

# Modelos de Previsão

## 1. Introdução

Em tomada de decisão é bastante comum tratar problemas cujas decisões a serem tomadas são funções de fatos futuros. Assim, os dados descrevendo a situação de decisão precisam ser representativos do que ocorre no futuro. Em controle de estoques, por exemplo, as decisões são baseadas de acordo com a demanda para o item controlado durante um horizonte de planejamento específico. Em planejamento financeiro, faz-se necessário prever o padrão do fluxo de dinheiro em relação ao tempo.

## 2. Séries Temporais

A maioria dos métodos de previsão estatística é baseada na utilização dos dados históricos a partir de uma **série de tempo** ou **série temporal**.

Uma série de tempo é uma série de observações de alguma quantidade de interesse (uma variável aleatória) em relação ao tempo. Assim, se  $X_i$  é uma variável aleatória de interesse no tempo  $i$ , e se observações são tomadas nos tempos  $i = 1, 2, \dots, t$ , então os valores observados  $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_t = x_t\}$  são uma série de tempo.

O gráfico abaixo mostra um exemplo das vendas (em unidades vendidas) mensais de um produto.

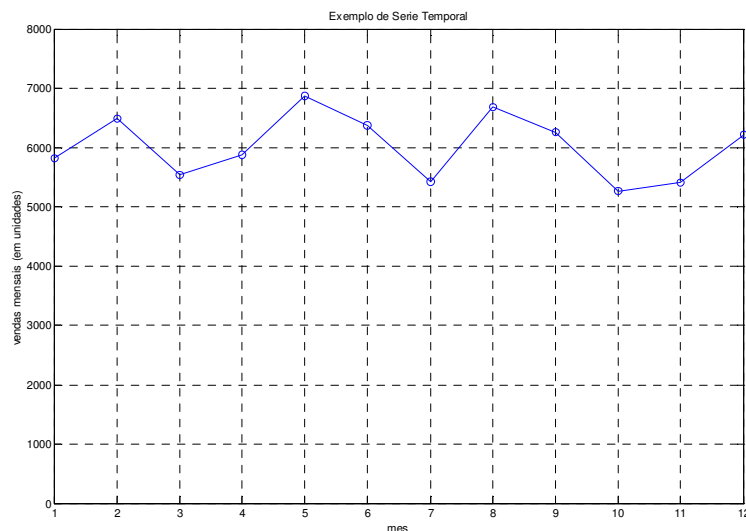


Figura 1 - Exemplo de Série Temporal.

Porque uma série temporal é uma descrição do passado, um procedimento lógico para realizar previsões é fazer uso desses dados históricos. Se os dados passados são indicativos do que se esperar no futuro, pode-se então postular um modelo matemático que é representativo do processo. O modelo pode então ser usado para gerar previsões.

Em situações reais, geralmente não se tem conhecimento da forma exata do modelo que gera a série temporal, com isso, faz-se necessário escolher um modelo aproximado. Frequentemente, a escolha é feita observando os padrões de uma série temporal. Alguns padrões típicos são:

- a. Série de tempo é gerada por um processo com valor constante superposto a flutuações aleatórias.
- b. Série de tempo é gerada por um processo linear superposto a flutuações aleatórias.
- c. Série de tempo é gerada por um processo com valor constante superposto a variações sazonais e flutuações aleatórias.

A figura abaixo, mostra exemplos gráficos dos padrões típicos a, b e c.

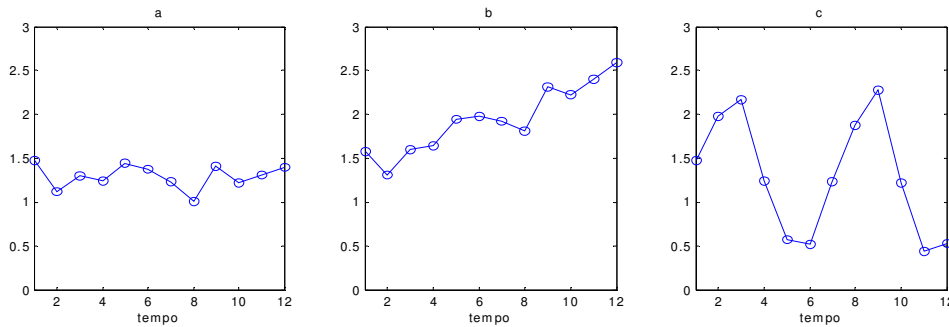


Figura 2 - Padrões Típicos de Séries Temporais.

### 3. Métodos de Previsão para Modelos com Valor Constante

A representação matemática para uma série temporal com valor constante superposta a flutuações aleatórias pode ser dada por:

$$X_t = k + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

onde:

$X_t$  é uma variável aleatória observada no tempo  $t$ ;

$k$  é o valor constante do modelo;

$e_t$  é o erro aleatório ocorrido no tempo  $t$  (geralmente assumido ter valor esperado igual a zero e variância constante).

Seja  $F_{t+1}$  a previsão do valor da série temporal no tempo  $t + 1$ , dado os valores observados  $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_t = x_t\}$ .

### 3.1 Método de Previsão de Média Móvel

Este método usa os  $n$  últimos valores da série temporal  $x_t$ , como a previsão para o tempo  $t + 1$ . Portanto:

$$F_{t+1} = \sum_{i=t-n+1}^t \frac{x_i}{n} \tag{1}$$

Este método é conhecido como **Estimador de Média Móvel**.

Exemplo:  $x_t$  representa o volume de vendas mensais. O valor  $F_{t+1}$  representa o volume previsto de venda para o mês seguinte baseado no volume de vendas dos  $n$  últimos meses.

A seguinte tabela mostra o volume de vendas de uma loja nos últimos 12 meses e seus respectivos valores previstos para alguns valores de  $n$ .

Tabela 1 - Volume de vendas $x_t$ e seus respectivos valores previstos $F_{t+1}$ para alguns valores de $n$					
mês	$x_t$	$F_{t+1}, n = 1$	$F_{t+1}, n = 2$	$F_{t+1}, n = 3$	$F_{t+1}, n = 6$
1	1363	-	-	-	-
2	1963	1363	-	-	-
3	1843	1963	1663.0	-	-
4	1850	1843	1903.0	1723.0	-
5	1247	1850	1846.5	1885.3	-
6	2842	1247	1548.5	1646.7	-
7	2402	2842	2044.5	1979.7	1851.3
8	1700	2402	2622.0	2163.7	2024.5
9	1679	1700	2051.0	2314.7	1980.7
10	1157	1679	1689.5	1927.0	1953.3
11	2080	1157	1418.0	1512.0	1837.8
12	2039	2080	1618.5	1638.7	1976.7
13	-	2039	2059.5	1758.7	1842.8

A figura abaixo mostra os gráficos para os valores dados na tabela 1 para  $n = 1, 2, 3$  e 6.

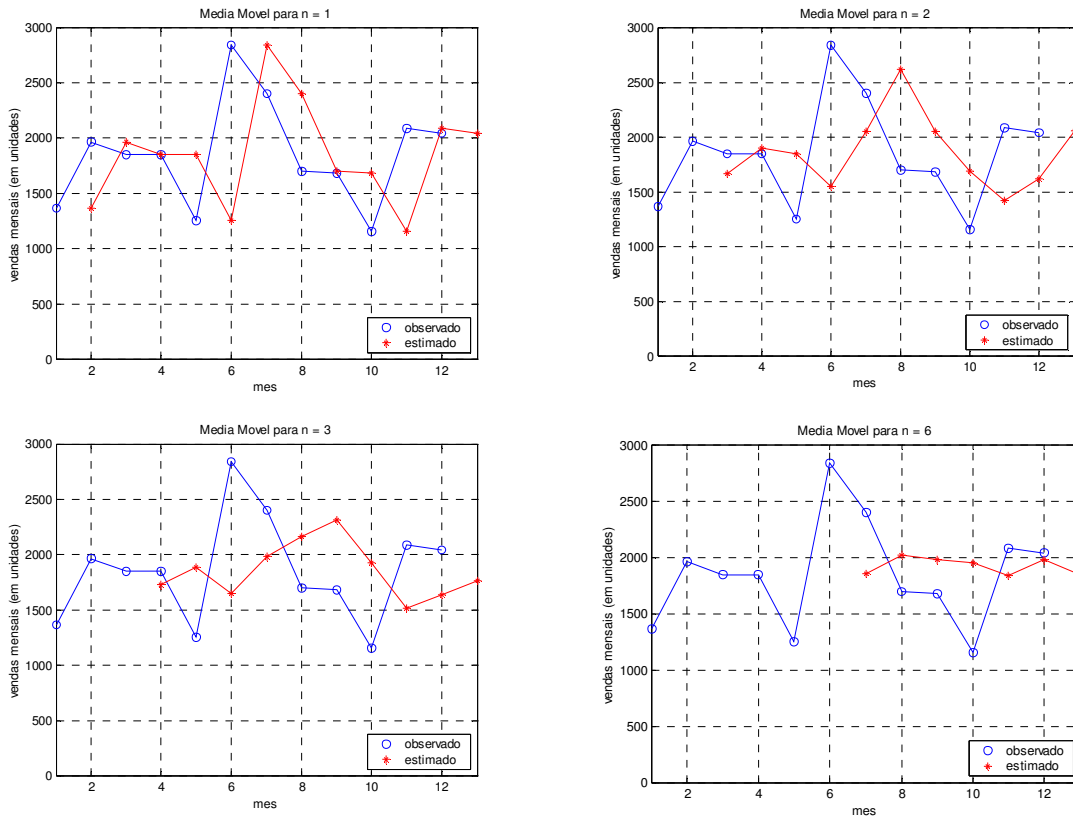


Figura 3 - Gráficos para os valores da tabela 1.

Observação: cabe ressaltar que, de posse dos valores da série para os meses 1 até 12, o valor previsto de interesse é apenas o referente ao mês 13. No entanto, valores referentes aos meses anteriores foram calculados apenas para comparação com os valores reais.

A figura 4 mostra os pesos (neste caso 0 ou 1) que cada valor da série temporal é ponderado para estimar o valor da série temporal no instante  $t + 1$  para os mesmos valores de  $n$  utilizados na figura 3.

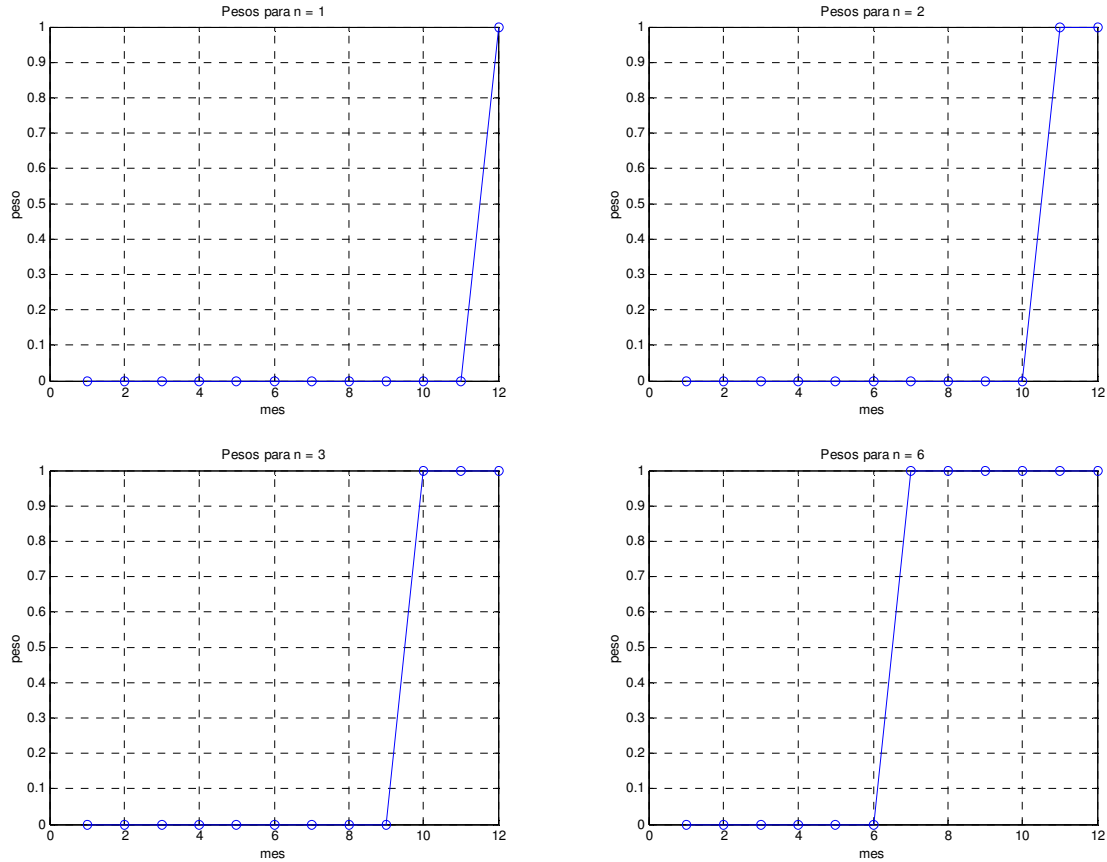


Figura 4 - Pesos para diferentes valores de n.

A principal desvantagem deste método é que o peso dado sobre  $x_{t-n+1}$  é o mesmo que para  $x_t$ , ou seja, as observações mais antigas recebem o mesmo peso que as observações mais recentes. Uma alternativa para contornar este problema é utilizar o método abaixo.

### 3.2 Método de Previsão com Suavização Exponencial

Este método utiliza a seguinte expressão:

$$F_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha)F_t \quad (2)$$

ou, equivalentemente:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(x_t - F_t) \quad (3)$$

onde:

$\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) é uma constante de suavização.

Assim, a previsão é simplesmente uma soma ponderada da última observação  $x_t$  e da previsão  $F_t$ . Devido a esta relação recursiva entre  $F_{t+1}$  e  $F_t$ ,  $F_{t+1}$  pode ser escrito como:

$$F_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \dots \quad (4)$$

A expressão (4) deixa claro que este método fornece maior peso para o valor  $x_t$ , decrescendo o peso para as observações anteriores.

Exemplo : o mesmo exemplo para a seção 3.1.

A tabela 2 mostra os valores previstos para alguns valores de  $\alpha$ . Obs:  $F_1 = x_1$  (condição de inicialização).

Tabela 2 - Volume de vendas $x_t$ e seus respectivos valores previstos $F_{t+1}$ para alguns valores de $\alpha$ .					
mês	$x_t$	$F_{t+1}, \alpha = 0.1$	$F_{t+1}, \alpha = 0.3$	$F_{t+1}, \alpha = 0.5$	$F_{t+1}, \alpha = 0.9$
1	1363	1363.0	1363.0	1363.0	1363.0
2	1963	1363.0	1363.0	1363.0	1363.0
3	1843	1423.0	1543.0	1663.0	1903.0
4	1850	1465.0	1633.0	1753.0	1849.0
5	1247	1503.5	1698.1	1801.5	1849.9
6	2842	1477.8	1562.8	1524.3	1307.3
7	2402	1614.3	1946.5	2183.1	2688.5
8	1700	1693.0	2083.2	2292.6	2430.7
9	1679	1693.7	1968.2	1996.3	1773.1
10	1157	1692.3	1881.5	1837.6	1688.4
11	2080	1638.7	1664.1	1497.3	1210.1
12	2039	1682.9	1788.9	1788.7	1993.0
13	-	1718.5	1863.9	1913.8	2034.4

A figura abaixo mostra os gráficos para os valores dados na tabela 2 para  $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$  e  $0.9$ .

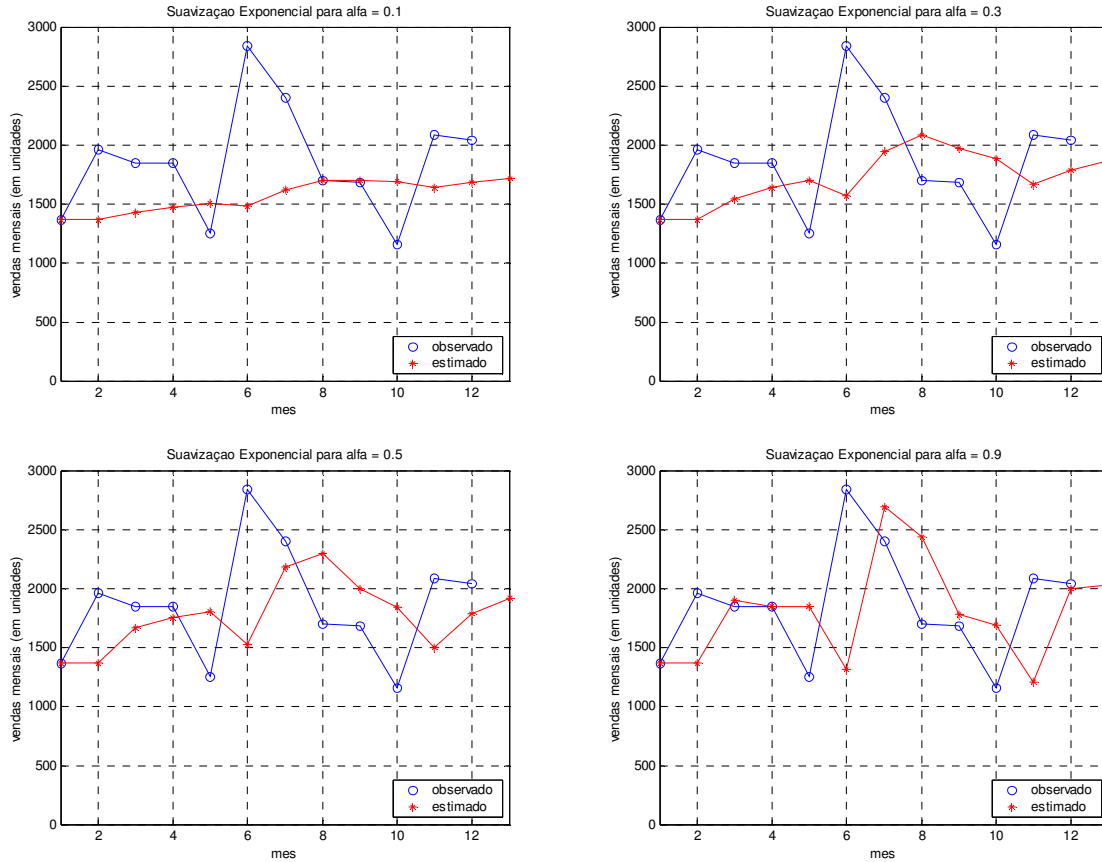


Figura 5 - Gráficos para os valores da tabela 2.

A figura 6 mostra os pesos que cada valor da série temporal é ponderado para estimar o valor da série temporal no instante  $t + 1$  para os mesmos valores de  $\alpha$  utilizados na figura 5.

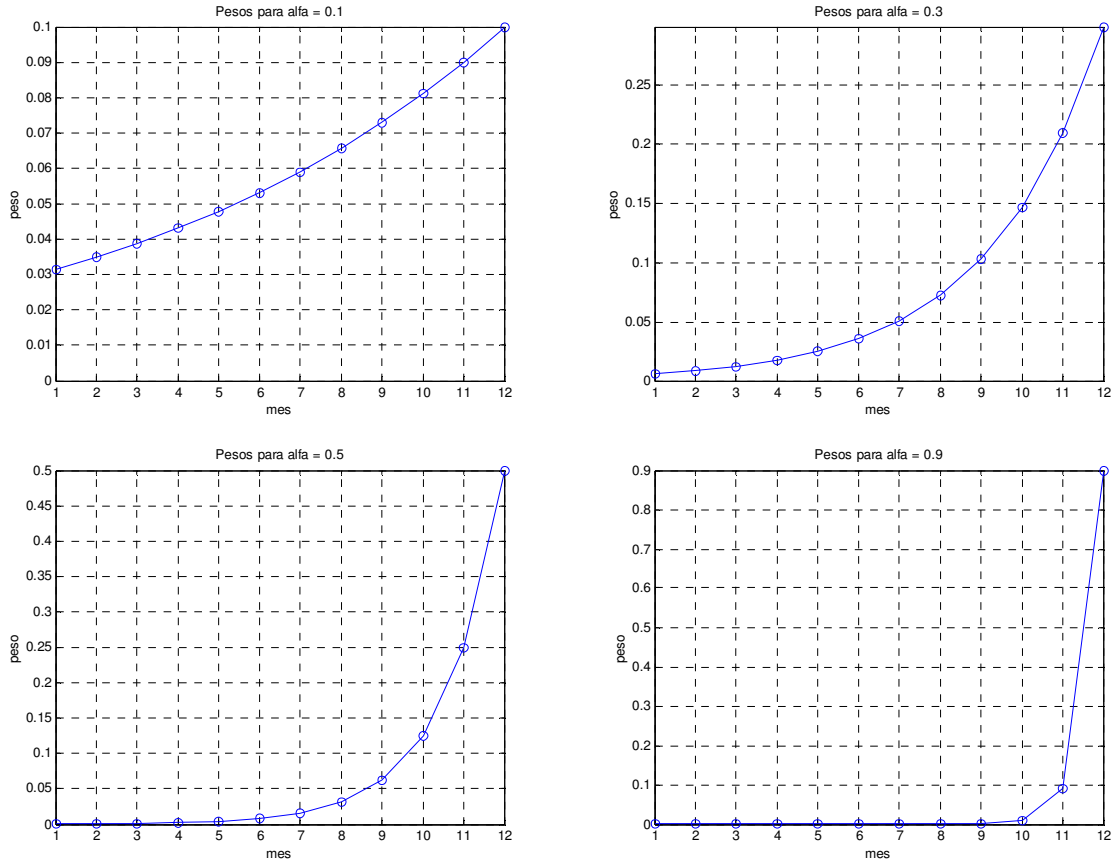


Figura 6 - Pesos para diferentes valores de alfa.

Uma medida de eficiência deste método pode ser obtida sob a consideração que o processo é completamente estável, assim que  $X_1, X_2, \dots$ , são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuído (i.i.d.\*) com variância  $\sigma^2$ . Portanto segue que (para grande t):

$$\text{var}[F_{t+1}] \approx \frac{\alpha\sigma^2}{2-\alpha} = \frac{\sigma^2}{(2-\alpha)/\alpha} \tag{5}$$

assim que a variância é estatisticamente equivalente para a média móvel com  $(2-\alpha)/\alpha = 19$ . Assim, em termos de variância, o Método de Suavização Exponencial com este valor de  $\alpha$  é equivalente para o Método da Média-Móvel que utiliza 19 observações. Entretanto, se uma mudança no processo ocorre, Suavização Exponencial irá reagir mais rapidamente com melhor ajuste de que o Método da Média Móvel.

\* Duas variáveis aleatórias são independentes se  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$ .

Duas variáveis aleatórias são identicamente distribuídas se possuem a mesma distribuição de probabilidade.



Uma desvantagem deste Método está na dificuldade em escolher um valor apropriado para  $\alpha$ . O Método de Suavização Exponencial pode ser visto como um processo de filtragem com um filtro estatístico cujas entradas são os dados "puros" a partir de um processo estocástico e a saída são estimativas suavizadas de uma média que varia com o tempo.

Uma maneira de iniciar o processo recursivo é utilizar  $F_1 = x_1$  (como utilizado para gerar os valores da tabela 2).

#### **4. Métodos de Previsão para Modelos com Valor Constante e Tendência**

A representação matemática para o processo (que gera a série temporal) com valor constante, tendência e flutuações aleatórias pode ser dada por:

$$X_t = at + k + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (6)$$

onde:

$X_t$  é uma variável aleatória observada no tempo  $t$ ;

$a$  é a tendência do modelo;

$k$  é o valor constante do modelo;

$e_t$  é o erro aleatório ocorrido no tempo  $t$  (geralmente assumido ter valor esperado igual a zero e variância constante).

##### **4.1 Método de Previsão com Suavização Exponencial de Holt**

Este método utiliza a seguinte expressão:

$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (7)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (8)$$

$$F_{t+n} = L_t + nT_t \quad (9)$$

onde:

$L_t$  é a componente de nível;

$T_t$  é a componente de tendência;

$h$  é o horizonte de previsão;

$n = 1, 2, \dots, h$ ;

$F_{t+n}$  é a previsão;

$\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) é a constante de suavização da componente de nível ( $L_t$ );

$\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) é a constante de suavização da componente de tendência ( $T_t$ );

Em (7), pode-se perceber que o valor de nível  $L_t$  é uma soma (média) ponderada do próprio valor da série  $x_t$  e  $L_{t-1}$  e  $T_{t-1}$  (nível e tendência previstos no tempo  $t-1$ , respectivamente). Para uma série isenta de erro aleatório, a quantidade  $(L_{t-1} + T_{t-1})$  é exatamente o valor de  $L_t$ , uma vez que a variação de tempo entre  $t$  e  $t-1$  é obviamente 1. Assim, a expressão (7) pode ser entendida como:

$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L'_t) \quad (10)$$

onde:

$$L'_t = f(L_{t-1}, T_{t-1}) \quad (11)$$

Em (8), a parcela  $L_t - L_{t-1}$  é a derivada discreta que representa, portanto, a tendência. Para o restante, o raciocínio é análogo ao realizado para a expressão (7).

Considerando que a primeira amostra da série temporal é para  $t = 1$ , os valores  $L_1$  e  $T_1$  são funções de  $L_0$  e  $T_0$ . Como não existe amostra da série para  $t = 0$ , faz-se necessário inicializar  $L_1$  e  $T_1$ . Existem várias maneiras de inicializar estas variáveis, dentre as quais pode-se citar:

$$L_1 = x_1 \quad (10)$$

$$T_1 = x_2 - x_1 \quad (11)$$

ou

$$T_1 = \frac{x_t - x_1}{t - 1} \quad (12)$$

ou

$$T_1 = \frac{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3)}{3} \quad (13)$$

Obs: uma vez que a componente de tendência em uma série é representada apenas por um coeficiente (coeficiente angular da reta) as formas apresentadas em (11), (12) e (13) para inicializar  $T_1$  são possíveis representações para a derivada discreta da série calculada em  $t = 1$ .

Exemplo:

A tabela 3 mostra os valores previstos para  $\alpha = 0.4$  e  $\beta = 0.4$ . Obs:  $L_1 = x_1$  e  $T_1 = x_2 - x_1$  (condição de inicialização).

Uma vez que o horizonte de previsão neste exemplo é  $n=3$ , os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  ótimos deve ser aqueles minimizem algum critério de otimização considerando o horizonte de previsão. Assim, o erro associado ao tempo  $t$  deve ser calculado entre  $x_{t+n}$  e  $F_{t+n}$ , para  $n = 1, 2, \dots, h$ .

Exemplificando, o erro associado ao mês  $t = 6$ , deve ser calculado entre  $x_7$  e  $F_7$ ,  $x_8$  e  $F_8$  e  $x_9$  e  $F_9$  e não somente entre  $x_7$  e  $F_7$  (ou mesmo entre  $x_6$  e  $F_6$ ), porém com  $F_7$ ,  $F_8$  e  $F_9$  calculados através da expressão (9) em  $t = 6$  ( $F_7$ ,  $F_8$  e  $F_9$  é função apenas de  $L_6$  e  $T_6$ ). Os valores apresentados na tabela 3 na coluna  $F_t$  são os valores obtidos através da expressão (9), porém para  $n = 0$ .

Os erros foram calculados utilizando-se as diferenças quadráticas, no entanto, qualquer outro critério poderia ter sido usado (por exemplo, as diferenças absolutas).

A tabela 3 mostra na coluna Cálculo de  $F_{t+n}$  em  $t = 6$  os valores de  $L_6$  e  $T_6$  utilizados para os cálculos de  $F_7$ ,  $F_8$  e  $F_9$ . A coluna Somatória das diferenças quadráticas mostra as diferenças quadráticas entre  $x_7$  e  $F_7$ ,  $x_8$  e  $F_8$  e  $x_9$  e  $F_9$  e a coluna erro o erro associado ao mês  $t = 6$ .

Tabela 3 - Volume de vendas $x_t$ e seus respectivos valores previstos $F_t$ para valores de $\alpha = 0.4$ e $\beta = 0.4$ .							
mês	$x_t$	$L_t$	$T_t$	$F_t$ $\alpha = 0.4$ $\beta = 0.4$	Cálculo de $F_{t+n}$ em $t = 6$	Somatória das diferenças quadráticas	erro
1	11.00	11.00	3.00	0			
2	14.00	14.00	3.00	14.00			
3	15.00	16.20	2.68	16.20			
4	18.00	18.53	2.54	18.53			
5	18.00	19.84	2.05	19.84			
6	22.00	21.93	2.07	21.93	$L_6 = 21.93$ $T_6 = 2.07$ $F_7 = 24.00$ $F_8 = 26.07$ $F_9 = 28.13$	$(25.00-24.00)^2 = 1.00$ $(28.00-26.07)^2 = 3.72$ $(29.00-28.13)^2 = 0.76$ $1.00+3.72+0.02 = 5.48$	<b>5.48</b>
7	25.00	24.40	2.23	24.40			
8	28.00	27.18	2.45	27.18			
9	29.00	29.37	2.35	29.37			
10	31.00	31.43	2.23	31.43			
11	32.00	33.00	1.97	33.00			
12	35.00	34.98	1.97	34.98			
13	-	-	-	36.95			
14	-	-	-	38.92			
15	-	-	-	40.89			

A figura abaixo mostra os gráficos para os valores dados na tabela 3 para  $\alpha = 0.4$  e  $\beta = 0.4$ .

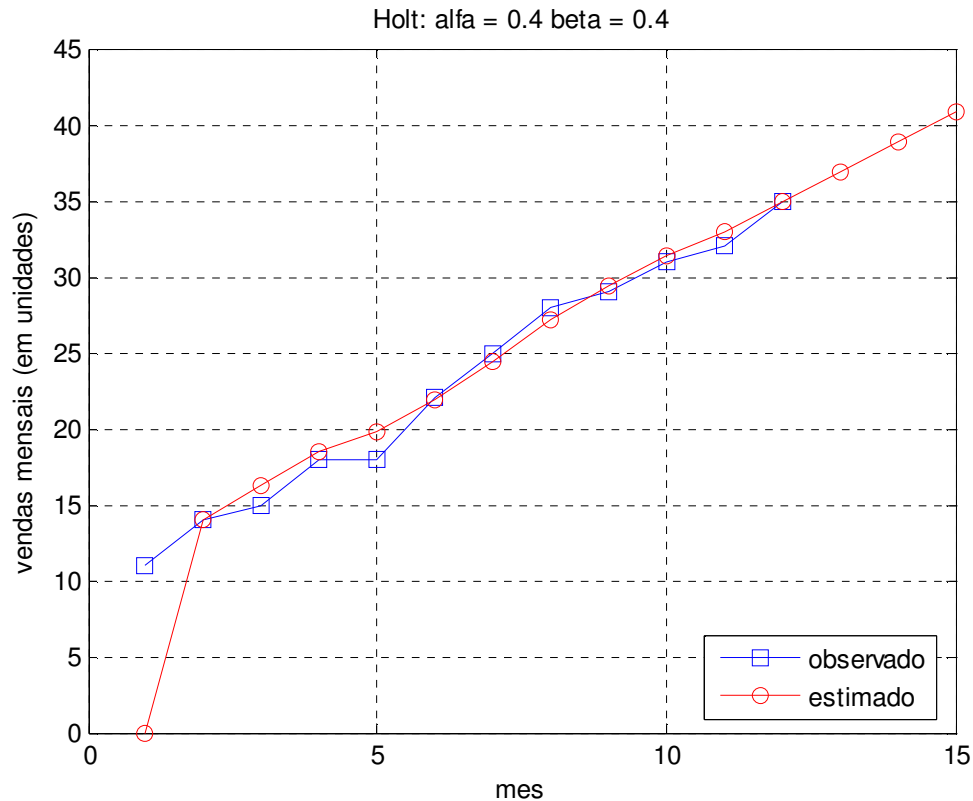


Figura 7 - Gráficos para os valores da tabela 3.

## 5. Métodos de Previsão para Séries Temporais Sujeitas a Fenômenos Sazonais

É bastante comum existir padrões sazonais com valores maiores em dados instantes de tempo de que em outros em uma série temporal. Por exemplo, este fenômeno ocorre para o volume de vendas de nozes, amêndoas, entre outros produtos típicos de festas natalinas na época do natal, assim como roupas de lã para o período de inverno, bronzeadores e bonés no período do verão, etc.

Este fenômeno viola a consideração que o processo que gera a série é por uma componente de valor constante ou tendência e outra componente de flutuação aleatória, cujos métodos descritos nas seções 3.1, 3.2 e 4.1 podem ser utilizados para previsão.

Uma maneira de realizar previsões com padrões sazonais é corrigir a série temporal do efeito da sazonalidade e então utilizar os métodos descritos nas seções 3.1 ou 3.2 (para modelos de séries de valor constante e sazonalidade) ou ainda 4.1 (para modelos de séries com tendência e sazonalidade).

### 5.1 Método de Previsão com Correção à Priori

Considerando que o modelo do processo que gera a série temporal é dado por:

$$X_t = k + S_t + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (14)$$

onde:

$X_t$  é uma variável aleatória observada no tempo  $t$ ;

$k$  é o valor constante do modelo;

$S_t$  é a componente sazonal no tempo  $t$ ;

$e_t$  é o erro aleatório ocorrido no tempo  $t$  (geralmente assumido ter valor esperado igual a zero e variância constante).

O procedimento pode ser resumido como:

1. Corrigir a série temporal do efeito da sazonalidade através da divisão (ou subtração) dos valores da série temporal pelos seus respectivos fatores sazonais.
2. Realizar a previsão através dos métodos descritos nas seções 3.1 ou 3.2.
3. Multiplicar (ou adicionar) a previsão pelos fatores sazonais incorporando a sazonalidade.

Quando o efeito da sazonalidade é retirado e incorporado à série por meio de divisão e multiplicação, respectivamente, dos valores da série temporal pelos fatores sazonais o método é denominado **multiplicativo**.

Quando o efeito da sazonalidade é retirado e incorporado à série por meio de subtração e adição, respectivamente, dos valores da série temporal pelos fatores sazonais o método é denominado **aditivo**.

Considerando o método multiplicativo, o fator sazonal mede a relação da média dos valores da série temporal de um mesmo período com a média de todos os valores da série temporal. De maneira formal fica:

$$FS_i = \frac{\mu_i}{\mu_t} \quad (15)$$

onde:

$\mu_i$  é a média dos valores da série temporal para os períodos  $i$ .

$\mu_t$  é a média dos valores da série temporal.

Exemplo: o volume de vendas de um dado produto em um ano é dado pela seguinte série temporal descrita na tabela 4.

Tabela 4 - Volume de vendas  $x_t$  para o exemplo da seção 3.1

mês	mês quadrimestral	quadrimestre	$x_t$
1	1	1	1360.00
2	2		865.23
3	3		1141.63
4	4		2105.80
5	1	2	1226.48
6	2		1238.10
7	3		1093.17
8	4		2191.08
9	1	3	1454.08
10	2		948.62
11	3		1337.67
12	4		2497.43
13	1	4	-

Analisando cuidadosamente esta série temporal, percebe-se que existe um período de 4 meses (quadrimestre) em que os valores retornam aproximadamente aos valores do período passado, ou seja, existe certa **periodicidade** nos dados, que no jargão utilizado em séries temporais é denominado  **sazonalidade**. Assim, o valor da série temporal para o mês 1 é aproximadamente o mesmo para o mês 5 e o mês 9. O valor da série temporal para o mês 2 é aproximadamente o mesmo para o mês 6 e o mês 10 e assim por diante.

A tabela abaixo mostra os valores médios  $\mu_i$  para os meses quadrimestrais ( $i = 1, 2, 3$  e  $4$ ) e os fatores sazonais  $FS_i$  sendo  $\mu_t = 1454.94$ .

Tabela 5 - Valores de  $\mu_i$  e  $FS_i$ .

mês quadrimestral	$\mu_i$	$FS_i$
1	1346.85	$\frac{1346.85}{1454.94} = 0.93$
2	1017.32	$\frac{1017.32}{1454.94} = 0.70$
3	1190.83	$\frac{1190.83}{1454.94} = 0.82$
4	2264.77	$\frac{2264.77}{1454.94} = 1.56$

A tabela 6 mostra os valores da série temporal  $x_{tc}$  corrigidos dos efeitos sazonais através de:

$$x_{tc} = \frac{x_t}{FS_t} \quad (16)$$

É importante ressaltar que os valores de  $FS_t$  são periódicos (ver tabela 6).

Tabela 6 - Valores de  $x_{tc}$ .

mês	mês quadrimestral	$FS_t$	$x_t$	$x_{tc}$
1	1	0.93	1360.00	1469.15
2	2	0.70	865.23	1237.42
3	3	0.82	1141.63	1394.84
4	4	1.56	2105.80	1352.82
5	1	0.93	1226.48	1324.91
6	2	0.70	1238.10	1770.70
7	3	0.82	1093.17	1335.63
8	4	1.56	2191.08	1407.60
9	1	0.93	1454.08	1570.77
10	2	0.70	948.62	1356.70
11	3	0.82	1337.67	1634.36
12	4	1.56	2497.43	1604.41
13	1	0.93	-	-



A figura 8 mostra o gráfico da série temporal original (dados "brutos") e da série temporal corrigida dos efeitos sazonais.

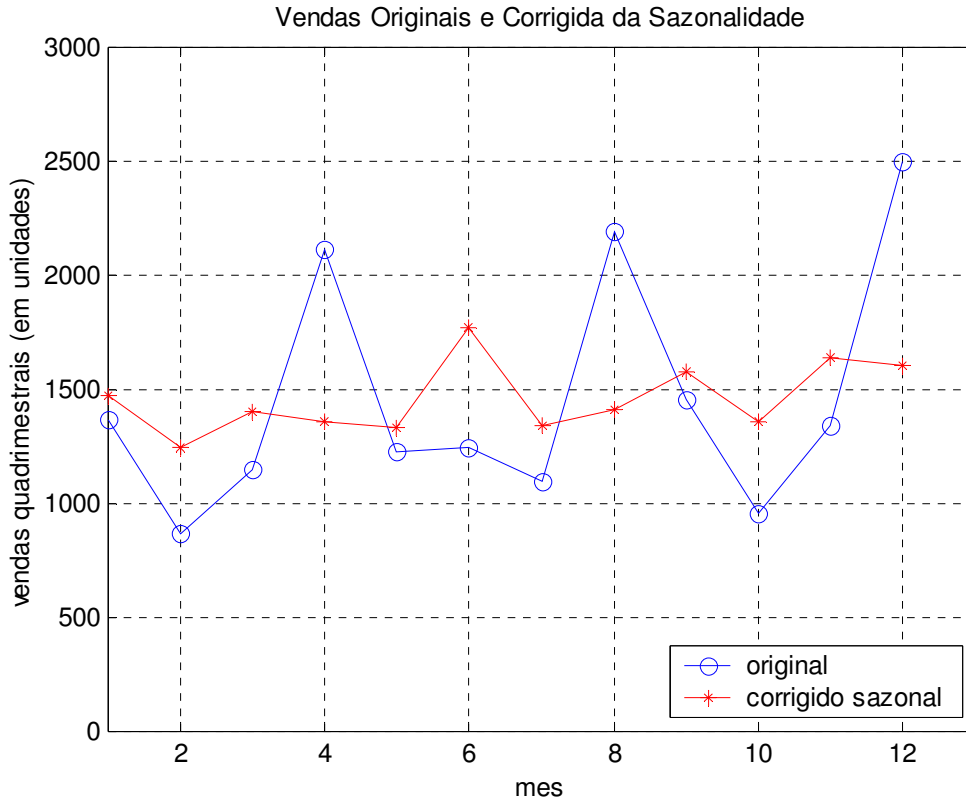


Figura 8 - Série Temporal Original e Corrigida dos Efeitos Sazonais.

De posse dos valores da série temporal corrigida dos efeitos sazonais, pode-se utilizar um dos métodos de previsão descritos nas seções 3.1 e 3.2. Utilizando o Método de Suavização Exponencial para um valor de  $\alpha = 0.3$  fica:

mês	$x_{tc}$	$F_t, \alpha = 0.3$
1	1469.15	1469.15
2	1237.42	1469.15
3	1394.84	1399.63
4	1352.82	1398.19
5	1324.91	1384.58
6	1770.70	1366.68
7	1335.63	1487.89

8	1407.60	1442.21
9	1570.77	1431.83
10	1356.70	1473.51
11	1634.36	1438.47
12	1604.41	1497.23
13	-	1529.39

A figura 9 mostra os gráficos para os valores dados na tabela 7.

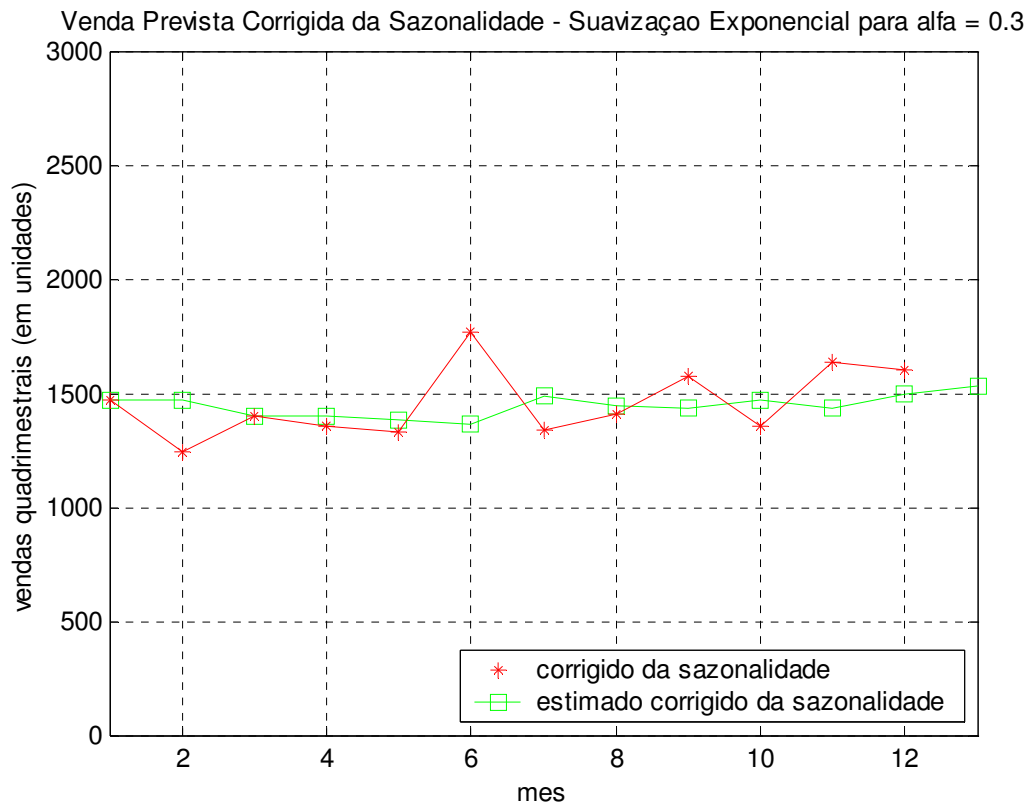


Figura 9 - Série Temporal Corrigida dos Efeitos Sazonais e Prevista (estimada).

Multiplicando os valores da série temporal prevista  $F_t$  pelos seus respectivos fatores sazonais  $FS_t$ , têm-se os valores da série temporal prevista  $F^S_t$  acrescida dos efeitos sazonais. De modo formal fica:

$$F^S_{t+1} = F_{t+1} * FS_t \tag{17}$$

A tabela 7 mostra estes valores.

mês	$FS_t$	$F_t, \alpha = 0.3$	$F_t^S$
1	0.93	1469.15	1360.00
2	0.70	1469.15	1027.25
3	0.82	1399.63	1145.56
4	1.56	1398.19	2176.43
5	0.93	1384.58	1281.72
6	0.70	1366.68	955.60
7	0.82	1487.89	1217.79
8	1.56	1442.21	2244.95
9	0.93	1431.83	1325.45
10	0.70	1473.51	1030.30
11	0.82	1438.47	1177.34
12	1.56	1497.23	2330.60
13	0.93	1529.39	1415.77

A figura 10 mostra os valores da tabela 8.

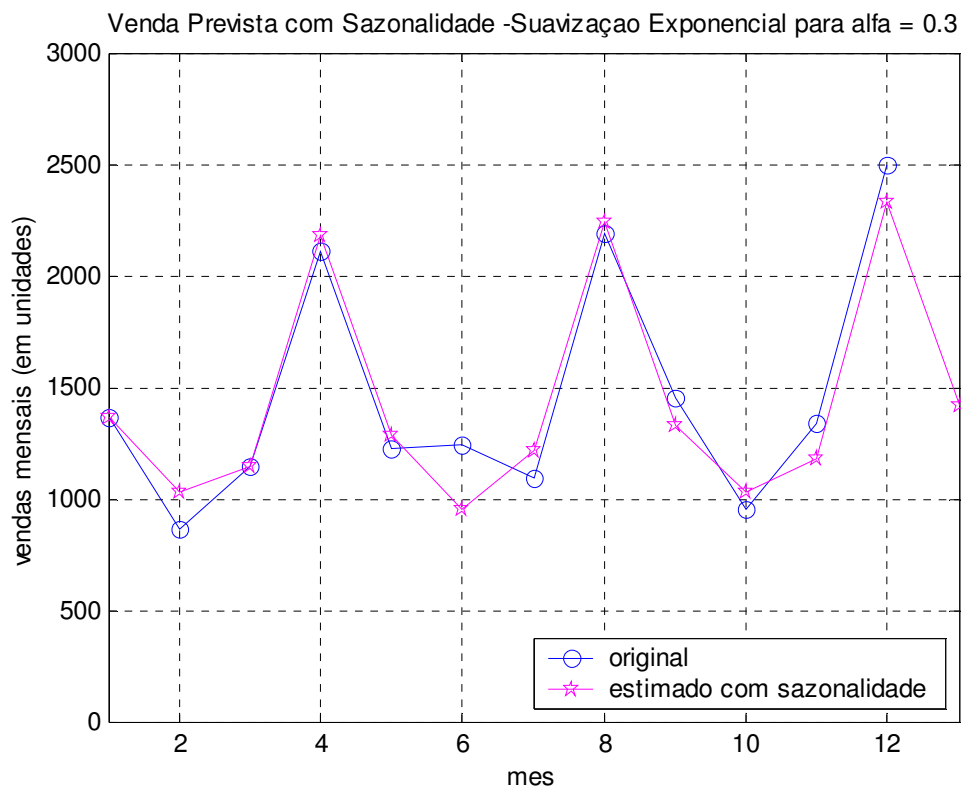


Figura 10 - Série Temporal Original e Prevista (estimada) Acrescida dos Efeitos Sazonais.

A figura 11 mostra as séries temporais das figuras 8, 9 e 10 superpostos.

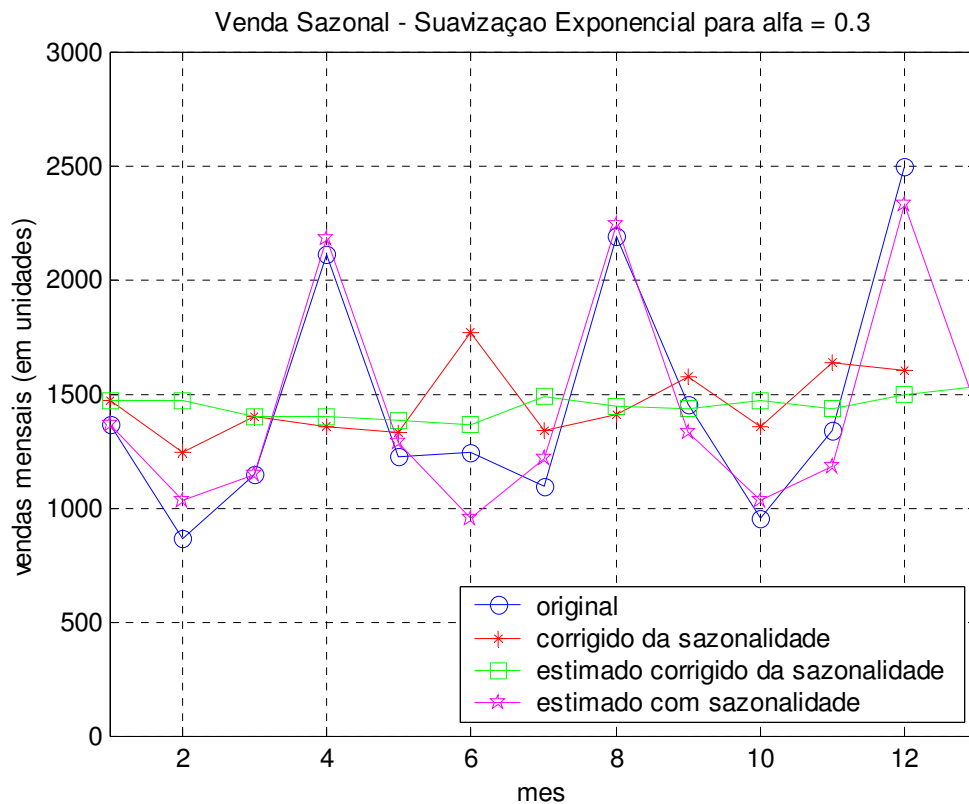


Figura 11 - Série temporal original, corrigida dos efeitos da sazonalidade, prevista (estimada) corrigida dos efeitos da sazonalidade e prevista (estimada) acrescida dos efeitos da sazonalidade.

É importante destacar que este método é bastante simples uma vez que considera constantes os fatores sazonais (no exemplo o fator sazonal para o mês 1 é repetido para o mês 5 e mês 9; o fator sazonal para o mês 2 é repetido para o mês 6 e mês 10; e assim por diante). Este método foi descrito principalmente para fins didáticos a fim de facilitar a compreensão do método de Holt-Winters descrito na seção 5.2.

Ainda, este princípio poderia ser utilizado de maneira análoga para processos com tendência, de tal modo que a série inicialmente é corrigida da componente de tendência, realiza-se a previsão através dos métodos descritos nas seções 3.1 ou 3.2 e então incorpora-se a tendência nos valores previstos.

## 5.2 Método de Previsão com Suavização Exponencial de Holt-Winters

Considerando que o modelo do processo que gera a série temporal seja dado por:

$$X_t = k + at + S_t + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (18)$$

onde:

$X_t$  é uma variável aleatória observada no tempo  $t$ ;

$a$  é a tendência do modelo;

$k$  é o valor constante do modelo;

$S_t$  é a componente sazonal no tempo  $t$ ;

$e_t$  é o erro aleatório ocorrido no tempo  $t$  (geralmente assumido ter valor esperado igual a zero e variância constante).

Este método utiliza a seguinte expressão:

$$L_t = \alpha \left( \frac{X_t}{S_{t-m}} \right) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (19)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (20)$$

$$S_t = \gamma \left( \frac{X_t}{L_t} \right) + (1 - \gamma)S_{t-m} \quad (21)$$

$$F_{t+n} = (L_t + nT_t)S_{t-m+\text{mod}(n-1,m)+1} \quad (22)$$

onde:

$L_t$  é a componente de nível;

$T_t$  é a componente de tendência;

$S_t$  é a componente de sazonalidade;

$m$  é o período sazonal;

$h$  é o horizonte de previsão;

$n = 1, 2, \dots, h$ ;

$\text{mod}(n, m)$  é o resto da divisão de  $n$  por  $m$ ;

$F_{t+n}$  é a previsão;

$\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) é a constante de suavização da componente de nível ( $L_t$ );

$\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) é a constante de suavização da componente de tendência ( $T_t$ );

$\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) é a constante de suavização da componente de sazonalidade ( $S_t$ );

Em (19), pode-se perceber que os valores da série ( $x_t$ ) são divididos pelos fatores sazonais, da mesma forma que em (16) a fim de corrigir os valores da série dos efeitos da sazonalidade, as demais parcelas da expressão são análogas as da expressão (7) no método de Holt.

A expressão (20) é igual à expressão (8) no método de Holt.

A divisão dos valores da série ( $x_t$ ) pelos valores de nível ( $L_t$ ) na expressão (21) pode ser entendida como a medida de fator sazonal “instantânea”.

Em (22) a sazonalidade é incorporada à série através da multiplicação da soma dos valores previstos para as componentes de Nível ( $L_t$ ) e Tendência ( $T_t$ ) pela componente sazonal  $S_{t-m+n}$ .

Existem várias maneiras de inicializar estas variáveis, dentre as quais pode-se citar:

$$L_m = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \dots + x_m) \tag{23}$$

$$T_m = \frac{1}{m} \left( \frac{x_{m+1} - x_1}{m} + \frac{x_{m+2} - x_2}{m} + \dots + \frac{x_{m+m} - x_m}{m} \right) \tag{24}$$

$$S_1 = \frac{x_1}{L_1}, S_2 = \frac{x_2}{L_2}, \dots, S_m = \frac{x_m}{L_m} \tag{25}$$

Exemplo:

A tabela 9 mostra os valores da série temporal  $x_t$ , e as componentes calculadas  $L_t$ ,  $T_t$ ,  $S_t$  e os valores previstos  $F_t$  para  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 1.0$  e  $\gamma = 0.1$ . Tais parâmetros foram determinados por enumeração exaustiva (força-bruta) para todas as combinações de valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  discretizados em intervalos de 0.1.

O horizonte de previsão é  $h = 7$  e o período sazonal é  $m = 4$ .

Uma observação importante é a respeito do parâmetro  $\gamma$  ser zero. Esse fato não significa que não existe sazonalidade na série, mas sim, que os fatores sazonais foram inicializados com valores que não foram necessários serem corrigidos ao longo da previsão. Como pode ser observado na coluna  $\gamma$  da tabela 9, os fatores sazonais estão quase iguais (de 4 em 4 períodos) porque  $\gamma = 0.1$  (próximo de zero). Caso este fosse zero, os fatores sazonais seriam iguais de 4 em 4 períodos.

As condições de inicialização utilizadas foram as descritas nas expressões (23), (24) e (25).

O método para determinação dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  ótimos é análogo ao descrito no exemplo para o método de Holt (item 4.1).

Tabela 9 - Volume de vendas  $x_t$  e seus respectivos valores previstos  $F_t$  para valores de  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 0.1$ .

<b>mês</b>	<b><math>x_t</math></b>	<b><math>L_t</math></b>	<b><math>T_t</math></b>	<b><math>S_t</math></b>	<b><math>F_t</math></b> <b><math>\alpha = 0.2</math></b> <b><math>\beta = 1.0</math></b> <b><math>\gamma = 0.1</math></b>
1	362.00	0	0	0.95	0
2	385.00	0	0	1.01	0
3	432.00	0	0	1.13	0
4	341.00	380.00	9.75	0.89	0
5	382.00	391.99	11.99	0.95	373.43
6	409.00	403.93	11.93	1.01	409.25
7	498.00	420.30	16.37	1.14	477.82
8	387.00	435.59	15.28	0.89	390.89
9	473.00	459.78	24.18	0.96	439.01
10	513.00	488.45	28.66	1.01	494.85
11	582.00	515.65	27.20	1.14	588.69
12	474.00	540.03	24.37	0.89	484.12
13	544.00	564.60	24.56	0.96	543.26
14	582.00	585.81	21.21	1.01	595.65
15	681.00	605.05	19.24	1.13	689.97
16	557.00	623.96	18.90	0.89	558.19
17	628.00	644.81	20.84	0.96	620.52
18	707.00	671.91	27.09	1.01	681.64
19	773.00	694.95	23.04	1.13	791.46
20	592.00	706.78	11.82	0.88	632.15
21	627.00	705.03	-1.74	0.95	679.30
22	725.00	705.03	-0.00	1.01	717.90
23	854.00	714.34	9.31	1.14	811.64
24	661.00	727.68	13.33	0.89	646.71
25	-	-	-	-	708.47
26	-	-	-	-	768.88
27	-	-	-	-	876.80
28	-	-	-	-	694.11
29	-	-	-	-	759.47
30	-	-	-	-	823.25
31	-	-	-	-	937.72

A figura abaixo mostra os gráficos para os valores dados na tabela 9 para  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 1.0$  e  $\gamma = 0.1$ .

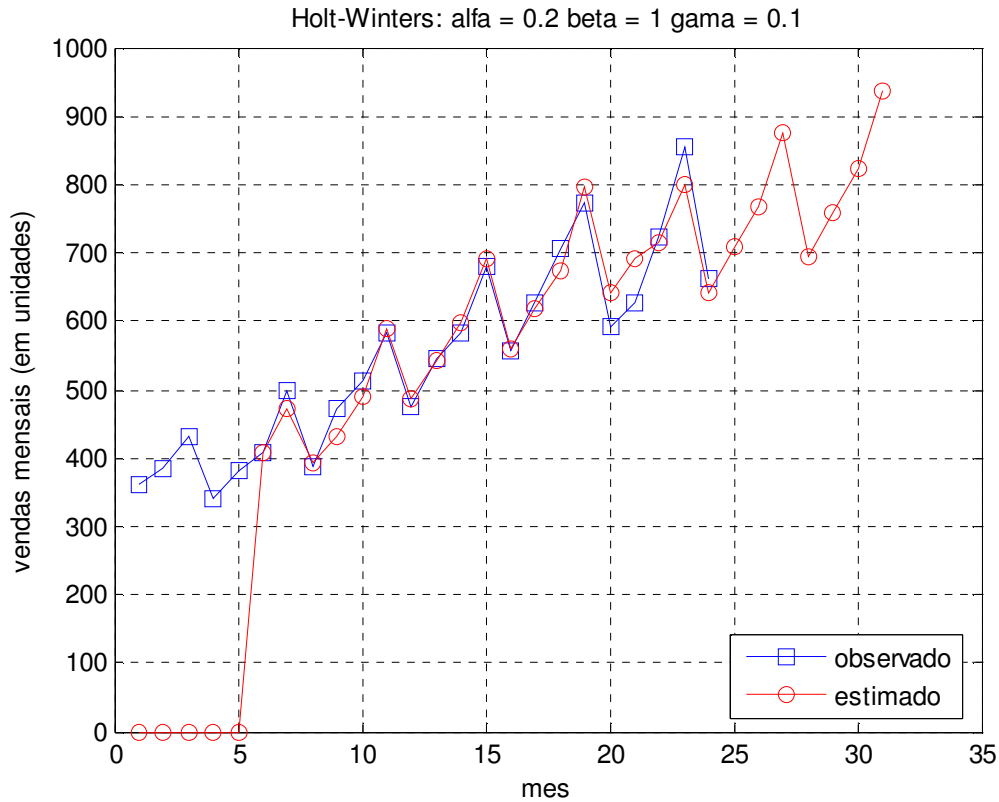


Figura 11 - Gráficos para os valores da tabela 9.

### 5.3 Um Método de Determinação do Período de Sazonalidade

Uma maneira de determinar o período do fenômeno sazonal em uma série temporal é através da própria inspeção visual do gráfico desta (como por exemplo, o gráfico da figura 8 ou 11). Uma outra maneira de determinar o período do fenômeno sazonal é através da análise da norma do resíduo oriundo da regressão linear para os valores de um gráfico do tipo *Scatter* (espalhar, dispensar) para vários valores de *Leg* (perna). Os conceitos sobre regressão linear e ajustamento de funções são abordados no item 6.

O gráfico do tipo *Scatter* é um gráfico de pontos que pode ter qualquer dimensão. No caso bidimensional (2D), o eixo das abscissas representa os valores da série temporal  $X_t$  e o eixo das ordenadas representa os valores da série temporal  $X_{t+Leg}$ . Assim, para um valor de  $Leg = 1$ , por exemplo, um ponto deste gráfico terá coordenadas  $(X_t, X_{t+1})$ .

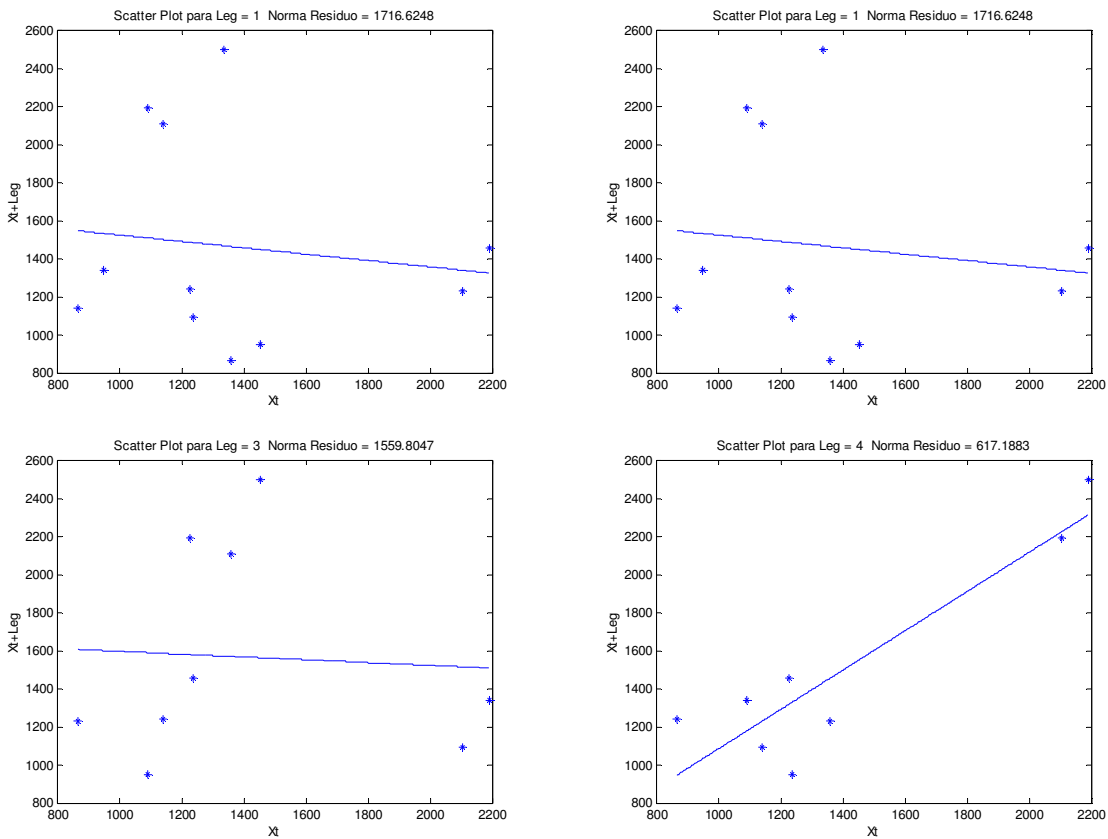
O valor do *Leg* é o próprio período do fenômeno sazonal, portanto, para uma série temporal com período do fenômeno sazonal igual a *Leg*, os pontos com coordenadas



$(X_t, X_{t+Leg})$  serão colineares se os valores da série temporal forem perfeitamente periódicos. Neste caso, a norma da regressão linear será zero, indicando que o período do fenômeno sazonal é  $Leg$ .

Em situações reais, dificilmente têm-se séries temporais perfeitamente periódicas, o que resulta em um valor diferente de zero para a norma do resíduo da regressão linear. Com isso, pode-se então escolher como o período do fenômeno sazonal aquele que apresentar o valor mínimo para a norma do resíduo da regressão linear obtido para vários valores de  $Leg$ .

Os gráficos abaixo mostram os gráficos *Scatter* para vários valores de  $Leg$  para a série temporal da figura 8.



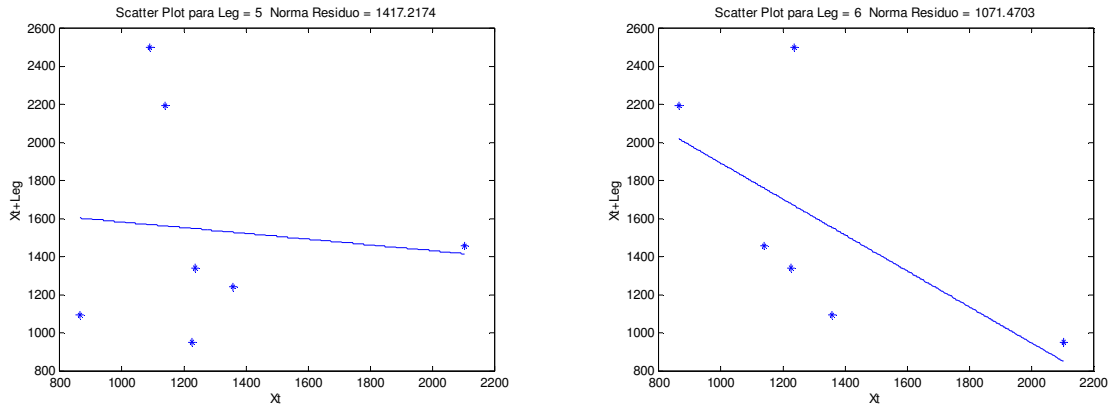


Figura 12 - Gráficos *Scatter* para vários valores de *Leg*.

Como era de se esperar, o menor valor da norma do resíduo ocorreu para o gráfico *Scatter* gerado com *Leg* = 4, uma vez que a série temporal utilizada foi a mesma da figura 8.

O gráfico da figura 13 mostra os valores das normas dos resíduos para cada valor de *Leg*.

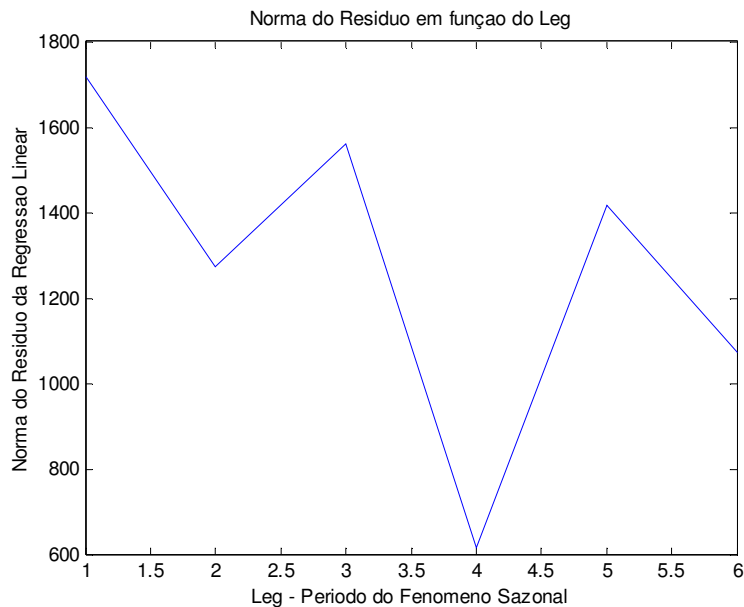


Figura 13 - Normas dos resíduos da Regressão Linear em função do *Leg*.

## 6. Regressões por Mínimos Quadrados

O conceito de regressão pode ser entendido como uma maneira de "ajustar" um dado modelo matemático a um conjunto de dados (geralmente observados ou mensurados).

Os modelos matemáticos podem ser quaisquer e não apenas lineares como é bastante comum encontrar na literatura especializada sobre o tema.

Alguns exemplos que podem ser citados sobre regressões são:

1) Um indivíduo mede a tensão  $V$  em um componente eletrônico cuja resistência  $R$  é constante enquanto varia a corrente  $I$ . Uma vez que  $V = R.I$ , é de se esperar que as observações  $V$  se relacionem de maneira diretamente proporcional (linear) a corrente  $I$  com  $R$  constante. No entanto, esta condição de linearidade não é verificada na prática devido a vários fatores que podem, por exemplo, alterar a resistência  $R$  durante o experimento (tal como variação de temperatura) violando a linearidade do experimento. Porém, mesmo se a resistência  $R$  não variar, ainda assim a linearidade não é perfeita segundo os dados observados. Este fato se deve a inevitável imprecisão nas observações (mensurações) conduzidas pelo homem (mesmo que este utilize equipamentos que auxiliem as mensurações).

Portanto, um modelo matemático mais realista para este experimento seria:

$$V = R.I + e \tag{26}$$

onde:

$e$  é o erro entre  $V$  (observado) e  $R.I$ .

O gráfico da figura 13 mostra os valores observados de  $V$  em função de  $I$ , e as retas ideal e ajustada (ótima no sentido de mínimos quadrados).

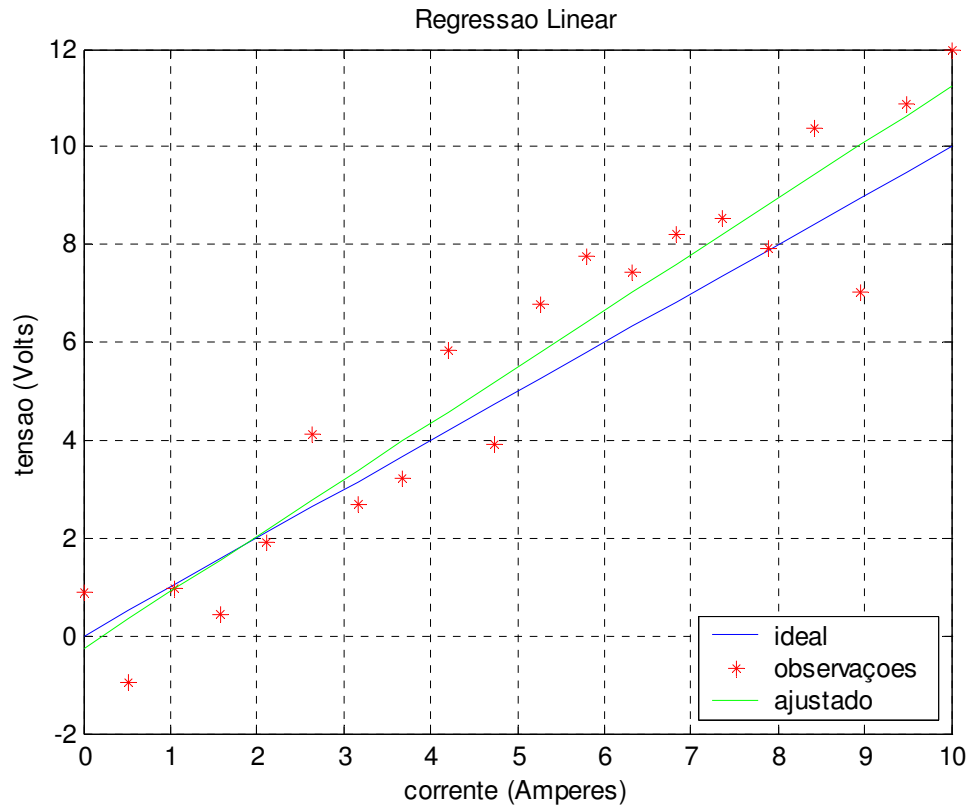


Figura 13 - Regressão Linear.

A reta verde (ajustada) é a reta cuja soma dos quadrados das diferenças entre os valores de tensão observados  $V$  e os valores de tensão ajustados  $V_a$  para os mesmos valores de corrente  $I$  é mínima. Este critério de calcular os parâmetros do modelo (no caso, o coeficiente angular e linear da reta) é denominado de **Critério de Mínimos Quadrados**.

2) Um indivíduo dispara um projétil através de um canhão e observa algumas posições do mesmo. É bem conhecido que a trajetória descrita pelo projétil é uma parábola no plano  $xy$  (considerando  $x$  o comprimento e  $y$  a altura). Com isso, o modelo a ser utilizado deve ser:

$$y = ax^2 + bx + c + e \tag{27}$$

onde:

- a, b e c são os parâmetros da parábola.
- e análogo à definição para expressão (26).

O gráfico da figura 14 mostra os valores observados de  $y$  em função de  $x$ , e as parábolas ótima e ajustada.

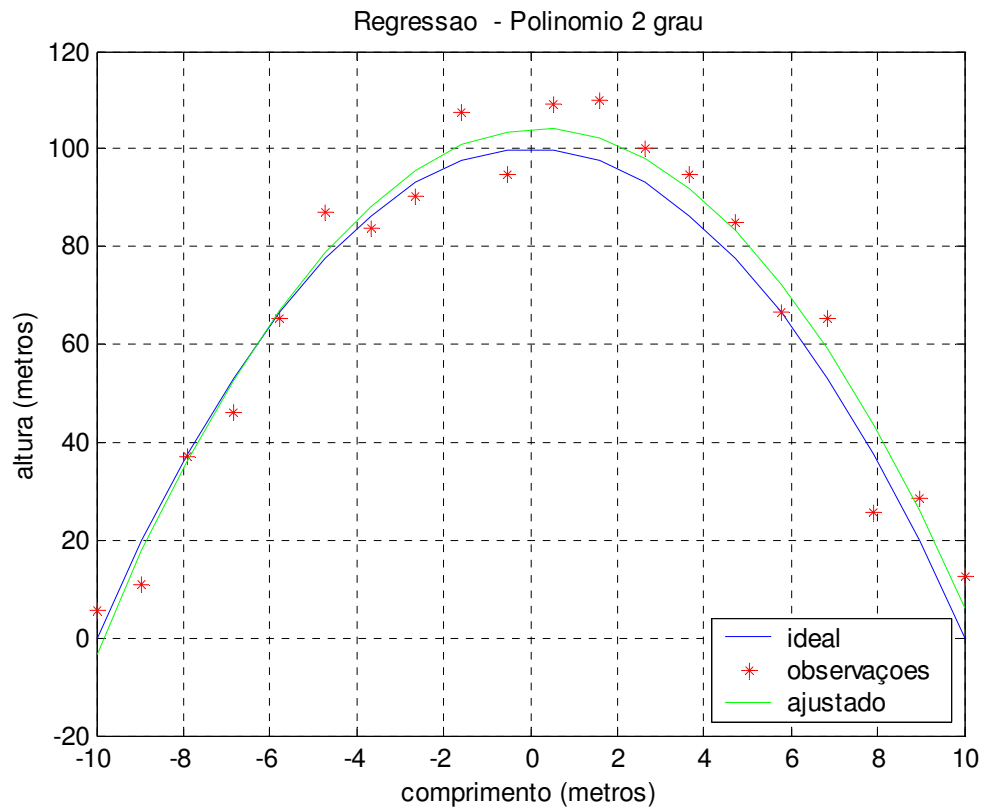


Figura 14 - Regressão Polinômio de 2º grau.

#### 4.1 O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

O Método dos Mínimos Quadrados foi originalmente desenvolvido de maneira independente por Gauss e Legendre.



**Johann Carl Friedrich Gauss** (\*1777 em Brunswick (agora Alemanha); †1855 em Göttingen (agora Alemanha)) **Adrien-Marie Legendre** (\*1752 em Paris, França; †1833 em Paris, França).

Considere que as medidas diretas de uma grandeza  $X$ , sejam:  $l_1, l_2, \dots, l_n$  os valores obtidos em uma série de  $n$  observações.

Uma vez que é impossível obter o verdadeiro valor de  $X$ , adota-se, com base em certo critério, o valor  $x$  e calculam-se as diferenças:

$$\left. \begin{array}{l} x - l_1 = v_1 \\ x - l_2 = v_2 \\ \dots\dots\dots \\ x - l_i = v_i \end{array} \right\} x - l_i = v_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

A tais diferenças  $v_i$  dá-se o nome de **resíduos**, isto é, os valores, a priori desconhecidos, que somados as observações reproduzem o valor escolhido  $x$ .

Mudando o critério, pode-se eleger um valor diferente de  $x$  denominado  $x'$ . Com isso, um novo conjunto de resíduos seria obtido:

$$\left. \begin{array}{l} x' - l_1 = v'_1 \\ x' - l_2 = v'_2 \\ \dots\dots\dots \\ x' - l_i = v'_i \end{array} \right\} x' - l_i = v'_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

Dá mesma maneira, podem-se adotar outros critérios e denominar  $x''$ ,  $x'''$ ,... Assim, qual dos valores  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ ,..., adotar como sendo o valor único, dado às observações  $l_i$ , discrepantes entre si, para representar a incógnita  $X$  ?

O critério mais utilizado para este tipo de problema é: "aceitar como melhor estimativa de  $X$  o valor que torna mínima a soma dos quadrados dos resíduos":

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad (30)$$

Este critério foi elaborado, de maneira independente, por Gauss e Legendre, e a este se denomina **Critério dos Mínimos Quadrados** (como já citado no exemplo 1).

Quando as observações não oferecem o mesmo grau de confiança, estas são homogeneizadas através de pesos  $p_i$ :

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min \quad (31)$$

Adotando-se notação matricial, o conjunto de resíduos  $\{v_i\}$  pode ser representado por um vetor  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t$  e, portanto, a expressão (30), fica:

$$V^t V = \min \quad (32)$$

e a expressão (31), fica:

$$V^t P V = \min \quad (33)$$

onde:

$P$  é uma matriz quadrada, denominada matriz dos pesos, caracterizando a expressão 33, como uma forma quadrática.

Dando seqüência, designando por  $\bar{x}$  o valor adotado como estimativa da grandeza sobre a qual foram executadas  $n$  observações repetidas em condições supostamente similares, os resíduos são:

$$\bar{x} - l_i = v'_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

Admitindo que as observações sejam não-correlacionadas, a matriz  $P$  será diagonal e admitindo ainda que tais observações ofereçam o mesmo grau de confiança, a matriz  $P$

degenera-se para a matriz identidade I. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ):

$$f = V^t P V = V^t V = \sum (\bar{x} - l_i)^2 = \min \quad (35)$$

Igualando a derivada de f em relação a  $\bar{x}$  a zero, fica:

$$\frac{df}{dx} = 2 \sum (\bar{x} - l_i) = 0 \quad (36)$$

A expressão (36) pode ser escrita como:

$$(\bar{x} - l_1) + (\bar{x} - l_2) + \dots + (\bar{x} - l_n) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum l_i}{n} \quad (37)$$

A expressão (37) identifica  $\bar{x}$  como a média aritmética das n observações. Sem demonstrações, o MMQ fornece uma solução de variância mínima, assim, a matriz variância-covariância a ser fornecida pelo ajustamento, e cujos elementos diagonais são representativos da precisão do vetor dos valores ajustados, terá traço (soma dos elementos da diagonal de uma matriz) mínimo.

O MMQ pode ser dividido em três "sub-métodos" denominados: Método Paramétrico, Método dos Correlatos e Método Combinado.

No Método Paramétrico (ou Método das Observações Indiretas), os valores observados ajustados são expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados. No método dos Correlatos (ou Método das Equações de Condição) os valores observados ajustados ligam-se através de equações de condição. O Método Combinado reúne tanto parâmetros ajustados como valores observados ajustados ligados por uma função não explícita. O Método dos Correlatos não será tratado nestas notas de aula.

#### **4.1.1 Método Paramétrico**

No caso de observações diretas, as incógnitas são os valores observados ajustados. No caso de observações indiretas, objetiva-se estimar grandezas que se vinculam às observadas. Para distingui-las das primeiras é usual designá-las de **parâmetros**, o que explica a denominação do método.



Em algumas aplicações o modelo matemático adotado é não-linear. Com isso, o procedimento utilizado mais comum é linearizar o modelo mediante um desenvolvimento em série (geralmente a série de Taylor\* é utilizada).

Equações de Observação

Seja  $n$  o número de equações de observação e  $u$  o número de parâmetros:

$L_b$ : vetor ( $n \times 1$ ) dos valores observados;

$V$ : vetor ( $n \times 1$ ) dos resíduos;

$L_a$ : vetor ( $n \times 1$ ) dos valores ajustados:

$$L_a = L_b + V \tag{38}$$

$X_0$ : vetor ( $u \times 1$ ) cujos componentes são valores aproximados dos parâmetros;

$X$ : vetor correção ( $u \times 1$ )

$X_a$ : vetor dos parâmetros ajustados ( $u \times 1$ ):

$$X_a = X_0 + X \tag{39}$$

Neste método então, o modelo matemático fica:

$$L_a = F(X_a) \tag{40}$$

Substituindo as expressões (38) e (39) em (40), linearizando o segundo membro da expressão (40) com a fórmula de Taylor e desprezando os termos de mais altas ordens, fica:

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0} X \tag{41}$$

Designando a função dos parâmetros aproximados por  $L_0$ :

$$L_0 = F(X_0) \tag{42}$$

---

\* Série de Taylor  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  de  $f(x)$  com centro em  $x_0$ . Obs:  $f^{(n)}$  é a  $n$ -ésima derivada de  $f(x)$ .

e a matriz das derivadas parciais por A:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a = X_0} \quad (43)$$

a expressão (41) se escreve sucessivamente:

$$L_b + V = L_0 + AX \Rightarrow V = AX + L_0 - L_b \quad (44)$$

e finalmente fazendo:

$$L = L_0 - L_b \quad (45)$$

obtém-se o modelo matemático linearizado do Método dos Parâmetros:

$${}_n V_1 = {}_n A_u \cdot {}_n X_1 + {}_n L_1 \quad (46)$$

### Equações Normais

Minimizando a forma quadrática fundamental, obtém-se:

$$\phi = V^t P V = (AX + L)^t P (AX + L) = \min \quad (47)$$

$$\phi = (X^t A^t + L^t) P (AX + L) = X^t A^t P A X + X^t A^t P L + L^t P A X + L^t P L = \min \quad (48)$$

o 2º e o 3º membros da expressão (48) são iguais, então:

$$\phi = X^t A^t P A X + 2X^t A^t P L + L^t P L = \min \quad (49)$$

igualando a zero a derivada primeira de (49) em relação a X:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 2A^t P A X + 2A^t P L = 0 \quad (50)$$

$$A^t P A X + A^t P L = 0 \quad (51)$$

$$X = -(A^t P A)^{-1} A^t P L = 0 \quad (52)$$

fazendo:

$$N = A^t P A \quad (53)$$

$$U = A^t P L \quad (54)$$

substituindo as expressões (53) e (54) em (52):

$$X = -(N)^{-1} U \quad (55)$$

o vetor dos parâmetros ajustados fica:

$$X_a = X_0 + X \quad (56)$$

Uma vez que foi realizada a linearização do modelo devem-se repetir os cálculos até que as componentes do vetor  $X$  sejam desprezíveis sob alguma consideração. Quando o modelo utilizado é linear o processo iterativo não é necessário (por motivos óbvios) podendo com isso, ser utilizado quaisquer valores para as componentes do vetor  $X_0$ .

O diagrama abaixo mostra o processo iterativo:

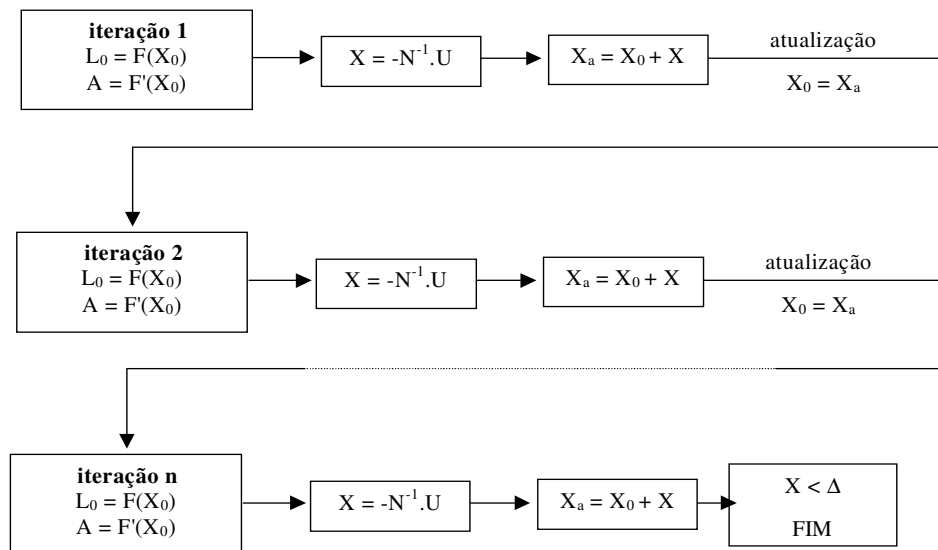


Figura 15 - Processo Iterativo para o MMQ sob o Método Paramétrico para modelos não-lineares.

Assim, a cada iteração faz-se necessário calcular A, L<sub>0</sub>, L, N, U e X. As observações L<sub>b</sub> e os pesos P permanecem constantes durante o processo iterativo.

É importante ressaltar que este processo de minimização é o Método do Gradiente (como já visto em Programação Não-Linear) e, portanto, é extremamente dependente das condições iniciais, que neste caso, é o vetor X<sub>0</sub> (vetor dos parâmetros aproximados). Com isso, uma boa estimativa a priori dos parâmetros aproximados pode ser fundamental para a convergência da solução para a solução ótima (mínimo global ao invés de mínimos locais).

### Matriz Variância-Covariância

Antes do ajustamento, necessita-se estimar a precisão das medidas efetuadas para compor a matriz variância-covariância dos valores observados ( $\Sigma L_b$ ) e a partir desta e da variância da unidade de peso a priori  $\sigma_0^2$ , obter a matriz dos pesos:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma L_b^{-1} \quad (57)$$

Após o ajustamento, pode-se estimar a variância da unidade de peso (variância a posteriori) e a matriz variância-covariância das variáveis aleatórias envolvidas no processo: X, X<sub>a</sub>, V, L<sub>a</sub>.

A matriz variância-covariância das correções  $\Sigma X$  pode ser deduzida a partir de:

$$X = -(N)^{-1}U = -N^{-1}A^tPL = -N^{-1}A^tP(L_0 - L_b) = -N^{-1}A^tPL_0 + N^{-1}A^tPL_b \quad (58)$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias:

$$\Sigma X = G \Sigma L_b G^t \quad (59)$$

onde:

$$G = N^{-1}A^tP \quad (60)$$

e por serem P e N<sup>-1</sup> matrizes simétricas:

$$G^t = P^t A (N^{-1})^t = P A N^{-1} \quad (61)$$

substituindo (61) em (59), fica:

$$\Sigma X = N^{-1} A^t P \Sigma L_b P A N^{-1} \quad (62)$$

considerando ainda que:

$$\Sigma L_b = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (63)$$

e:

$$\Sigma X = \sigma_0^2 N^{-1} A^t P P^{-1} P A N^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1} A^t P A N^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1} N N^{-1} \quad (64)$$

Uma vez que  $\hat{\sigma}_0^2$  é uma estimativa de  $\sigma_0^2$ , resulta:

$$\Sigma X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (65)$$

onde:

$\hat{\sigma}_0^2$  de acordo com a expressão (72).

A matriz variância-covariância dos parâmetros  $\Sigma X_a$  pode ser deduzida a partir de:

$$X_a = X_0 + X \quad (66)$$

sendo o vetor  $X_0$  constante:

$$\Sigma X_a = \Sigma X \quad (67)$$

A matriz variância-covariância dos valores observados ajustados  $\Sigma L_a$  pode ser deduzida a partir de:

$$L_a = L_b + V = L_b + AX + L = L_b + AX + L_0 - L_b \Rightarrow L_a = AX + L_0 \quad (68)$$

Aplicando a lei de propagação de covariâncias:

$$\Sigma L_a = A \Sigma X A^t \quad (69)$$

A matriz variância-covariância dos resíduos  $\Sigma V$  pode ser deduzida a partir de:

$$V = L_a - L_b \quad (70)$$

$$\Sigma V = \Sigma L_a - \Sigma L_b \quad (71)$$

Variância da Unidade de Peso

A Variância da Unidade de Peso a priori, independente do seu valor, não influencia o vetor das incógnitas X, portanto, seu valor pode ser escolhido arbitrariamente, desde que diferente de zero.

A Variância da Unidade de Peso a posteriori, aqui representada por  $\hat{\sigma}_0^2$  é estimada por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^t PV}{S} = \frac{V^t PV}{n - u} \tag{72}$$

Comparação entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$

Uma vez que o valor de  $\sigma_0^2$  não influencia X, pode-se adotar, sem perda de generalidade,  $\sigma_0^2=1$ , por exemplo. A discrepância entre o valor de  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$  (obtido após o ajustamento) pode ser utilizada como um indicador da qualidade do ajustamento.

Se houver discrepância entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$ , aplica-se um teste de hipótese baseado na distribuição de Qui-Quadrado  $\chi^2$  a fim de constatar se a discrepância é significativa a certo nível de significância\*. Uma resposta positiva indica que existem problemas no ajustamento.

A forma quadrática  $V^t \Sigma L_b^{-1} V$  tem distribuição de  $\chi^2$  com  $S=v$  graus de liberdade, isto é:

$$V^t \Sigma L_b^{-1} V \approx \chi^2(v) \tag{73}$$

ou, de forma análoga:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2 S}{\sigma_0^2} \approx \chi^2(v) \tag{74}$$

testa-se a hipótese básica (hipótese nula):

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \tag{75}$$

---

\* nível de significância  $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira})$  é a probabilidade máxima admitida para correr o risco de um erro Tipo I. A probabilidade de cometer um erro do Tipo II é  $\beta = P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$  e  $1 - \beta = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$  é conhecido como a Potência ou Poder do Teste. A grosso modo pode-se dizer que quanto menor o nível de significância, maior o intervalo de confiança e, portanto, maior dispersão em torno do valor estimado. O nível de significância deve ser fixado a priori.

contra a hipótese alternativa:

$$H_1 : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2 \quad (76)$$

compara-se o valor calculado:

$$\chi_*^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} v = \frac{V^t P V}{\sigma_0^2} \quad (77)$$

com o valor teórico (tabelado):

$$\chi_{v,1-\alpha}^2 \quad (78)$$

A hipótese básica ( $H_0$ ) é aceita, ao nível de significância  $\alpha$ , se:

$$\chi_*^2 < \chi_{v,1-\alpha}^2 \quad (79)$$

No caso contrário, deve-se proceder a uma análise cuidadosa do ajustamento: pode haver erro na matriz variância-covariância dos valores observados, ou podem os resíduos estar excessivamente grandes em decorrência de uma falta grosseira ou de erros sistemáticos, pode o modelo matemático não ser consistente com as observações, ou o sistema ser mal condicionado, etc...

Exemplo: ajustar uma reta em relação a um conjunto de observações. Este exemplo é o caso clássico de regressão, denominado **Regressão Linear**:

O modelo matemático é dado por:

$$y = ax + b \quad (80)$$

onde:

a e b são os parâmetros do modelo matemático (coeficiente angular e linear, respectivamente); e

x e y formam as coordenadas de um ponto no plano cartesiano.

O modelo matemático empregado no método paramétrico assume que  $L_a = F(X_a)$ , ou seja, as observações ajustadas são dadas explicitamente em função dos parâmetros. No entanto, o modelo na expressão (80) não está nesta forma. O procedimento, neste caso, mais adequado seria utilizar o Método Combinado, porém, considerando x isento de erros, esta variável pode ser considerada constante (do ponto de vista estatístico) e então, pode-se utilizar o Método Paramétrico.

Cada ponto observado fornece uma equação ( $y_1 = ax_1 + b$ ,  $y_2 = ax_2 + b$ , . . . ,  $y_n = ax_n + b$ ). O número de parâmetros é  $u = 2$  e o número de observações, mantendo ainda a generalidade neste aspecto, é  $n$ .

A matriz A fica:

$${}_n A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial a} & \frac{\partial y_1}{\partial b} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a} & \frac{\partial y_2}{\partial b} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial a} & \frac{\partial y_n}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

Devido ao modelo ser linear, pode-se escolher qualquer valor para os componentes do vetor  $X_0$ . A maneira mais simples é adotar todas as componentes deste vetor iguais a zero e, portanto, resultando em um vetor também nulo para  $L_0$ . O vetor L então fica:

$${}_n L_1 = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_n \end{bmatrix} \quad (82)$$

Assumindo que todas as observações possuem a mesma precisão, a matriz de pesos P degenera-se na matriz identidade. Assim, a matriz N, fica:

$${}_2 N_2 = A^t A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n 1 = n \end{bmatrix} \quad (83)$$

O vetor U fica:

$${}_2 U_1 = A^t L = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n x_i y_i \\ -\sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \quad (84)$$

O vetor X fica:



$${}_2X_1 = -(N)^{-1}U \quad (85)$$

E o vetor  $X_a$  é:

$${}_2X_{al} = X_0 + X \quad (86)$$

A tabela abaixo mostra um conjunto de dados observados.

Tabela 10 - Valores observados.		
Ponto	x	y
<b>1</b>	0	10.00
<b>2</b>	3.33	16.67
<b>3</b>	6.67	23.33
<b>4</b>	10.00	30.00

Para os valores dados na tabela 10, a matriz  $N$ ,  $N^{-1}$  e o vetor  $U$  ficam:

$$N = \begin{bmatrix} 155.56 & 20.00 \\ 20.00 & 4 \end{bmatrix} \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.09 \\ -0.09 & 0.70 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -494.20 \\ -78.18 \end{bmatrix} \quad (87)$$

O vetor  $X_a$  fica:

$$X_a = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 10.25 \end{bmatrix} \quad (88)$$

O vetor  $L_a$  (valores ajustados) fica:

$$L_a = \begin{bmatrix} 10.25 \\ 16.45 \\ 22.64 \\ 28.84 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Estes são os parâmetros que determinam a reta cuja somatória dos quadrados dos resíduos é mínimo. A reta ajustada fica:

$$y = 1.86x + 10.25 \quad (90)$$

Para gerar os dados da tabela 10, consideraram-se os parâmetros da reta  $a = 2$  e  $b = 10$  e acrescentou-se ruído branco uniforme. A estes valores denominou-se de observações. A figura 16 mostra os valores observados, a reta ajustada e a reta ideal (isenta de ruídos).

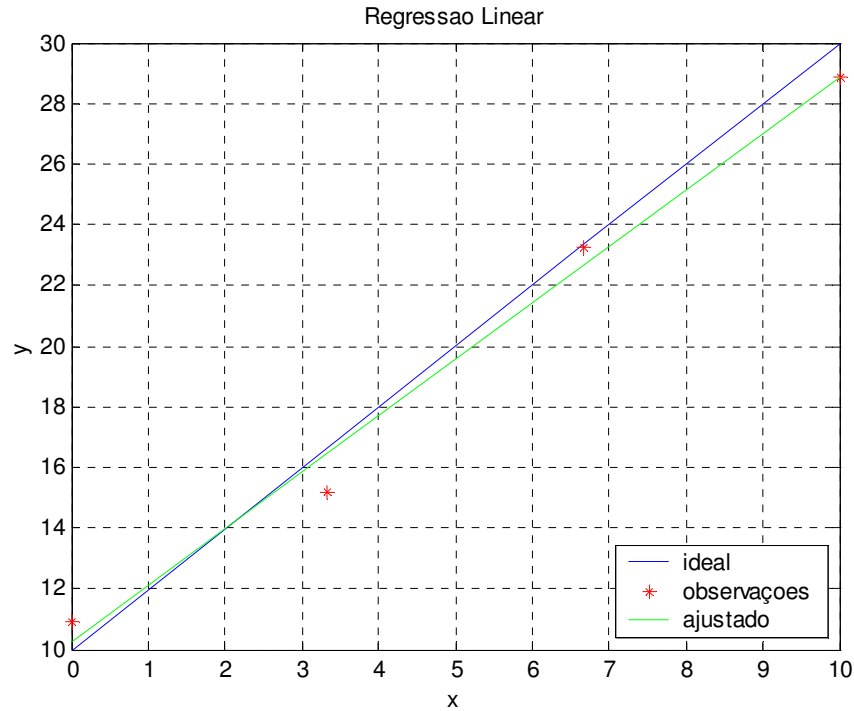


Figura 16 - Regressão Linear para o exemplo.

A matriz variância-covariância das correções  $\Sigma X$  e dos parâmetros  $\Sigma X_a$  é:

$$\Sigma X = \Sigma X_a = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.21 \\ -0.21 & 1.66 \end{bmatrix} \quad (91)$$

A matriz variância-covariância dos valores observados ajustados  $\Sigma L_a$  fica:

$$\Sigma L_a = \begin{bmatrix} 1.66 & 0.95 & 0.24 & -0.47 \\ 0.95 & 0.71 & 0.47 & 0.24 \\ 0.24 & 0.47 & 0.71 & 0.95 \\ -0.47 & 0.24 & 0.95 & 1.66 \end{bmatrix} \quad (92)$$

A matriz variância-covariância dos resíduos  $\Sigma V$  fica:

$$\Sigma V = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.95 & 0.24 & -0.47 \\ 0.95 & -0.29 & 0.47 & 0.24 \\ 0.24 & 0.47 & -0.29 & 0.95 \\ -0.47 & 0.24 & 0.95 & 0.66 \end{bmatrix} \quad (93)$$

A grandeza  $V^t P V$  resulta em:

$$V^t P V = 2.37 \quad (94)$$

O Qui-Quadrado calculado fica:

$$\chi^2_* = \frac{V^1 PV}{\sigma_0^2} = \frac{2.37}{1} = 2.37 \quad (95)$$

Os valores teóricos (tabelados) para  $n-u = 4-2 = 2$  graus de liberdades e nível de significância de 5% é:

$$\chi^2_{2,0.95} = 5.99 \quad (96)$$

A hipótese básica é aceita, ao nível de significância 5%, se:

$$\chi^2_* < \chi^2_{2,0.95} \Rightarrow 2.37 < 5.99 \quad (97)$$

Como a expressão (97) é verdadeira, a hipótese básica é aceita ao nível de significância 5%, e, portanto, o ajustamento não "apresenta problemas" e pode ser considerado aceito.

#### 4.1.2 Método Combinado

O Método Combinado pode ser entendido como um método de aplicações gerais, pois reúne tanto parâmetros ajustados como valores observados ajustados, porém ligados por uma função não explícita. Em notação formal:

$$F(X_a, L_a) = 0 \quad (98)$$

Fazendo:

$$V = L_a - L_b \quad (99)$$

e

$$X = X_a - X_0 \quad (100)$$

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} \quad (101)$$

$$B = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} \quad (102)$$

$$W = F(X_0, L_b) \quad (103)$$

A linearização do modelo é:

$$F(X_a, L_a) = F(X_0 + X, L_b + V) \approx F(X_0, L_b) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} (X_a - X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} (L_a - L_b) = 0 \quad (104)$$

portanto:

$$AX + BV + W = 0 \quad (105)$$

Considerando que existam  $n$  valores observados e  $u$  parâmetros ligados por  $r$  equações, resultam as seguintes dimensões para as matrizes:

$${}_r A_u \quad X_1 + {}_r B_n \quad V_1 + {}_r W_1 = {}_r 0_1 \quad (106)$$

Tem-se, portanto,  $S = r - u$  graus de liberdade, sendo necessário  $n > r - u$ .

### Equações Normais

Além de minimizar a forma quadrática fundamental, deve-se proceder de maneira que os resíduos (dos valores observados) e as correções  $X$  (dos parâmetros aproximados) atendam à injunção representada por (105). Utilizando multiplicadores de Lagrange (como em Programação Não Linear), define-se a função:

$$\phi = V^t P V - 2K^t (AX + BV + W) = \min \quad (107)$$

onde:

$K$  é o vetor cujas componentes são os multiplicadores de Lagrange (ou dos correlatos).

Anulando as derivadas parciais em relação a  $V$ ,  $K$  e  $X$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2PV - 2B^t K \Rightarrow PV - B^t K = 0 \quad (108)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K} = -2(AX + BV + W) \Rightarrow AX + BV + W = 0 \quad (109)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -2A^t K \Rightarrow A^t K = 0 \quad (110)$$

As equações matriciais (108), (109) e (110) representam um conjunto de  $n + r + u$  equações algébricas envolvendo  $n + r + u$  incógnitas:  $n$  resíduos ( $v$ ),  $r$  correlatos ( $k$ ) e  $u$  parâmetros ( $x$ ). Ou, mais concisamente, as três equações matriciais mencionadas envolvem três incógnitas, os vetores  $V$ ,  $K$  e  $X$ , e podem ser reunidas em uma hipermatriz:

$$\begin{bmatrix} P & -B^t & 0 \\ B & 0 & A \\ 0 & A^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ K \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Resolvendo o sistema acima (não demonstrado), resulta:

$$X = -(A^t M^{-1} A)^{-1} A^t M^{-1} W \quad (112)$$

onde:

$$M = B P^{-1} B^t \quad (113)$$

Obtida as componentes  $x_i$  do vetor das correções  $X$  através de (112) a seqüência pode ser:

$$X_a = X_0 + X \quad (114)$$

$$K = -M^{-1}(AX + W) \quad (115)$$

$$V = P^{-1}B^t K \quad (116)$$

$$L_a = L_b + V \quad (117)$$

Para modelos não-lineares, faz-se necessário utilizar um processo iterativo de minimização. O diagrama abaixo mostra o processo iterativo (análogo ao do Método Paramétrico):

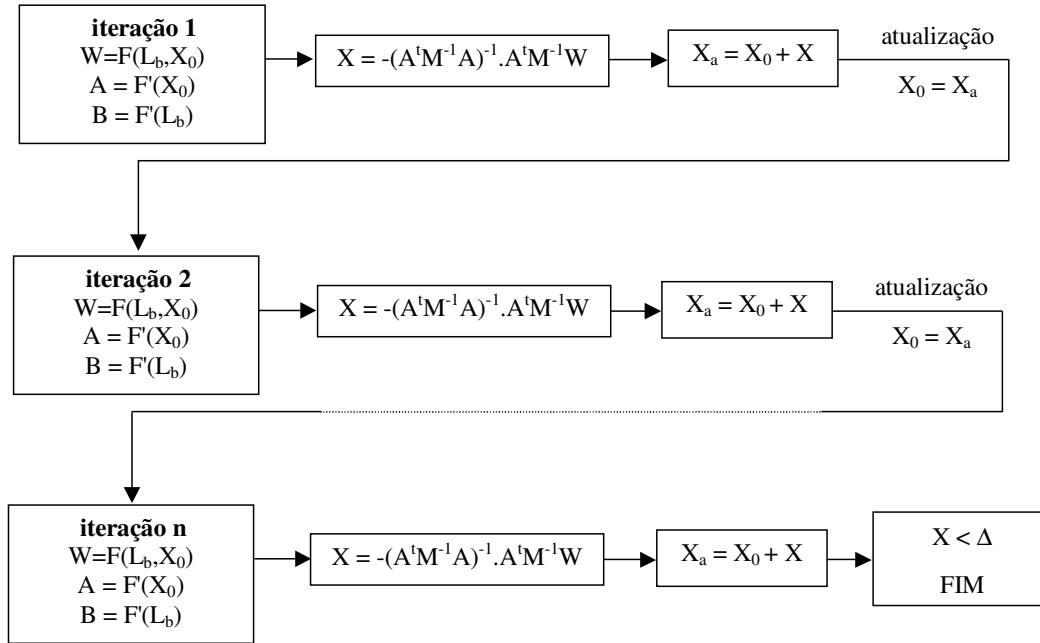


Figura 17 - Processo Iterativo para o MMQ sob o Método Combinado para modelos não-lineares.

### Matriz Variância-Covariância

As matrizes Variância-Covariâncias serão dadas sem demonstração.

A matriz variância-covariância dos parâmetros  $\Sigma X_a$  é dada por:

$$\Sigma X_a = \Sigma X = \hat{\sigma}_0^2 (A^t M^{-1} A)^{-1} \quad (118)$$

onde:

$\hat{\sigma}_0^2$  de acordo com a expressão (122).

A matriz variância-covariância dos valores observados ajustados  $\Sigma L_a$  é dada por:

$$\Sigma L_a = \hat{\sigma}_0^2 \left[ P^{-1} + P^{-1} B^t M^{-1} A (A^t M^{-1} A)^{-1} A^t M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^t M^{-1} B P^{-1} \right] \quad (119)$$

A matriz variância-covariância dos resíduos  $\Sigma V$  é dada por:

$$\Sigma V = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} - \Sigma L_a \quad (120)$$

A matriz variância-covariância do erro de fechamento  $\Sigma W$  é dada por:

$$\Sigma W = \hat{\sigma}_0^2 M \quad (121)$$

Variância da Unidade de Peso

A Variância da Unidade de Peso a posteriori, aqui representada por  $\hat{\sigma}_0^2$  é estimada por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V'PV}{S} = \frac{V'PV}{r-u} \quad (122)$$

Comparação entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$

Idêntico ao realizado para o Método Paramétrico.

Apêndice

Tabela A1 - Percentis da Distribuição de Qui-Quadrado  $\chi^2_{v,1-\alpha}$

P	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
v												
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,10	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	0,58	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	1,21	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,92	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,67	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,45	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	13,70	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,17	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,04	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,91	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	12,79	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	13,68	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	14,56	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	15,45	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	16,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	17,24	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
35	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	29,05	40,22	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	45,62	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
45	24,31	25,90	28,37	30,61	33,35	38,29	50,98	57,51	61,66	65,41	69,96	73,17
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
55	31,73	33,57	36,40	38,96	42,06	47,61	61,67	68,80	73,31	77,38	82,29	85,75
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	52,29	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
65	39,38	41,44	44,60	47,45	50,88	56,99	72,28	79,97	84,82	89,18	94,42	98,10
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
75	47,21	49,48	52,94	56,05	59,79	66,42	82,86	91,06	96,22	100,84	106,39	110,29
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,14	88,13	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
85	55,17	57,63	61,39	64,75	68,78	75,88	93,39	102,08	107,52	112,39	118,24	122,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	80,62	98,65	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
95	63,25	65,90	69,92	73,52	77,82	85,38	103,90	113,04	118,75	123,86	129,97	134,25
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	90,13	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17
110	75,55	78,46	82,87	86,79	91,47	99,67	119,61	129,39	135,48	140,92	147,41	151,95
120	83,85	86,92	91,57	95,70	100,62	109,22	130,05	140,23	146,57	152,21	158,95	163,65
130	92,22	95,45	100,33	104,66	109,81	118,79	140,48	151,05	157,61	163,45	170,42	175,28
140	100,65	104,03	109,14	113,66	119,03	128,38	150,89	161,83	168,61	174,65	181,84	186,85



Modelagem e Simulação - Modelos de Previsão

<b>150</b>	109,14	112,67	117,98	122,69	128,28	137,98	161,29	172,58	179,58	185,80	193,21	198,36
<b>160</b>	117,68	121,35	126,87	131,76	137,55	147,60	171,68	183,31	190,52	196,92	204,53	209,82
<b>170</b>	126,26	130,06	135,79	140,85	146,84	157,23	182,05	194,02	201,42	208,00	215,81	221,24
<b>180</b>	134,88	138,82	144,74	149,97	156,15	166,87	192,41	204,70	212,30	219,04	227,06	232,62
<b>190</b>	143,55	147,61	153,72	159,11	165,49	176,51	202,76	215,37	223,16	230,06	238,27	243,96
<b>200</b>	152,24	156,43	162,73	168,28	174,84	186,17	213,10	226,02	233,99	241,06	249,45	255,26
<b>300</b>	240,66	245,97	253,91	260,88	269,07	283,14	316,14	331,79	341,40	349,87	359,91	366,84
<b>400</b>	330,90	337,16	346,48	354,64	364,21	380,58	418,70	436,65	447,63	457,31	468,72	476,61
<b>500</b>	422,30	429,39	439,94	449,15	459,93	478,32	520,95	540,93	553,13	563,85	576,49	585,21
<b>600</b>	514,53	522,37	534,02	544,18	556,06	576,29	622,99	644,80	658,09	669,77	683,52	692,98
<b>700</b>	607,38	615,91	628,58	639,61	652,50	674,41	724,86	748,36	762,66	775,21	789,97	800,13
<b>800</b>	700,73	709,90	723,51	735,36	749,19	772,67	826,60	851,67	866,91	880,28	895,98	906,79
<b>900</b>	794,48	804,25	818,76	831,37	846,07	871,03	928,24	954,78	970,90	985,03	1001,63	1013,04

FONTE:

Seções 1, 2 e 3: Hiller & Lieberman, CAP. 20

Seção 4: Camil Gemael. Introdução ao Ajustamento de Observações, Editora UFPR, 1994.

**Exercícios - Modelos de Previsão**

qualquer erro, favor enviar e-mail para fernog@engprod.ujf.br

- 1) Uma companhia tem as seguintes vendas durante os cinco últimos meses: 5, 17, 29, 41. O gerente de vendas agora quer uma previsão das vendas no próximo mês.
  - a) Qual o valor estimado para o Método da Média Móvel com os 3 meses mais recentes ?
  - b) Qual o valor estimado para o Método da Média Móvel com o último mês mais recente?
  - c) Qual o valor estimado para o Método de Suavização Exponencial com  $\alpha = 0.3$ ?
  
- 2) Uma loja possui os seguintes valores de lucros nos últimos 21 dias: 1,1,13,78,25,1,43,65, 33,10,1,11,40,81,29,1,27,43,43,24. Qual o lucro previsto para o próximo dia considerando:
  - a) O Método da Média Móvel com os últimos 3 dias?
  - b) O Método de Suavização Exponencial com  $\alpha = 0.3$ ?
  - c) O mesmo que b), porém considerando sazonalidade.
  
- 3) Quais os parâmetros ótimos (segundo o critério de Mínimos Quadrados) de um polinômio de 2º grau para os seguintes valores observados:

x	y
-1	-0.6366
-0.5	1.9626
0	2.8426
0.5	2.8501
1	1.2466

- 4) Faça um programa que calcule a previsão dos índices de inflação, poupança, IGPM, IPC e cotação do dólar. Utilize o método de média móvel e suavização exponencial. Determine também critérios para definir os parâmetros ótimos utilizados nos métodos implementados.

**Respostas**

1.a)  
29

1.b)  
41

1.c)  
22.6040

2.a)  
36.6667

2.b)  
31.7145

2.d)  
1.030

3)  
a = -2.6509  
b = 0.9308  
c = 2.9785