ANÁLISE MULTICRITÉRIO COMO FERRAMENTA NO AUXÍLIO À AQUISIÇÃO DE AÇÕES

Renan Augusto Dembogurski

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DE CURSO DE ENGENHARIA
DE PRODUÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA PRODUÇÃO

Aprovada por:

Prof. José Geraldo Ferreira, M.Sc.

Prof. Luciano Faria, B.Sc.

Prof. Fernando Marques de Almeida Nogueira, Dr.Sc.

JUIZ DE FORA, MG - BRASIL
NOVEMBRO 2008

DEMBOGURSKI, RENAN AUGUSTO

Análise multicritério como ferramenta
no auxílio à aquisição de ações

[Minas Gerais] 2008. IX, 33 p. 29,7 cm
(EPD/UFJF, Graduação, Engenharia de Produção, 2008) Monografia - Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Engenharia de Produção

1. Análise multicritério,
2. Escolha de Portfolio

I. EPD/UFJF   II. Título (série)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à todos que sempre me apoiaram de uma forma ou outra.

À minha mãe Maria, que sempre me ensinou a buscar o melhor caminho.

Ao meu irmão Bruno, um amigo para todas as horas.

À minha namorada Renata, por me fazer feliz todos os dias.

AGRADECIMENTO

Agradeço à Deus por tornar este trabalho possível, à todos os professores que contribuíram para o meu aprendizado e aos amigos verdadeiros ao longo do caminho em especial Rodrigo, Eduardo, Carlos, Felipe, Tadeu e Clito.

Resumo da monografia apresentada à Coordenação de Curso de Engenharia de Produção como parte dos requisitos necessários para a graduação em Engenharia Produção.

ANÁLISE MULTICRITÉRIO COMO FERRAMENTA NO AUXÍLIO À AQUISIÇÃO DE AÇÕES

Renan Augusto Dembogurski

Outubro/2008

Orientador: José Geraldo Ferreira

Curso: Engenharia de Produção

Resumo: Este documento visa descrever uma proposta de trabalho de conclusão de curso em Engenharia de Produção da UFJF, na qual são explicitados os objetivos, justificativas, descrição, metodologia e referências bibliográficas. A tomada de decisão é utilizada quando há um problema de objetivos conflitantes a ser resolvido e devido a sua generalidade se encontra em várias áreas do conhecimento incluindo finanças. Existem vários métodos relacionados a tais problemas de decisão, sendo um deles a análise multicritério, ou apoio multicritério à decisão (AMD), que representa uma maneira de analisar vários critérios associados a um problema. O trabalho aqui proposto mostrou como a análise multicritério se relaciona a escolha de um portfólio de ações e, de maneira simplificada, comparou o modelo de Markowitz para escolha de portfólios com um modelo de otimização multicritério para o mesmo fim. O objetivo de comparar os dois modelos e fornecer um entendimento inicial sobre o mercado de ações e seu funcionamento é alcançado ao final do trabalho.

Palavras-chaves: análise multicritério, escolha de portfolio, otimização multicritério.

Abstract of Graduation Final Project presented to Production Engineering Department as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor in Production Engineering.

MULTICRITERIA ANALYSIS AS TOOL TO AID IN THE ACQUISITION OF STOCKS

Renan Augusto Dembogurski

Outubro/2008

Advisor: José Geraldo Ferreira

Department: Production Engineering

Abstract: This document aims to describe a proposal for completion of course work in Production Engineering from UFJF, in witch are explained the goals, justifications, description, methodology and references. Decision-making is used when there is a problem of conflicting objectives to be resolved and because of its generality resides in various areas of knowledge including finance. There are several methods related to such decision problems, one being the multicriteria analysis, or multicriteria decision analysis (MCDA), which represents a way to analyze several criteria associated with a problem. The work here proposed showed how the multicriteria analysis is related to choosing a portfolio of stocks, and in a simplified way, compared the Markowitz model for choosing portfolios with a multicriteria optimization model for the same purpose. The objetive of comparing the two models and provide an initial understanding on the stock market and its operation is achieved at the end of the work.

Key words: multicriteria analysis, choice of portfolio, multicriteria optimization.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

Capítulo I
INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As constantes mudanças que ocorrem atualmente nos mercados financeiros, contribuem para existência de diversas situações em que vários fatores simultâneos e conflitantes, precisem ser avaliados pelo investidor para que seja feita a tomada de decisão. Segundo GOMES, GOMES e ALMEIDA (2006), a teoria da decisão foi proposta para auxiliar pessoas a tomarem decisões melhores, frente as suas preferências básicas.

Neste contexto, é plausível esperar que a fim de melhorar suas decisões, o investidor utilize ferramentas cada vez mais ligadas à pesquisa operacional e a otimização matemática. A MCDA (*Multiple Criteria Decision Analysis*) é uma das técnicas utilizadas na teoria da decisão para auxiliar o investidor neste aspecto.

O gerenciamento de portfolios é, em particular, um campo da área de finanças que conta com a utilização do MCDA para formular e resolver problemas de alocação de recursos.

2. OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é a utilização de um modelo de otimização multicritério como ferramenta na escolha de ações para formação de um portfolio, através da construção de um modelo de preferências e comparação entre alternativas.

3. JUSTIFICATIVAS

A importância deste trabalho reside no fato de que não será utilizada apenas a teoria do portfolio de Markowitz na determinação da fronteira de eficiência. Os dois critérios utilizados no trabalho e na teoria do portfolio, retorno e risco, serão incorporados no modelo linear para modelagem e resolução do problema. Outra característica motivadora deste trabalho é o caráter de customização proporcionado pelo método utilizado, levando em conta que o investidor pode transcrever suas preferências para o modelo.

4. CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno do trabalho se restringem ao mercado nacional de ações, representado pela BOVESPA, Bolsa de Valores de São Paulo.

5. METODOLOGIA

O trabalho proposto representa uma pesquisa básica de caráter operacional, ou seja, busca obter a solução de um problema complexo através de um método, estudando os diversos aspectos envolvidos.

O início do trabalho é marcado pela revisão bibliográfica sobre os principais assuntos tratados, sendo possível citar a teoria do portfolio, a tomada de decisão, a combinação dos métodos multicritério com a área de finanças e a análise de portfolio.

Para determinar os retornos e riscos associados às empresas utilizadas no trabalho, é feito um levantamento dos dados históricos, ou são feitas estimativas para o futuro de acordo com cenários possíveis. Posteriormente, são calculadas medidas para avaliar os dados, como média, desvio padrão, variância e covariância.

Feitas as devidas análises é, em seguida, estudada e utilizada a teoria do portfolio para relacionar pares de ações e determinar uma primeira classificação dos portfolios. Estes podem ser compostos por uma ou várias ações diferentes, sendo que cada uma possui um peso na carteira. Em seguida é plotado um gráfico Desvio padrão x Retorno contendo a região onde se encontram os portfolios e calcula-se a fronteira de eficiência onde se encontram as escolhas "ótimas".

Após a determinação da fronteira, cabe ao investidor definir o melhor portfolio de acordo com sua aversão ao risco. Uma forma de determinar o ponto ótimo da fronteira de eficiência é utilizar a combinação de uma carteira composta de ativos com risco e um ativo livre de risco.

O modelo clássico não leva em consideração as preferências do investidor, então em uma segunda etapa será proposto um modelo de otimização multicritério que possui um sistema de preferências e consegue, da mesma forma que a teoria clássica, incorporar o retorno e risco maximizando várias funções objetivo.

O modelo utilizado neste trabalho pode ser apresentado na forma generalizada por:

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & F_j(x) & \\ \text{sujeito a} & f_i(x) \leq 0, & i = 1,\ldots,m \\ & h_i(x) = 0, & i = 1,\ldots,p \end{array} \tag{1}$$

De forma que

$$F_j(x) = \{F_1(x), F_2(x), F_3(Rx),, \ldots, F_q(x)\} \tag{2}$$

Sendo $F_j(x)$ o número de objetivos ou critérios utilizados, $f_i(x)$ as restrições do problema e $h_i(x)$ um conjunto de funções afins. O presente trabalho utilizou apenas 2 critérios, retorno e risco, portanto j = 2. De forma mais específica é possível reescrever o problema da seguinte maneira

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & (F_1(x), F_2(x)) = (-\overline{p}^T x + \mu x^T \Sigma x) & \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \text{para} \\
 & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array} \tag{3}
$$

A única restrição incorporada ao problema é que a soma dos pesos alocados a cada ativo seja igual a 1 (um). O problema então pode ser definido pela alocação de recursos finitos a fim de maximizar o retorno e minimizar o risco ao mesmo tempo. É possível demonstrar um exemplo numérico da seguinte forma:

$$\text{minimize} \quad -4x_1 - 3x_2 + \mu(0{,}5x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}4x_1x_2 + 0{,}6x_2^2) \tag{4}$$

$$\text{sujeito a} \quad x_1 + x_2 = 1 \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

A função demonstrada em (4) diz respeito à função objetivo, o primeiro termo seria a minimização do valor negativo do retorno (ou maximização do valor positivo) e o segundo termo seria a minimização do valor positivo do risco (ou maximização do valor negativo). Vale ressaltar que o termo μ, definido como o coeficiente de *trade-off* entre retorno e risco, na verdade é a divisão entre dois termos λ_1 e λ_2 de forma que $\mu = \lambda_2 / \lambda_1$. Cada um destes termos está associado a um critério ou objetivo e serve para ponderar a importância do critério na avaliação (sua função será detalhada no Capítulo 4). $\mu = \lambda_2 / \lambda_1$

Determinado o modelo, é necessário realizar uma otimização sequencial do problema até ser encontrado o x ótimo. Segundo Boyd & Vandenberghe (2004) um vetor x^* é chamado ótimo, ou a solução do problema (1) se ele possui o menor valor objetivo entre todos os vetores que satisfazem as restrições.

Depois de encontrada a resposta para o problema, de acordo com o método clássico e a otimização multicritério, é possível a comparação entre os modelos. As devidas considerações encontram-se no Capítulo 4. Com relação às medidas de risco foram utilizadas medidas lineares além da medida quadrática padrão (variância do portfolio) de forma a enriquecer o trabalho proposto.

Vale ressaltar também que para os cálculos deste trabalho foram coletados inúmeros valores de retornos através do software Economática, associados as seguintes ações: Abc Brasil PN, Alfa Holding PNA, Ambev PN, Banestes ON, Petrobrás ON, Brasil T Par PN, Bradesco PN, Vale R Doce ON, Usiminas PNA e Gerdau PN.

A seguinte estrutura de capítulos pode ser apresentada para descrever Trabalho de Conclusão de Curso aqui apresentado:

Capítulo I - Introdução

Capítulo inicial onde são abordados: objetivos, justificativas, condições de contorno, metodologia e cronograma de execução do projeto. Encontra-se neste capítulo as principais definições da monografia.

Capítulo II – Revisão Bibliográfica

Nesta fase são descritos os principais temas de referência do trabalho. Ou seja, as áreas de conhecimento que dão sustentação teórica e prática a este estudo são contempladas e mostradas.

Capítulo III – Descrição do Problema

O problema é relacionado com o trabalho proposto nesta parte, são apresentadas as características do problema e são apresentados os dois métodos para resolvê-lo. Há também uma breve descrição dos *softwares* utilizados.

Capítulo IV - Desenvolvimento

Capítulo fundamental, em que todo o estudo é apresentado, de forma detalhada. É nesta etapa que se encontra uma série de análises necessárias para o sucesso desse projeto.

Capítulo V – Conclusões e Considerações Finais

Fase destinada a apresentação das conclusões do trabalho, com exposição e avaliação dos resultados obtidos.

Capítulo VI – Referências Bibliográficas

Literatura e fontes de consulta utilizadas ao longo da monografia.

Capítulo II
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1. TEORIA DO PORTFOLIO

Segundo MARKOWITZ (1952) a escolha de um portfolio é dividida em duas etapas: a primeira representa a análise dos dados históricos e expectativas para o futuro e a segunda avalia quais expectativas são relevantes e, assim, é feita a escolha do portfolio. Os dois critérios relevantes a serem utilizados para determinar quais ativos devem entrar no portfolio, ainda segundo o autor, são o retorno esperado (a ser maximizado) e o risco (a ser minimizado).

O retorno esperado de uma ação pode ser descrito através da distribuição de probabilidade dos possíveis retornos

$$E(R) = \sum_{i=1}^{n} Pi \quad x \quad Ri \tag{7}$$

Sendo, P_i a probabilidade associada a variável aleatória R_i (retorno em um período "i"), que pode assumir um número finito de valores. Considerando apenas um estado a priori, é possível determinar o retorno esperado através de:

$$E(R) = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{8}$$

Em que R_i são os retornos obtidos em um determinado período. Segundo ROSS (2002) vários tipos de retorno podem ser descritos:

- *Retornos absolutos*

Consiste na soma entre os dividendos e o ganho (ou perda de capital), sendo o último calculado pela diferença entre o valor final de mercado e a aplicação inicial.

- *Retornos percentuais*

São calculados pela soma entre a taxa de dividendo e o ganho de capital. A taxa de dividendo pode ser obtida pela divisão entre o dividendo pago no período e o preço da ação no início do período, já o ganho de capital neste caso é determinado pela divisão entre a variação do preço da ação e o preço inicial.

- *Retornos acumulados*

São obtidos através de dois cálculos: primeiro soma-se o capital investido e o respectivo retorno em um determinado período para todos os períodos envolvidos, depois se multiplicam todos os termos obtidos.

ROSS (2002) afirma que, a expectativa, ou retorno esperado, de um indivíduo pode ser calculado como o retorno médio por período que um título tenha obtido.

O risco é uma medida de incerteza associada a uma ação. De acordo com MARKOWITZ (1952) a análise do risco pode ser feita através da variância, calculada por:

$$V(R) = \sum_{i=1}^{n} (R_i - E(R))^2 \ x \quad Pi \tag{9}$$

Em que R_i é o retorno em um determinado período, E(R) é o retorno esperado, ou retorno médio, e P_i é a probabilidade de ocorrência do retorno R_i. A variância associada à outra medida de dispersão, o desvio padrão, é responsável por indicar a volatilidade de uma ação isolada. Este fato é importante, porém não suficiente para montagem de um portfolio, pois um investidor alocando recursos em diversas ações provavelmente gostaria de saber também, a relação das ações entre si. Segundo ROSS (2002), para medir o grau de associação entre duas ações deve ser usada a covariância.

A covariância entre duas ações *a* e *b* pode ser descrita por

$$Cov(a,b) = E\left[\left(Ra - E\left(Ra\right)\right)x\left(Rb - E\left(Rb\right)\right)\right] \tag{10}$$

Em que Ra é o retorno efetivo e E(Ra) é o retorno esperado da ação *a*.

Neste contexto, é necessário lembrar que um investidor possivelmente gostaria de possuir mais de duas ações a fim de diversificar seu portfolio e diminuir seu risco, sendo assim, é necessário ampliar as fórmulas apresentadas acima para um portfolio contendo várias ações.

O retorno esperado de um portfolio contendo várias ações pode ser descrito por

$$\text{Valor esperado da carteira} = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad x \quad R_i$$

Onde, Xi representa os pesos alocados para cada ação *i*. Por definição a soma dos pesos deve ser igual a 1 (um).

Para explicar e calcular a variância e o desvio padrão de um portfolio possuindo várias ações, ROSS (2002) propõe a seguinte tabela.

Ação	1	2	3	…	N
1	$X_1^2\sigma_1^2$	$X_1X_2Cov(R_1,R_2)$	$X_1X_3Cov(R_1,R_3)$		$X_1X_nCov(R_1,R_n)$
2	$X_2X_1Cov(R_2,R_1)$	$X_2^2\sigma_2^2$	$X_2X_3Cov(R_2,R_3)$		$X_2X_nCov(R_2,R_n)$
3	$X_3X_1Cov(R_3,R_1)$	$X_3X_2Cov(R_3,R_2)$	$X_3^2\sigma_3^2$		$X_3X_nCov(R_3,R_n)$
$\vdots$					
N	$X_nX_1Cov(R_n,R_1)$	$X_nX_2Cov(R_n,R_2)$	$X_nX_3Cov(R_n,R_3)$		$X_n^2\sigma_n^2$

Tabela 1 – Matriz usada para calcular a variância de uma carteira

Onde:

σ_i - É o desvio padrão dos retornos da ação *i*.

$Cov(R_i,R_j)$ - É a covariância entre os retornos da ação *i* e da ação *j*.

Através desta matriz é possível determinar a variância do portfolio, somando-se todas as células. O desvio padrão do portfolio é simplesmente a raiz quadrada da variância do mesmo.

A escolha de um portfolio dotado de diversas ações é constituída de uma etapa adicional, a análise de uma região com possíveis alternativas representando os diversos pesos que cada uma das ações pode assumir.

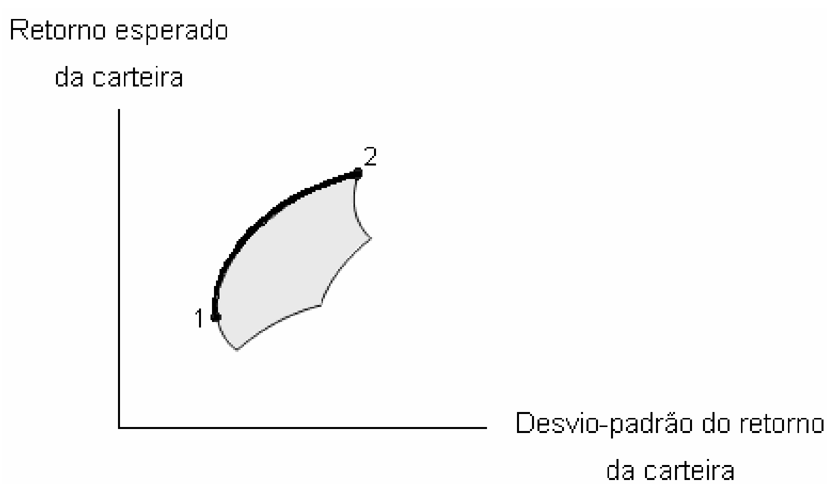

Figura 1 – Conjunto viável de potfólios dotados de várias ações

A fronteira eficiente é situada na linha entre os pontos 1 e 2, e representa o conjunto de portfolios de melhor relação retorno-risco possível. Os pontos pertencentes a esta linha são indiferentes para o investidor, ou seja, apenas o grau de aversão ao risco deste, fará com que um determinado ponto seja escolhido ao invés de outro.

2. TOMADA DE DECISÂO

A tomada de decisão é um fator presente no dia-a-dia das pessoas, segundo GOMES *et al.* (2006) é necessária sempre que houver mais de uma alternativa para um certo problema. É plausível que o decisor queira escolher a melhor alternativa sempre, o que geralmente não é uma tarefa fácil.

Da mesma forma, segundo ZELENY (1994), os objetivos conflitantes impedem a solução ótima cabendo ao decisor a procura do “melhor compromisso”. É neste aspecto que se torna possível associar outro aspecto da tomada de decisão, a subjetividade. Cada decisor terá suas próprias preferências e, mesmo diante de um mesmo problema, possivelmente optaria por alternativas diferentes.

Outra característica importante no processo de tomada de decisão é o papel desempenhado por cada pessoa envolvida neste mesmo processo. Segundo GOMES *et al.* (2006) é possível dividir tais pessoas em decisor, facilitador e analista.

(a) Decisor (es): são pessoas que influenciam o processo de tomada de decisão e podem ou não possuir poder direto de decisão. De acordo com GOMES *et al. apud* BANA e COSTA (1993) existem dois tipos de decisores, os agidos que não tomam decisões sobre o programa apenas participam dele, e os intervenientes, que tomam decisões sobre o programa e atuam sobre ele para que ocorram mudanças.

(b) Facilitador (es): são pessoas que possuem grande compreensão do problema e servem para unir e focalizar as atenções dos decisores em um ponto comum. Deve manter uma postura neutra e tentar abstrair-se do sistema de valores, para não influenciar os demais intervenientes (GOMES *et al.*, 2006).

(c) Analista(s): são pessoas que auxiliam na estruturação do problema. A maior parte do trabalho do analista consiste na formulação do problema, e em ajudar as pessoas a visualizar o problema (GOMES *et al.*, 2006).

Definidos os papéis de cada pessoa, vale ressaltar as características que influenciam diretamente o processo decisório além do papel das pessoas, como o tipo de sistema utilizado, o número de pessoas envolvidas, a cultura das mesmas, a complexidade do problema e etc.

2.1 MÉTODOS E METODOLOGIAS APLICÁVEIS AO PROCESSO DECISÓRIO

Existem vários métodos e metodologias propostos por diversos autores que podem ser utilizados no processo decisório. GOMES *et al.* (2006) relata vários deles, sendo que serão citados resumidamente a seguir os mais importantes de acordo com suas etapas:

(a) Modelo de processo de decisão por Auren Uris (1989):

- Análise e identificação da situação e do problema;
- Desenvolvimento de alternativas;
- Comparação entre alternativas;
- Classificação dos riscos de cada alternativa;
- Escolha da melhor alternativa;
- Execução e avaliação

(b) Método cartesiano:

- Não aceitar hipótese até saber se é realmente verdadeira;
- Dividir o problema em quantas partes for possível;
- Agregar dificuldade aos poucos, atingindo os objetivos mais fáceis primeiro;
- Verificar e revisar todo o processo

(c) Metodologia sintética para abordagem de problemas (GOMES, 1999):

- Identificação, formulação e análise do problema;
- Definição de objetivos e preferências;
- Identificação das restrições e/ou relaxações;
- Identificar critérios e/ou atributos de decisão;
- Construção e teste de um modelo para estudo;
- Realimentação do modelo de estudo;
- Estabelecimento de medidas de eficácia;
- Identificação de alternativas que solucionem o problema;
- Mensuração das conseqüências das alternativas e do grau que permite alcançar o objetivo;
- Comparação das alternativas;
- Escolha(s) da(s) alternativa (as);
- Implementação;
- Realimentação

As metodologias apresentadas acima têm o intuito de direcionar o tomador de decisão ao longo do processo decisório, estruturando o problema primeiro para depois resolvê-lo.

2.2 MODELAGEM DAS PREFERÊNCIAS

Outra característica importante no processo de tomada de decisão é o modelo de preferências, que serve para comparação entre duas alternativas. As situações fundamentais e as propriedades binárias relativas ao modelo de preferência podem ser encontradas em GOMES *et al.* (2006) e serão enumeradas a seguir:

1) Propriedades

a) Reflexividade - $\forall a \in A$, $a\ H\ a$ ou $(a,a) \in B$;

b) Irreflexividade - $\forall a \in A$, não $[a\ H\ a]$ ou $(a,a) \notin B$;

c) Simetria - $\forall a, b \in A$, $a\ H\ b \Rightarrow b\ H\ a$ ou $(a,b) \in B \Rightarrow (b,a) \in B$;

d) Assimetria - $\forall a, b \in A$, $a\ H\ b \Rightarrow$ não $[b\ H\ a]$ ou $(a,b) \in B \Rightarrow (b,a) \notin B$;

e) Transitividade - $\forall a, b, c \in A$, $[a\ H\ b$ e $b\ H\ c] \Rightarrow a\ H\ c$ ou $(a,b) \in B$ e $(b,c) \in B \Rightarrow (a,c) \in B$.

2) Situações Fundamentais

a) Indiferença (I) – “existem razões claras e positivas que justificam uma equivalência entre duas opções. A relação binária *I* é simétrica e reflexiva”;

b) Preferência estrita (P) – “existem razões claras e positivas que justificam uma preferência significativa em favor de uma (bem identificada) das duas ações. A relação binária *P* é assimétrica e irreflexiva”;

c) Preferência fraca (*Q*) – “existem razões claras e positivas que não implicam uma preferência estrita em favor de uma (bem identificada) das duas ações, mas essas razões são suficientes para deduzirmos que seja uma preferência estrita em favor da outra, seja uma indiferença entre essas duas ações (essas razões não permitem isolar uma das duas situações precedentes – Indiferença e Preferência estrita – como sendo a única apropriada). A relação binária *Q* é assimétrica e irreflexiva”;

d) Incomparabilidade (*R* ou *NC*) – “não existem razões claras e positivas que justifiquem uma das três situações precedentes. A relação binária *R* é simétrica e irreflexiva”.

Vale ressaltar que *H* é uma relação binária sobre um conjunto *A* quando é feita a partição deste mesmo conjunto em pares ordenados *A* x *A*.

3. ANÁLISE MULTICRITÉRIO COMBINADA COM FINANÇAS

Existem vários trabalhos publicados relacionando a Tomada de Decisão Multicritério (MCDM) com a área de finanças. STEUER e NA (2003) elaboraram um trabalho onde citam e analisam os *papers* mais relevantes referentes ao tema e identificam as características mais representativas da relação entre a MCDM e a área de finanças. Associadas ao julgamento do leitor, as características propostas pelos autores que quase sempre identificam um *paper* como relacionado ao tema são (traduzidas):

(a) O título contém ambas as linguagem multicritério e financeira;

(b) O abstract transmite idéias e conteúdo multicritério e financeiro (onde financeiro é interpretado como incluindo registros e outras importantes áreas de interesse);

(c) O conteúdo decididamente demonstra a natureza do MCDM e financeira de maneira integrada;

(d) A lista de referências no fim mostra uma mistura das literaturas para confirmar a orientação do paper;

A primeira parte da revisão bibliográfica deve então, procurar os estudos que possuam as características acima e posteriormente avaliar se os mesmos agregam valor ao trabalho proposto.

Ainda segundo STEUER e NA (2003) é possível classificar os *papers* de acordo com a metodologia empregada, o que é muito útil para o trabalho aqui proposto, sendo que a metodologia a ser utilizada pode ser encontrada facilmente em uma das categorias listadas pelos autores.

- *Goal programming*

A primeira metodologia apresentada chama-se *Goal Programming* e foi utilizada pela primeira vez por CHARNES *et al*. em 1955 e, inicialmente, destinava-se a escolha de portfolios na indústria de fundos mútuos. Um modelo geral na metodologia GP é apresentado por STEUER e NA (2003):

$$\min \sum_{i=1}^{k} P_i\left(w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+\right)$$

$$\text{Sujeito a } \; c^1 x + d_1^- - d_1^+ = t_1$$

$$\vdots$$

$$c^k x + d_k^- - d_k^+ = t_k$$

$$x \in S$$

$$x, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

Em que *S* é a região viável, P_i é a prioridade associada ao *i*ésimo *goal* (meta), $c^i x$ é a *i*ésima função de critério meta, e t_i são os valores do critério meta *k*. Os valores d_i^- e d_i^+

são variáveis de desvio as quais medem resultados abaixo e acima da meta. Os valores w_i^- e w_i^+ são pesos de importância relativa associados às variáveis de desvio abaixo e acima da meta (traduzido de STEUER e NA).

Desta forma é possível citar que a vantagem desta metodologia reside no fato de ser facilmente aplicável através da programação linear, porém a GP possui duas desvantagens, a primeira consiste em que as preferências do tomador de decisão devem ser fornecidas a *priori*, a segunda é que esta metodologia pode produzir soluções que não são Paretto eficientes (não dominadas por outras soluções) e, consequentemente, não seriam escolhidas pelo tomador de decisão em uma situação normal.

- *Multiple Objetive Programming*

A próxima metodologia mencionada pelos autores é a programação multiobjetivo que, em contraste com a GP, não necessita a *priori* das preferências do tomador de decisão. É possível representar o modelo geral da programação multiobjetivo, segundo STEUER e NA (2003) por:

$$\max\{f_1(x) = z_1\}$$
$$\vdots$$
$$\max\{f_k(x) = z_k\}$$
$$\text{Sujeito a} \quad x \in S$$

Novamente *S* representa a região viável. Neste caso o objetivo é maximizar as várias funções objetivo, presentes de acordo com o vetor de resultados obtidos. Esta metodologia foi utilizada por SEALEY (1978) para o planejamento financeiro de bancos, depois por LAWRENCE e STEUER (1981) para auxiliar na determinação de *trade-offs* para o problema de orçamento de capital.

- *Multi-Attribute Utility Analysis* (MAUT)

Esta metodologia possui um contraste com a anterior relativo a função de utilidade do tomador de decisão. Enquanto na programação multiobjetivo esta função é implícita e a região viável é contínua, na análise multiatributo de utilidade (MAUT) a função a ser encontrada é explícita dentre um grupo discreto de alternativas. Uma aplicação do MAUT em finanças pode ser encontrada em RIOS-GARCIA e RIOS-INSUA (1983).

- *Multi-Criteria Decision Analysis* (MCDA)

A próxima metodologia apresentada por STEUER e NA (2003) é a análise de decisão multicritério (MCDA), desenvolvida principalmente na Europa, que possui como principal método a família ELECTRE, desenvolvido por Roy Bernard em 1968, que determina a sobreclassificação de alternativas através de um modelo de preferências. Outro método utilizado de aplicação na área financeira é o MINORA apresentado, por exemplo, em SISKOS *et al.* (1994).

- *The Analytic Hierarchy Process* (AHP)

A última metodologia analisada pelos autores é o processo hierárquico analítico que utiliza a subdivisão de um problema a partir de um objetivo em vários critérios e subcritérios, como meio para seleção entre alternativas discretas. O AHP foi desenvolvido por Thomas L. Saaty na década de 1970 e representa uma ferramenta para lidar com decisões complexas. Um exemplo de uma árvore de alternativas pode ser exemplificado em STEUER e NA (2003):

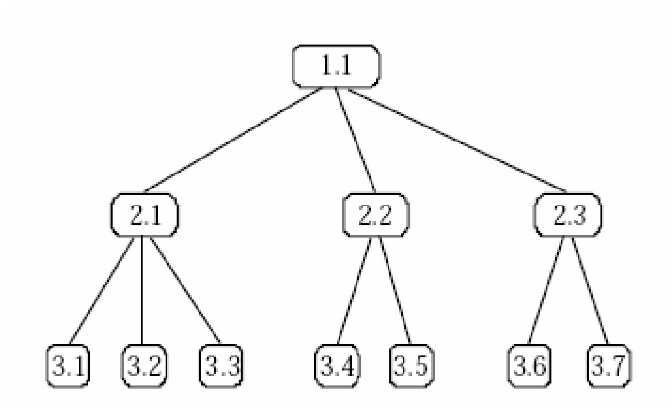

Figura 2 – Árvore AHP

A análise é feita de baixo para cima comparando-se as alternativas duas a duas, originando um sistema de prioridades e tornando-se possível avaliar todas as alternativas segundo todos os critérios. Exemplos de aplicações do método AHP em finanças podem ser encontrados em ARBEL e ORGLER (1990); MEZIANI e REZVANI (1990) e OSSADNIK (1996).

3.1 ANÁLISE DE PORTFOLIO

O trabalho aqui proposto está diretamente relacionado com a área de aplicação "análise de portfolio" e, uma bibliografia relacionada pode ser encontrada em STEUER e NA (2003). De acordo com os autores, MUHLEMANN, LOCKETT e GEAR (1978) formularam uma programação linear multiobjetivo estocástica para o problema de escolha de portfolio sobre incerteza e HARRINGTON e FISCHER (1980) propuseram um modelo de simulação associado a um modelo inteiro GP para modelagem de um portfolio de larga escala.

Vale ressaltar que existem outros trabalhos relacionados a escolha de portfolios, como OGRYCZAK (2000) que propõe um modelo de programação linear multicritério para o problema de escolha de portfolio.

Capítulo III
DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

1. ESCOLHA DO PORTFOLIO

A alocação de recursos entre atividades não é uma tarefa simples. Dotado de diversas alternativas conflitantes, torna-se difícil determinar qual será a ótima (melhor desempenho) de acordo com todos os critérios (fatores pelos quais será julgada a alternativa). Neste contexto, a escolha de um portfolio composto de várias ações não é exceção. É necessário modelar tanto os desempenhos das ações e as tendências de mercado, como também as preferências únicas do investidor.

A modelagem proposta inicialmente por Markowitz leva em consideração dois critérios para avaliação na escolha de um portfolio, o retorno e o risco, formando um problema muitas vezes chamado retorno-risco. Desde Markowitz, várias tentativas foram feitas para incorporar as preferências do investidor ao modelo de escolha do portfolio.

O primeiro modelo proposto para o problema retorno-risco utiliza a variância para mensurar o risco, sendo assim uma função quadrática, e utiliza (na ausência de modelos de previsão) dados históricos dos retornos das ações para determinação do retorno esperado. Vários modelos posteriores utilizam métodos de linearização do risco, na tentativa de facilitar os cálculos e tornar essa medida programável.

Um dos modelos propostos (que será analisado neste trabalho) é o multicritério, que através de vários critérios ponderados analisa o *trade-off* existente, proporcionando uma avaliação completa do problema. No caso da otimização de um portfólio de ações é possível usar uma escalarização simples para gerar a fronteira de eficiência.

O trabalho aqui proposto pretende comparar o desempenho dos portfolios obtidos utilizando-se o modelo original e o modelo multicritério. Inicialmente foram obtidos os dados relativos as potenciais ações para montagem do portfolio durante um período de três dias, para facilitar os cálculos e tornar clara a comparação entre os modelos. Seguindo esta etapa, foram realizados os cálculos relativos aos dois modelos e obtidos os respectivos desempenhos. Ao final são feitas considerações sobre os modelos e relatados os resultados obtidos com o trabalho.

Este trabalho se divide da seguinte forma: o Capítulo III é responsável pela modelagem do problema e a estipulação das etapas da pesquisa, bem como a explicação do problema. Os Capítulos IV e V mostram os cálculos, a analise dos resultados e as devidas considerações sobre os modelos.

2. MODELAGEM DO PROBLEMA

O primeiro passo no desenvolvimento do problema é a montagem da matriz contendo os retornos históricos das ações, apresentada na forma de uma tabela *m* x *n*, sendo *m* o número de períodos envolvidos na pesquisa e *n* o número de ações. A tabela 3 apresenta um exemplo da matriz utilizada neste trabalho:

	1	2	3	...	n
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}
...	...	...	...	...	...
m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn}

Tabela 2 – Matriz de retornos por período

Através da matriz de retornos é possível saber o retorno esperado de uma ação através da média dos valores desta ao longo dos períodos. No modelo de Markowitz esta matriz pode ser facilmente aplicada no cálculo de Variância do portfolio e a Covariância das ações (comparadas entre si por esta última medida).

Como visto na Tabela 1, a variância do portfolio pode ser obtida através da soma de todas as células e a covariância pelo valor esperado da multiplicação da diferença entre o retorno efetivo e o retorno esperado de duas ações. Este último cálculo serve para indicar a correlação entre as ações (analisadas comparando-se duas ações para todas as combinações possíveis). Neste caso a variância representa o risco envolvido ao possuir um portfolio composto das ações selecionadas.

É possível demonstrar também que, se um portfolio possui ações de variâncias individuais iguais e covariâncias iguais para cada par de ações, a adição de novas ações provoca o desaparecimento das variâncias individuais e, se *n* = infinito, o risco da carteira é definido apenas pela covariância entre as ações (ROSS, 2002). Vale lembrar que os valores utilizados através da teoria de Markowitz devem seguir uma distribuição normal para que a variância e a covariância sejam os únicos valores de interesse.

Para o cálculo do portfolio ótimo, Elton e Gruber (1995) propõe um modelo simples de otimização que pode ser resolvido utilizando o solver do software Excel. O modelo tem a seguinte forma:

Escolha X de forma que

$$\begin{aligned} &\min imize \quad \sigma_p^2 = XVX^T \\ &\text{sujeito a} \quad \overline{R}X^T = \overline{R}_P^* \\ &X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} X_i = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

A idéia expressa neste modelo é a mesma contida na teoria de Markowitz, escolher o portfolio X que possua variância mínima dada por σ_P^2, sendo $\overline{R}$ o vetor com as taxas de retornos individuais (efetivos ou esperados), V a matriz variância-covariância e $\overline{R}_P^*$ a taxa de retorno a ser atingida pelo portfolio. O somatório serve para garantir que a soma dos pesos associados às ações seja igual a 1 ou 100% do capital a ser investido. A restrição em que os valores de X_j devem ser positivos é opcional, e refere-se à venda imediata (*short selling*).

O segundo modelo utilizado neste trabalho possui uma abordagem diferente. A mudança de valor para geração da fronteira, que no primeiro modelo ocorre em $\overline{R}_P^*$, agora é feita em μ representando a preferência do investidor. É interessante ressaltar que no modelo clássico μ possui o valor de 1, por isso não está presente em (11), ou seja, ambos os critérios possuem o mesmo peso na abordagem clássica e possivelmente esta análise clássica não leva em consideração a mudança do valor deste peso. Relembrando o modelo proposto em (3)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad (F_1(x), F_2(x)) = (-\overline{p}^T x + \mu x^T \Sigma x) \\ &\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad \text{para} \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

É possível perceber que a diferença entre os dois modelos é pequena, porém isso ocorre devido ao fato de que no segundo modelo foram consideradas apenas 2 critérios o que não representa o único caso possível, vários outros critérios podem ser incorporados na forma de funções para enriquecer a análise. Outro fator importante a ser considerado é a variação de valores nos dois modelos, no primeiro modelo é necessária uma alteração na restrição do retorno para obtenção do valor ótimo, ou seja, o sinal de = deve ser mudado para $\leq$ e no caso do segundo modelo deve ser definido um intervalo para o valor de μ

entre 0 e 1. Ainda com relação a tais variações é preciso uma escolha cuidadosa no primeiro modelo do valor de $\overline{R}_P^*$ ao alterá-lo ou pode não haver solução para o problema.

2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MODELOS

A utilização de ambos os modelos leva a necessidade de algumas considerações sobre os mesmos. O primeiro fator a ser lembrado é que estes são apenas dois dentre os vários modelos sobre o problema da escolha de um portfolio. A motivação nestes dois modelos reside na facilidade de aplicação e comparação dos resultados.

Outro fator importante é que vários aspectos do mercado financeiro foram excluídos de modo, a não tornar a análise muito complicada e limitar a um número bem reduzido, se não único, de alternativas. A própria aversão ao risco do investidor, por exemplo, é um fator que a princípio tornaria a aplicação destes dois modelos diferente para cada investidor.

Dentre as diferenças entre o mercado financeiro real e o trabalho aqui proposto, é possível citar um fator macroeconômico excluído dos cálculos e análise desenvolvidos, a tendência da economia, que não é considerada nos dois modelos apresentados. Este trabalho pressupõe a existência de apenas um estado da natureza a *priori* e, assim, não demonstra vários cenários possíveis (recessão, normal e expansão, por exemplo) que seriam expostos caso houvesse uma probabilidade diferente de 1 associada a cada retorno efetivo.

Como mencionado anteriormente, os modelos retornam os desempenhos dos portfolios analisados, de acordo com os critérios retorno e risco, e reduzem o número de alternativas inicialmente possíveis para o investidor. No entanto, estes não realizam a escolha, o investidor deve fazer as escolhas de acordo com suas preferências, explícitas ou implícitas. No primeiro modelo após encontrar o portfolio que minimiza a variância envolvida ou o risco não sistemático, pode ser utilizada uma função de utilidade representando a aversão ao risco do investidor para determinação do ponto de interseção entre a fronteira de eficiência e a função utilidade (preferência explícita). No segundo modelo as preferências já estão contidas no modelo que, através do coeficiente de *trade-off* μ , expressa qual o ganho que o investidor deve receber de modo a aceitar um risco maior (preferência implícita).

3. CÁLCULOS E RESULTADOS

A etapa de cálculos representa a utilização dos retornos efetivos de diversas ações, ou *inputs*, nos dois modelos propostos e a obtenção dos resultados através do desempenho dos portfolios, ou *outputs*. Todos os dados utilizados nos cálculos foram retirados do *software* Economática.

Após o levantamento de dados, foi utilizado o software Excel para o processamento e obtenção de resultados. Ambos os modelos foram programados no software e modelados de forma a respeitar todas as restrições. Foi utilizado um algoritmo de programação quadrática para execução da rotina de cálculos pela sua facilidade.

Para o software Excel, as restrições são descritas em uma planilha, bem como função objetivo a ser maximizada (minimizada) e a ferramenta solver é responsável por determinar a melhor solução, respeitando as restrições e configurações propostas para o modelo. Como configuração importante, encontra-se o número de iterações, ou vezes em que o solver procura melhorar a solução encontrada.

Um exemplo de modelagem inicial em uma planilha pode ser visto na Figura 3:

	A	B
1	Problema qualquer a ser resolvido	
2		
3	Função Objetivo:	Retorno esperado do portfólio (uma função das várias possíveis)
4	z	valor
5		
6	Variáveis de decisão:	Pesos associados a cada ação
7	x1	valor
8	x2	valor
9	x3	valor
10		
11	Restrições:	Limitações dos recursos
12	x1 + x2 + x3	valor
13	z - (w1y1 + w2y2)	valor
14	z - (w2y1 + w1y2)	valor
15	x1	valor
16	x2	valor
17	x3	valor
18		

Figura 3 – Exemplo de modelagem no software Excel

A planilha inicial possui as fórmulas referentes à função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições, com respectivos valores. A coluna *A* possui as fórmulas as quais o solver irá fazer referência para obtenção dos valores, a coluna *B*, como indicado, representa os valores associados sendo que o solver irá variar os valores das variáveis de decisão respeitando os limites das restrições, de modo a obter um valor para função objetivo.

As configurações do solver não serão demonstradas, com o objetivo de não prolongar esta análise de cálculos e resultados.

Os resultados obtidos pelo solver são retornados em forma de relatórios configurados pelo usuário e ficam dispostos em células pré-determinadas. A vantagem na utilização do solver é a facilidade de modelar o problema, porém os cálculos são automáticos tornando difícil o profundo conhecimento do que está acontecendo realmente na resolução do problema.

Capítulo IV
RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. CÁLCULOS INICIAIS

O primeiro passo para resolução do problema é a montagem da matriz de retornos relativos às ações, que é apresentada na tabela a seguir:

Data	Gerdau	Usiminas	Vale	Bradesco	Brasil Tel
23/5/2008	-0,195%	3,044%	-1,729%	1,982%	-3,001%
26/5/2008	-0,195%	5,746%	-2,412%	4,670%	-3,570%
27/5/2008	-0,195%	8,694%	-1,534%	6,200%	-3,311%
28/5/2008	0,463%	7,343%	-2,412%	8,268%	0,307%
29/5/2008	-1,072%	5,255%	-2,802%	9,550%	0,902%
Data	**Petrobras**	**Banestes**	**Ambev**	**Alpha holding**	**ABC**
23/5/2008	9,491%	6,846%	-0,721%	2,460%	-6,205%
26/5/2008	10,675%	9,551%	-0,546%	3,197%	-5,416%
27/5/2008	9,384%	5,933%	-3,474%	0,274%	-7,142%
28/5/2008	11,441%	6,739%	-2,932%	1,482%	-8,970%
29/5/2008	11,428%	6,184%	-3,854%	1,747%	-10,353%

Tabela 3 – Matriz de retornos conhecidos

Montada a matriz é necessária a obtenção de medidas fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Tais medidas são o retorno esperado das ações e o desvio-padrão das mesmas. Vale ressaltar um fator importante, o retorno esperado foi obtido através da diferença entre a valor de venda das ações (calculado através de um histórico recente) e o preço das mesmas (obtido de um histórico de maior prazo), ou seja, foi cálculado um valor de compra fixo a ser utilizado como base e foram estimados valores de venda para próxima semana, sendo o retorno a diferença entre este valor de venda e o de compra. Não foram considerados valores acumulados para que fosse possível a tomada de decisão já no primeiro dia.

Este fato é devido ao seguinte argumento, se fossem considerados apenas valores recentes para venda e preço a situação aparentaria estabilidade para todas as ações, ou seja, seria desconsiderado um possível histórico de aumento ou queda constante no valor da ação. Desta forma, utilizando um prazo maior para estimar o preço é possível calcular um retorno esperado que indique a tendência no valor da ação, por exemplo, se o histórico apresenta que no mês anterior houve um aumento constante no valor de uma ação de 30,00 para 40,00 R$, supondo uma média de 35,00 R$, mas na últma semana o valor médio da ação foi de 45,00 R$, é possível utilizar 10,00 R$ ou 28,57% como retorno desta ação indicando a tendência em seu valor.

Vale lembrar que existem inúmeros métodos para estimar o retorno de uma ação, este trabalho aqui apresentado apenas procurou amenizar a oscilação nos valores das ações para um cálculo mais realista. Feitas as devidas considerações é possível determinar o retorno esperado das ações e seus respectivos desvios-padrão:

	Gerdau	**Usiminas**	**Vale**	**Bradesco**	**Brasil Tel**
Retorno esperado	-0,24%	6,02%	-2,18%	6,13%	-1,73%
Desvio-padrão	6,33	12,57	5,62	2,56	2,17
	Petrobras	**Banestes**	**Ambev**	**Alpha holding**	**ABC**
Retorno esperado	10,48%	7,05%	-2,31%	1,83%	-7,62%
Desvio-padrão	4,80	1,77	8,24	0,23	0,53

Tabela 4 – Restornos esperados e desvios-padrão

2. OTIMIZAÇÃO PELA TEORIA CLÁSSICA

Determinados os valores a serem utilizados nesta etapa de cálculos, é possível agora usar o modelo relacionado com a teoria clássica e assim, resolver o problema proposto. Retomando (11) a modelagem do problema é expressa por:

minimize $\sigma_p^2 = XVX^T$

Sujeito a $-0{,}0024X_1 + 0{,}0602X_2 - 0{,}0218X_3 + 0{,}0613X_4 - 0{,}0173X_5 +$

$$0{,}1048X_6 + 0{,}0705X_7 - 0{,}0231X_8 + 0{,}0183X_9 - 0{,}0762X_{10} = \overline{R}_P^*$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.$$

Para resolução deste problema de programação quadrática (QP), é preciso agora determinar um valor para $\overline{R}_P^*$ e calcular a matriz de covariância. Observando atentamente os valores de retorno esperados apresentados na Tabela 5, percebe-se que o maior valor possível para um portfólio seria alocar o peso 1 (ou 100%) para a ação de maior retorno, ou seja, o maior retorno esperado possível seria de 10,48%. Através desta informação é possível alterar a restrição contendo as somas dos retornos esperados para

$$-0{,}0024X_1 + 0{,}0602X_2 - 0{,}0218X_3 + 0{,}0613X_4 - 0{,}0173X_5 +$$
$$0{,}1048X_6 + 0{,}0705X_7 - 0{,}0231X_8 + 0{,}0183X_9 - 0{,}0762X_{10} \leq 0{,}1048$$

de forma a encontrar o maior retorno para uma mínima variância, apenas lembrando que o retorno deve ser positivo para que a aquisição de tais ações faça sentido. Para facilitar a análise todos os cálculos apresentados nesta seção foram feitos ordenando-se as ações de forma crescente com relação ao retorno esperado.

2.1 MATRIZ DE COVARIÂNCIA E RESULTADOS

A matriz de covariância, que determina a realação das ações duas a duas, pode ser facilmente calculada pelo software Excel, sendo os resultados apresentados a seguir:

Alpha holding	**Banestes**	**ABC**	**Brasil Tel**	**Bradesco**
0,05	-0,19	-0,05	0,21	0,18
-0,19	3,15	0,37	-2,32	-2,23
-0,05	0,37	0,28	-0,01	0,19
0,21	-2,32	-0,01	4,72	3,02
0,18	-2,23	0,19	3,02	6,55
0,81	-8,07	-0,83	9,12	13,09
0,52	-4,03	0,28	6,78	8,98
0,38	-6,32	0,45	6,81	11,69
1,47	-16,78	-1,56	14,81	24,88
-0,85	5,07	1,61	-7,95	-5,11
Gerdau	**Petrobras**	**Vale**	**Usiminas**	**Ambev**
0,81	0,52	0,38	1,47	-0,85
-8,07	-4,03	-6,32	-16,78	5,07
-0,83	0,28	0,45	-1,56	1,61
9,12	6,78	6,81	14,81	-7,95
13,09	8,98	11,69	24,88	-5,11
40,02	25,24	26,99	74,42	-26,33
25,24	23,02	20,11	47,41	-15,64
26,99	20,11	31,54	59,02	0,45

Tabela 5 – Matriz de covariância

A partir da matriz de covariância é possível resolver este problema de otimização através de qualquer versão de solver para o software Excel que possua a capacidade de resolver um problema de QP (e.g. Premium Solver). A tabela a seguir mostra os resultados encontrados para o problema:

Vetor "X" ótimo de pesos				
Alpha holding	**Banestes**	**ABC**	**Brasil Tel**	**Bradesco**
0,82959	0,05884	0,09229	0,01404	0
Gerdau	**Petrobras**	**Vale**	**Usiminas**	**Ambev**
0	0	0	0	0,00525

Retorno do portfólio	Variância do portfólio	Desvio-padrão do portfólio
0	0,027086	0,164578

Tabela 6 – Resultados da otimização método clássico

A conclusão importante a ser retirda é que o ponto de variância mínima provavelmente é definido por um retorno negativo que não deve ser considerado, pois representaria um prejuízo na possível venda das ações contidas no portfólio, ou seja, o resultado se adotado indicaria que a estratégia de menor risco possível não poderia ser alcançada sem prejuízo.

3. OTIMIZAÇÃO MULTICRITÉRIO

O segundo método proposto refere-se a otimização multicritério. Os critérios adotados são os mesmos utilizados no método anterior, retorno e risco, lembrando que poderia haver um número maior de critérios envolvidos. Relembrando (3) e atribuindo alguns valores, é possível modelar o problema da seguinte forma:

minimize
$$0{,}0024X_1 - 0{,}0602X_2 + 0{,}0218X_3 - 0{,}0613X_4 + 0{,}0173X_5 - 0{,}1048X_6 - 0{,}0705X_7 + 0{,}0231X_8 - 0{,}0183X_9 + 0{,}0762X_{10} + \mu x^T \Sigma x$$

sujeito a
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad \text{para } j = 1,\ldots,n$$
$$x_j \geq 0$$

Como já foi obtida a matriz de covariância, é possível utilizá-la para resolver o problema de otimização. Os resultados podem ser observados na tabela a seguir:

Vetor "X" ótimo de pesos				
Alpha holding	**Banestes**	**ABC**	**Brasil Tel**	**Bradesco**
0,82959	0,05884	0,09229	0,01404	0
Gerdau	**Petrobras**	**Vale**	**Usiminas**	**Ambev**
0	0	0	0	0,00525

Retorno do portfólio	Variância do portfólio	Desvio-padrão do portfólio
0	0,027086	0,164578

Tabela 7 – Resultados da otimização método multicritério

O resultado acima apresenta uma análise bastante interessante. Os dois modelos podem ser considerados equivalentes, pois são capazes de gerar um mesmo valor ótimo, ou seja, o valor ótimo é o mesmo para os dois modelos.

Um fator importante a ser considerado é que os resultados obtidos para tabela acima utilizaram valores de μ entre 0,007 a 1, representando a importância relativa entre as duas funções, sendo que pelas próprias características da otimização multicritério para este problema a fronteira de eficiência deve ser obtida alterando-se o valor de μ. Considerando que este é um processo de escalarização, o valor ótimo encontrado pelo método clássico só pode ser alcançado se μ tendesse ao infinito.

Vale ressaltar que a alteração dos valores de μ e de $\overrightarrow{R_P^*}$ não é óbvia, ou seja, é necessário conhecimento prévio de ambos os métodos para exploração dos valores possíveis para ambos.

4. FRONTEIRA DE EFICIÊNCIA

Após o cálculo dos valores ótimos para o vetor x, é possível alterar o valor do retorno esperado no modelo clássico e de μ no modelo multicritério para obter a fronteira de eficiência. Tal fronteira, que será utilizada para comparações entre os modelos, pode ser observada na figura abaixo:

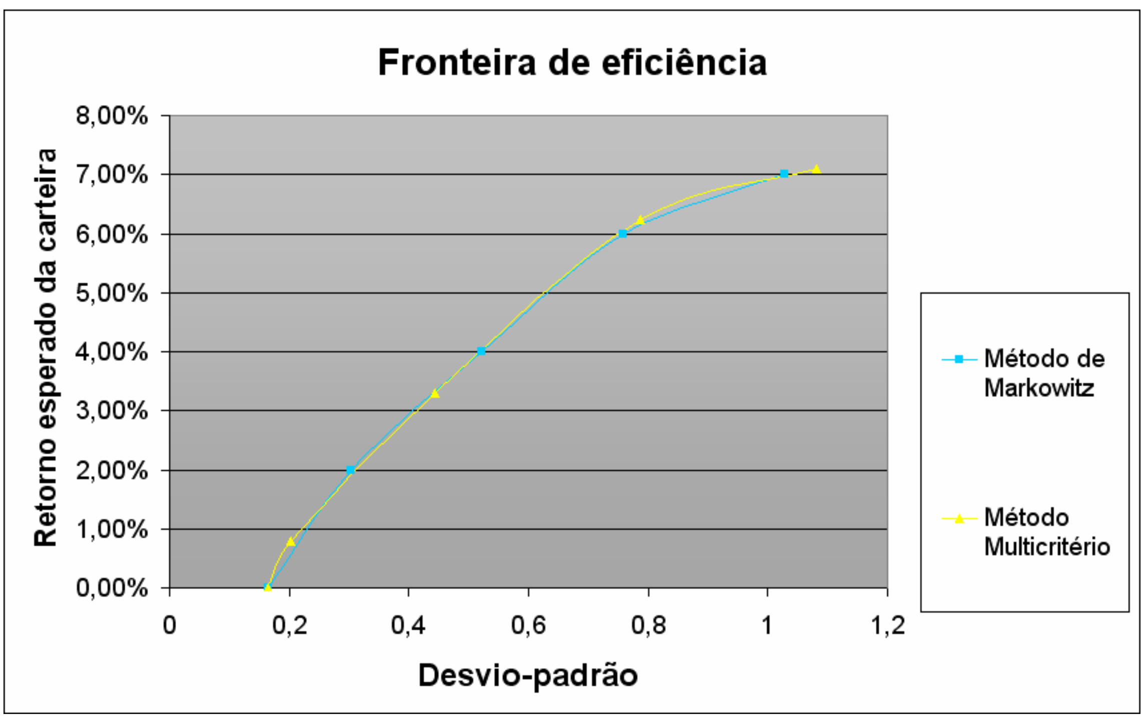

Figura 4 – Fronteiras de eficiência

A fronteira é representada por uma função convexa onde se encontram os maiores valores possíveis de retorno para um determinado portfólio. Por definição, os valores contidos na fronteira são equivalentes entre si e não dominados por nenhum outro valor pertencente ao conjunto de valores viáveis.

Analisando a figura é possível perceber que ambos os métodos geram fronteiras aproximadamente iguais, sendo as pequenas diferenças entre as curvas presentes no gráfico devidas ao espaçamento entre os pontos, ou seja, seria possível gerar pontos semelhantes utilizando ambos os métodos de forma a tornar as diferenças entre as curvas imperceptível (a ligação entre os pontos é amortecida automaticamente pelo software Excel para simular uma curva).

5. MEDIDAS DE RISCO

Uma análise completa do problema apresentado pode considerar se a utilização de outras medidas de risco, linearizadas, podem fornecer um ponto que se encontre na fronteira de eficiência. Dotado de tais medidas, o modelo final (de função objetivo linear) seria mais confiável e melhor aceito em um ambiente em que a otimização deva ocorrer em tempo real.

Para testar se é viável utilizar tais medidas nos modelos propostos, foram escolhidas duas medidas lineares de risco, o desvio absoluto e a diferença média absoluta de Gini. Ambas as medidas são apresentadas pelas fórmulas a seguir

$$\delta(y) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m} |\mu(y) - y_i| \qquad (12)$$

$$G(y) = \frac{1}{2m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |yi - yj| \qquad (13)$$

sendo a expressão apresentada em (12) referindo-se ao desvio absoluto e em (13) a diferença média absoluta de Gini. A validação de ambas as medidas foi realizada alterando-se a função objetivo do modelo clássico para facilitar as análises. Os modelos a serem otimizados podem ser escritos como

$$\text{minimize} \qquad \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m} |\mu(y) - y_i|$$

Sujeito a

$$-0{,}0024X_1 + 0{,}0602X_2 - 0{,}0218X_3 + 0{,}0613X_4 - 0{,}0173X_5 +$$

$$0{,}1048X_6 + 0{,}0705X_7 - 0{,}0231X_8 + 0{,}0183X_9 - 0{,}0762X_{10} = \overline{R}_P^*$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.$$

e

$$\text{min}imize \qquad \frac{1}{2m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|\, yi - yj\,|$$

Sujeito a

$$-0{,}0024X_1 + 0{,}0602X_2 - 0{,}0218X_3 + 0{,}0613X_4 - 0{,}0173X_5 +$$

$$0{,}1048X_6 + 0{,}0705X_7 - 0{,}0231X_8 + 0{,}0183X_9 - 0{,}0762X_{10} = \overline{R}_P^*$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.$$

sendo Y o vetor de retornos de termos yi para i de 1 até m, sendo $m = 5$ como mostrado na Tabela 4 (número de dias). Se for alterada a restrição do retorno esperado do portfólio para que seja menor e igual a 0,1048 (e retorno positivo) o seguinte resultado é obtido para ambos os riscos lineares:

Vetor “X” ótimo de pesos				
Alpha holding	**Banestes**	**ABC**	**Brasil Tel**	**Bradesco**
0,97761	0	0	0	0
Gerdau	**Petrobras**	**Vale**	**Usiminas**	**Ambev**
0,02239	0	0	0	0

Retorno do portfólio	Variância do portfólio	Desvio-padrão do portfólio
0	0,105093	0,324181

Tabela 8 – Resultados da otimização com risco linear

Para um maior entendimento de como este resultado se relaciona com os demais a seguinte figura compara estas medidas e os pontos gerado com relação aos métodos anteriormente apresentados.

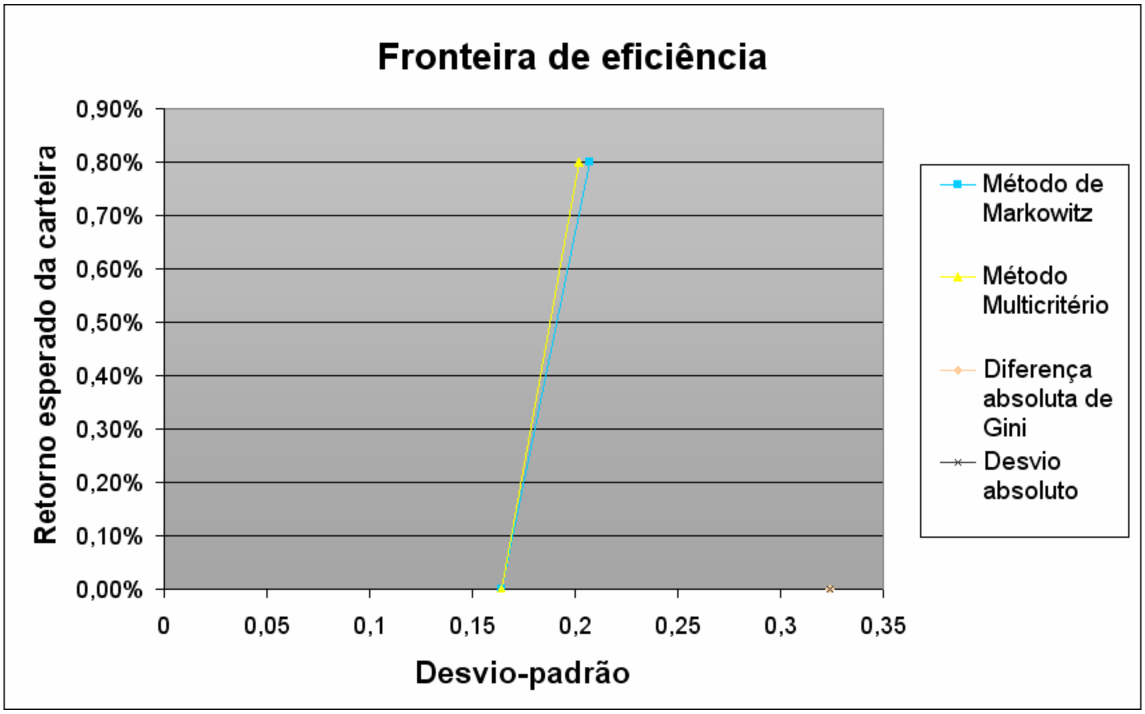

Figura 5 – Comparação entre modelos

Como pode ser observado além de ambos os pontos gerados por medidas de risco lineares serem igual em desempenho no critério desvio-padrão como também são dominados por outros pontos com relação ao desempenho na relação retorno e desvio-padrão. Finalizada esta etapa de cálculos é necessário realizar algumas observações e considerações que são apresentadas no capítulo posterior.

Capítulo V
CONSIDERAÇÕES FINAIS

1. CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MODELOS E O TRABALHO

Ambos os modelos mostraram-se equivalentes para resolução do problema em questão. Vários fatores, porém, devem ser realçados nesta parte do trabalho. O trabalho aqui proposto não é exaustivo, ou seja, existem várias formas diferente de abordar o problema da escolha de um portfolio que atenda aos requisitos do investidor, seja pela adição de critérios, ou pela adição de restrições (e.g. macroeconômicas), ou ainda pela mudança total do modelo de otimização. A maior preocupação, ou o foco, está nos modelos apresentados e não nas peculiaridades e discussões que envolvem o problema.

O primeiro modelo de otimização de Markowitz demonstrou por sua facilidade de entendimento a escolha mais óbvia por parte dos investidores que não possuam conhecimento profundo sobre o funcionamento do mercado de ações, por outro lado o modelo de otimização multicritério apresenta uma solução unindo a pesquisa operacional com as finanças, mostrando que é possível a interação entre estas áreas do conhecimento.

As medidas de risco linear vêm sendo atualmente estudadas e já existem modelos que as utilizam, aplicando análise gráfica para determinação dos melhores portfolios, ou um método de sobreclassificação. O estudo apresentado aqui mostrou, porém que é viável, mas não ótima a utilização de medidas de risco linear para posterior comparação dos portfolios obtidos pelo gráfico Retorno x Desvio padrão. Se o critério de avaliação fosse o desvio dos retornos juntamente com o retorno esperado, provavelmente os portfolios obtidos com um risco linear possuiriam desempenho melhor.

Um fator importante a ser lembrado é o sistema de preferências que não esteve envolvido nos cálculos. Este sistema precisaria ser realmente implementado no caso de vários critérios e modelos mais subjetivos dedicados exclusivamente à classificação e, como neste caso a análise gráfica já torna explícito o conjunto de portfolios ótimos equivalentes (fronteira de eficiência), não foi necessário a inclusão do modelo de preferências na otimização. Vale lembrar que é válida a exposição da existência deste modelo de preferências, porque faz parte essencial de uma análise multicritério.

O solver utilizado no presente trabalho, associado ao software Excel, não é o padrão que acompanha este mesmo software, ou seja, é um programa individual destinado a resolver problemas mais complexos não suportados pelo solver padrão. Este fato é importante devido a influência positiva deste solver nos resultados, facilitando a montagem do problema e possuindo vários algoritmos próprios para solução de problemas complexos.

Outro aspecto importante a ser considerado é o coeficiente que representa o *trade-off* entre retorno e risco μ. Este coeficiente é a importância relativa entre os dois critérios envolvidos e, na verdade, faz parte de um método chamado escalarização. Ao escalarizar um problema de otimização multicritério, atribui-se um vetor de pesos λ que é multiplicado pelo vetor de funções resultando em um problema de otimização em que a função objetivo é a soma ponderada por λ das funções envolvidas. Por definição o coeficiente μ representa na escalarização, um mapeamento responsável por gerar a fronteira de eficiência (detalhes sobre a escalarização em Boyd, 2004).

2. CONCLUSÕES

Avaliando os resultados do trabalho apresentado, é possível perceber que o objetivo inicial foi alcançado, ou seja, foi comprovado que um modelo multicritério pode ser utilizado para otimização na escolha de portfolios com um mesmo desempenho que o modelo clássico proposto por Markowitz.

Considerando o desenvolvimento aqui apresentado de forma simplificada, torna-se direta a conclusão que o processo de escolha de um portfolio ótimo pode ser facilmente entendido por qualquer pessoa interessada no tema, promovendo a disseminação do conhecimento.

Para estudos futuros é possível propor modelos que envolvam medidas de risco lineares, se comprovada a validade, como também modelos que envolvam a maior interação do investidor no processo decisório. É reafirmado aqui que o estudo não é exaustivo, sendo que vários métodos também relacionados à otimização convexa já possuem influência na área das finanças.

3. CONSIDERAÇÃO FINAL

Como consideração final é possível destacar ainda um método proposto recentemente para obtenção de um ponto ótimo de uma função convexa, o Método do passo mais descendente sem o conhecimento dos parâmetros da função objetivo, que pode ser aplicado também à escolha de portfolios (um problema convexo). Inicialmente através de um cone de valores possíveis, escolhe-se um ponto e, através de um mapeamento por escalarização, caminha-se em direção ao ponto ótimo da função, lembrando que inúmeras condições devem ser respeitadas para resolução dessa otimização.

Capítulo VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARBEL, A.; ORGLER, Y. E. ***An Application of the AHP to Bank Strategic Planning: The Mergers and Acquisitions Process***. Vol. 48, Nº. 1. European Journal of Operational Research, 1990. 27-37p.

BANA E COSTA, C. A. ***Structuration, construction et exploitation d'un modèle multicritère d'aide à la decision***. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas). Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.

BOYD, S; VANDENBERGHE, L. ***Convex optimization***. 6 ed. The Edinburgh Building: Cambridge University Press, 2008. 192-201p.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. ***Modern Portfolio Theory and Investment Analysis***. 5 ed. New York: John Wiley and Sons, 1995. Capítulo 6.

FIGUEIRA, J; SALVATORE G; MATTHIAS E. ***Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys***. 1 ed. New York: Editora Springer, 2005. 667-722, 799-857p.

GOMES, L. F. A. M.; GOMES, C. F. S.; ALMEIDA, A. T. ***Tomada de Decisão Gerencial***. 2 ed. São Paulo: Editora Atlas, 2006. 1, 22-33, 82p.

HARRINGTON, T. C.; FISCHER, W. A. ***Portfolio Modeling in Multiple-Criteria Situations Under Uncertainty: Comment***. Vol. 11, Nº. 1. Decision Sciences, 1980. 171-177p.

LAWRENCE, K. D.; STEUER, R. E. ***A Weighted Tchebycheff Multiple Objective Approach to Capital Budgeting***. Fall Industrial Engineering Conference. Proceedings: 1981. 275-280p.

MEZIANI, A. S.; REZVANI, F. ***Using the Analytic Hierarchy Process to Select a Financial Instrument for a Foreign Investment***. Vol. 13, Nº. 7. Mathematical and Computer Modelling, 1990. 77-82p.

MUHLEMANN, A. P.; LOCKETT, A. G.; GEAR, A. E. ***Portfolio Modeling in Multiple-Criteria Situations Under Uncertainty***. Vol. 9, Nº 4. Decision Sciences, 1978. 612-626p.

OGRYCZAK, W. ***Multiple Criteria Linear Programming Model for Portfolio Selection***. Vol. 97. Annals of Operations Research, 2000. 143-162p.

OSSADNIK, W. ***AHP-based Synergy Allocation to the Partners in a Merger***. Vol. 88, Nº. 1. European Journal of Operational Research, 1996. 42-49p.

RIOS-GARCIA, S.; RIOS-INSUA, S. ***The Portfolio Selection Problem with Multiattributes and Multiple Criteria***. Vol. 209. Berlin: Springer-Verlag, In P. Hansen (ed.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1983. 317-325p.

ROSS, S. A. *et al*. ***Administração Financeira: Corporate Finance***. São Paulo: Editora Atlas, 2002. 189-239p.

ROY, B. ***Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)***. La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationelle (RIRO) (8), 1968. 57-75p.

SEALEY, C. W. Jr. ***Financial Planning with Multiple Objectives***. Vol. 7, Nº. 2. Financial Management, 1978. 17-23p.

SISKOS, Y.; ZOPOUNIDIS, C.; POULIEZOS, A. ***An Integrated DSS for Financing Firms by an Industrial Development Bank in Greece***. Vol. 12, Nº. 2. Decision Support Systems, 1994. 151-168p.

STEUER, R. E.; NA, P. ***Multiple Criteria Decision Making Combined with Finance: A Categorized Bibliography***. Vol. 150, Nº 3. European Journal of Operational Research, 2003. 496-515p.

ZELENY, M. ***Six concepts of optimality***. TIMS/ORSA Joint Meeting. Boston, 1994.