

Circuito RLC (Prova 2)

2016-08-21

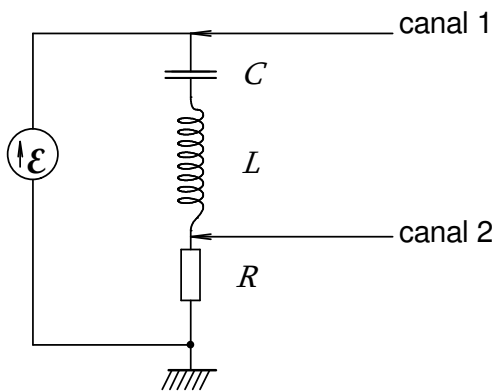


Fig. 1 Circuito usado

Tarefas:

1) Monte o circuito da figura 1 usando o gerador de funções com sinais harmônicos como força eletromotriz. Use um resistor de $500\ \Omega$, um capacitor de $0,47\ \mu\text{F}$ e um indutor de $2,25\ \text{mH}$.

2) Injete sinais harmônicos no circuito com amplitude pico a pico de $3,00\ \text{V}$ e com frequências (ou períodos) dados na tabela:

f [kHz]	T [μs]	Δt [μs]	$\varphi =$ $2\pi \frac{\Delta t}{T}$	$\text{tg}(\varphi)$	$1/T^2$ [s^{-2}]	$T^{-1}\text{tg}(\varphi)$ [s^{-1}]	$V_{2_{p-p}}$ [V]
24,0	41,7						
12,0	83,3						
6,00	166						
		0					
2,00	500						
1,00	1000						

Meça a defasagem entre canal 1 e 2 e as amplitudes pico a pico do canal 2. Para a determinação da defasagem use a ferramenta cursor temporal. Atenção! O osciloscópio informa apenas o módulo de Δt . Você deve prestar atenção na mudança de sinal da defasagem. A determinação da defasagem requer que você ajuste o fator de escala do tempo assim como da voltagem do canal 2 sempre para garantir boa visibilidade das curvas. A voltagem do canal 2 pico a pico pode ser observada com a ferramenta “measure”. Preste atenção de manter a amplitude do canal 1 constante.

Recomendações: (a) Use o recurso “Run/Stop” em cada frequência escolhida para congelar os dados captados pelo osciloscópio. Isto garante que as medidas da defasagem podem ser feitas com calma sem ter o perigo de a frequência mudar durante a medida.

(b) Escolhe uma escala de tempo de tal forma que apareçam somente dois máximos de cada canal na tela do osciloscópio.

3) Na quarta linha das frequências, aquela que não tem especificação de valor na tabela, você deve determinar a frequência ou período tal que a defasagem entre os canais seja zero. Use para este propósito o método de Lissajous (modo x-y; veja Anexo II).

4) Elabore um gráfico que mostre $1/T^2$ no eixo horizontal e $T^{-1}\text{tg}(\varphi)$ no eixo vertical. Verifique se a previsão teórica a respeito deste tipo de gráfico é compatível com as observações e determine os valores de C e L a partir dos parâmetros de uma reta ajustada nos pontos experimentais (compare Anexo). Avalie a incerteza experimental destes valores. Julgue se os valores obtidos para C e L são compatíveis com os valores nominais $C_{\text{nominal}} = 0,47\ \mu\text{F} \pm 5\%$ e $L_{\text{nominal}} = 2,25\ \text{mH} \pm 5\%$. Comente sobre o comportamento das amplitudes do canal 2.

Anexo I Circuito LCR

A lei das malhas do circuito da figura 1 é

$$-\mathcal{E} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = -L \frac{dI}{dt} \quad (1.1)$$

Nesta fórmula, supomos uma FEM da forma $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

Como nos casos dos circuitos RC e RL, usaremos o método dos números complexos para achar a solução estacionária (compare roteiro A 10).

$$-\hat{\mathcal{E}} + R\hat{I} + \frac{1}{C} \int \hat{I} dt = -L \frac{d\hat{I}}{dt} \quad (1.2)$$

com

$$\hat{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\{i\omega t + i\alpha\} \quad (1.3)$$

Para a solução estacionária faremos a tentativa

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \exp\{i\omega t + i\alpha\} \quad (1.4)$$

Inserindo esta tentativa na equação (1.2) obtemos

$$R\hat{I}_0 + \frac{\hat{I}_0}{i\omega C} + i\omega L\hat{I}_0 = \mathcal{E}_0 \quad (1.5)$$

Então a amplitude complexa da corrente vale

$$\hat{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L} \quad (1.6)$$

A corrente verdadeira é a parte real de $\hat{I}(t)$. Isto fornece o resultado

$$\left. \begin{aligned} I(t) &= I_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi) \quad \text{com} \\ I_0 &= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \quad \text{e} \\ \varphi &= \arctg\left(\frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

De acordo com este resultado devemos encontrar a seguinte relação entre tangente do ângulo de defasagem e frequência angular:

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R} \quad (1.8)$$

Seria difícil verificar esta previsão com um gráfico que mostra φ ou $\text{tg}(\varphi)$ em função de ω . Vamos gerar uma relação afim ($y = A + Bx$) da relação (1.8). Isto pode ser feito multiplicando com ω :

$$\omega \text{tg}(\varphi) = \frac{1}{RC} - \frac{L}{R} \omega^2 \quad (1.9)$$

Ou, podemos ainda dividir por 2π :

$$\underbrace{T^{-1}tg(\varphi)}_{=y} = \frac{1}{\underbrace{2\pi RC}_{=A}} - \frac{2\pi L}{\underbrace{R}_{=B}} \underbrace{\left(\frac{1}{T}\right)^2}_{=x} \quad (1.10)$$

Com $x = \left(\frac{1}{T}\right)^2$ e $y = T^{-1}tg(\varphi)$ temos uma relação afim. O intercepto A e a inclinação B da reta permitem determinar os valores de C e L se supormos o valor de R como conhecido.

Anexo II O método de Lissajous

O método de Lissajous¹ permite comparar duas oscilações. Neste método a correlação dos sinais das duas oscilações é mostrada num plano x - y . Suponhamos duas oscilações harmônicas

$$\begin{aligned} V_1(t) &= a \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ V_2(t) &= b \cos(\omega_2 t + \alpha + \varphi) \end{aligned} \quad (1.11).$$

Associando pontos no plano x - y com coordenadas $x(t) = V_1(t)$ e $y(t) = V_2(t)$ obtemos uma curva no plano. Somente se as frequências ω_1 e ω_2 tiverem uma razão racional esta curva seria uma curva finita e fechada. A forma da curva permite determinar o quociente ω_1 / ω_2 . No caso de frequências iguais pode-se usar a curva para determinar a fase relativa das oscilações. Trataremos aqui este caso; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Primeiramente mostraremos que a curva formada é uma elipse. Isto é mais fácil, se introduzirmos novas coordenadas normalizadas

$$\hat{x} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x}{a} = \cos\left(\psi - \frac{\varphi}{2}\right) \quad e \quad \hat{y} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{y}{b} = \cos\left(\psi + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1.12),$$

onde $\psi = \omega t + \frac{\varphi}{2}$. Com as fórmulas trigonométricas obtemos

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \cos(\psi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \text{sen}(\psi) \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ e \\ \hat{y} &= \cos(\psi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \text{sen}(\psi) \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.13).$$

Esta representação das oscilações sugere mais uma mudança de coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{\hat{x} + \hat{y}}{2} = \cos(\psi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \eta &= \frac{\hat{x} - \hat{y}}{2} = \text{sen}(\psi) \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Destas equações obtemos imediatamente uma equação de uma elipse:

$$\frac{\zeta^2}{(\cos(\varphi/2))^2} + \frac{\eta^2}{(\text{sen}(\varphi/2))^2} = 1 \quad (1.15)$$

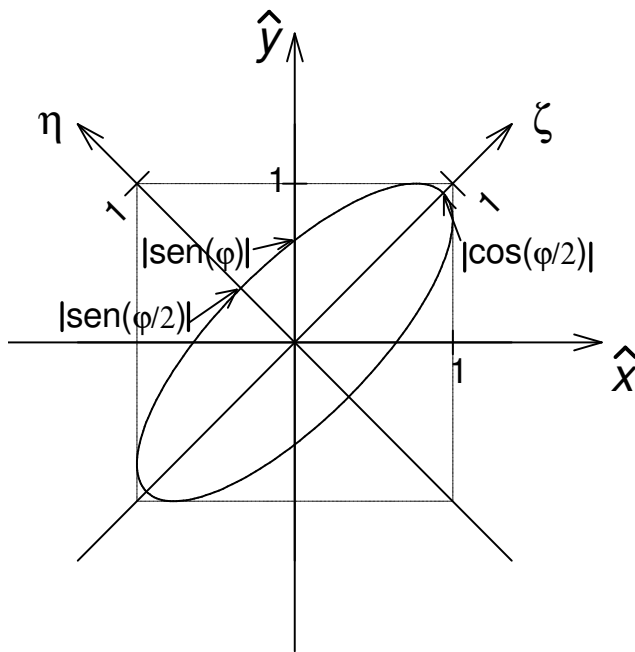
¹ Jules Antoine Lissajous (1822 – 1880) Matemático Francês

com semieixos $|\cos(\varphi/2)|$ e $|\sin(\varphi/2)|$. É conveniente calcular o ponto de intercepto com o eixo \hat{y} . Da equação (1.15) obtemos a altura do ponto de interceptação da elipse com o eixo \hat{y} botando $\hat{x} = 0$.

$$\frac{[(0 + \hat{y})/2]^2}{(\cos(\varphi/2))^2} + \frac{[(0 - \hat{y})/2]^2}{(\sin(\varphi/2))^2} = 1 \quad (1.16)$$

ou

$$\hat{y}^2 = \frac{4[\cos(\varphi/2)\sin(\varphi/2)]^2}{(\cos(\varphi/2))^2 + (\sin(\varphi/2))^2} = (\sin(\varphi))^2 \quad (1.17)$$



A Figura 2 mostra a curva do plano \hat{x} - \hat{y} . No plano x - y a figura está simplesmente esticada ou comprimida nos sentidos vertical ou horizontal. A elipse seria inscrita num retângulo de lados $2a$ e $2b$ e a razão do intercepto com o eixo y e b vale $|\sin(\varphi)|$ como mostra a figura 3.

Fig. 2 Figura de Lissajous de duas oscilações normalizadas com a mesma frequência e defasagem φ .

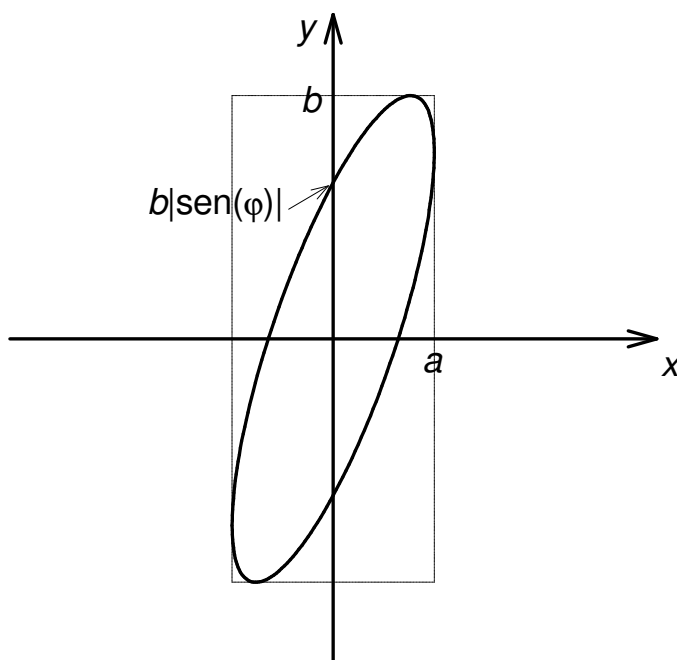


Fig. 3 Figura de Lissajous de duas oscilações com a mesma frequência e defasagem φ .

Com a determinação da amplitude b e do intercepto temos um método alternativo para a determinação da fase relativa das oscilações. Especialmente fácil fica a procura da frequência que resulta numa defasagem zero. Na defasagem zero a elipse degenera e se transforma numa linha reta. Vocês devem usar este método para a tarefa 3.

No caso de oscilações com frequências desiguais com razão racional as figuras de Lissajous são mais complicadas. A figura 4 mostra exemplos de duas oscilações

$$\begin{aligned} V_1(t) &= A \cos(\omega_1 t) \\ V_2(t) &= A \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.18).$$

Se a razão das frequências for irracional a figura não seria fechada e encheria um retângulo densamente. Mas, no osciloscópio esta curva é desenhada e isto é um processo que ocorre no tempo. Não vemos o resultado final, mas a nossa visão acompanha este processo. O nosso cérebro interpreta o que aparece na tela do osciloscópio como uma das figuras com razão de frequência racional que se move lentamente. Isto significa que o cérebro transforma um pequeno desvio de uma razão racional numa fase variável:

$$\omega_2 = \frac{n}{m} \omega_1 + \delta \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi_0 + t\delta \quad (1.19)$$

Fig. 4 Exemplos de figuras de Lissajous para frequências com razões 1/2, 1/3, e 2/3.

