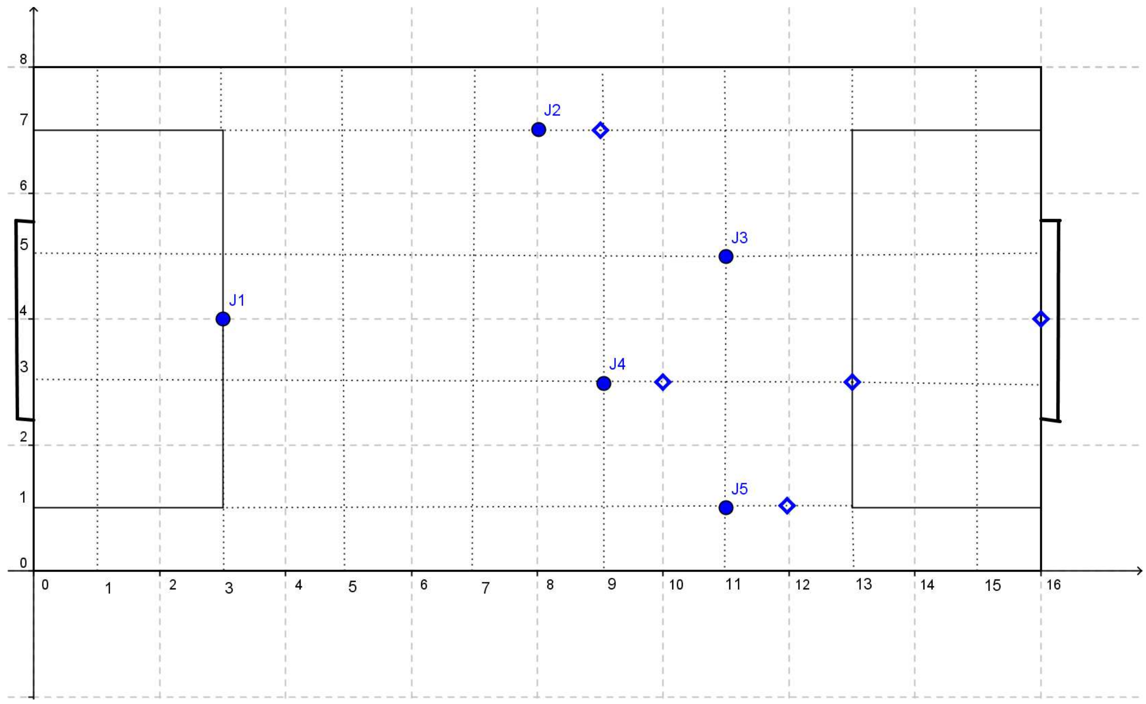
Questão 1 – O quadro, a seguir, representa uma quadra de futsal e dois times, o time de camisa branca e o time de camisa preta, representados por ◊ e ●, respectivamente, distribuídos em um determinado instante do jogo.



O goleiro do time de camisa preta está na posição (3,4) do plano cartesiano e deseja passar a bola ao longo de uma reta para o jogador com melhor condição para chutar a bola ao gol adversário (jogador menos marcado e mais próximo ao gol).

a) Supondo que o jogador escolhido pelo goleiro do time de camisa preta faça o gol, calcule a menor distância percorrida pela bola partindo do goleiro ao gol adversário.

Temos que a menor distância é dada por $D = d(J_1, J_3) + d(J_3, G)$, onde $G(16,5)$ (ponto da linha do gol (reta $x = 16$), cuja reta que passa por J_3 e G é perpendicular a essa linha).

Logo $D = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_G)^2 + (y_3 - y_G)^2} = \sqrt{(3-11)^2 + (4-5)^2} + \sqrt{(11-16)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{65} + 5u.c.$

b) Prove que a distância obtida no item **a** desta questão é realmente a menor.

Basta mostrar que a distância mínima de J_3 ao gol corresponde a distância de J_3 a um ponto G do gol cuja reta que passa por esses pontos é perpendicular a linha do gol (determinada pela reta $x = 16$).
De fato, seja $d = d(J_3, G)$ e considere $h = d(J_3, \overline{G})$, onde $\overline{G} \neq G$ e, $\overline{G}$ pertence a linha do gol. Observe que os pontos J_3, G e $\overline{G}$ formam um triângulo retângulo em G. Logo pelo Teorema de Pitágoras

$$h^2 = d^2 + s^2,$$

onde $s = d(G, \overline{G})$. Logo $h^2 > d^2$ e portanto $h > d$.

c) Escreva a equação da curva (ou lugar geométrico) determinada pelos pontos (x, y) cuja distância ao goleiro do time de camisa branca na posição $(16, 4)$ é igual à distância desse goleiro ao jogador J_3.

Sejam $P(x, y)$ e G_B o goleiro do time de camisa branca, então $d(P, G_B) = d(G_B, J_3)$, ou seja,

$$\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2} = \sqrt{(x_3-x_B)^2+(y_3-y_B)^2} \Rightarrow \sqrt{(x-16)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(11-16)^2+(5-4)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-16)^2+(y-4)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow (x-16)^2+(y-4)^2 = 26.$$

Portanto a equação da curva é $(x-16)^2+(y-4)^2 = 26,$ logo a curva é uma circunferência centrada em $C(16, 4)$ e raio $r = \sqrt{26}.$

d) Obtenha o cosseno de θ, onde θ é o ângulo determinado pelas retas r_1 e r_2, sendo que r_1 passa por J_1 e J_5 e r_2 que passa por J_3 e J_5.

Considere o triângulo de vértices J_1, J_5 e $A,$ retângulo em A, onde $A \in r_2$. Logo $A(11, 4).$ Dessa forma

$$\cos\theta = \frac{3}{d(J_1, J_5)} = \frac{3}{\sqrt{73}} = \frac{3\sqrt{73}}{73}.$$

Questão 2 – Decomponha o polinômio $p(x) = x^7 - x$ em $p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)p_4(x)p_5(x)$, de forma que $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ tenham grau 1 e $p_4(x)$, $p_5(x)$ tenham grau 2 e não possuam raízes reais.

Temos que $p(x) = x^7 - x = x(x^6 - 1)$. Decompondo o último fator temos $p(x) = x(x^3-1)(x^3+1).$

Lembrando que $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ obtemos $p(x) = x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

Sabemos que uma equação quadrática do tipo $ax^2+bx+c = 0$, onde $a, b, c \in IR, a \neq 0,$ é irredutível em IR (não possui raízes reais) se $\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

Assim os polinômios x^2+x+1 e x^2-x+1 são irredutíveis, pois $\Delta = -3 < 0.$

Desta forma,

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)p_4(x)p_5(x),$$

com $p_1(x) = x,\ \ p_2(x) = x-1,\ \ p_3(x) = x+1,\ \ p_4(x) = x^2+x+1$ e $p_5(x) = x^2-x+1.$

Questão 3 – Considere uma circunferência de centro $C(a,b)$ de raio 1. Sabendo que essa circunferência é tangente às retas $2x+y-3=0$ e $y=0$, e que o centro C está situado no segundo quadrante, obtenha as coordenadas de C.

Sabendo que a distância do ponto $C(a,b)$ à reta $cx+dy+e=0$ é dada por

$$d=\frac{|ac+bd+e|}{\sqrt{c^2+d^2}},$$

E como o raio da circunferência é 1, segue que a distância de C a qualquer uma das retas tangentes dadas é $d=1.$

Assim a distância de C à reta $y=0$ é

$$d=|b|=1,$$

Logo $b=\pm 1.$

Por outro lado, a distância de C à reta $2x+y-3=0$ é

$$d=\frac{|2a+b-3|}{\sqrt{5}}=1.$$

Como o centro está no segundo quadrante, temos que $b=1,$ substituindo o valor de b na igualdade acima obtemos

$$2|a-1|=\sqrt{5},$$

então $a=1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$

Portanto como o centro está situado no segundo quadrante, $a=1-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $C=\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2},1\right).$

Questão 4 – Dado um grupo com 3 mulheres e 8 homens, obtenha o número de filas distintas com 5 pessoas, contendo em cada fila exatamente 2 mulheres.

Temos que o número possível de filas é dado por

$$P_5.C_2^3.C_3^8=5!\left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)\left(\frac{8!}{3!(8-3)!}\right)=120\left(\frac{3!}{2!1!}\right)\left(\frac{8!}{3!5!}\right)=120.168=20160.$$

Questão 5 – Uma indústria farmacêutica fabrica três produtos, A, B e C, usando três tipos de substâncias X, Y e Z. Para a fabricação de cada litro de A, são utilizados 1 ml da substância X, 2 ml de Y e 4 ml de Z. Para cada litro de B, 1 ml da substância X, 3 ml de Y e 5 ml de Z e, para cada litro de C, 1 ml de X, 1 ml de Y e 7 ml de Z. Determine quantos litros de cada um dos produtos A, B e C foram fabricados com 5 litros de X, 11 litros de Y e 27 litros de Z.

Sejam x, y e z a quantidade em litros dos produtos A,B e C, respectivamente.

Temos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 11000 \\ 27000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 5000 \\ 2x + 3y + z = 11000 \\ 4x + 5y + 7z = 27000 \end{cases}$

Logo para determinar os valores de x, y e z devemos resolver o sistema de equações lineares acima.

Usaremos escalonamento.

Considere a matriz associada ao sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 2 & 3 & 1 & 11000 \\ 4 & 5 & 7 & 27000 \end{pmatrix}_{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 7000 \end{pmatrix}_{L_3 \to L_3 - L_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & 0 & 4 & 6000 \end{pmatrix}$$

Assim obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 5000 \\ y - z = 1000 \\ 4z = 6000 \end{cases} .$$

Portanto $z = \dfrac{6000}{4} = 1500$ e como $y - z = 1000,$ segue que $y = 2500.$ Além disso, como $x + y + z = 5000,$ obtemos $x = 1000.$ Logo foram produzidos 1litro do produto A, 2,5 litros de B e 1,5 litros de C.