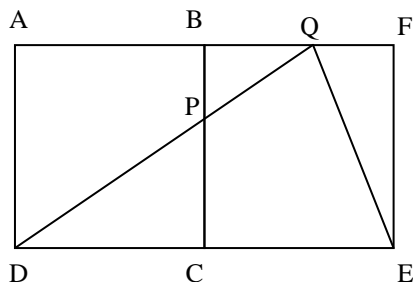


Questão 1 – Sejam $ABCD$ e $BCEF$ dois quadrados, de lado 1cm, justapostos pelo lado comum BC . Considere Q um ponto sobre o lado BF e P o ponto de intersecção dos segmentos \overline{DQ} e \overline{BC} . Sabendo que o segmento \overline{CP} mede $\frac{2}{3}$ cm, responda ao que se pede.



a) Qual é a medida da área do triângulo DQE ?

Note que a altura h do triângulo DQE relativa à base \overline{DE} é EF . Assim,

$$S = \text{área do triângulo } DQE = \frac{DE \times EF}{2} = 1 \text{ cm}^2.$$

b) Quais são as medidas dos segmentos \overline{BQ} e \overline{QE} ?

Os triângulos BQP e DPC são semelhantes. Logo,

$$\frac{PB}{CP} = \frac{BQ}{DC} \Rightarrow \frac{1/3}{2/3} = \frac{BQ}{1} \Rightarrow BQ = \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$QE^2 = QF^2 + FE^2 \Rightarrow QE^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow QE = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}.$$

c) Qual é a medida da altura do triângulo DQE relativa à base \overline{QE} ?

Defina h como a altura do triângulo DQE relativa à base \overline{QE} .

Sabemos que a área S do triângulo DQE é dada por

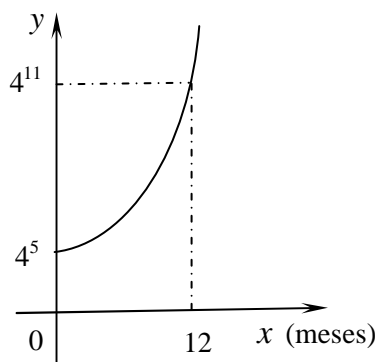
$$1 = S = \frac{QE \times h}{2}.$$

Portanto,

$$2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times h \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}.$$

Questão 2 – A figura a seguir representa, no plano cartesiano, o gráfico da função $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que descreve o crescimento de uma cultura de microrganismos em função do tempo x medido, em meses, a partir de uma certa data.

(População em potências de base 4)



a) Qual o número inicial de microrganismos nessa cultura?

Primeiramente observamos que quando o tempo é $x=0$, temos $f(0) = 4^5$. Logo, o número inicial de microrganismos, nessa cultura, é igual a 4^5 .

b) Admitindo que a lei de formação da função que descreve o crescimento dessa cultura é dada por $f(x) = ka^x$, $a, k \in \mathbb{R}$, determine os valores de a e k .

Observamos, inicialmente, que $a \neq 0$. Pelo item (a), sabemos que $f(0) = 4^5$. Portanto $4^5 = f(0) = ka^0$. Assim, $4^5 = k \cdot 1$, logo $k = 4^5$.

De acordo com o gráfico, aos 12 meses ($x=12$), temos 4^{11} microrganismos nessa cultura. Assim,

$$f(12) = 4^{11} \Rightarrow 4^{11} = f(12) = 4^5 a^{12} \Rightarrow a^{12} = \frac{4^{11}}{4^5} \Rightarrow a^{12} = 4^{11-5} = 4^6.$$

Como $4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$, temos $a^{12} = 2^{12}$. Logo, $a = 2$.

Portanto, $f(x) = 4^5 \cdot 2^x$.

c) Se 4^r representa o número de microrganismos após seis meses, determine o valor de r , considerando a lei de formação da função obtida no item **b** desta questão.

Considere $z \geq 6$ o número de meses. Como 4^r representa o número de microrganismos após seis meses, temos $f(z) = 4^r$. Pela lei de formação da função obtida no item (b) desta questão temos, $4^r = f(z) = 4^5 2^z$. Assim,

$$4^r = 4^5 2^z \Rightarrow 2^{2r} = 2^{10} \cdot 2^z \Rightarrow 2^{2r} = 2^{10+z} \Rightarrow 2r = 10 + z \Rightarrow r = 5 + \frac{z}{2}.$$

Portanto, $r = 5 + \frac{z}{2}$.