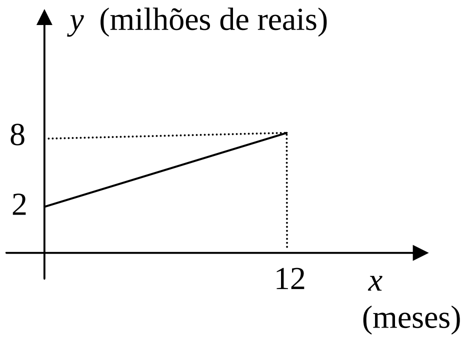
Questão 1 – Uma construtora, para construir o novo prédio da biblioteca de uma universidade, cobra um valor fixo para iniciar as obras e mais um valor, que aumenta de acordo com o passar dos meses da obra. O gráfico abaixo descreve o custo da obra, em milhões de reais, em função do número de meses utilizados para a construção da obra.



a) Obtenha a lei $y = f(x)$, para $x \geq 0$, que determina o gráfico.

Seja $y = f(x)$, $x \geq 0$ a lei que determina o gráfico. Sabemos pelo gráfico que, no tempo zero, $f(0) = 2$ e que no décimo segundo mês temos: $f(12) = 8$. Logo, o coeficiente angular da reta que representa a função é dado por:

$$m = \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{8-2}{12} \Rightarrow m = \frac{6}{12} \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Assim, a equação da reta é dada por:

$$y - y_o = m(x - x_o) \Rightarrow y - f(0) = \frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Portanto, a lei que determina o gráfico é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2, \ x \geq 0.$$

b) Determine o valor inicial cobrado pela construtora para a construção do prédio da biblioteca.

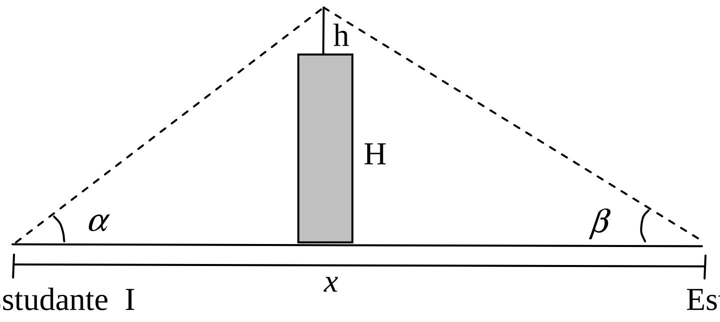
O valor inicial cobrado, pela construtora para a construção do prédio da biblioteca, é: $f(0) = 2$ milhões de reais.

c) Qual será o custo total da obra, sabendo que a construção demorou 10 meses para ser finalizada?

Como a construção demorou 10 meses e a lei que descreve o custo da obra é dada por: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $x \geq 0$, temos que o custo total da obra é:

$$f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 + 2 = 7 \text{ milhões de reais.}$$

Questão 2 – Dois estudantes I e II desejam medir a altura, H, de um prédio, utilizando-se de conhecimentos matemáticos. Distanciados um do outro de x metros, os estudantes fazem visadas atingindo a ponta da antena de altura h situada no topo do prédio, segundo os ângulos α e β, representados no esboço abaixo.



Obtenha a altura H da torre, em função de α, β, h e x.

Redesenhando a figura temos os triângulos ABC, ADC e DBC, onde

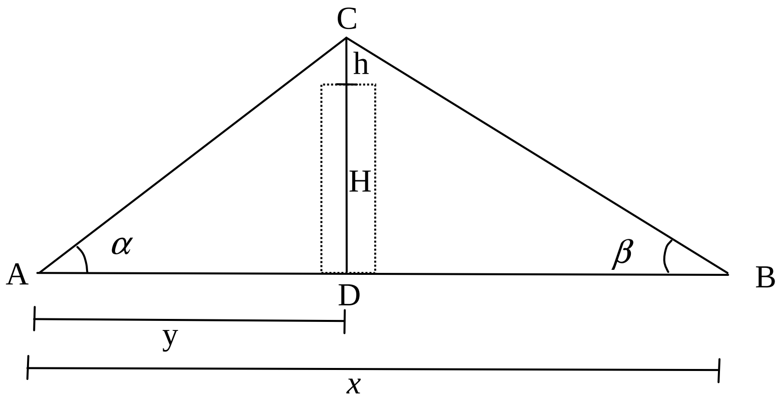
A - representa o estudante I

B - representa o estudante II

C - representa a ponta da antena

D - projeção ortogonal de C sobre o segmento $\overline{AB}$

y - distância de A até D



Temos que $\overline{CD}$ é a altura do triângulo ABC relativa à base $\overline{AB}$ e mede $H+h$.

Pelo triângulo retângulo ADC obtemos:

$$tg(\alpha)=\frac{H+h}{y} \quad \Rightarrow \quad y\,tg(\alpha)=H+h \qquad (1)$$

Pelo triângulo retângulo DBC obtemos:

$$tg(\beta)=\frac{H+h}{x-y} \quad \Rightarrow \quad (x-y)tg(\beta)=H+h \qquad (2)$$

Igualando as expressões (1) e (2) obtemos

$$y\,tg(\alpha)=H+h=(x-y)\,tg(\beta) \quad \Rightarrow \quad y\,tg(\alpha)+y\,tg(\beta)=x\,tg(\beta) \quad \Rightarrow \quad y\,(tg(\alpha)+tg(\beta))=x\,tg(\beta),$$

ou seja:

$$y=\frac{x\,tg(\beta)}{tg(\alpha)+tg(\beta)}. \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$H+h=\frac{x\,tg(\beta)}{tg(\alpha)+tg(\beta)}tg(\alpha).$$

Portanto,

$$H=\frac{x\,tg(\beta)\,tg(\alpha)}{tg(\alpha)+tg(\beta)}-h.$$

Questão 3 – Uma loja virtual oferece as seguintes alternativas para o pagamento de um *notebook*:

- À vista, no boleto bancário, com 5% de desconto sobre o preço tabelado.
- No cartão de crédito, em uma única parcela, o valor de tabela.

Considerando que o consumidor tenha dinheiro para efetuar a compra à vista, e que esse dinheiro possa ser aplicado em uma instituição financeira a uma taxa de 1%, por um prazo de 30 dias, qual a opção mais vantajosa para o consumidor? Justifique sua resposta usando argumentos matemáticos.

Suponha que o valor de tabela do *notebook* seja V_0.

À vista, no boleto bancário, o consumidor pagará o valor:

$$V_1 = V_0 - 5\%V_0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_0 - 0,05 \times V_0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = (1 - 0,05) \times V_0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0,95 \times V_0 .$$

O consumidor aplicando a quantia V_1 em uma instituição financeira, a uma taxa de 1%, por um prazo de 30 dias obterá:

$$V_2 = V_1 + 1\%V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1 + 0,01 \times V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = (1 + 0,01) \times V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 1,01 \times V_1 .$$

Como $V_1 = 0,95 \times V_o$, temos:

$$V_2 = 1,01 \times V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 1,01 \times (0,95 \times V_0) \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0,9595 \times V_0$$

Logo $V_2 < V_0$, ou seja, o valor à vista mais rendimentos é menor que o valor a prazo.

Portanto, nessas condições, a opção mais vantajosa para o consumidor é a compra à vista.

Outra solução:

Suponha que o valor de tabela do *notebook* seja $V_0 = R\$\ 1000,00$.

À vista, no boleto bancário, o consumidor pagará o valor de:

$$V_1 = V_0 - 5\%V_0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 1000 - 50 \quad \Rightarrow \quad V_1 = R\$\ 950,00 .$$

O consumidor aplicando a quantia $V_1 = R\$\ 950,00$ em uma instituição financeira, a uma taxa de 1%, por um prazo de 30 dias, obterá:

$$V_2 = V_1 + 1\%V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 950 + 0,01 \times 950 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 950 + 9,5 \quad \Rightarrow \quad V_2 = R\$\ 959,50 .$$

Logo $V_2 < R\$\ 1000,00$, ou seja, o valor à vista mais rendimentos é menor que o valor a prazo.

Portanto, nessas condições, a opção mais vantajosa para o consumidor é a compra à vista.

Questão 4 – Em um trapézio $ABCD$, com lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos, sejam M o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e S_1 a área do triângulo BMC.

a) Considere P o ponto de interseção do segmento $\overline{AM}$ com $\overline{BD}$. Sabendo que a área do triângulo DPM é um quarto da área do triângulo BMC, deduza a relação existente entre a altura H do triângulo BMC relativa à base $\overline{MC}$ e altura h do triângulo DPM relativa à base $\overline{MD}$.

Considere as figuras ilustrativas:

Seja S_2 a área do triângulo DPM. Logo, $S_2 = \dfrac{\overline{DM} \times h}{2}$.

Usando o fato que $S_2 = \dfrac{1}{4} \times S_1$ temos:

$$\frac{\overline{DM} \times h}{2} = \frac{1}{4} \times S_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{DM} \times h}{2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{\overline{MC} \times H}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \overline{DM} \times h = \frac{1}{4} \times \left(\overline{MC} \times H \right)$$

Como M é o ponto médio de $\overline{CD}$, temos que $\overline{DM} = \overline{MC}$ e assim:

$$\overline{DM} \times h = \frac{1}{4} \times \overline{DM} \times H \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{4} \times H \quad \Rightarrow \quad H = 4 \times h$$

Observação: O resultado obtido é independente da consideração $\overline{CD} > \overline{AB}$ nas figuras acima.

b) Sabendo que $\overline{CD} = 2$ e $\overline{AB} = 6$, calcule a área do trapézio em função da altura H do triângulo BMC.

Note que, a altura H do triângulo BMC é também a altura do trapézio $ABCD$, pois B é um vértice do trapézio e a base $\overline{MC}$ do triângulo BMC está contida no lado $\overline{CD}$, paralelo ao lado $\overline{AB}$.

Assim,

$$\text{Área do trapézio} = S_{Trapézio} = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \times H}{2} = \frac{(6+2) \times H}{2}.$$

Logo,

$$S_{Trapézio} = 4 \times H.$$

Questão 5 – Um casal com 6 filhos mudará para sua casa nova que possui quatro quartos, sendo dois de frente e dois de fundos. O casal ocupará um dos quartos da frente e os demais serão ocupados, ao acaso e aos pares, pelos filhos. As idades dos filhos estão representadas no quadro abaixo:

FILHO	IDADE
André	2
Bernardo	3
Carlos	4
Daniel	5
Eduardo	7
Fernando	9

a) Determine a probabilidade da soma das idades dos irmãos que ocuparão o quarto da frente ser menor que ou igual a 10.

Considere a sequência **XXYYZZ** para indicar uma distribuição em que André e Bernardo ficarão no quarto da frente; Carlos e Daniel ficarão no primeiro quarto dos fundos e Eduardo e Fernando ficarão no segundo quarto dos fundos. Toda distribuição corresponde a exatamente uma sequência desta forma.

Logo, o número de distribuições possíveis (sem a restrição da idade) é igual ao número de anagramas da palavra **XXYYZZ** , que é

$$P_6^{2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90\,.$$

Os anagramas que correspondem às distribuições em que a soma das idades dos ocupantes do quarto da frente é menor que ou igual a 10 são das seguintes formas:

X X – – – – (André e Bernardo),
X – **X** – – – (André e Carlos),
X – – **X** – – (André e Daniel),
X – – – **X** – (André e Eduardo),
– **X X** – – – (Bernardo e Carlos),
– **X** – **X** – – (Bernardo e Daniel),
– **X** – – **X** – (Bernardo e Eduardo),
– – **X X** – – (Carlos e Daniel).

Logo, o número dessas distribuições é:

$$8 \cdot P_4^{2,2} = 8 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 48\,.$$

Sabemos que a probabilidade de um evento E é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)}\,,$$

onde $n(E)$ é igual ao número de elementos do conjunto E e $n(U)$ é igual ao número de elementos do conjunto U .

Portanto a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}\,.$$

Outra solução:

Escolhido o par de irmãos que ocupará o quarto da frente obtemos, independentemente desta escolha,

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

formas de distribuir os irmãos restantes nos quartos dos fundos. Assim é possível considerar somente o par de irmãos que ocupará o quarto da frente. Consequentemente, o espaço amostral formado pelos possíveis pares de irmãos a partir das idades é

$$U = \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,7),(2,9),(3,4),(3,5),(3,7),(3,9),(4,5),(4,7),(4,9),(5,7),(5,9),(7,9)\},$$

enquanto o conjunto formado pelos possíveis pares de irmãos,cuja soma das idades é menor que ou igual a 10, é

$$E = \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,7),(3,4),(3,5),(3,7),(4,5)\}.$$

Sabemos que a probabilidade de um evento E é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)},$$

onde $n(E)$ é igual ao número de elementos do conjunto E e $n(U)$ é igual ao número de elementos do conjunto U.

Logo, $P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{8}{15}$.

b) Os pais resolveram que os dois filhos menores devem ocupar o mesmo quarto. Qual a probabilidade da soma das idades dos dois filhos escolhidos para ocupar o quarto da frente ser menor que ou igual a 10?

Utilizando a representação da primeira solução do item a) dessa questão, as distribuições possíveis em que os dois filhos menores devem ocupar o mesmo quarto e a soma das idades dos dois filhos escolhidos para ocupar o quarto da frente seja menor que ou igual a 10 são das seguintes formas:

X X _ _ _ _ (André e Bernardo estão no quarto da frente),

Y Y _ _ _ _ (André e Bernardo estão no primeiro quarto dos fundos) e

Z Z _ _ _ _ (André e Bernardo estão no segundo quarto dos fundos).

Logo, o número de distribuições possíveis é

$$3 \cdot P_4^{2,2} = 3 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 18.$$

As distribuições que nos interessam são as da forma

X X _ _ _ _ (André e Bernardo no quarto da frente),

_ _ **X X** _ _ (Carlos e Daniel no quarto da frente).

Observamos que há $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ distribuições da primeira forma e 2 distribuições da segunda forma (André e Bernardo devem permanecer juntos). Logo, há 8 distribuições em que a soma das idades dos ocupantes do quarto da frente é menor que ou igual a 10 e André e Bernardo ficam juntos.

Assim a probabilidade do evento é

$$P(E) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

Outra solução:

Considere a tabela que lista todas as possibilidades para a ocupação dos quartos, conforme as exigências da letra b).

Casos	Quartos			**Evento**
	Frente	Fundos 1	Fundos 2	
1	(2,3)	(4,5)	(7,9)	**1**
2	(2,3)	(4,7)	(5,9)	**2**
3	(2,3)	(4,9)	(5,7)	**3**
4	(2,3)	(5,7)	(4,9)	**4**
5	(2,3)	(5,9)	(4,7)	**5**
6	(2,3)	(7,9)	(4,5)	**6**
7	(4,5)	(2,3)	(7,9)	**7**
8	(4,5)	(7,9)	(2,3)	**8**
9	(4,7)	(2,3)	(5,9)	
10	(4,7)	(5,9)	(2,3)	
11	(4,9)	(2,3)	(5,7)	
12	(4,9)	(5,7)	(2,3)	
13	(5,7)	(2,3)	(4,9)	
14	(5,7)	(4,9)	(2,3)	
15	(5,9)	(2,3)	(4,7)	
16	(5,9)	(4,7)	(2,3)	
17	(7,9)	(2,3)	(4,5)	
18	(7,9)	(4,5)	(2,3)	

Portanto a probabilidade do evento é

$$P(E) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$