mathcal{H}. \tag{101}$$

Comprovante. Seja $\mathcal{N}_F := \{\psi \in \mathcal{H} : F(\psi) = 0\}$. Isso é um subespaço linear, e fechado (como F é contínuo). Se $\mathcal{N}_F$ for o espaço $\mathcal{H}$ inteiro, então $F = 0$ e nós podemos pôr $\Phi_F := 0$. Seja então $\mathcal{N}_F \subset \mathcal{H}$. Como $\mathcal{N}_F$ é fechado, $\mathcal{N}_F$ também não é denso em $\mathcal{H}$. Por isso o complemento ortogonal, $\mathcal{N}_F^{\perp}$, de $\mathcal{N}_F$ e não-trivial (é maior do que $\{0\}$). Vamos pegar qualquer $\chi \neq 0$ em $\mathcal{N}_F$. Verifique-se que o vetor $F(\chi)\psi - F(\psi)\chi$ é em $\mathcal{N}_F$ para cada $\psi \in \mathcal{H}$, então ortogonal a χ. Então $F(\chi)(\chi,\psi) = F(\psi)\|\chi\|^2$. Isso implica que o vetor

$$\phi_F := \frac{\overline{F(\chi)}}{\|\chi\|^2}\,\chi \tag{102}$$

satisfaz a eq. (101). □

Lemma 30 *Seja $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$ um subespaco linear denso. Então*

$$\|\psi\| = \sup_{\phi\in\mathcal{D},\phi\neq 0} \frac{|(\,\phi,\psi\,)|}{\|\phi\|}.$$

B.3 Operadores Auto-Adjuntos

References

[1] J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press 1993. [530.145=20 BEL]

[2] Braginsky, Khalili, *Quantum Measurement*, Cambridge University Press 1992.

[3] O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Statistical Mechanics I, New York: Springer 1979.

[4] O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Statistical Mechanics II, New York: Springer 1981.

[5] G. E. Emch, *Mathematicaland Conceptual Foundations of* 20^{th} *Century Physics*, Amsterdam: North-Holland 1984. (Chapter 9.)

[6] G. E. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Field Theory*, New York: Wiley 1972.

[7] B. D'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Massachusetts 1976.

[8] K. Fredenhagen, *Superselection Sectors*, Notas de Aula, Hamburg 1994/95. http://unith.desy.de/research/aqft/lecturenotes/index_eng.html

[9] R. Haag, *Local Quantum Physics*, Berlin: Springer 1996 (2nd ed).

[10] K. Hepp, Helv. Phys. Acta **45** (1972) 237-248.

[11] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York 1974. [530.145=20 JAM]

[12] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory* (Lecture Notes in Physics, vol. 190), Springer 1983.

[13] N. P. Landsman, *Algebraic Theory of Superselection Sectors and the Measurement Problem in Quantum Mechanics*, Int. J. Mod. Phys. **A6** (1990) 5349 – 5371.

[14] H. Primas, *Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism* (Lecture Notes in Chemistry, Vo. 24), Springer 1981.

[15] G. L. Sewell, *Quantum Theory of Collective Phenomena*, Oxford Science Publ., Clarendon Press 1989.

[16] Sudbery, *Quantum Mechanics....*

[17] W. Thirring, *A Course in Mathematical Physics, Vol. 3: Quantum Mechanics*, Heidelberg: Springer 1981.

[18] W. Thirring, *A Course in Mathematical Physics, Vol. 4: Quantum Mechanics of Large Systems*, Heidelberg: Springer 1981.