

CAPÍTULO 9 – MECÂNICA QUÂNTICA I – FUNÇÕES DE ONDA

(*) Capítulo 40 do Livro Texto

9ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1 - Exercícios

1.1 - Funções de onda e a equação unidimensional de Schrödinger

1- (Exercício 1 – Livro Texto) Um elétron está se movendo como uma partícula livre na direção do eixo x com momento que tem magnitude $4,50 \times 10^{-24} \text{ kgm/s}$. Qual é a função de onda unidimensional dependente do tempo do elétron?

2- (Exercício 2a – Livro Texto) Uma partícula livre movendo-se em uma dimensão possui a função de onda

$$\Psi(x, t) = A[e^{i(kx-\omega t)} - e^{i(2kx-4\omega t)}]$$

onde k e v são constantes reais positivas. Em $t = 0$, quais são os dois menores valores positivos de x para os quais a função da probabilidade $|\Psi(x, t)|^2$ é um máximo?

3- (Exercício 5 – Livro Texto) Considere uma função de onda dada por $\psi(x) = A \sin kx$, onde $k = 2\pi/\lambda$ e A é uma constante real. (a) Para que valores de x existe a maior probabilidade de encontrar a partícula descrita por essa função de onda? Explique. (b) Para que valores de x a probabilidade é zero? Explique.

4- (Exercício 6 – Livro Texto) Calcule $|\Psi|^2$ para $\Psi = \psi \sin \omega t$, onde ψ é independente do tempo e ω é uma constante real. Trata-se de uma função de onda para um estado estacionário? Justifique sua resposta.

5- (Exercício 7 – Livro Texto) Sejam ψ_1 e ψ_2 duas soluções da equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

com energias E_1 e E_2 , respectivamente, onde $E_1 \neq E_2$. Uma solução para a poderia ser $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$, onde A e B são constantes diferentes de zero? Explique sua resposta.

1.2 - Partícula em uma caixa

6- (Exercício 8 – Livro Texto) Uma partícula se movendo em uma dimensão (eixo x) é descrita pela função de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-bx} & , \quad x \geq 0 \\ Ae^{bx} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

onde $b = 2,00 \text{ m}^{-1}$, $A > 0$, e os pontos no eixo x ficam à direita. (a) Determine A de modo que a função de onda seja normalizada. (b) Desenhe o gráfico da função de onda. (c) Determine a probabilidade de encontrar essa partícula no lado esquerdo da origem e (d) entre $x = 0,500 \text{ m}$ e $x = 1,00 \text{ m}$.

7- (Exercício 10 – Livro Texto) Um próton está em uma caixa de largura L . Qual deve ser a largura da caixa para que a energia do nível fundamental seja igual a $5,0 \text{ MeV}$, valor típico para a energia de ligação de partículas no interior de um núcleo? Compare o resultado com o tamanho de um núcleo, que é da ordem de 10^{-14} m .

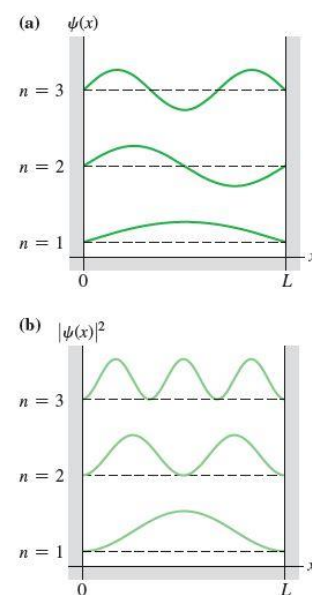
8- (Exercício 13 – Livro Texto) É necessário fornecer $3,0 \text{ eV}$ de energia a um átomo para excitar um elétron do nível fundamental até o primeiro nível excitado. Considere o átomo um elétron em uma caixa e calcule a largura L da caixa.

9- (Exercício 14 – Livro Texto) Um elétron em uma caixa unidimensional possui a energia de seu nível fundamental igual a $2,0 \text{ eV}$. Qual é o comprimento de onda do fóton absorvido quando o elétron faz a transição até o segundo nível excitado?

10- (Exercício 16 – Livro Texto) Lembre-se de que $|\psi|^2 dx$ a probabilidade de encontrar uma partícula com uma função de onda normalizada $\psi(x)$ no intervalo entre x e $x + dx$. Considere uma partícula no interior de uma caixa com paredes rígidas em $x = 0$ e $x = L$. Suponha que a partícula esteja no nível fundamental e use ψ_n conforme indicado abaixo

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

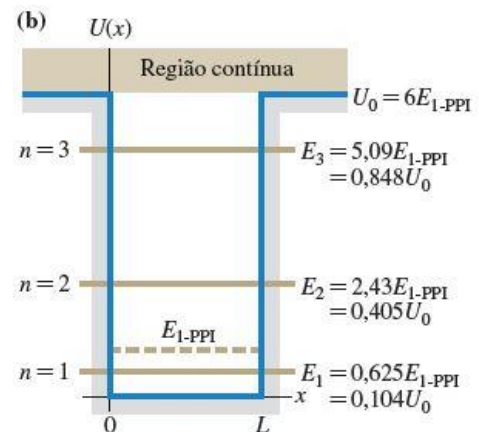
(a) Para quais valores de x , caso existam, no intervalo de 0 até L , a probabilidade de encontrar a partícula é igual a zero? (b) Para que valores de x a probabilidade atinge seu valor máximo? (c) Suas respostas aos itens (a) e (b) estão de acordo com a Figura ao lado? Explique.



11- (Exercício 19 – Livro Texto) Um elétron está em uma caixa de largura igual a $3,0 \times 10^{-10} \text{ m}$. Qual é o comprimento de onda de De Broglie e qual é o módulo do momento linear do elétron quando ele está no: (a) nível $n = 1$? (b) nível $n = 2$? (c) nível $n = 3$? Em cada caso, como o comprimento de onda se compara com a largura da caixa?

1.3 - Poços de potencial Finito

12- (Exercício 21 – Livro Texto) Um elétron está confinado em um poço quadrado de profundidade $U_0 = 6E_{1PPI}$. Qual é a largura do poço se o seu estado fundamental de energia é $2,00 \text{ eV}$? Use a Figura ao lado para resolver a questão.

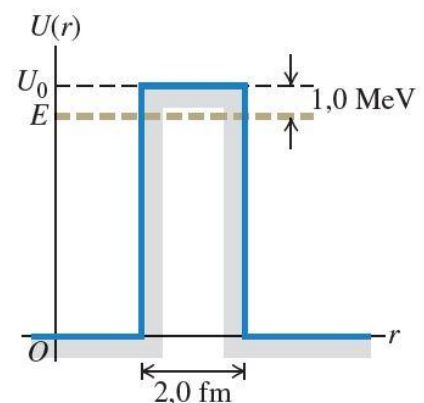


13- (Exercício 23 – Livro Texto) Um elétron está confinado em um poço quadrado de largura de $1,50 \text{ nm}$ e profundidade $U_0 = 6E_{1PPI}$. Se o elétron está inicialmente no nível fundamental e absorve um fóton, qual é o comprimento de onda máximo do fóton para que o elétron seja liberado do poço?

14- (Exercício 25 – Livro Texto) Um próton está confinado em um poço quadrado de largura de $4,0 \text{ fm} = 4,0 \times 10^{-15} \text{ m}$. A profundidade do poço é igual a seis vezes o valor da energia do nível fundamental E_{1PPI} do poço infinito correspondente. Se o próton faz uma transição do nível com energia E_1 para o nível com energia E_3 , absorvendo um fóton, qual o comprimento de onda do fóton?

1.4 - Barreira de potencial e tunelamento

15- (Exercício 27 – Livro Texto) (a) Um elétron com energia cinética inicial igual a 32 V colide com uma barreira quadrada com 41 eV de altura e $0,25 \text{ nm}$ de largura. Qual é a probabilidade do tunelamento do elétron através dessa barreira? (b) Um próton com a mesma energia cinética colide com a mesma barreira. Qual é a probabilidade de tunelamento do próton através dessa barreira?



16- (Exercício 28 – Livro Texto) **Decaimento alfa.** Em um modelo simples de núcleo radioativo, uma partícula alfa ($m = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$) está presa em uma barreira quadrada com altura igual a $30,0 \text{ MeV}$ e largura de $2,0 \text{ fm}$. (a) Qual é a probabilidade de tunelamento se a partícula alfa colide com a barreira com uma energia cinética $1,0 \text{ MeV}$ abaixo do topo da barreira (Figura ao lado)? (b) Qual é a probabilidade de tunelamento se a energia cinética da partícula alfa está $10,0 \text{ MeV}$ abaixo do topo da barreira?

17- (Exercício 32 – Livro Texto) Um próton com energia cinética inicial igual a $50,0 \text{ eV}$ encontra uma barreira de $70,0 \text{ eV}$ de altura. Qual é a largura da barreira se a probabilidade de tunelamento é $8,0 \times 10^{-3}$? Como isso se compara com a largura da barreira para um elétron com a mesma energia tunelando por uma barreira de mesma altura com a mesma probabilidade?

1.5 - O oscilador harmônico

18- (Exercício 33 – Livro Texto) Um bloco de madeira com massa igual a $0,250 \text{ kg}$ oscila na extremidade de uma mola cuja constante é igual a 110 N/m . Calcule a energia do nível fundamental e a diferença de energia entre dois níveis adjacentes. Expresse sua resposta em joules e em elétrons-volt. Os efeitos quânticos são importantes?

19- (Exercício 36 – Livro Texto) Um oscilador harmônico absorve um fóton de $6,35 \mu\text{m}$ de comprimento de onda quando passa por uma transição do estado fundamental para o primeiro nível excitado. Qual é a energia do estado fundamental, em elétrons-volt, do oscilador?

2 - Problemas

20- (Exercício 43 – Livro Texto) Uma partícula de massa m em uma caixa unidimensional possui a seguinte função de onda na região de $x = 0$ a $x = L$:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3 e^{-iE_3 t/\hbar}$$

Aqui $\psi_1(x)$ e $\psi_3(x)$ são as funções de onda normalizadas em estado estacionário para os níveis $n = 1$ e $n = 3$ e E_1 e E_3 são as energias nesses níveis. A função de onda vale zero para $x < 0$ e para $x > L$. (a) Encontre o valor da função de distribuição de probabilidade em $x = L/2$ como uma função do tempo. (b) Encontre a frequência angular na qual a função de distribuição de probabilidade oscila.

21- (Exercício 47 – Livro Texto) **Fóton em um laser de corante.** Um elétron em uma longa molécula orgânica usada em um laser de corante se comporta aproximadamente como uma partícula em uma caixa de $4,18 \text{ nm}$ de largura. Qual é o comprimento de onda do fóton emitido quando o elétron sofre uma transição (a) do primeiro nível excitado para o nível fundamental? (b) Do segundo nível excitado para o primeiro nível?

22- (Exercício 48 – Livro Texto) Considere uma partícula em uma caixa com paredes rígidas entre $x = 0$ até $x = L$. A partícula está no nível fundamental. Calcule a probabilidade $|\psi|^2 dx$ de a partícula ser encontrada no intervalo entre x e $x + dx$ para (a) $x = L/4$; (b) $x = L/2$; (c) $x = 3L/4$.

23- (Exercício 54 – Livro Texto) Um elétron com energia cinética inicial igual a $5,5 \text{ eV}$ colide com uma barreira de potencial quadrado com altura igual a $10,0 \text{ eV}$. Qual a largura da barreira quando a probabilidade de tunelamento do elétron através da barreira é igual a $0,50\%$?

24- (Exercício 56 – Livro Texto) Um oscilador harmônico é constituído por um corpo de massa $0,020 \text{ kg}$ ligado a uma mola. Sua frequência é $1,50 \text{ Hz}$, e a velocidade do corpo quando ele passa em sua posição de equilíbrio é $0,480 \text{ m/s}$. (a) Qual é o valor do número quântico n para seu nível de energia? (b) Qual é a diferença entre os níveis E_n e E_{n+1} ? Essa diferença pode ser medida?