Cap. 5. Testes de Hipóteses

Neste capítulo será estudado o segundo problema da inferência estatística: o teste de hipóteses. Um teste de hipóteses consiste em verificar, a partir das observações de uma amostra, se uma afirmação (denominada hipótese) sobre a distribuição de uma ou mais variáveis de determinada população em estudo verdadeira ou não.

Se a hipóteses se refere a um ou mais parâmetros de uma população, o teste é denominado ***teste paramétrico***. Se a hipótese é acerca da natureza da distribuição de uma variável da população em estudo, o teste é denominado teste ***não paramétrico***.

5.1. CONCEITOS BÁSICOS

Para entender os procedimentos de um teste de hipóteses, serão apresentados a seguir alguns conceitos básicos.

5.1.1. Hipótese nula e hipótese alternativa

Denomina-se hipótese nula uma hipótese formulada com o intuito de ser testada sendo denotada por H_0. A hipótese alternativa é a hipótese considerada se as informações da amostra fornecerem informações que levem à rejeição da hipótese nula. Por exemplo, suponha que o preço médio de certo artigo numa localidade tenha sido historicamente igual a R$120,00. Deseja-se saber se o preço do artigo caiu após a entrada de um artigo concorrente no mercado da localidade. Neste caso formula-se as seguintes hipóteses: H_0: $\mu = 120$; H_1: $\mu < 120$. Ao se desenvolver um teste de hipóteses supõe-se inicialmente que a hipótese nula seja verdadeira

5.1. Erro do tipo I e erro do tipo II

Como a decisão em aceitar ou rejeitar H_0 se baseia apenas nas informações de uma amostra da população, é possível cometer um dos seguintes erros:

a) Erro do tipo I ou de primeira espécie: consiste em rejeitar uma hipótese nula verdadeira.

b) Erro do tipo II ou de segunda espécie: consiste em aceitar uma hipótese nula falsa.

Como estes erros são inevitáveis, naturalmente num bom teste deve-se minimizar a probabilidades de se cometer estes erros. Como o erro do tipo I é o mais sério, em geral preocupa-se apenas com a probabilidade de se cometer este tipo de erro e o teste passa a ser denominado teste de significância.

5.1.3. Nível de significância de um teste

Denomina-se nível de significância a probabilidade de se cometer um erro do tipo I. O nível de significância é especificado antes de se aplicar o teste. Usualmente seus valores são 1% ou 5%.

5.1.4. Teste unilateral e teste bilateral

Com relação ao exemplo acima, a hipótese alternativa era H_1: $\mu < 120$. Neste caso o teste é unilateral. Um teste unilateral pode ser esquerdo (como no exemplo em foco) ou direito, se a hipótese nula fosse H_1: $\mu > 120$. Se a hipótese nula fosse H_1: $\mu \neq 120$, o teste seria bilateral.

5.1.5. Variável de teste

Denomina-se variável teste uma variável aleatória que é função das observações da amostra, utilizada para a tomada de decisão em aceitar ou rejeitar H_0.

5.1.6. Região de aceitação e região crítica

O estabelecimento do nível de significância divide o domínio da variável de teste um duas regiões. Uma destas regiões é constituída de valores da variável teste que levam à aceitação de H_0. Esta região é denominada *região de aceitação*. A outra região é constituída do conjunto de valores da variável de teste que levam à rejeição de H_0, denominada *região crítica*. Os limites que separam a região de aceitação da região de rejeição são denominados *valores críticos*. Num teste unilateral existe apenas um valor crítico e no caso de um teste bilateral existem dois valores críticos simétricos em relação ao valor esperado da variável de teste.

5.1.7. Valor da prova (p-valor)

Dado um valor da variável teste obtido a partir de uma determinada amostra, denomina-se valor da prova como a probabilidade de se encontrar outra amostra que forneça uma estatística de teste tão ou mais extrema do que o existente.

5.2. Construção de um teste de significância na prática

Em linhas gerais, a construção de um teste de hipóteses consta das seguintes etapas:

a) Formular as hipóteses H_0 e H_1.
b) Escolher a estatística de teste.
c) Arbitrar/fixar o nível de significância.
d) Determinar a regiões de aceitação de H_0 e a região crítica a partir do nível de significância arbitrado em (c).
e) Decidir se aceita ou rejeita H_0 em com base no valor da variável de teste calculado a partir da amostra e na região crítica.

5.3. Tomada de Decisão em um Teste de Hipóteses

Existem três procedimentos para se decidir se aceita ou rejeita H_0. Estes procedimentos serão apresentados a seguir.

5.3.1. Valor da variável de teste

Calcula-se o valor da variável teste a partir dos dados da amostra e adota-se a seguinte regra de decisão: se o valor da variável teste pertence à região de aceitação aceita-se H_0 no nível de significância adotado; caso contrário rejeita-se H_0. Este procedimento pode ser utilizado para testes paramétricos e não paramétricos.

5.3.2. Intervalo de confiança

Constrói-se um intervalo de confiança para o parâmetro (ou combinação de parâmetros: diferença de parâmetros, razão de parâmetros) testado e adota-se a seguinte regra de decisão: se o intervalo de confiança construído contiver o valor do parâmetro (ou da combinação de parâmetros) suposto na hipótese nula aceita-se H_0; caso contrário rejeita-se H_0 no nível de significância adotado. O nível de confiança deste intervalo é $\gamma = 1 - \alpha$.

5.3.3. Valor da prova (p-valor)

Utiliza-se a distribuição de probabilidade da variável teste para calcular o valor da prova e adota a seguinte regra de decisão: se o valor da prova for maior ou igual ao nível de significância aceita-se H_0; caso contrário rejeita-se H_0 no nível de significância adotado.

5.4. Testes para uma Amostra

5.4.1. Teste de Hipóteses para a Média Populacional

No caso do teste da média μ de uma população, as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \quad x \quad \mu \neq \mu_0 \text{ (teste bilateral)} \\ H_0 : \mu = \mu_0 \quad x \quad H_1 : \mu < \mu_0 \text{ (teste unilateral esquerdo)} \\ H_0 : \mu = \mu_0 \quad x \quad H_1 : \mu > \mu_0 \text{ (teste unilateral direito)} \end{cases}$$

Nas hipóteses acima, μ_0 é valor de μ sob a hipótese nula H_0.

Se a população da variável X tem distribuição normal, com desvio padrão populacional σ conhecido, a variável de teste é a variável normal padronizada

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \tag{5.1}$$

Se o desvio padrão σ da população não é conhecido, como ocorre na maioria dos problemas, a variável teste é a variável padronizada

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \tag{5.2}$$

onde S é o estimador de σ.

Existem três formas de se testar hipóteses, todas levando necessariamente à mesma conclusão.

a) **Testes de Significância:**

a.1) Quando o desvio padrão populacional σ é conhecido:

- **Teste bilateral** (H_1: $\mu \neq \mu_0$): Dado o nível de significância fixado α, calcular o valor crítico a partir de

$$\left|\frac{x_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = z_{\alpha/2},$$

sendo z_k tal que $P(Z > z_k) = k, 0 < k < 1$. Obtemos então dois valores críticos: $x_{c_1} = \mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ e $x_{c_2} = \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

A região crítica é dada por

$$RC = \{x \in \mathbb{R}: x < x_{c_1} ou\ x > x_{c_2}\}.$$

Regra de decisão: rejeitar H_0 se $\bar{x} \in RC$ (equivalente à desigualdade $|z_{obs}| > z_{\alpha/2}$); aceitar H_0 em caso contrário.

- **Teste unilateral esquerdo** (H_1: $\mu < \mu_0$): Dado o nível de significância fixado α, calcular o valor crítico a partir de

$$\frac{x_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_{\alpha/2}.$$

Obtemos então o valor crítico: $x_c = \mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

A região crítica é dada por

$$RC = \{x \in \mathbb{R}: x < x_c\}.$$

Regra de decisão: rejeitar H_0 se $\bar{x} \in RC$ (equivalente à desigualdade $z_{obs} < -z_{\alpha/2}$); aceitar H_0 em caso contrário.

- **Teste unilateral direito** (H_1: $\mu > \mu_0$): Dado o nível de significância fixado α, calcular o valor crítico a partir de

$$\frac{x_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}.$$

Obtemos então o valor crítico: $x_c = \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

A região crítica é dada por

$$RC = \{x \in \mathbb{R}: x > x_c\}.$$

Regra de decisão: rejeitar H_0 se $\bar{x} \in RC$ (equivalente à desigualdade $z_{obs} > z_{\alpha/2}$); aceitar H_0 em caso contrário.

a.2) Quando o desvio padrão populacional σ é desconhecido:

- **Teste bilateral** (H_1: $\mu \neq \mu_0$): Dado o nível de significância fixado α, calcular o valor crítico a partir de
$$\left|\frac{x_c-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| = t_{\frac{\alpha}{2},n-1},$$
sendo t_k tal que $P(T_{n-1} > t_k) = k, 0 < k < 1$. Obtemos então dois valores críticos: $x_{c_1} = \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$ e $x_{c_2} = \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$.
A região crítica é dada por
$$RC = \{x \in \mathbb{R}: x < x_{c_1} ou\, x > x_{c_2}\}.$$
Regra de decisão: rejeitar H_0 se $\bar{x} \in RC$ (equivalente à desigualdade $|t_{obs}| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$); aceitar H_0 em caso contrário.
- **Teste unilateral esquerdo** (H_1: $\mu < \mu_0$): Dado o nível de significância fixado α, calcular o valor crítico a partir de
$$\frac{x_c-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = -t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.$$
Obtemos então o valor crítico: $x_c = \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$.
A região crítica é dada por
$$RC = \{x \in \mathbb{R}: x < x_c\}.$$
Regra de decisão: rejeitar H_0 se $\bar{x} \in RC$ (equivalente à desigualdade $t_{obs} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$); aceitar H_0 em caso contrário.
- **Teste unilateral direito** (H_1: $\mu > \mu_0$): Dado o nível de significância fixado α, calcular o valor crítico a partir de
$$\frac{x_c-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.$$
Obtemos então o valor crítico: $x_c = \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}s/\sqrt{n}$.
A região crítica é dada por
$$RC = \{x \in \mathbb{R}: x > x_c\}.$$
Regra de decisão: rejeitar H_0 se $\bar{x} \in RC$ (equivalente à desigualdade $t_{obs} > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$); aceitar H_0 em caso contrário.

***Observação*: Os valores constantes nos cabeçalhos da tabela t são iguais ao nível de significância no caso de testes bilaterais e iguais ao dobro do nível de significância no caso de testes unilaterais.**

b) **Por Intervalos de Confiança:** Utilizando a distribuição amostral de $\bar{X}$ (equações 5.1 ou 5.2), podemos construir intervalos de confiança uni e bilaterais.

b.1) Quando o desvio padrão populacional σ é conhecido:

- **Teste bilateral** (H_1: $\mu \neq \mu_0$): Temos que
$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Logo, aceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor μ_0 e rejeitamos H_0 em caso contrário

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.3}$$

- **Teste unilateral esquerdo** (H_1: $\mu < \mu_0$): Temos que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_\alpha\right) \\ &= P\left(\mu \leq \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

- **A**ceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor μ_0 e rejeitamos H_0 em caso contrário

$$\left(-\infty, \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.4}$$

- **Teste unilateral direito** (H_1: $\mu > \mu_0$): Temos que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_\alpha\right) \\ &= P\left(\mu \geq \bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

- Aceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor de μ_0 e rejeitamos caso contrário

$$\left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right). \tag{5.5}$$

b.2) Quando o desvio padrão populacional σ for desconhecido:

- **Teste bilateral** (H_1: $\mu \neq \mu_0$): Temos que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) \\ &= P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) \\ &= P\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Logo, aceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor μ_0 e rejeitamos H_0 em caso contrário

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right). \tag{5.6}$$

- **Teste unilateral esquerdo** (H_1: $\mu < \mu_0$): Temos que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq -t_{\alpha,n-1}\right) \\ &= P\left(\mu \leq \bar{X} + t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

- **A**ceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor μ_0 e rejeitamos H_0 em caso contrário

$$\left(-\infty, \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right). \quad (5.7)$$

- **Teste unilateral direito** (H_1: $\mu > \mu_0$): Temos que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\alpha,n-1}\right) \\ &= P\left(\mu \ge \bar{X} - t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

- Aceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor de μ_0 e rejeitamos caso contrário

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty\right). \quad (5.8)$$

c) **Valor da prova:** a regra de decisão num nível de significância α é a seguinte:
- **Teste bilateral** (H_1: $\mu \neq \mu_0$): rejeitar H_0 no nível de significância considerado se $P(Z > |z_{calc}|) < \alpha/2$ (ou $P(T_{n-1} > |t_{calc}|) < \alpha/2$) e aceitar H_0 em caso contrário.
- **Teste unilateral esquerdo** (H_1: $\mu < \mu_0$): rejeitar H_0 no nível de significância considerado se $P(Z < z_{calc}) < \alpha$ (ou $P(T_{n-1} < t_{calc}) < \alpha$) e aceitar H_0 em caso contrário.
- **Teste unilateral direito** (H_1: $\mu > \mu_0$): rejeitar H_0 no nível de significância considerado se $P(Z > z_{calc}) < \alpha$ (ou $P(T_{n-1} > t_{calc}) < \alpha$) e aceitar H_0 em caso contrário.

***Exemplo* 5.1**. O INMETRO decidiu inspecionar pacotes de café de 500g de um a determinada marca. Aceita-se como razoável um desvio-padrão de 3g. Após pesar 25 unidades selecionadas em diversos mercados, chegou-se a uma média amostral de 502g. Pode-se afirmar o peso médio do produto atende às especificações? Use um nível de confiança de 95%.
Solução: O desvio-padrão é definido à priori, logo conhecido. O teste de hipótese a ser realizado é:

$$H_0: \mu = 500g \ x \ H_1: \pi \neq 500g.$$

A estatística de teste é dada por $z_{calc} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{502-500}{3/\sqrt{25}} = 3{,}33$. A região de aceitação do teste é o intervalo (-1.96,1.96). Como o valor de z_{calc} não pertence à região de aceitação, rejeitamos H_0, a um nível de 5% de significância. Portanto, o peso médio das embalagens é diferente de 500g. O p-valor do teste é dado por $P(Z > |3.33|) = 0.04\% < 5\%$. O intervalo de confiança para a verdadeira média é dado por $IC_{95\%}(\mu) = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(502 - 1.96 * \frac{3}{\sqrt{25}}, 502 + \right.$ *1.96∗325=500.8,503.2* não contém o valor testado (500g). Portanto, utilizando as três formas de testes, chegamos à mesma conclusão.

***Exemplo* 5.2**. Supõe-se que o preço de determinado artigo nos pontos de venda de certa localidade tem distribuição normal com média igual a R\$105,00 e desvio padrão igual a R\$10,00. Suspeita-se que, devido ao aumento da demanda, o preço do referido artigo **tenha aumentado** na região. Para verificar se isto ocorreu, um pesquisador analisou os preços deste artigo em 40 pontos de venda da localidade, escolhidos aleatoriamente, constatando que nos pontos de venda pesquisados o preço médio do artigo é R\$110,00.

Qual é a conclusão do pesquisador, admitindo-se um nível de significância de 5%? Utilize o valor da variável teste, o intervalo de confiança e o valor da prova.

Solução

Seja X a variável aleatória que associa a cada ponto de venda na localidade. As hipóteses do teste são: H_0: $\mu = 105$; H_1: $\mu > 105$.

A hipótese nula H_0 considera que o aumento da demanda não provocou aumento do preço enquanto que a hipótese alternativa H_1 admite que o aumento da demanda provocou aumento do preço.

Como X tem distribuição normal, a variável de teste é a variável normal padronizada Z sendo seu valor dado por

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

onde $\bar{x} = 110$, $\mu_0 = 105$ e $\sigma = 10$. Com estes dados tem-se que

$$z = \frac{110 - 105}{\frac{10}{\sqrt{40}}} = 3{,}16$$

O gráfico a seguir ilustra as regiões de aceitação e de rejeição de H_0 ($z_{0,05} = 1{,}64$).

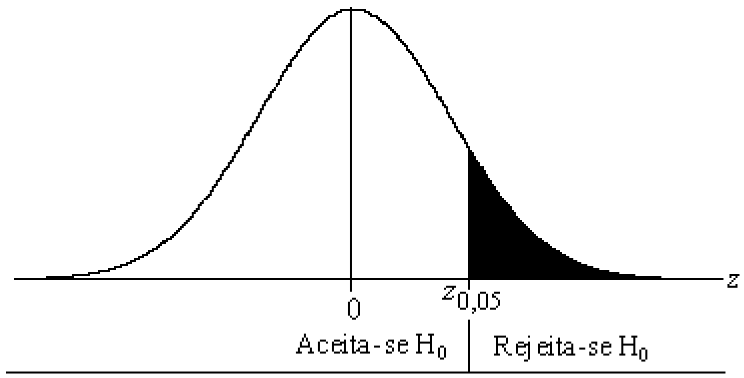


Figura 5.1

a) Se for utilizado o valor da variável de teste para a tomada de decisão a regra de decisão é a seguinte: rejeitar H_0 no nível de significância de 5% se $z > z_{0,05}$ e rejeitar H_0 em caso contrário. Observando-se a figura 5.1 tem-se da tabela do apêndice 1 que $z_{0,05} = 1{,}64$. Como o valor da variável teste está na região crítica (z = 3,16), rejeita-se H_0 no nível de significância de 5%, concluindo-se que o aumento da demanda provocou aumento do preço do artigo na localidade.

b) Se for utilizado o intervalo de confiança para a tomada de decisão deve-se construir um intervalo de confiança para o preço médio na localidade. Sendo o desvio padrão populacional σ conhecido este intervalo é

$$\left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

O intervalo de confiança unilateral de 95% para o preço médio na localidade é

$$\left(110 - 1{,}64 * \frac{10}{\sqrt{40}}, +\infty \right) = \left(R\$107{,}41; +\infty \right)$$

Como o este intervalo não contém o preço médio na localidade suposto em H_0 (μ = R\$105,00), rejeita-se a hipótese nula no nível de significância de 5% concluindo-se que o aumento da demanda causou aumento do preço do artigo na localidade.

c) Utilizando-se o valor da prova para um teste unilateral direito tem-se que:

valor da prova = P($Z > z$) onde z é o valor da variável teste que neste caso é 3,16. Então

valor da prova = P(Z > 3,16) = 0,0008

Como o valor da prova (0,0008) é menor do que o nível de significância (0,05) rejeita-se H_0 no nível de significância de 5% concluindo-se que o aumento da demanda causou aumento do preço do artigo na localidade.

***Exemplo* 5.3.** O tempo gasto pelos operários na montagem de determinado equipamento produzido por uma empresa tem distribuição normal com média igual a 85 minutos. Os operários foram submetidos a um processo de reciclagem com o objetivo de **melhorar a produtividade**. Para verificar se isso ocorreu, o pesquisador observou o tempo gasto na montagem de 5 unidades deste equipamento, escolhidas ao acaso na linha de produção, obtendo os seguintes valores, em minutos: 81, 84, 82, 78, 77, 83, 79, 79, 76, 85.

Considerando-se um nível de significância de 5%, pode-se afirmar que após a reciclagem dos operários houve aumento da produtividade?

Solução

As hipóteses do teste são: H_0: $\mu = 85$ *x* H_1: $\mu < 85$

A hipótese nula H_0 considera que a produtividade dos operários não aumentou enquanto que a hipótese alternativa H_1 admite que a produtividade dos operários aumentou porque acredita-se que após a reciclagem os operários gastam em média menos tempo para montar o equipamento em conseqüência do aumento da produtividade dos mesmos.

Neste caso, sendo desconhecido o desvio padrão populacional σ, a estatística de teste é a variável T sendo seu valor dado por

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

onde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

e

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n-1} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}}$$

Pelos dados do problema tem-se que $n = 10$ e

Então temos que $\bar{x} = 80.4$ e s=4.1. Logo, temos que

$$t = \frac{80,4 - 85}{\frac{3,1}{\sqrt{10}}} = -4,69$$

Esta variável teste tem distribuição t de Student com $\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$ graus de liberdade. O gráfico a seguir ilustra a esta situação para o nível de significância de 5%.

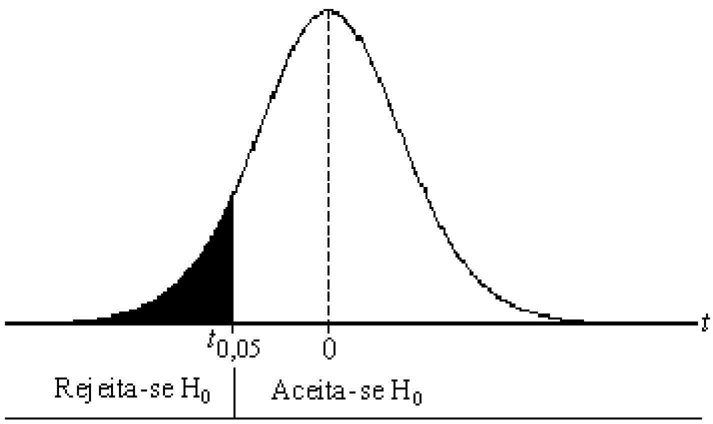


Figura 5.11

Na tabela do apêndice 2 obtém-se no cruzamento da linha ν = 9 e coluna 4 (no caso de teste unilateral o valor do cabeçalho da tabela é o dobro do nível de significância), obtém-se $t_{0,05}$ = 1,83.

a) Se for utilizado o valor da variável teste para a tomada de decisão, constata-se pelo gráfico acima que o valor da variável teste (t = –4,69) pertence à região de rejeição (-∞,1.83) e portanto a decisão é de rejeitar a hipótese nula no nível de significância de 5%, concluindo-se que após a reciclagem o tempo gasto pelos operários na montagem do equipamento diminuiu.

b) Se for utilizado o intervalo de confiança para a tomada de decisão deve-se construir um intervalo de confiança para o tempo médio gasto na montagem do equipamento. Sendo o desvio padrão populacional σ desconhecido, o intervalo de confiança de 95% para o tempo gasto pelos operários é

$$\left(-\infty, \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty;80{,}4 + 1{,}83 * \frac{3{,}1}{\sqrt{10}}\right) = \left(-\infty;82{,}2\right)$$

Como o este intervalo não contém o tempo médio suposto em H_0 ($\mu = 85$) gasto na montagem do equipamento, rejeita-se a hipótese nula no nível de significância de 5% concluindo-se que após a reciclagem dos operários o tempo gasto pelos operários na montagem do equipamento diminuiu.

c) Utilizando-se o valor da prova para um teste unilateral esquerdo tem-se que

valor da prova = P($T_9 < t$) = P(T_9 < –4,69)=0.06% (usando algum software)

Observando a tabela do apêndice 2 na linha ν = 9 constata-se que o valor 4,69 (o sinal foi desconsiderado porque a distribuição t é simétrica) está entre 3,25 (coluna 0,995) e 4,78 (coluna 0,9995), concluímos que P(T<-4.69)<0.005. Assim sendo, rejeita-se H_0 no nível de significância de 5% concluindo-se que o após a reciclagem o tempo gasto na montagem do equipamento diminuiu.

5.4.2. Teste de hipóteses para a Proporção Populacional

Admitiremos aqui que amostragem é feita com reposição ou amostragem sem reposição de uma população infinita ou população finita muito maior que a amostra. Seja 0<π<1 a probabilidade de sucesso de um evento de interesse. As hipóteses deste tipo de teste são:

$H_0: \pi = \pi_0$

$$
\text{H}_1: \begin{cases} \pi \neq \pi_0 \ (\textit{teste bilateral}) \\ \pi < \pi_0 \ (\text{teste unilateral esquerdo}) \\ \pi > \pi_0 \ (\text{teste unilateral direito}) \end{cases}
$$

onde π_0 é o valor de π sob a hipótese H_0.

Dada uma amostra aleatória de tamanho *n*, X_1, X_2,....,X_n, onde cada X_i assume 1 (se "sucesso" ocorre) ou 0 (se "fracasso" ocorre), seja P a proporção amostral (nº de "sucessos"/nº de itens), dada por $P = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. Sob a hipótese nula, a proporção amostral P, no caso de grandes amostras ($n \geq 30$), tem distribuição aproximadamente normal com média π_0 e desvio padrão

$$
\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}
$$

Nesta condição, a variável de teste é a variável normal padronizada

$$
Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \tag{5.9}
$$

Para se decidir se aceita ou rejeita H_0 adota-se os mesmos procedimentos do *t*este para a média populacional.

- **Teste bilateral** (H_1: $\pi \neq \pi_0$): O intervalo de confiança bilateral de nível 100*(1-α)*% para a tomada de decisão é dado por

$$
\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}, p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}\right) \tag{5.10}
$$

  Logo, aceitamos H_0 se o intervalo acima contém o valor π_0 e rejeitamos H_0 em caso contrário.

- **Teste unilateral esquerdo** (H_1: $\pi < \pi_0$): Temos que

- **A**ceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor μ_0 e rejeitamos H_0 em caso contrário

$$
\left(-\infty, p + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}\right). \tag{5.11}
$$

- **Teste unilateral direito** (H_1: $\pi > \pi_0$): Aceitamos H_0 se o intervalo abaixo contém o valor de μ_0 e rejeitamos caso contrário

$$
\left(p - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}, +\infty\right). \tag{5.12}
$$

***Observação*: No caso de teste da proporção usa-se o valor da proporção populacional suposto em H_0 (π_0).**

***Exemplo* 5.4.** Numa linha de produção, 10% dos itens de certo artigo apresentam defeitos de fabricação. Com o objetivo de reduzir este percentual, o produtor investiu na melhoria da qualidade do artigo. Para verificar se houve redução do percentual de itens defeituosos na linha de produção, foi observada uma amostra de 200 itens da produção, constatando-se que 12 itens são defeituosos. Pode-se afirmar que houve redução do percentual de itens defeituosos na linha de produção? Considere um nível de significância de 5%.

Solução

As hipóteses do teste são: H_0: $\pi = 0.1$; H_1: $\pi < 0.1$.

A hipótese nula H_0 considera que o investimento na melhoria da qualidade do produto não reduziu a proporção de itens defeituosos na produção enquanto que a hipótese alternativa H_1 admite que o investimento na melhoria da qualidade do produto reduziu a proporção de itens defeituosos na produção.

Sendo x = 12 o número de itens defeituosos na amostra de tamanho n = 200 e $\pi_0 = 0.1$, temos que

$$p = \frac{12}{200} = 0{,}06$$

Assim sendo, o valor da variável de teste é

$$z = \frac{0{,}06 - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{200}}} = -1{,}89$$

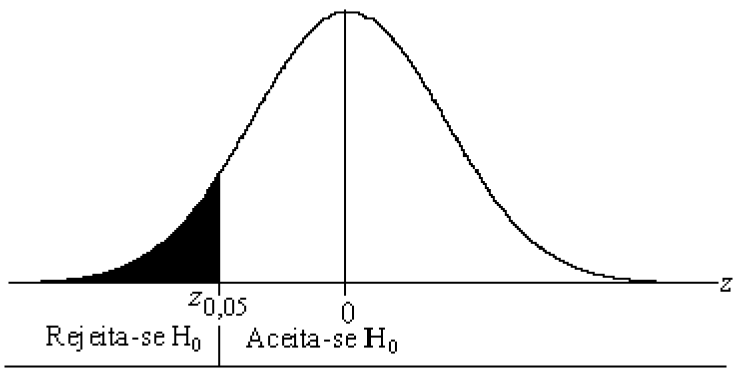


Figura 5.2

Observando-se o gráfico acima, tem-se da tabela do apêndice 1 que $z_{0,05} = 1{,}64$

a) Se for utilizado o valor da variável teste para a tomada de decisão, a região de aceitação é o intervalo (-1.64,+∞). Constata-se pelo gráfico acima que o valor da variável teste (z = −1,88) pertence à região de rejeição. Portanto, a decisão é rejeitar a hipótese nula no nível de significância de 5%, concluindo-se que a proporção de itens com defeito de fabricação diminuiu após o investimento na melhoria da qualidade do artigo.

b) Se for utilizado o intervalo de confiança para a tomada de decisão deve-se construir um intervalo de confiança para a proporção de itens com defeito de fabricação.

$$p - z_\gamma \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} \le \pi \le p + z_\gamma \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

Sendo o teste unilateral, tem-se que $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Da tabela do apêndice 1 tem-se que $z_{0,95}$ = 1,64. Então

$$0{,}06 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{200}} \le \pi \le 0{,}06 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{200}}$$

ou

$$0{,}025 \le \pi \le 0{,}095$$

Como o este intervalo não contém a proporção de itens com defeito de fabricação suposta em H_0 (π = 0,1), rejeita-se a hipótese nula no nível de significância de 5% concluindo-se que a proporção de itens com defeito de fabricação diminuiu após o investimento na melhoria da qualidade do artigo.

c) Utilizando-se o valor da prova para um teste unilateral esquerdo tem-se que

$$\text{valor da prova} = P(Z < z) = P(Z < -1{,}89) = G(-1{,}89) = 0{,}5 - P(0 < Z < 0{,}89)$$

Da tabela do apêndice 1 tem-se que $P(0 < Z < 1,{,}89) = 0{,}4706.$ Então

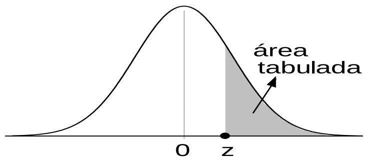
$$\text{valor da prova} = 0{,}5 - 0{,}4706 = 0{,}0294$$

Sendo o valor da prova (0,0294) menor que o nível de significância (0,05), rejeita-se H_0 no nível de significância de 5% concluindo-se que a proporção de itens com defeito de fabricação diminuiu após o investimento na melhoria da qualidade do artigo.

Apêndice

1) TABELA: Distribuição normal padrão.

P(Z>z)



z	segunda decimal de z 0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0 ,3050	0 ,3015	0 ,2981	0 ,2946	0 ,2912	0 ,2877	0 ,2842	0 ,2810	0 ,2776
0,6	0,2743	0 ,2709	0 ,2676	0 ,2643	0 ,2611	0 ,2578	0 ,2546	0 ,2514	0 ,2483	0 ,2451
0,7	0,2420	0 ,2389	0 ,2358	0 ,2327	0 ,2296	0 ,2266	0 ,2236	0 ,2206	0 ,2177	0 ,2148
0,8	0,2119	0 ,2090	0 ,2061	0 ,2033	0 ,2005	0 ,1977	0 ,1949	0 ,1922	0 ,1894	0 ,1867
0,9	0,1841	0 ,1814	0 ,1788	0 ,1762	0 ,1736	0 ,1711	0 ,1685	0 ,1660	0 ,1635	0 ,1611
1,0	0,1587	0 ,1562	0 ,1539	0 ,1515	0 ,1492	0 ,1469	0 ,1446	0 ,1423	0 ,1401	0 ,1379
1,1	0,1357	0 ,1335	0 ,1314	0 ,1292	0 ,1271	0 ,1251	0 ,1230	0 ,1210	0 ,1190	0 ,1170
1,2	0 ,1151	0 ,1131	0 ,1112	0 ,1093	0 ,1075	0 ,1056	0 ,1038	0 ,1020	0 ,1003	0 ,0985
1,3	0 ,0968	0 ,0951	0 ,0934	0 ,0918	0 ,0901	0 ,0885	0 ,0869	0 ,0853	0 ,0838	0 ,0823
1,4	0 ,0808	0 ,0793	0 ,0778	0 ,0764	0 ,0749	0 ,0735	0 ,0722	0 ,0708	0 ,0694	0 ,0681
1,5	0 ,0668	0 ,0655	0 ,0643	0 ,0630	0 ,0618	0 ,0606	0 ,0594	0 ,0582	0 ,0571	0 ,0559
1,6	0 ,0548	0 ,0537	0 ,0526	0 ,0516	0 ,0505	**0 ,0495**	0 ,0485	0 ,0475	0 ,0465	0 ,0455
1,7	0 ,0446	0 ,0436	0 ,0427	0 ,0418	0 ,0409	0 ,0401	0 ,0392	0 ,0384	0 ,0375	0 ,0367
1,8	0 ,0359	0 ,0352	0 ,0344	0 ,0336	0 ,0329	0 ,0322	0 ,0314	0 ,0307	0 ,0301	0 ,0294
1,9	0 ,0287	0 ,0281	0 ,0274	0 ,0268	0 ,0262	0 ,0256	**0 ,0250**	0 ,0244	0 ,0239	0 ,0233
2,0	0 ,0228	0 ,0222	0 ,0217	0 ,0212	0 ,0207	0 ,0202	0 ,0197	0 ,0192	0 ,0188	0 ,0183
2,1	0 ,0179	0 ,0174	0 ,0170	0 ,0166	0 ,0162	0 ,0158	0 ,0154	0 ,0150	0 ,0146	0 ,0143
2,2	0 ,0139	0 ,0136	0 ,0132	0 ,0129	0 ,0125	0 ,0122	0 ,0119	0 ,0116	0 ,0113	0 ,0110
2,3	0 ,0107	0 ,0104	0 ,0102	0 ,0099	0 ,0096	0 ,0094	0 ,0091	0 ,0089	0 ,0087	0 ,0084
2,4	0 ,0082	0 ,0080	0 ,0078	0 ,0075	0 ,0073	0 ,0071	0 ,0069	0 ,0068	0 ,0066	0 ,0064
2,5	0 ,0062	0 ,0060	0 ,0059	0 ,0057	0 ,0055	0 ,0054	0 ,0052	0 ,0051	0 ,0049	0 ,0048
2,6	0 ,0047	0 ,0045	0 ,0044	0 ,0043	0 ,0041	0 ,0040	0 ,0039	0 ,0038	0 ,0037	0 ,0036
2,7	0 ,0035	0 ,0034	0 ,0033	0 ,0032	0 ,0031	0 ,0030	0 ,0029	0 ,0028	0 ,0027	0 ,0026
2,8	0 ,0026	0 ,0025	0 ,0024	0 ,0023	0 ,0023	0 ,0022	0 ,0021	0 ,0021	0 ,0020	0 ,0019
2,9	0 ,0019	0 ,0018	0 ,0017	0 ,0017	0 ,0016	0 ,0016	0 ,0015	0 ,0015	0 ,0014	0 ,0014
3,0	0,00135									
3,5	0,000 233									
4,0	0,000 031 7									
4,5	0,000 003 40									
5,0	0,000 000 287									

2)

Distribuição t de Student - t_n

Os valores tabelados correspondem aos pontos x tais que: $P(t_n \leq x)$

	$P(t_n \leq x)$							
n	0,600	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,9995
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,689
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,660
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,254	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291