Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Javier Quinto Rojas

UMA SOLUÇÃO QUE MUDA DE SINAL PARA UM PROBLEMA SUPERLINEAR DE DIRICHLET

Juiz de Fora

2019

Javier Quinto Rojas

UMA SOLUÇÃO QUE MUDA DE SINAL PARA UM PROBLEMA SUPERLINEAR DE DIRICHLET

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Javier, Quinto Rojas.
UMA SOLUÇÃO QUE MUDA DE SINAL PARA UM PROBLEMA SUPERLINEAR DE DIRICHLET / Javier Quinto Rojas. – 2019.
90 f. : il.

Orientador: Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Min-Max. 2. Soluções de Sinal Definido. 3. Solucão Nodal. I. Miyagaki, Olimpio Hiroshi, orient. II. Título.

Javier Quinto Rojas

UMA SOLUÇÃO QUE MUDA DE SINAL PARA UM PROBLEMA SUPERLINEAR DE DIRICHLET

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marcos Roberto Marcial
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedicado aos meus pais Fortunata, Nelly e Aurelio; aos meus irmãos, Raúl, José e Gilmer, à minha avó Isabel e ao meu amigo Ronald, na memória e com Deus.

AGRADECIMENTOS

Mais um objetivo alcançado, mais uma etapa concluída com sucesso; cheia de muitas vivencias que ficarão na minha memoria como belas lembranças.

Agradeço primeiramente a Deus, companheiro de todos os momentos, por ter me dado saúde, energia e benefícios para concluir meu trabalho, por cuidar de mim em todo momento, por encher de felicidade minha vida, por ser meu guia levando-me pelos caminhos certos com as devidas lições de amor, fraternidade e compaixão hoje e sempre.

Aos meus pais, Aurelio e Fortunata, aos meus irmãos, Nelly, Carlos, Nery, Vanessa, Raúl, José e Gilmer, aos meus queridos sobrinhos, Jakelin, Jorge, Jhosny, Jhonier Fabinho e Danitza, aos meus cunhados Julio e Quelwin, à minha tia Ninfa, que mesmo longe, foram fundamentais nessa caminhada e merecem um agradecimento todo especial.

Agradeço também aos meus amigos que compartilharam momentos e sentimentos únicos e inesquecíveis o Patrick e o Danilo. Ao Factor pela amizade e colaboração. Aos professores pelo conhecimento transmitido. Por fim, mas não menos importante, deixo uma palavra de gratidão a todas as pessoas que de alguma forma tocaram meu coração e transmitiram força, foco e confiança em mim.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do ICE - UFJF.

À coordenação do Mestrado em Matemática da UFJF.

Ao Olímpio pela orientação e por seus ensinamentos. Sou grato por cada minuto dedicado à orientação deste trabalho.

Aos membros efetivos e suplentes da banca examinadora, Luiz Fernando, Marcos, Fábio e Bruno, pela disponibilidade e atenção.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções nodais para problemas elípticos não lineares com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é uma região limitada com fronteira suficientemente suave.
O presente trabalho está baseado nos estudos realizados por Castro, Cossio e Neuberger em [10] e [11].
Provaremos que um problema elíptico superlinear tem pelo menos três soluções não triviais. Duas dessas soluções, w_1 e w_2, são de sinal definido (positivo e negativo, respectivamente). E uma terceira solução w_3, chamada solução nodal, provaremos que esta solução muda de sinal exatamente uma vez. Além disso, provaremos que w_1 e w_2 tem índice de Morse 1 e a solução w_3 tem índice de Morse 2. Assim, este resultado estende e complementa os resultados de Wang em [35].
Provaremos que se é isolado, então seu índice de Leray- Schauder de qualquer solução dada por o princípio de Min-Max é +1.
Finalmente combinado os resultados de [10] com os resultados teóricos de grau, de Castro e Cossio em [9]. No caso em que a não-linearidade seja assintoticamente linear, forneceremos condições suficientes para: (i) a existência de pelo menos quatro soluções, uma destas muda de sinal exatamente uma vez, (ii) a existência de pelo menos cinco soluções, duas das quais mudam de sinal. Além disso, uma dessas duas soluções de mudança de sinal muda exatamente uma vez.

Palavras chave: Índice de Morse. Solução nodal. Ponto crítico isolado.

ABSTRACT

In this work, we have studied the existence of nodal solution for nonlinear elliptic problems with Diriichlet boundary conditions

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ it is a sufficiently smooth limited region.
The present work is based on the studies carried out by Castro, Cossio and Neuberger in [10] and [11].
We will prove that a superlinear elliptic problem has at least three nontrivial solutions. Two of these solutions, w_1 and w_2, are of definite signal (positive and negative, respectively). And a third solution w_3, called the nodal solution, we will prove that this solution changes signal exactly once. In addition, we will prove that w_1 and w_2 have Morse index 1 and that solution w_3 has Morse index 2. Thus, this result extends and complements the results of Wang in [35].
We will prove that if is isolated, then its index of Leray-Schauder of any solution given by the principle of min-max is $+1$.
Finally combining the results of [10] with the theoretical results of grade, of Castro and Cossio in [9]. In the case where non-linearity is asymptotically linear, we shall provide sufficient conditions to: (i) the existence of at least four solutions, one of these signal changes signal exactly once, (ii) the existence of at least five solutions, two of which change sign. In addition, one of these two signal-changing solutions changes exactly once.

Keywords: Morse Index. Nodal solution. Critical point isolated.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$	Subconjunto aberto não vazio e limitado.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\bar{\Omega}$	Fecho de Ω.
$B_\delta(x_0)$	Bola de raio δ e centro no ponto x_0.
$\|A\|$	Medida de Lebesgue do conjunto A.
$\bigtriangledown u$	Gradiente da função $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\bigtriangledown u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
$\triangle u$	Laplaciano da função $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\triangle u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$supp(f)$	Suporte da função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $supp f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \bigcap \Omega}$.
$D^\alpha u$	Derivada parcial iterada de u de ordem $\|\alpha\|$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$.
$C(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas em Ω.
$C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas em Ω que admitem uma extensão continua em $\bar{\Omega}$.
$\\|.\\|_0$	Norma definida em $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^k(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $D^\alpha u$ é contínua em Ω, para todo $\|\alpha\| \leq k$.
$C_0(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas em Ω com suporte compacto contido em Ω.
$C_0^k(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ e com suporte compacto contido em Ω.
$C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e com suporte compacto contido em Ω.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ com noma $L^p(\Omega)$ finita. $\\|u\\|_{L^p} = \left(\int_\Omega \mid u \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{supess}_{x\in\Omega}\|u(x)\| < \infty$, munido com a norma $\\|u\\|_{L^\infty} = \inf\{C > 0 : \mid u(x) \mid \leq C, \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega\}$.

$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev, munido com a norma $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leq k} \int_\Omega \| D^\alpha u \|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty.$
$H^k(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	Fecho de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$.
$U \hookrightarrow V$	Imersão contínua de U em V.
$U \hookrightarrow^c V$	Imersão compacta de U em V.
$p* = \frac{Np}{N-p}$	Expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$.
X^*	Espaço dual topológico de X.
$\longrightarrow$	Convergência forte.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
$q.t.p.$	Quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida, Lebesgue, nula)
$x \approx y$	x está suficientemente próximo de y, onde $x, y \in \mathbb{R}$.
u_+	Parte positiva de u. Definida como $u_+ = min\{u, 0\}$
u_-	Parte negativa de u. Definida como $u_- = min\{u, 0\}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções fracas não triviais para problemas não lineares do tipo,

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

Onde $\triangle$ é o operador Laplaciano, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um aberto limitado suave e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alguma não linearidade dependendo de u.

Problemas desta forma modela uma grande variedade de problemas que aparecem em diversas áreas do conhecimento tais como a Física (teoria quântica de campos, equações de Schrödinger, mecânica estatística), em Geometria Diferencial (equação de seno-Gordon, o problema de Yamabe), em Engenharia e em Biologia (Badiale e Serra [42]) e também em a astrofísica. Mencionemos alguns modelos em astrofísica onde aparecem diferentes tipos de não linearidade. Por exemplo, na equação de Lane-Emden, veja [36], que aparece no estudo de problemas estrelares, a não linearidade é de tipo potencial.

$$\begin{cases} \triangle u + u^p &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \ u > 0, p > 1, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde u^p é proporcional à densidade da estrela gasosa e o domínio Ω é $B_R(0)$. Henon em 1973, veja [29], estudou as estruturas estrelares em rotação, onde propos a seguinte não linearidade, que é uma variante do problema acima.

$$\begin{cases} \triangle u + |x|^l u^p &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \ u > 0, p > 1, l > 0, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

No Capítulo 2, apresentaremos a variedade de Nehari, assim como alguns definições e os principais resultados que serão usados no decorrer do trabalho. Tomaremos como referências principais Adams [1], Gilbarg-Trudinger [25] e Malcher [33].

No Capítulo 3, mostraremos um principio de Min-Max que permite estabelecer condições suficientes que garantem a existência de soluções que mudam de sinal exatamente uma vez para um problema elíptico não linear. Aqui faremos uso fortemente de uma versão do Lema da Deformação, veja [26], e o Método de Nehari, introduzido pelo matemático Israelense (1915-1978), através de dois artigos, veja ([37] e [38]). Este Método consiste em minimizar um funcional $\Phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach reflexivo e $\Phi \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$, sobre o conjunto $N = \{u \in \mathbb{E} \backslash \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}$, em outras palavras, obter $u \in N$ tal que $\Phi(u) = c := inf_{u \in N} \Phi(u)$. Seguidamente, deve-se provar que o ponto de mínimo de Φ no conjunto N é um ponto crítico em todo o espaço.

O resultado abstrato de Figueiredo e Pimenta, **Nehari method for locally Lipsctz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions**, mostra que o Método de Nehari não requere da diferenciabilidade do funcional Φ e nem da reflexividade do espaço de Banach. Em outras palabras, Φ precisa ser apenas do tipo localmente Lipschitz.

Já no Capítulo 4, usando o principio de Min-Max desenvolvido no Capítulo 3 para problemas superlineares e os resultados da Teoria de Grau (veja Castro e Cossio [9]) demostraremos a existência de soluções que mudam de sinal para problemas de Dirichlet assintoticamente lineares.

O trabalho é finalizado com alguns apêndices que, entre outros, conterá resultados clássicos da Teoria de Grau, da Teoria de medida e integração, da Teoria de EDP, uma versão do Lema da Deformação, que serão utilizados no decorrer do trabalho. Este trabalho está baseado nos estudos realizados por Castro, Cossio e Neuberger em [10] e [11]. A Figura 1 foi extraída de [42].

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste Capítulo o objetivo é apresentar a variedade de Nehari, assim como alguns resultados e definições que serão usados no decorrer do trabalho.

Definição 2.1. Sejam $\mathbb{E}$ um espaço de Banach real e reflexivo, Φ um funcional de classe $C^1(\mathbb{E},\mathbb{R})$. O conjunto

$$N = \Big\{u \in \mathbb{E}\backslash\{0\} : \Phi'(u)(u) = 0\Big\},$$

é chamado variedade de Nehari.

Observação 2.2. Note que, se $u \neq 0$ for um ponto crítico de Φ, isto é, se $\Phi'(u) = 0$ (ou seja $\Phi'(u)v = 0$ para todo $v \in \mathbb{E}$), então necessariamente u pertence a N. Assim, N é uma restrição natural para o problema de encontrar pontos críticos não triviais de Φ.

Observação 2.3. O conjunto N, é chamado variedade de Nehari, embora, muitas vezes tal conjunto não seja uma variedade.

Definição 2.4. Para $u \in L^1(\Omega)$ definimos as funções $u_+(x) = max\{u(x), 0\} \in L^1(\Omega)$ e $u_-(x) = min\{u(x), 0\} \in L^1(\Omega)$. A parte positiva e negativa da função u, respetivamente.

Observação 2.5. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então u_+, $u_- \in H_0^1(\Omega)$, veja apêndice.

Definição 2.6. A esfera unitária em $H_0^1(\Omega)$ é denotada por S^∞ e definida como

$$S^\infty = \Big\{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| = 1\Big\}.$$

Seja U um subconjunto aberto do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dado $c \in \mathbb{R}$ denotamos por

$$F^{-1}(c) := \Big\{u \in U; F(u) = c\Big\}.$$

Definição 2.7. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um valor regular de F se $\bigtriangledown F(u) \neq 0$ para todo $u \in F^{-1}(a)$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de F se não é um valor regular de F.

Definição 2.8. Dizemos que um subconjunto não vazio M de $H_0^1(\Omega)$ é uma subvariedade de classe C^k de $H_0^1(\Omega)$ se M é fechado em $H_0^1(\Omega)$ e existem: um subconjunto aberto U de $H_0^1(\Omega)$, uma função $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k e um valor regular a de F tais que

$$M = F^{-1}(a),$$

se além disso M é um subconjunto fechado de $H_0^1(\Omega)$, dizemos que M é uma subvariedade de Hilbert de $H_0^1(\Omega)$.

Definição 2.9. Se $u \in M$, então o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ definido como

$$T_u M = \Big\{ v \in H_0^1(\Omega) : \ < \bigtriangledown F(u), v >= 0 \Big\} = ker F'(u),$$

é chamado o espaço tangente a M no ponto u. Além disso, chamaremos variedade afim ao subespaço $u + T_u M$ de $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.10. *Sejam $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, M uma subvariedade de $H_0^1(\Omega)$ de classe C^1 e u um mínimo (ou um máximo) de J em M, então*

$$< \bigtriangledown J(u), v >= 0, \quad \textit{para todo} \quad v \in T_u M.$$

Demonstração. Veja [[15], página 40].

□

Definição 2.11. Seja $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e M uma subvariedade de $H_0^1(\Omega)$ de classe C^1. Um ponto $u \in M$ é um ponto crítico de J sobre M se

$$< \bigtriangledown J(u), v >= 0, \quad \text{para todo} \quad v \in T_u M.$$

Se $M = H_0^1(\Omega)$ dizemos simplesmente que u é um ponto crítico de J e a condição acima equivale a dizer $\bigtriangledown J(u) = 0$.

Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de J sobre M se $c = J(u)$ para algum ponto crítico u de J sobre M. Caso contrario, dizemos que c é um valor regular de J sobre M.

Observação 2.12. O Teorema 2.10 afirma que os máximos e mínimos são pontos críticos de J em M.

Definição 2.13. Seja $(E, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^2(E)$. Um ponto $u \in E$ é dito não-degenerado quando $J''(u)$ é invertível, onde $J''(u)$ representa a derivada de Fréchet de segunda ordem.

Definição 2.14. Seja J como na definição 2.13 e seja $u \in E$ um ponto crítico de J não degenerado, isto é, $J''(u)$ é inversível. Neste caso, chamamos índice de Morse do ponto u, denotado por $\sigma(u)$, à dimensão do espaço vetorial onde $J''(u)$ é definida negativa.

Observação 2.15. A solução $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ tem índice de Morse $\sigma(u) \in \mathbb{N}$, se $\sigma(u)$ é a dimensão do subespaço X onde $J''(u)$ é definida negativa, isto é,

$$J''(u)(v, v) < 0 \quad \text{para todo} \quad v \in X \backslash \{0\}.$$

Observação 2.16. Intuitivamente, podemos interpretar o índice de Morse como o número de direções linearmente independentes de decrescimento no ponto crítico. Como exemplo, consideremos o caso em que o espaço X seja o toro de equação $x = (R + rcos(t))cos(s)$,

$y = rsen(t)$, $z = (R + rcos(t))sen(s)$ para todo $s, t \in [0, 2\pi)$; com $R, r > 0$, e seja a função $h(x, y, z) = z$, $(x, y, z) \in X$, que representa a altura definida sobre os pontos do toro. Ela apresenta quatro níveis críticos, os quais correspondem, respectivamente, a um mínimo, $p_1 = mín_X h$, duas pontos selas $p_2 < p_3$ e um máximo, $p_4 = máx_X h$, isto é, pontos onde a gradiente de h é zero, veja figura [1]. Nesta mesma figura, nós podemos apreciar que o ponto p_1 não tem direções de decrescimento e por tanto seu índice de Morse é zero, $\sigma(p_1) = 0$. De forma análoga podemos obter que $\sigma(p_2) = 1$, $\sigma(p_3) = 1$, $\sigma(p_4) = 2$.

Observação 2.17. Em general a Teoria de Morse relaciona duas disciplinas aparentemente desligadas: la Topologia Algebraica e o Análise Matemático, concretamente a Teoria de pontos críticos. Consideremos um paisagem montanhoso e seja h a função altura para cada ponto dela. Seja h_c a região coberta por água at a altura c, isto é $h_c = h^{-1}(-\infty, c]$. A Teoria de Morse estuda como a topologia de esta região muda quando o nível do água sobe ou desce. Especificamente, quando o nível da inundação supera a altura de algum ponto critico de h. Com a finalidade de exemplificar, analisemos os quatro níveis críticos da função h dado na observação 2.16. Se $p < p_1$, então $h_p = \emptyset$, se o nível supera p_1 mas não p_2, então h_p é um disco. Para $p_2 < p < p_3$, então h_p é um cilindro. Se $p_3 < p < p_4$ temos que h_p é um toro tirado um disco. Finalmente, para $h \geq p_4$, temos que $h_p = M$. Os interessados em aprofundar na Teoria de Morse podem revisar [33] ou um dos mais recentes [22].

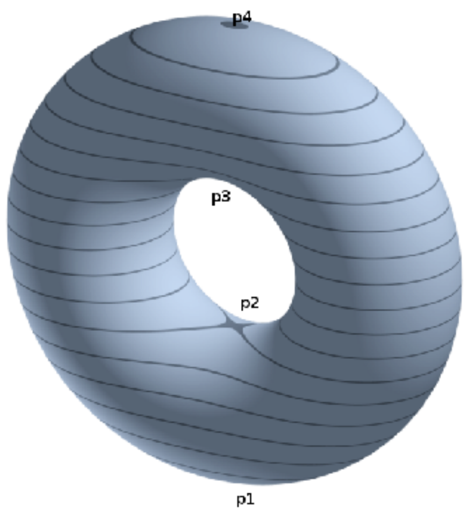

Figura 1 – Índice de morse

3 UM PRINCÍPIO DE MIN-MAX

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja o problema elíptico não linear com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

sob as condições seguintes:
• $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ uma região limitada com fronteira suficientemente suave.
• $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$.
• Assumimos que existem constantes $A > 0$ e $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$; $N \geq 3$, tal que

$$| f'(u) | \leq A(| u |^{p-1} + 1) \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Consequentemente f é subcrítico, isto é, existem $B > 0$ tal que

$$| f(u) | \leq B(| u |^{p} + 1) \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

• Assumimos que existe $m \in (0, 1)$ tal que

$$f(u)u - 2F(u) \geq muf(u) \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

onde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$.
• Finalmente, fazemos as suposições seguintes:

$$f'(u) > \frac{f(u)}{u} \quad \text{para todo} \quad u \neq 0 \quad e \tag{3.5}$$

$$\lim_{|u| \to \infty} \frac{f(u)}{u} = \infty,$$

a ultima suposição indica que a não linearidade f é superlinear.

Denote-se $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ a sequência de autovalores para o problema do Laplaciano $-\triangle$ com condição de contorno de Dirichlet, veja apêndice. Provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Se $f'(0) < \lambda_1$, então o problema (3.1) satisfazendo (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) tem pelo menos três soluções não triviais: $w_1 > 0$ em Ω, $w_2 < 0$ em Ω e w_3. A função w_3 muda de sinal exatamente uma vez em Ω, isto é, $(w_3)^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ tem exatamente duas componentes conexas. Se são não degeneradas, as soluções de sinal definido tem índice de Morse 1 e a solução que muda de sinal tem índice de Morse 2. Além disso, temos a seguinte relação entre os níveis de energia*

$$J(w_3) \geq J(w_1) + J(w_2).$$

3.2 ESTRUTURA VARIACIONAL DO PROBLEMA

Agora, nós vamos elucidar a elegância e o poder do método variacional para equações diferenciais parciais. Onde, será adequado utilizar a teoria dos espaços de Sobolev, cujas características geométricas e topológicas são propícias ao uso de argumentos variacionais.

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (3.1) se verifica

$$\int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \text{ para todo } \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Pelo teoria da regularidade para problemas elípticas de valor limite, (veja [25], [15]), u é uma solução fraca para o problema (3.1) se, e somente, se u é um ponto crítico do funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}(u,u) - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \int_\Omega \Big\{\frac{1}{2}| \bigtriangledown u|^2 - \int_\Omega F(u)\Big\}dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx. \end{aligned}$$

No espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ o funcional J esta bem definido, onde $(u,v) = \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown v dx$ é o produto escalar em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, pontos críticos de J são soluções fracas do problema (3.1). A regularidade C^1 de f implica que $F \in C^2$ e em consequência $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$ com primeira derivada de Gateaux,

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= < \bigtriangledown J(u), v > \\ &= \int_\Omega \Big\{ \bigtriangledown u \bigtriangledown v dx - f(u)v\Big\}dx; \text{para todo } \ u, v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

e segunda derivada de Gateaux,

$$J''(u)(v)(w) = \int_\Omega \Big\{ \bigtriangledown v \bigtriangledown w dx - f'(u)vw\Big\}dx; \text{ para todo } \ u, v, w \in H_0^1(\Omega).$$

A variedade de Nehari S, associada ao funcional J, é definida como

$$S = \Big\{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : J'(u)u = 0\Big\} = \gamma^{-1}(\{0\}),$$

onde a função $\gamma : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ e sua derivada γ' estão definidas por

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= J'(u)u \\ &= < \bigtriangledown J(u), u > \\ &= \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 - u f(u)\Big\}dx \\ &= \|u\|^2 - \int_\Omega f(u)u dx. \\ \gamma'(u)(v) &= < \bigtriangledown \gamma(u), v > \\ &= 2\int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown v dx - \int_\Omega f(u) v dx - \int_\Omega f'(u) u v dx. \end{aligned}$$

Dizemos que $u \in L^1(\Omega)$ muda de sinal se $u_+ \neq 0$ e $u_- \neq 0$. Para $u \neq 0$ dizemos que u é positivo (e escrevemos $u > 0$) se $u_- = 0$, similarmente, u é negativo (e escrevemos $u < 0$), se $u_+ = 0$.

Consideremos os seguintes subconjuntos da variedade de Nehari S;

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= \Big\{u \in S : u_+ \neq 0 \;\; e \;\; u_- \neq 0\Big\},\\
S_1 &= \Big\{u \in \hat{S} : \gamma(u_+) = 0\Big\},\\
\hat{S}^+ &= \Big\{u \in S : \gamma(u_+) < 0\Big\},\\
\hat{S}^- &= \Big\{u \in S : \gamma(u_+) > 0\Big\},\\
G^+ &= \Big\{u \in S : u > 0\Big\},\\
G^- &= \Big\{u \in S : u < 0\Big\},\\
W^+ &= G^+ \cup \hat{S}^+,\\
W^- &= G^- \cup \hat{S}^-.
\end{aligned}$$

Notemos que soluções não triviais para (3.1) estão em S, soluções de sinal definido estão em $G^+ \cup G^-$ e soluções de mudanças de sinal estão em S_1. Além disso, temos que as uniões $S = G^+ \cup \hat{S} \cup G^-$ e $\hat{S} = \hat{S}^+ \cup S_1 \cup \hat{S}^-$ são disjuntas.

3.3 LEMAS PRELIMINARES

Neste seção, serão discutidos os resultados necessários para a demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.2. *Sob as suposições* (3.2), (3.3), (3.4) *e* (3.5), *temos que:*

a) O zero é um mínimo local do funcional J. Se $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, então existe um único $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(u) \in (0, \infty)$ tal que $\bar{\lambda}u \in S$. Além disso, $J(\bar{\lambda}u) = \max_{\lambda > 0} J(\lambda u) > 0$.
Se $\gamma(u) < 0$ então $\bar{\lambda} < 1$, se $\gamma(u) > 0$ então $\bar{\lambda} > 1$ e $J(u) > 0$ para todo $u \in S$.

b) O conjunto S (variedade de Nehari) é fechado, sem bordo; é uma subvariedade de classe C^1 de $H_0^1(\Omega)$ e é homeomorfa a S^∞. Além disso, a função $\bar{\lambda} : S^\infty \to (0, +\infty)$ é de classe C^1.

c) $u \in S$ é um ponto crítico de J sobre $H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, u é um ponto crítico de $J\mid_S$.

d) $J\mid_S$ é coercivo, isto é, $J(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$ em S. Também temos $\inf_S J > 0$.

Demonstração. **Prova do item (a)** Seja $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ arbitrária e fixa. Definimos a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(\lambda) = J(\lambda u) = \frac{1}{2}\lambda^2 \|u\|^2 - \int_\Omega F(\lambda u) dx. \tag{3.6}$$

Diferenciando a função Φ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= J'(\lambda u)u =< \bigtriangledown J(\lambda u), u > \\ &= \int_\Omega \Big\{ \bigtriangledown (\lambda u). \bigtriangledown u - f(\lambda u)u \Big\} dx \\ &= \int_\Omega \Big\{ \lambda | \bigtriangledown u|^2 - f(\lambda u)u \Big\} dx \\ &= \lambda \|u\|^2 - \int_\Omega f(\lambda u) u dx \\ &= \frac{\gamma(\lambda u)}{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \Phi''(\lambda) &= J''(\lambda u)(u)(u) =< J''(\lambda u)u, u > \\ &= \int_\Omega \Big\{ \bigtriangledown u. \bigtriangledown u - f'(\lambda u)u^2 \Big\} dx \\ &= \|u\|^2 - \int_\Omega f'(\lambda u) u^2 dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se $\lambda > 0$ é um ponto crítico de Φ, então $\Phi'(\lambda) = 0$ e de (3.7), segue-se

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \Big(\frac{f(\lambda u)}{\lambda} \Big) u dx. \tag{3.9}$$

De (3.8) e (3.9) temos

$$\begin{aligned} \Phi''(\lambda) &= \int_\Omega \frac{f(\lambda u)}{\lambda} u dx - \int_\Omega f'(\lambda u) u^2 dx, \\ &= \int_\Omega \Big\{ u^2 (\frac{f(\lambda u)}{\lambda u}) - f'(\lambda u)u^2 \Big\} dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora da hipótese (3.5), temos que

$$\frac{f(\lambda u)}{\lambda u} - f'(\lambda u) < 0.$$

Assim, de (3.10) obtemos

$$\Phi''(\lambda) = \int_\Omega u^2 \Big(\frac{f(\lambda u)}{\lambda u} - f'(\lambda u) \Big) dx < 0.$$

Logo, todo ponto crítico de Φ no intervalo $(0, +\infty)$ é um máximo local, e consequentemente, Φ tem no máximo um ponto crítico em $(0, +\infty)$, veja Figura 2.

Usando o Teorema C.33 ou coeficiente de Rayleigh, temos que

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \|u\|^2, \tag{3.11}$$

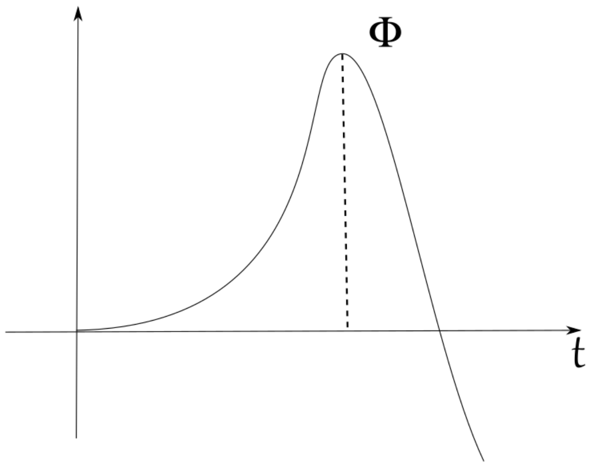

Figura 2 – Possível forma da Φ.

então de (3.10) e (3.11) segue-se que

$$
\begin{aligned}
J''(0)(u,u) &= \Phi''(0) \\
&= \|u\|^2 - \int_\Omega f'(0)u^2 dx \\
&\geq \Big(1 - \frac{f'(0)}{\lambda_1}\Big)\|u\|^2 > 0,
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato que $f'(0) < \lambda_1$. Desde que $\Phi'(0) = 0$ e $\Phi''(0) > 0$, temos que $0 \in \mathbb{R}$ é um mínimo local de Φ, logo $\Phi'(\lambda) > 0$ para λ suficientemente pequeno. Assim, temos que J tem um mínimo local em $0 \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, da hipótese (3.5), segue-se que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \Phi'(\lambda) = -\infty$. Portanto Φ' tem um único zero denotado por $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(u)$ no intervalo $(0, +\infty)$ e além disso $\bar{\lambda}u \in S$, pois como $\Phi'(\lambda) = \dfrac{\gamma(\lambda u)}{\lambda}$ e $\bar{\lambda}$ é zero de Φ', então

$$
0 = \Phi'(\bar{\lambda}) = \frac{\gamma(\bar{\lambda}u)}{\bar{\lambda}},
$$

logo $\gamma(\bar{\lambda}u) = 0$, isso implica que $\bar{\lambda}u \in S$, pois $\gamma(\bar{\lambda}u) = J'(\bar{\lambda}u)(\bar{\lambda}u)$.

Como Φ tem máximo local no ponto $\bar{\lambda}$ e $\Phi(\lambda) \to -\infty$, então

$$
\Phi(\bar{\lambda}) = \max_{\lambda > 0} \Phi(\lambda),
$$

isto é

$$
J(\bar{\lambda}u) = \max_{\lambda > 0} J(\lambda u).
$$

Portanto temos

$$
\Phi'(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda u)}{\lambda} > 0 \text{ para } \lambda < \bar{\lambda}, \tag{3.12}
$$

$$
\Phi'(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda u)}{\lambda} < 0 \text{ para } \lambda > \bar{\lambda}. \tag{3.13}
$$

Em particular, isso mostra que dado $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $\gamma(u) < 0$, existe $\alpha < 1$ tal que $\gamma(\alpha u) = 0$, isto é, $\alpha u \in S$.

De forma completamente análoga usando (3.13) se prova o outro caso, isto é, se $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $\gamma(u) > 0$ então existe $\alpha > 1$ tal que $\gamma(\alpha u) = 0$.

Observação 3.3. O item (a), essencialmente, nos diz que toda $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ pode ser projetada na variedade de Nehari de maneira única, veja Figura 3. Como consequência deste resultado, temos que a variedade de Nehari é não vazia.
A função Φ definida em (3.6) é chamada **fibração**, então o item (a) também mostra a cercana relação que existe entre o Método de Nehari e o Método de fibração, isto é, os elementos da Variedade de Nehari S correspondem aos pontos estacionários da aplicação fibração, veja [20].

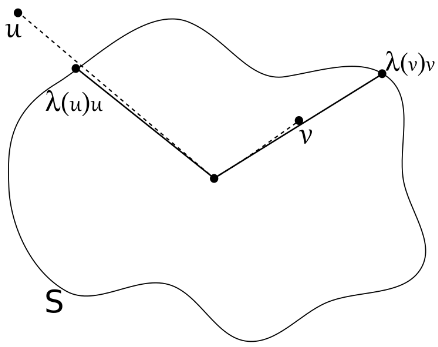

Figura 3 – Projeção do espaço $H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ na variedade de Nehari S.

Observação 3.4. Do fato que $\bar{\lambda}u$ é o único ponto na direção u que intersecta ao conjunto S e $J(\bar{\lambda}u) = \max_{\lambda>0} J(\lambda u)$, então a variedade de Nehari é descrita como o conjunto de pontos de máximo do funcional Φ na direção u.

Prova do item (b) Lembremos que $S^\infty = \Big\{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| = 1\Big\}$, e que a função $\gamma : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é definida como

$$\begin{aligned} \gamma(u) =& < \bigtriangledown J(u), u > \\ =& \int_\Omega | \bigtriangledown u |^2 \, dx - \int_\Omega u f(u) dx \\ =& \|u\|^2 - \int_\Omega u f(u) dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

E com derivada

$$\begin{aligned} \gamma'(u)(v) &= < \bigtriangledown \gamma(u), v > \\ &= 2 \int_\Omega \bigtriangledown u . \bigtriangledown v dx - \int_\Omega f(u) v dx - \int_\Omega f'(u) u v dx. \end{aligned}$$

Assim, a função γ é continua em $H_0^1(\Omega)$ e como $\{0\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$ temos que $\gamma^{-1}(\{0\}) = S$ é um conjunto fechado em $H_0^1(\Omega)$.

Afirmação: A variedade de Nehari S é ilimitada. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Tomemos d suficientemente pequeno tal que

$$D = (0,d) \times (0,d) \times \cdots \times (0,d) \subset \Omega.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos as funções $\psi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$\psi_k(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{k\pi x_1}{d}) \cdots \operatorname{sen}(\frac{k\pi x_n}{d}) & ; \quad x \in D, \\ 0 & ; \quad x \in \Omega \backslash D. \end{cases}$$

Seja $M_1 = n(\frac{\pi}{d})^2(\frac{d}{2})^n$, então temos que $\|\psi_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} = M_1 k^2$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\psi_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega \mid \bigtriangledown \psi_k \mid^2 dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \mid \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \mid^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mid \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \mid^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega (\frac{k\pi}{d})^2 \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_1}{d}) \cdots \cos^2(\frac{k\pi x_i}{d}) \cdots \operatorname{sen}^2(\frac{h\pi x_n}{d}) dx \\
&= (\frac{k\pi}{d})^2 \sum_{i=1}^n \int_\Omega \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_1}{d}) \cdots \Big[1 - \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_i}{d})\Big] \cdots \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_n}{d}) dx \\
&= (\frac{k\pi}{d})^2 \sum_{i=1}^n \int_D \Big[\operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_1}{d}) \cdots \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_{i-1}}{d}) \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_{i+1}}{d}) \cdots \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_n}{d}) \\
&\quad - \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_1}{d}) \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_2}{d}) \cdots \operatorname{sen}^2(\frac{k\pi x_n}{d})\Big] dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \Big[\frac{d^n}{2^{n-1}} - \frac{d^2}{2^n}\Big](\frac{k\pi}{d})^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d^n}{2^n}(\frac{k\pi}{d})^2 \\
&= n(\frac{d}{2})^n(\frac{\pi}{d})^2 k^2 = M_1 k^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Agora, provaremos que

$$\int_\Omega \psi_k f(\psi_k) dx \leq 2Bd^n.$$

Do fato que $\mid \psi_k(x) \mid \leq 1$, para todo $x \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi_k f(\psi_k) dx &\leq \mid \int_\Omega \psi_k f(\psi_k) dx \mid \\
&\leq \int_\Omega \mid \psi_k f(\psi_k) \mid dx \\
&\leq \int_\Omega \mid f(\psi_k) \mid dx.
\end{aligned}$$

Como f é subcrítico, então $| f(u) |\leq B(| u |^p +1)$, para todo $u \in \mathbb{R}$ e algum $B > 0$. Deste modo, segue-se que

$$| f(\psi_k) |\leq 2B \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_k f(\psi_k)dx &\leq \int_\Omega 2Bdx \\ &= \int_D 2Bdx \\ &= 2Bd^n. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Agora, de (3.14), (3.15) e (3.16), temos

$$\begin{aligned} \gamma(\psi_k) &= \|\psi_k\|_H^2 - \int_\Omega \psi_k f(\psi_k)dx, \\ &\geq M_1 k^2 - 2Bd^n. \end{aligned}$$

Tomando limite quando $k \to +\infty$ temos que $\gamma(\psi_k) \to +\infty$. Seja $A > 0$ arbitrário e fixado, então

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : k \geq n_0 \Longrightarrow \gamma(\psi_k) > A.$$

Usando o item (a), temos que $\exists \alpha_k > 1$: $\alpha_k\psi_k \in S$ para todo $k \geq n_0$.

Afirmação: $(\alpha_k\psi_k)$ é infinito. De fato, é suficiente provar que a sequência real $\|\alpha_k\psi_k\| \to +\infty$ quando fazemos $k \to +\infty$. Como $\alpha_k > 1$ temos que

$$\|\alpha_k\psi_k\| = \alpha_k\|\psi_k\| >\|\psi_k\| = M_1^{\frac{1}{2}}k, \tag{3.17}$$

de onde concluímos que $\|\alpha_k\psi_k\| \to +\infty$ quando $k \to +\infty$.

Agora suponha que $(\alpha_k\psi_k)$ é finito. Então

$$\text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que se } k \geq k_0 \text{ temos } \quad \alpha_k\psi_k = \alpha_{k+1}\psi_{k+1} = \cdots$$

Logo

$$(\|\alpha_k\psi_k\|)_k \ \text{ é } \mathit{convergente.} \tag{3.18}$$

Seja $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{De (3.17): } \exists k_1 \in \mathbb{N} : \ k \geq k_1 \Longrightarrow \|\alpha_k\psi_k\| > C. \\ &\text{De (3.18): } \exists k_2 \in \mathbb{N} : \ k \geq k_2 \Longrightarrow \|\alpha_k\psi_k\| < C. \end{aligned}$$

O que leva a uma contradição. Assim, $(\alpha_k\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S$ é infinito.

Provemos que S é uma subvariedade de classe C^1 de $H_0^1(\Omega)$. Lembremos que

$$S = \Big\{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \gamma(u) = 0\Big\} = \gamma^{-1}(\{0\}).$$

Afirmação: 0 é um valor regular de γ. Com efeito, seja $u \in S = \gamma^{-1}(\{0\})$, então $\gamma(u) = 0$, da hipótese (3.5) temos que $\dfrac{f(u)}{u} < f'(u)$ para todo $u \neq 0$, de onde $-f'(u)u^2 < -f(u)u$. Integrando esta desigualdade, nós temos

$$-\int_\Omega f'(u)u^2 < -\int_\Omega f(u)udx. \tag{3.19}$$

Agora, desde que

$$\begin{aligned}\gamma'(u)(u) &= < \nabla\gamma(u), u > \\ &= 2\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx - \int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega f'(u)u^2 dx,\end{aligned}$$

e por (3.14) e (3.19), temos que

$$\begin{aligned}< \nabla\gamma(u), u > &< 2\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx - 2\int_\Omega f(u)udx \\ &= 2\gamma(u) \\ &= 0,\end{aligned}$$

de onde temos que $< \nabla\gamma(u), u > \neq 0$ e, pela definição 2.8, concluímos que S é uma subvariedade de $H_0^1(\Omega)$ de classe C^1.

Provemos agora que $\bar{\lambda} : S^\infty \to (0, +\infty)$ é de classe C^1. Definamos a função

$$\begin{aligned}\varphi : (0, +\infty) \times S^\infty &\to \mathbb{R} \\ (a, u) &\to \varphi(a, u) = \gamma(au).\end{aligned}$$

Seja $u \in S^\infty$ e $a > 0$ então

$$\begin{aligned}\varphi(a, u) = \gamma(au) = 0 &\Leftrightarrow au \in S \\ &\Leftrightarrow a = \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(u).\end{aligned}$$

Assim, $\varphi(\bar{\lambda}(u), u) = 0$ e além disso

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial a}(\bar{\lambda}(u), u) &= \gamma'(\bar{\lambda}(u)u)u \\ &= < \nabla\gamma(\bar{\lambda}(u)u), u > \\ &= 2\int_\Omega \nabla(\bar{\lambda}u). \nabla udx - \int_\Omega f(\bar{\lambda}u)udx - \int_\Omega f'(\bar{\lambda}u)\bar{\lambda}u^2 dx \\ &= 2\int_\Omega \bar{\lambda} \mid \nabla u \mid^2 dx - \int_\Omega f(\bar{\lambda}u)udx - \int_\Omega f'(\bar{\lambda}u)\bar{\lambda}u^2 dx.\end{aligned}$$

Pela hipótese (3.5), temos

$$\frac{f(\bar{\lambda}u)}{\bar{\lambda}u} < f'(\bar{\lambda}u) \quad \text{para todo} \quad \bar{\lambda} > 0,$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial a}(\bar{\lambda}, u) &= < \nabla\gamma(\bar{\lambda}u), u > \\ &< 2\int_\Omega \bar{\lambda} \mid \nabla u \mid^2 dx - 2\int_\Omega f(\bar{\lambda}u)udx \\ &= 2\frac{\gamma(\bar{\lambda}u)}{\bar{\lambda}} = 0,\end{aligned}$$

isto é
$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}(\bar{\lambda},u)<0.$$
Logo, pelo Teorema da função implícita, $\bar{\lambda}\in C^1(S^\infty,(0,\infty))$.

Finalmente, provemos que a variedade de Nehari S é difeomorfo à esfera unitária S^∞. Definamos a seguinte função

$$\begin{aligned}\psi:S^\infty &\rightarrow S\\ u &\rightarrow \psi(u)=\bar{\lambda}(u)u.\end{aligned}$$

• ψ esta bem definida. Com efeito, pelo item (a), temos que $\bar{\lambda}u=\bar{\lambda}(u)u\in S$.
• ψ é sobrejetiva. Com efeito, seja $u\in S$, então $\frac{u}{\|u\|}\in S^\infty$ e do fato que $\|u\|\frac{u}{\|u\|}\in S$ então, pela unicidade de $\bar{\lambda}$, temos que $\bar{\lambda}(\frac{u}{\|u\|})=\|u\|$. Logo, é suficiente considerar $v=\frac{u}{\|u\|}\in S^\infty$, pois $\psi(v)=u$.
• ψ é injetiva. De fato, sejam u, $v\in S^\infty$ tal que

$$\begin{aligned}\phi(u)=\phi(v) &\Rightarrow \bar{\lambda}(u)u=\bar{\lambda}(v)v\\ &\Rightarrow u=v.\end{aligned}$$

• ψ é inversível e a função inversa $\psi^{-1}:S\rightarrow S^\infty$ é dada por
$$\psi^{-1}(u)=\frac{u}{\|u\|}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\psi^{-1}\circ\psi &: S^\infty\rightarrow S^\infty\\ (\psi^{-1}\circ\psi)(u) &= \psi^{-1}(\bar{\lambda}(u)u)\\ &= \frac{\bar{\lambda}(u)u}{\|\bar{\lambda}(u)u\|}\\ &= u.\end{aligned}$$

De onde obtemos $\psi^{-1}\circ\psi=1_{S^\infty}$. De forma completamente similar temos que $\psi^{-1}\circ\psi=1_S$. Assim, a função ψ é invertível.
• ψ^{-1} é diferenciável em S. Com efeito

$$\begin{aligned}(\psi^{-1})'(u)(v) &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi^{-1}(u+tv)-\psi^{-1}(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{u+tv}{\|u+tv\|}-\frac{u}{\|u\|}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\|u\|(u+tv)-u\|u+tv\|}{t\|u+tv\|\|u\|}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0}\frac{\|u\|vt-u(\|u+tv\|-\|u\|)}{t\|u+tv\|\|u\|}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\|u\|v-u(\dfrac{\|u+tv\|-\|u\|}{t})}{\|u+tv\|\|u\|}\\
&= \frac{\|u\|v-u\|u\|'v}{\|u\|^2}\\
&= \Big(\frac{\|u\|-u\|u\|'}{\|u\|^2}\Big)v,
\end{aligned}
$$

então

$$(\psi^{-1})'(u)=\frac{\|u\|-u\|u\|'}{\|u\|^2}.$$

Concluímos que ψ é um difeomorfismo.

Observação 3.5. Como uma consequência do resultado anterior temos que S não é compacto. Com efeito, como S é homeomorfo a S^{∞}, e a esfera unitária em um espaço de dimensão infinita, não é compacto.

O seguinte resultado mostra que se $u \in S$ é um ponto crítico de J sobre S, então u é um ponto crítico não trivial de $J : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ e, como consequência, uma solução não trivial do problema (3.1).

Prova do item (c).

($\Rightarrow$) Seja $u \in S$ um ponto crítico de J sobre $H^1_0(\Omega)$ então, para todo $v \in H^1_0(\Omega)$ temos que

$$
\begin{aligned}
J'(u)v &=< \bigtriangledown J(u), v >\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Daí

$$< \bigtriangledown J(u), v >= 0, \text{ para todo } v \in T_uS.$$

Logo, pela definição 2.11, se tem que u é um ponto crítico de J sobre a variedade de Nehari S. Onde T_uS é o espaço tangente a S no ponto u.

($\Leftarrow$) Seja $u \in S$ um ponto crítico de $J\mid_S$ pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, Teorema A.17, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u) = \lambda\gamma'(u).$$

Afirmação: $\lambda = 0$. Com efeito, aplicando o funcional $J'(u)$, linear e continuo, no próprio u, obtemos

$$J'(u)(u) = \lambda\gamma'(u)(u), \tag{3.20}$$

como $u \in S$ temos que

$$\begin{aligned} J'(u)(u) &= < \bigtriangledown J(u), u > \\ &= \gamma(u) = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por outro lado, da hipótese (3.5), segue-se que

$$\begin{aligned} \gamma'(u)(u) &= < \bigtriangledown \gamma(u), u > \\ &= \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 - f'(u)u^2 \Big\} dx \\ &< \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 - f(u)u \Big\} dx \\ &= \gamma(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $\gamma'(u)(u) \neq 0$. De (3.20) e (3.21) temos $\lambda\gamma'(u)(u) = 0$, isto implica que $\lambda = 0$. Concluímos que $J'(u) = \lambda\gamma'(u) = 0$.

Outra forma de provar o fato é dada em [33], via o Teorema da Função Implícita. Ou do fato que T_uS tem codimensão 1 e que $H_0^1(\Omega) = T_uS \bigoplus \mathbb{R}u$, veja apêndice.

Prova do item (d) Seja $u \in S$ então temos que $\gamma(u) = 0$, e portanto

$$\int_\Omega \mid \bigtriangledown u \mid^2 - \int_\Omega u f(u) = 0.$$

De onde

$$\|u\|^2 = \int_\Omega u f(u) dx = \int_\Omega \mid \bigtriangledown u \mid^2 dx. \tag{3.22}$$

Pela definição da funcional J e de (3.22) nós temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{2} \mid \bigtriangledown u \mid^2 - F(u) \Big\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \Big\{ u f(u) - 2F(u) \Big\} dx. \end{aligned}$$

Da hipótese (3.4) segue-se que

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega m u f(u) dx = \frac{m}{2} \|u\|^2.$$

De aqui temos que $J(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$. Assim $J \mid_S$ é coercivo. Agora, o Teorema da Imersão de Sobolev e o crescimento subcrítico da f garantem a existência do $C > 0$ tal que $\|u\| \geq C$ para todo $u \in S$. Logo,

$$J(u) \geq \frac{m}{2} \|u\|^2 \geq \frac{mC^2}{2} > 0.$$

Concluímos que $\inf_S J > 0$. □

Nosso próximo Lema, em particular, mostra que $\hat{S}$ é um subconjunto aberto de S e que S_1 é um subconjunto fechado da variedade de Nehari S.

Lema 3.6. *A função $h : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definida por $h(u) = u_+$ é continua. Também h define uma função continua de $L^{p+1}(\Omega)$ nela mesma.*

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ então u_+ e $u_- \in H_0^1(\Omega)$. Consideremos a seguinte função

$$\jmath(u)(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad u(x) \geq 0 \\ 0 & ; \quad u(x) < 0 \end{cases}$$

Assim $u_+(x) = \jmath(u)(x)u(x)$, então $\bigtriangledown h(u) = \jmath(u) \bigtriangledown u$, no sentido fraco.

Agora provemos que h é continua em $H_0^1(\Omega)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \to u$ q.t.p de Ω. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\|h(u_n) - h(u)\|^2 &= \int_\Omega | \bigtriangledown(h(u_n) - h(u)) |^2 \, dx \\
&= \int_\Omega | \bigtriangledown h(u_n) - \bigtriangledown h(u) |^2 \, dx \\
&= \int_\Omega | \jmath(u_n)(\bigtriangledown u_n - \bigtriangledown u) + (\jmath(u_n) - \jmath(u)) \bigtriangledown u |^2 \, dx \\
&\leq \int_\Omega 2 \, | \jmath(u_n)(\bigtriangledown u_n - \bigtriangledown u) |^2 + \\
& \quad 2 \int (\jmath(u_n) - \jmath(u))^2 \, | \bigtriangledown u |^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Desde que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$; $N \geq 3$, então

$$\begin{aligned}
u_n \to u \quad \text{em} \quad L^p &\implies \|u_n - u\|_p \to 0, \\
&\implies \int_\Omega | \bigtriangledown(u_n - u) |^2 \, dx \to 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Se $| \bigtriangledown u |= 0$ em q.t.p de Ω, temos que a ultima integral converge para zero em q.t.p de Ω e junto à parte (3.20) obtemos que

$$\|h(u_n) - h(u)\| \to 0.$$

Se $\jmath(u_n) \to \jmath(u)$ em q.t.p de Ω, então temos que $[\jmath(u_n) - \jmath(u)]^2 \mid \bigtriangledown u \mid^2 \to 0$ em q.t.p de Ω. Além disso, temos que

$$[\jmath(u_n) - \jmath(u)]^2 \, | \bigtriangledown u |^2 \; \leq \; | \bigtriangledown u |^2 \text{ em q.t.p de } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que

$$\int_\Omega | \jmath(u_n) - \jmath(u) |^2 | \bigtriangledown u |^2 \, dx \quad \to \quad 0.$$

Consequentemente $\|h(u_n) - h(u)\| \to 0$, implicando que $h \in C(H_0^1(\Omega))$.

Provemos agora a continuidade da função

$$\begin{aligned}
h : L^{p+1}(\Omega) &\to L^{p+1}(\Omega) \\
u &\to u_+.
\end{aligned}$$

Seja $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$, sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \to u$ q.t.p em Ω. Desde que

$$\begin{aligned} \|h(u_n) - h(u)\|_{p+1}^{p+1} &= \int_\Omega \mid h(u_n) - h(u) \mid^{p+1} dx, \\ &= \int_\Omega \mid (u_n)_+ - u_+ \mid^{p+1} dx. \\ &\leq \int_\Omega \mid u_n - u \mid^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Pelo Teorema B.4, existe $g \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que $\mid u_n \mid \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e q.t.p de Ω. Daí obtemos

$$\mid u_n - u \mid^{p+1} \leq (\mid g \mid + \mid u \mid)^{p+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega \mid u_n - u \mid^{p+1} dx \to 0,$$

consequentemente temos que $\|h(u_n) - h(u)\|_{p+1}^{p+1} \to 0$ o que implica que $h \in C(L^{p+1})$.

$\square$

Lema 3.7. *Dado $w \in \hat{S}$, então existe um caminho $\Gamma_w = \Gamma \in C^1([0,1], S)$ tal que*

a) $\Gamma(0) = aw_+ \in G^+$ para algum $a > 0$,
$\Gamma(1) = bw_- \in G^-$ para algum $b > 0$ e
$\Gamma(\frac{a}{a+b}) = w$.

b) $w \in \hat{S}^+ \Leftrightarrow a < 1$ e $b > 1$,
$\Gamma(t) \in \hat{S}^+ \Leftrightarrow \gamma(\Gamma(t)_+) < 0 \Leftrightarrow t \in (0, \frac{1}{2})$.

c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = aw_+ + bw_- \in S_1$,
$\Gamma([0,1]) \bigcap S_1 = \{\Gamma(\frac{1}{2})\}$.

d) $J(\Gamma(0)) < J(\Gamma(t)) < J(\Gamma(\frac{1}{2}))$ para $t \in (0, \frac{1}{2})$.

Demonstração. **Prova do item (a)** Como $w \in \hat{S}$ então ela muda de sinal, isto é $w_+ \neq 0$ e $w_- \neq 0$. Consequentemente, pelo Lema 3.2, existem a, $b > 0$ tais que $aw_+ \in G^+$ e $bw_- \in G^-$. Além disso, temos que a combinação linear convexa

$$(1-t)aw_+ + tbw_- \neq 0, \text{ para todo } t \in [0,1],$$

portanto, pelo Lema 3.2, existe $\alpha \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ tal que $\Gamma(t) = \alpha(t)[(1-t)aw_+ + tbw_-] \in S$. Ademais, $\Gamma(t) \in \hat{S}$, para todo $t \in (0,1)$. De onde concluímos que $\Gamma \in C^1([0,1], S)$. Do fato que $\Gamma(0) = \alpha(0)aw_+$ e como $aw_+ \in S$, pelo item (a) do Lema 3.2, temos que $\alpha(0) = 1$.

Assim, $\Gamma(0) = aw_+ \in G^+$. Por um raciocínio completamente análogo nós podemos obter que $\Gamma(1) = bw_- \in G^-$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{a}{a+b}) &= \alpha(\frac{a}{a+b})\Big[(1-\frac{a}{a+b})aw_+ + \frac{a}{a+b}bw_-\Big] \in S \\
&= \alpha(\frac{a}{a+b})\frac{ab}{a+b}(w_+ + w_-) \in S \\
&= \alpha(\frac{a}{a+b})\frac{ab}{a+b}w \in S.
\end{aligned}$$

Pela unicidade do λ, Lema (3.2), segue-se que

$$\alpha(\frac{a}{a+b}) = \frac{a+b}{ab}, \quad \text{pois } w \in \hat{S} \subseteq S.$$

De onde concluímos que

$$\Gamma(\frac{a}{a+b}) = w.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
w \in S_1 &\Leftrightarrow \gamma(w_+) = \gamma(w_-) = 0 \\
&\Leftrightarrow w_+ \ e \ w_- \in S \\
&\Leftrightarrow a = b = 1 \ e \ \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Onde fazemos uso do Teorema F.9, do Lema 3.2. e da definição de S.

Prova do item (b). Do fato que $\Gamma(t) \in S$ e da definição do conjunto $\hat{S}^+$ temos a seguinte equivalência

$$\Gamma(t) \in \hat{S}^+ \Leftrightarrow \gamma(\Gamma(t)_+) < 0.$$

Provemos a outra equivalência, isto é, $\gamma(\Gamma(t)_+) < 0 \Leftrightarrow t \in (0, \frac{1}{2})$.
($\Rightarrow$) Lembremos que

$$\Gamma(t) = \alpha(t)(1-t)aw_+ + \alpha(t)tbw_- \in S,$$

de onde $\gamma(\Gamma(t)) = 0$, e pelo Teorema F.9 temos que $\gamma(\Gamma(t)_-) > 0$. Do Lema 3.2, segue-se que

$$\exists K < 1 : K\alpha(t)(1-t)aw_+ \in S.$$

Além disso, como $aw_+ \in G^+ \subseteq S$, e a unicidade de λ segue-se que

$$K\alpha(t)(1-t) = 1. \tag{3.24}$$

Do fato que $\gamma(\Gamma(t)_-) > 0$ e pelo Lema 3.2, temos que

$$\exists M > 1 : M\alpha(t)tbw_- \in S.$$

Segue-se que

$$M\alpha(t)t = 1. \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25), temos que

$$t = \frac{K}{M+K}.$$

Por outro lado, desde que

$$K < 1 < M \implies t \in (0, \frac{1}{2}).$$

($\Leftarrow$) Por contradição, suponhamos que $\gamma(\Gamma(t)_+) \geq 0$.

Se $\gamma(\Gamma(t)_+) = 0$, temos que $\Gamma(t)_+ \in S$, desde que $\Gamma(t)_+ \in H_0^1(\Omega)$. Do Lema 3.2 obtemos

$$\alpha(t)(1-t) = 1. \tag{3.26}$$

Pelo Teorema F.9, temos $\gamma(\Gamma(t)_-) = 0$, de onde temos

$$\alpha(t)t = 1. \tag{3.27}$$

De (3.26) e (3.27), obtemos: $t = \frac{1}{2}$. ($\Rightarrow|\Leftarrow$)

Se $\gamma(\Gamma(t)_+) > 0$, então $\gamma(\Gamma(t)_-) < 0$ Logo

$$\begin{aligned} \exists K > 1 \quad &: \quad K\alpha(t)(1-t) = 1 \quad e \\ \exists M < 1 \quad &: \quad M\alpha(t)t = 1. \end{aligned}$$

Assim, temos que $t = \frac{K}{M+K}$ e desde que $M < 1 < K$, obtemos

$$\frac{1}{2} < \frac{K}{M+K} \text{ o que implica } \frac{1}{2} < t. \; (\Rightarrow|\Leftarrow)$$

De onde concluímos que

$$\gamma(\Gamma(t)_+) < 0.$$

Seja $w \in \hat{S}^+$, então pelo provado no item (a), existe $\Gamma_w \in C^1([0,1], S)$ tal que

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= aw_+ \in G^+ \subseteq S \text{ para algum } a > 0 \\ \Gamma(1) &= bw_- \in G^- \subseteq S \text{ para algum } b > 0 \;\; e \;\; \Gamma(\frac{a}{a+b}) = w. \end{aligned}$$

Pela definição dos conjuntos S e $\hat{S}^+$, temos

$$w \in \hat{S}^+ \Leftrightarrow \gamma(w) = 0 \;\; e \;\; \gamma(w_+) < 0.$$

Agora, provemos que: $\gamma(w) = 0$ e $\gamma(w_+) < 0 \Leftrightarrow a < 1$ e $b > 1$.
($\Rightarrow$) Da hipótese, temos que $\gamma(w_+) < 0$ e $\gamma(w_-) > 0$ de onde, pelo Lema 3.2, temos que

Existe um único $k < 1$ tal que $kw_+ \in S$, então $a = k < 1$.
Existe um único $r > 1$ tal que $rw_- \in S$, então $b = r > 1$.

Além disso
$$0 < \frac{a}{a+b} < \frac{1}{2}.$$
($\Leftarrow$) Considerando $a < 1$, suponhamos que $\gamma(w_+) \geq 0$.

Se $\gamma(w_+) = 0$, então como $w_+ \in H_0^1(\Omega)$ temos $w_+ \in S$. Assim $a = 1$, o que é uma contradição.

Se $\gamma(w_+) > 0$, e como $w_+ \in H_0^1(\Omega)$, então pelo Teorema F.1 existe $M > 1$ tal que $Mw_+ \in S$ e pela unicidade de λ, Lema 3.2, temos que $a = M > 1$, o que é uma contradição com nossa hipótese.

Prova do item (c) Do fato que

$$\Gamma(t) = \alpha(t)(1-t)aw_+ + \alpha(t)tbw_- \in S,$$

obtemos
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\alpha(1/2)}{2}(aw_+ + bw_-) \in S.$$
Agora como $aw_+ \in G^+ \subseteq S$ e $bw_- \in G^- \subseteq S$ então $\gamma(aw_+) = \gamma(bw_-) = 0$ e pelo Teorema F.9 obtemos $\gamma(aw_+ + bw_-) = 0$, o que implica $aw_+ + bw_- \in S$. Assim, concluímos

$$\alpha(\frac{1}{2}) = 2 \ \ e \ \ \Gamma(\frac{1}{2}) = aw_+ + bw_- \in S_1.$$

Provemos agora $\Gamma([0,1]) \bigcap S_1 = \{\Gamma(\frac{1}{2})\}$.

($\supseteq$) Dos resultados acima.

($\subseteq$) Seja $\Gamma(t) = \alpha(t)(1-t)aw_+ + \alpha(t)tbw_- \in S_1$, obtemos $\gamma(\alpha(t)(1-t)aw_+) = 0$, o que implica $\alpha(t)(1-t)aw_+ \in S$. Pelo Lema (3.2), segue-se que

$$\alpha(t)(1-t) = 1. \tag{3.28}$$

De forma completamente análoga, nós obtemos

$$\alpha(t)t = 1. \tag{3.29}$$

De (3.28) e (3.29), obtemos
$$t = \frac{1}{2}.$$
Prova do item (d) Vejamos que $J(\Gamma(0)) < J(\Gamma(t)) < J(\Gamma(\frac{1}{2}))$ para $t \in (0, \frac{1}{2})$. Lembremos que
$$J(\bar{\lambda}(u)u) = \max_{\lambda > 0} J(\lambda u) > 0.$$

Como $w \in \hat{S}$ então $w_+ \neq 0$ e $w_- \neq 0$ logo, existe um único $a > 0$ tal que $aw_- \in S$. Então $J(aw_-) > 0$, daqui e do Teorema F.8, temos que

$$\begin{aligned}
J(\Gamma(0)) &< J(\Gamma(0)) + J(aw_-)\\
&= J(aw_+) + J(aw_-)\\
&= J(aw_+ + aw_-)\\
&= J(aw)\\
&< J(w)\\
&= J(\Gamma(\frac{a}{a+b}))\\
&< J(aw_+) + J(bw_-)\\
&= J(aw_+ + bw_-)\\
&= J(\Gamma(\frac{1}{2})).
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.8. *O conjunto G^+, $\hat{S}^+$, W^+, S_1, W^-, $\hat{S}^-$ e G^- satisfazem*

a) G^+, S_1 e G^- são fechados e G^+, G^- são conexas por caminhos.

b) $\hat{S}$ é aberto e os subconjuntos $\hat{S}^+$ e $\hat{S}^-$ são abertos e separados por S_1.

c) Se $w \in G^+$ e $J(w) = \min_{G^+} J$, então $J(w) = \min\limits_{W^+} J$ e w é um ponto critico de J.

Demonstração. **Prova do item (a)**. Lembremos que

$$\begin{aligned}
G^+ &= \Big\{u \in S : u \geq 0\Big\}\\
S_1 &= \Big\{u \in \hat{S} : \gamma(u_+) = 0\Big\}\\
G^- &= \Big\{u \in S : u \leq 0\Big\}
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.6 e a definição da γ, temos que

$$\begin{aligned}
h : H_0^1(\Omega) &\to H_0^1(\Omega)\\
u &\to u^+,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R}\\
u &\to \gamma(u),
\end{aligned}$$

são funções continuas. Assim, a função composição $\gamma \circ h : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é continua.

Do fato que $S_1 = \Big\{u \in \hat{S} : \gamma(u_+) \geq 0\Big\} \bigcap \Big\{u \in \hat{S} : \gamma(u_+) \leq 0\Big\} = A \bigcap B$, temos

$$\begin{aligned} u \in A &\Leftrightarrow \gamma(u_+) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\gamma \circ h)(u) \geq 0, \\ &\Leftrightarrow (\gamma \circ h)(u) \in [0, +\infty) \\ &\Leftrightarrow u \in (\gamma \circ h)^{-1}([0, +\infty)). \end{aligned}$$

Como $[0, +\infty)$ é fechado em $\mathbb{R}$ e $\gamma \circ h$ é continua, temos $A = (\gamma \circ h)^{-1}([0, +\infty))$ é fechado em $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} u \in B &\Leftrightarrow \gamma(u_+) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (\gamma \circ h)(u) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow u \in (\gamma \circ h)^{-1}((-\infty, 0]). \end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos que o caso anterior, B é fechado em $H_0^1(\Omega)$. De onde concluímos que $S_1 = A \cap B$ é fechado. De forma completamente análoga, temos que G^- e G^+ são conjuntos fechados.

Agora provaremos que G^+ e G^- são conexos por caminho. Vamos fazer a prova para o conjunto G^+. O outro caso, para o conjunto G^-, é completamente similar. Sejam u, $v \in G^+$, tomemos a combinação linear convexa.

$$Z(t) = tu + (1-t)v; \quad t \in [0,1].$$

Da definição do conjunto G^+ temos que $Z(t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$ e do Lema 3.2 existe um único $\alpha(t) > 0$ tal que $\alpha(t)Z(t) \in S$ para todo $t \in [0,1]$ e $\alpha \in C^1([0,1], \mathbb{R})$. Do fato que $u \geq 0$ e $v \geq 0$ temos que $\alpha(t)Z(t) \in G^+$ para todo $t \in [0,1]$, isto é, a combinação linear convexa é projetada na variedade de Nehari de maneira única gerando o caminho procurado.

$$\begin{aligned} \beta : [0,1] &\rightarrow G^+ \\ t &\rightarrow \beta(t) = \alpha(t)Z(t). \end{aligned}$$

Logo, β é o único caminho, que conecta u e v, de classe C^1 contido completamente no conjunto G^+. Com efeito, desde que u, $v \in G^+$ e $\alpha(t) > 0$ temos $\alpha(t)Z(t) \geq 0$ em S, o que implica $B([0,1]) \subseteq G^+$.

Prova do item (b) Lembremos que

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \Big\{u \in S : u_+ \neq 0 \;\; e \;\; u_- \neq 0\Big\} \\ &= \Big\{u \in S : u_+ \neq 0\Big\} \bigcap \Big\{u \in S : u_- \neq 0\Big\} \\ &= \Big\{u \in S : h(u) \neq 0\Big\} \bigcap \Big\{u \in S : h^*(u) \neq 0\Big\}. \end{aligned}$$

Desde que h e h^* são funções contínuas e repetindo os argumentos da parte (a), resulta que $\hat{S}$ é aberto.

$$\hat{S}^+ = \Big\{u \in S : \gamma(u_+) < 0\Big\} = \Big\{u \in S : (\gamma \circ h)(u) < 0\Big\}.$$

Provemos que o conjunto $\hat{S}^+$ é aberto. Da equivalência

$$u \in \hat{S}^+ \Leftrightarrow u \in (\gamma \circ h)^{-1}((-\infty, 0)),$$

temos que $\hat{S}^+$ é aberto pois $(-\infty, 0)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e $\gamma \circ h$ é uma função contínua.

De forma completamente similar se prova que $\hat{S}^- = \Big\{u \in S : \gamma(u_+) > 0\Big\}$ é um conjunto aberto.

Afirmação: Os conjuntos $\hat{S}^+$ e $\hat{S}^-$ estão separados por S_1. Com efeito, tomemos o caminho $\sigma : [0,1] \to \hat{S}$ conectando $\sigma(0) \in \hat{S}^+$ e $\sigma(1) \in \hat{S}^-$. Assim, temos

$$[0,1] \xrightarrow{\sigma} H \xrightarrow{h} H \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}.$$

Agora, como $\sigma(0) \in \hat{S}^+$, então $\gamma(\sigma(0)_+) < 0$. Logo

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ h \circ \sigma)(0) &= \gamma(h(\sigma(0))) \\
&= \gamma(\sigma(0)_+) < 0. \\
(\gamma \circ h \circ \sigma)(1) &= \gamma(h(\sigma(1))) \\
&= \gamma(\sigma(1)_+) > 0.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do valor intermédio, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$(\gamma \circ h \circ \sigma)(c) = 0 \Rightarrow \gamma(\sigma(c)_+) = 0,$$

assim $\sigma(c) \in S_1$ pois $\sigma([0,1]) \subseteq \hat{S}$. Concluímos que $\sigma([0,1]) \cap S_1 \neq \phi$.

Prova do item (c) Provaremos primeiro a seguinte afirmação.
Afirmação: $\min_{W^+} J = \min_{G^+} J$. Com efeito, desde que $G^+ \subseteq W^+ = G^+ \bigcup \hat{S}^+$, consequentemente nós temos a desigualdade $\inf_{W^+} J \leq \inf_{G^+} J$. Agora seja $u \in W^+$,

- Se $u \in G^+$ então $\inf_{G^+} J \leq J(u)$.
- Se $u \in \hat{S}^+$ então pelos itens (a), (b) e (d) do Lema 3.7 temos que existe $v = \Gamma_u(0) \in G^+$ tal que $J(v) < J(u)$ então

$$\inf_{G^+} J \leq J(v) < J(u).$$

Concluímos que

$$\inf_{G^+} J \leq \inf_{W^+} J.$$

Agora como $J(w) = \min_{G^+} J$ então $J(w) = \min_{W^+} J$ e como W^+ é aberto em S então w é mínimo local de J. Portanto, w é ponto crítico de J em S e, pelo Lema 3.2, temos que w é um ponto crítico de J sobre todo o espaço $H_0^1(\Omega)$.

□

Lema 3.9. *Se $w \in S_1$ e $J(w) = \min_{S_1} J$ então w é um ponto crítico de J.*

Demonstração. Para concluir que w é um ponto crítico de J em $H_0^1(\Omega)$, é suficiente mostrar que w é um ponto crítico de $J\,|_S$.

Suponhamos que $\bigtriangledown J(w) \neq 0$ e que w não seja ponto crítico de J em S, isto é, $\bigtriangledown J(w)$ não é ortogonal ao espaço tangente no ponto w (ou seja, o gradiente tem sombra no espaço tangente). Assim, $P_w \bigtriangledown J(w) \neq 0$ onde $P_w \bigtriangledown J(w)$ denota a projeção ortogonal do $\bigtriangledown J(w)$ no espaço tangente. Veja Figura 4.

Vamos fazer uso de uma versão do Lema da Deformação, veja C.34. Sejam os conjuntos
$C = \Big\{w\Big\}$,
$B = \Big\{u \in S : \|u - w\| \geq \delta\Big\}$, onde $\delta = \frac{1}{4}\min\Big\{\|w_+\|, \|w_-\|\Big\}$, conjunto fechado.

Como $P_w \bigtriangledown J(w) \neq 0$, então $\|P_w \bigtriangledown J(w)\| \neq 0$. Seja $\epsilon = \dfrac{\|P_w \bigtriangledown J(w)\|}{4} > 0$, assim temos que

- $\| \bigtriangledown J(w)\| > 2\epsilon > 0$.
- $C \cap B = \emptyset$.
- C é compacto.

Estamos nas hipóteses do Lema da Deformação, então para algum $k > 1$, existe $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ continua e positiva, existe a deformação $\mathit{\Lambda} \in C([0,1] \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$ tal que para algum $t_0 > 0$ e para todo $t \in [0, t_0)$, se cumprem as seguintes afirmações

- $\mathit{\Lambda}(t,x) = x$ para todo $x \in B$,
- $\rho(\mathit{\Lambda}(t,x), x) \leq kt$, para todo $x \in H_0^1(\Omega)$,
- $J(\mathit{\Lambda}(t,x)) - J(x) \leq -\frac{t}{4} g(x)\| \bigtriangledown P_w J(w)\|$,
- $g(w) = 1$.

Assim, temos

- $\mathit{\Lambda}(t,x) = x$ para todo $x \in B$,

- $J(\Lambda(t,x)) \leq J(x)$, para todo $x \in H_0^1(\Omega)$,
- $J(\Lambda(t,w)) \leq J(x) - \frac{t}{4}\|P_w \bigtriangledown J(w)\|$.

Como $w \in S_1$ e do Lema 3.7, existe o caminho $\Gamma_w(t) = \Gamma(t)$, definido como

$$\Gamma(t) = \alpha(t)\Big[(1-t)w_+ + tw_-\Big] \in S. \tag{3.30}$$

Então o caminho deformado é definido como

$$\Gamma_1(t) = \ \Lambda(\frac{t_0}{2}, \Gamma(t)) \ \text{ para todo } \ t \in [0,1]. \tag{3.31}$$

Por (3.27), (3.28) e as afirmações do Lema da Deformação, Para todo $t \in [0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\}$, segue-se que

$$\begin{aligned} J(\Gamma_1(t)) &= J(\Lambda(\frac{t_0}{2}, \Gamma(t))) \leq J(\Gamma(t)) \\ &= J(\alpha(t)(1-t)w_+) + J(\alpha(t)tw_-) \\ &< J(w_+) + J(w_-) \ \textit{pois} \ w_+, w_- \in S \\ &= J(w_+ + w_-) \\ &= J(\Gamma(1/2)) \\ &= J(w). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} J(\Gamma_1(\frac{1}{2})) &= J(\Lambda(\frac{t_0}{2}, \Gamma(\frac{1}{2}))) \\ &= J(\Lambda(\frac{t_0}{2}, w)) \\ &< J(w) - \frac{t_0}{8}\|P_w \bigtriangledown J(w)\| \\ &< J(w). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $J(\Gamma_1(t)) < J(w)$ para todo $t \in [0,1]$. De onde nós temos que

$$\max\Big\{J(\Gamma_1(t));\ t \in [0,1]\Big\} < J(w) = \min_{S_1} J.$$

Pela definição do $\delta > 0$, vemos que

$$\|w_+ - w\| = \|w_+ - w_+ - w_-\| = \|w_-\| > \delta,$$

$$\|w_- + -w\| = \|w_- - w_+ - w_-\| = \|w_+\| > \delta.$$

Da definição de conjunto B, concluímos que w_+ e w_- pertencem ao conjunto B. Então

$$\begin{aligned} \Gamma_1(0) &= \Lambda(\frac{t_0}{2}, \Gamma(0)) = \Gamma(0) = w_+ \in G^+, \\ \Gamma_1(1) &= \Lambda(\frac{t_0}{2}, \Gamma(1)) = \Gamma(1) = w_- \in G^-. \end{aligned}$$

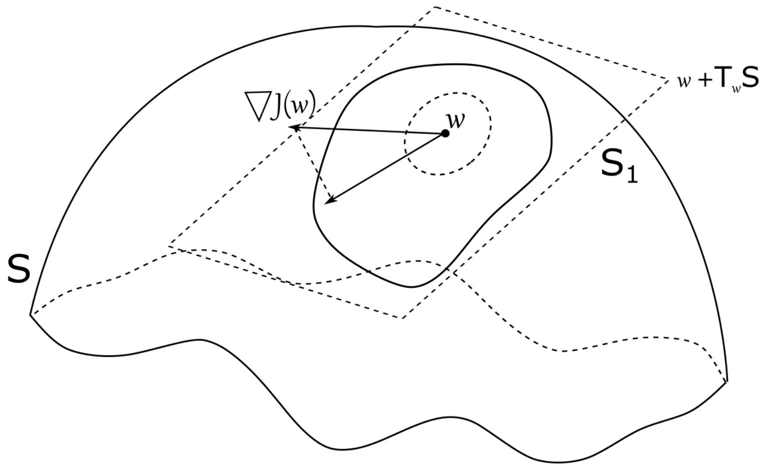

Figura 4 – Projeção da $\bigtriangledown J(w)$.

Como G^+ e G^- são separados por S_1, obtemos que $\Gamma_1([0,1]) \bigcap S_1 \neq \emptyset$ o que leva a uma contradição com a hipótese auxiliar. Assim, temos que w é um ponto crítico de $J\mid_S$ e, devido ao Lema 3.2 item (c), se segue a demostração.

$\square$

3.4 PROVA DO RESULTADO PRINCIPAL

Neste seção, provaremos o Teorema 3.1, isto é, a existência de pelo menos três soluções não triviais w_1, w_2 e w_3, para o problema (3.1), onde duas delas, digamos w_1 e w_2, são de sinal definido e a terceira solução w_3 muda de sinal exatamente uma vez. Mais ainda, as soluções de um sinal tem índice de Morse 1 e a solução que muda de sinal, w_3, tem índice de Morse 2.

3.4.1 EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO QUE MUDA DE SINAL

Pelo Lema 3.2 existe $C_3 > 0$ tal que $C_3 = \inf\limits_{S_1} J$ e, pela definição do ínfimo, existe uma sequência minimizante $(u_n) \subseteq S_1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in S_1} J(u) = C_3.$$

Agora, como $(u_n) \subseteq S_1$ e do Teorema E.4, temos que

$$\gamma((u_n)_+) = \gamma((u_n)_-) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $(u_n)_+$, $(u_n)_- \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ e pela definição dos conjuntos G^+ e G^-, temos que a sequência $((u_n)_+)_{n=1}^{\infty} \subseteq G^+$ e $((u_n)_-)_{n=1}^{\infty} \subseteq G^-$.

Afirmação: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_1$ é limitado. Com efeito,

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \int_\Omega \Big\{\frac{1}{2} \mid \nabla u_n \mid^2 - F(u_n)\Big\}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{f(u_n)u_n - 2F(u_n)\Big\}dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega m u_n f(u_n)dx \\ &= \frac{m}{2}\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Agora como $(J(u_n)) \subseteq \mathbb{R}$ é limitada, segue-se que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$ é limitado. Pelo Teorema A.18, (u_n), $((u_n)_+)$ e $((u_n)_-)$ convergem fracamente no espaço $H_0^1(\Omega)$, e pelo Teorema da imersão de sobolev podemos assumir, a menos de subsequência, que (u_n),$((u_n)_+)$ e $((u_n)_-)$ convergem em $L^{p+1}(\Omega)$, isto é, existem u, v e $w \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u \quad , \quad (u_n)_+ \rightharpoonup v \ , \ (u_n)_- \rightharpoonup w \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega), \\ &u_n \to u \quad , \quad (u_n)_+ \to v \quad , \quad (u_n)_- \to w \ \text{ em } \ L^{p+1}(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.6, temos a continuidade das funções $h : L^{p+1}(\Omega) \to L^{p+1}(\Omega)$ definida por $h(u) = u_+$ e $g : L^{p+1}(\Omega) \to L^{p+1}(\Omega)$ definida por $g(u) = u_-$ de onde, temos que $u_+ = v \geq 0$ e $u_- = w \leq 0$.

Afirmação: $u \in S_1$. Com efeito, do Teorema E.5, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega F((u_n)_+)dx &\to \int_\Omega F(u_+)dx, \\ \int_\Omega F((u_n)_-)dx &\to \int_\Omega F(u_-)dx. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f((u_n)_+)(u_n)_+dx &\to \int_\Omega u_+ f(u_+)dx, \\ \int_\Omega f((u_n)_-)(u_n)_-dx &\to \int_\Omega u_- f(u_-)dx. \end{aligned}$$

Agora, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_1$, temos que $\gamma((u_n)_+) = \gamma((u_n)_-) = 0$, isto é

$$\|(u_n)_+\|^2 = \int_\Omega (u_n)_+ f((u_n)_+)dx,$$

$$\|(u_n)_-\|^2 = \int_\Omega (u_n)_- f((u_n)_-)dx.$$

Então, pelos resultados anteriores, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_+ f(u_+)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n)_+ f((u_n)_+)dx, \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(u_n)_+\|^2 > 0, \\ \int_\Omega u_- f(u_-)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n)_- f((u_n)_-)dx, \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(u_n)_-\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Concluímos que u_+, $u_- \neq 0$ e, consequentemente, $u = u_+ + u_-$ muda (ou troca) de sinal.

Afirmação: $(u_n)_+ \to u_+$ em $H_0^1(\Omega)$. De fato, procedemos por contradição. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $\|u_+\|^2 < \lim_{n\to+\infty} \inf \|(u_n)_+\|^2$. Consequentemente, temos

$$\gamma(u_+) \;=\; \|u_+\|^2 - \int_\Omega u_+ f(u_+)dx. \tag{3.32}$$

De onde nós temos

$$\begin{aligned}
\gamma(u_+) &< \lim_{n\to\infty} \inf \|(u_n)_+\|^2 - \int_\Omega u_+ f(u_+)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf \|(u_n)_+\|^2 - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n)_+ f((u_n)_+)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf \Big(\|(u_n)_+\|^2 - \int_\Omega (u_n)_+ f((u_n)_+)dx \Big) = 0.
\end{aligned}$$

Concluímos que $\gamma(u_+) < 0$ e, pelo Lema 3.2, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha u_+ \in G^+$ (dado que $\alpha u_+ \in S$ e $\alpha u_+ \geq 0$). E analogamente, se for necessário, existe $0 < \beta \leq 1$ tal que $\beta u_- \in G^-$, de onde obtemos que $\alpha u_+ + \beta u_- \in S_1$. Isso fornece uma contradição, uma vez que

$$\begin{aligned}
J(\alpha u_+ + \beta u_-) &< \lim_{n\to\infty} \inf J(\alpha (u_n)_+ + \beta (u_n)_-) \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ J(\alpha (u_n)_+) + J(\beta (u_n)_-) \Big\} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ J((u_n)_+) + J((u_n)_-) \Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n) \\
&= C_3 \\
&= \inf_{S_1} J,
\end{aligned}$$

o que é impossível, pois, $\alpha u_+ + \beta u_- \in S_1$. Portanto $(u_n)_+$ converge fortemente para u_+ em $H_0^1(\Omega)$, $(u_n)_+ \to u_+$ em $H_0^1(\Omega)$. O que prova a afirmação.

Analogamente, concluímos que $(u_n)_-$ converge fortemente para u_- em $H_0^1(\Omega)$ e assim (u_n) converge fortemente para u em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema 3.8 item (a), S_1 é fechado, então $u \in \bar{S_1} = S_1$. Portanto

$$J(u) = C_3 = \inf_{S_1} J = \min_{S_1} J.$$

Fazendo $w_3 = u$ vemos que $J\mid_{S_1}$ atinge seu mínimo em w_3, então pelo Lema 3.9 temos que w_3 é um ponto crítico de J. Consequentemente, pela formulação variacional do problema, w_3 é uma solução fraca nodal para o problema (3.1).

Mostraremos, por contradição, que w_3 muda de sinal exatamente uma única vez, ou equivalentemente, w_3 tem exatamente dois domínios nodais. Como w_3 é continua, então o conjunto

$$E = \Big\{ x \in \Omega / u(x) \neq 0 \Big\},$$

é aberto. Suponhamos que w tem mais de dois domínios nodais ou que w muda de sinal mais de uma vez, então, sem perda de generalidade, podemos assumir que existem componentes conexas A, B, C de E, veja Figura 5, tais que $u > 0$ em A e $u < 0$ em B. Agora, sejam u_A, u_B e u_C as extensões nulas de $u\mid_A$, $u\mid_B$ e $u\mid_C$, respectivamente. Desde que w_3 é solução do problema (3.1), então

$$\triangle\, w_3 + f(w_3) = 0 \text{ em } \Omega, \text{ segue que } \gamma(u_A) = \gamma(u_B) = \gamma(u_C) = 0.$$

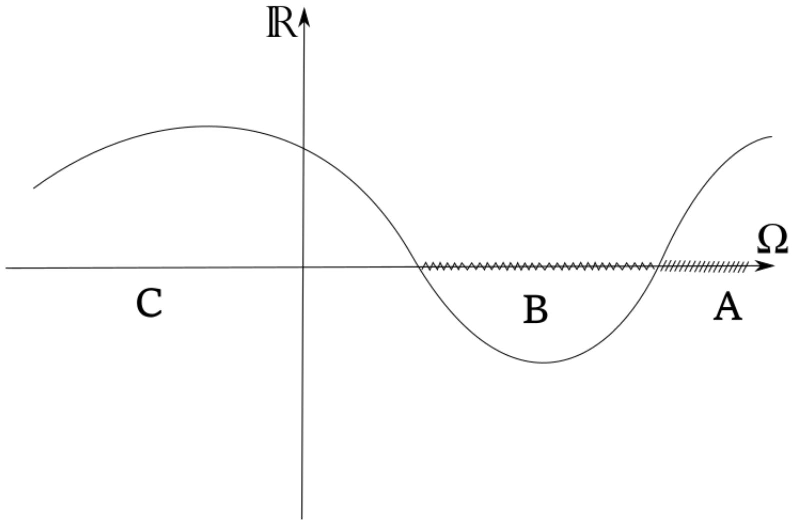

Figura 5 – Componentes conexas da E.

Do item (d) do Lema (3.2), temos que $\inf_S J > 0$, então

$$\begin{aligned} J(u_A + u_B) &< J(u_A + u_B) + J(u_C) \\ &\leq J(u_A + u_B + u_C) \\ &= J(w_3) \\ &= C_3 \\ &= \inf_{S_1} J, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, desde que $u_A + u_B \in S_1$. Concluímos que E tem exatamente duas componentes.

Finalmente, suponhamos que w_3 é um ponto crítico não degenerado de J em $H_0^1(\Omega)$. Da hipótese (3.5) do problema, temos que

$$\begin{aligned} J''(w_3)((w_3)_+,(w_3)_+) &= \int_\Omega \Big\{ \nabla (w_3)_+ . \nabla (w_3)_+ - f'(w_3)(w_3)_+(w_3)_+ \Big\} dx \\ &= \int_\Omega \Big\{ \mid \nabla (w_3)_+ \mid^2 - f'(w_3)(w_3)_+^2 \Big\} d \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \int_\Omega \Big\{ \mid \nabla (w_3)_+ \mid^2 - (u_3)_+ f((w_3)_+) \Big\} dx \\
&= \gamma((w_3)_+) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De forma completamente similar, temos que $J''(w_3)((w_3)_-(w_3)_-) < 0$. Concluímos que w_3 tem índice de Morse 2, dado que $< (w_3)_+, (w_3)_- >$ é o maior subespaço de $H_0^1(\Omega)$ onde $J''(w_3)$ é definida negativa. Note que

$$
< (w_3)_+, (w_3)_- >= \int_\Omega \nabla (w_3)_+ . \nabla (w_3)_- dx = 0.
$$

3.4.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DE SINAL DEFINIDO

Para completar o objetivo deste Capítulo do trabalho vamos estabelecer a existência das soluções com sinal definido, denotadas por $w_1 > 0$ e $w_2 < 0$. Mostremos que $J\mid_S$ tem mínimos locais em w_1 e w_2. Mais ainda, esses dois pontos críticos, não-degenerados, tem índice de Morse 1.

Pelo Lema 3.2 item (d), temos que $\exists C_1 > 0$ tal que $C_1 = \inf_{G^+} J$. Logo, pela definição do ínfimo, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G^+$, chamada sequência minimizante, tal que

$$
\lim_{n\to\infty} J(u_n) = C_1 = \inf_{G^+} J.
$$

Afirmação: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G^+$ é limitado. Com efeito, como

$$
\begin{aligned}
J(u_n) &= \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{2} \mid \nabla u \mid^2 - F(u_n) \Big\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \Big\{ f(u_n) u_n - 2F(u_n) \Big\} dx \\
&\geq \frac{m}{2} \int_\Omega u_n f(u_n) dx \\
&= \frac{m}{2} \|u_n\|^2,
\end{aligned}
$$

desde que $J(u_n)$ é convergente, temos que u_n é limitado em $H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, o fato que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitado em $H_0^1(\Omega)$ nos permite concluir, via o Teorema de Alougt-Bourbaki A.18, que (u_n) converge fracamente no espaço $H_0^1(\Omega)$, passando a uma subsequência se for necessário. E pelo Teorema da imersão compacta de Sobolev, podemos assumir, a menos de subsequência, que (u_n) converge fortemente em $L^{p+1}(\Omega)$, isto é, existe $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \subseteq L^{p+1}(\Omega)$ tal que

$$
u_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_n \to \bar{u} \text{ em } L^{p+1}(\Omega).
$$

Pelo Lema 3.6, temos a continuidade da função $h : L^{p+1}(\Omega) \to L^{p+1}(\Omega)$ definida por $h(u) = u_+$. De onde $h(u_n) \to h(\bar{u})$ quando $n \to \infty$, o que implica, pela unicidade do limite, que $\bar{u} \geq 0$.

Afirmação: $\bar{u} \neq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \bar{u} f(\bar{u}) dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n f(u_n) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Afirmação: $u_n \to \bar{u}$ em $H_0^1(\Omega)$. De fato, procedemos por contradição, suponhamos que existe uma sequência também denotada por (u_n) tal que $\|\bar{u}\|^2 < \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|^2$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\gamma(\bar{u}) &= \|\bar{u}\|^2 - \int_\Omega \bar{u} f(\bar{u}) dx \\
&< \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|^2 - \int_\Omega \bar{u} f(\bar{u}) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf \Big(\|u_n\|^2 - \int_\Omega u_n f(u_n) dx \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De onde concluímos que $\gamma(\bar{u}) < 0$ e, pelo Lema 3.2, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha\bar{u} \in G^+$. Isso fornece uma contradição, uma vez que

$$\begin{aligned}
J(\alpha\bar{u}) &= \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{2} \mid \bigtriangledown(\alpha\bar{u}) \mid^2 - F(\alpha\bar{u}) \Big\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \alpha^2 \mid \bigtriangledown(\bar{u}) \mid^2 dx - \int_\Omega F(\alpha\bar{u}) dx \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \|\bar{u}\|^2 - \int_\Omega F(\alpha\bar{u}) dx \\
&< \frac{\alpha^2}{2} \lim\inf \|u_n\|^2 - \int_\Omega F(\alpha\bar{u}) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ \frac{\|\alpha u_n\|^2}{2} - \int_\Omega F(\alpha u_n) dx \Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf J(\alpha u_n) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} J(\alpha u_n) \\
&= C_1 \\
&= \inf_{G^+} J.
\end{aligned}$$

O que é impossível de acontecer. Portanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para $\bar{u}$ em $H_0^1(\Omega)$ e desde que G^+ é fechado temos que $\bar{u} \in G^+$. Mais ainda, pelo Lema 3.8, vemos que $w_1 = \bar{u}$ é um ponto crítico de J e, consequentemente, uma solução positiva para o problema (3.1).

Obtemos a solução negativa $w_2 \in G^- \subseteq W^-$, fazendo uso de argumentos similares aos já usados no caso da solução positiva. Então, podemos definir

$$C_2 = \inf_{G^-} J = \inf_{W^-} J = J(w_2).$$

Finalmente, suponhamos que w_1 é um ponto crítico não-degenerado de J, então tem índice de Morse 1. Com efeito, da hipótese (3.3), temos que

$$\begin{aligned} J''(w_1)(w_1, w_1) &= < J''(w_1)(w_1, w_1) \\ &= \int_\Omega \Big\{ \bigtriangledown w_1 . \bigtriangledown w_1 - f'(w_1) w_1 w_1 \Big\} dx \\ &= \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown w_1 \mid^2 - f'(w_1) w_1^2 \Big\} dx \\ &< \int_\Omega \mid \bigtriangledown w_1 \mid^2 - \int_\Omega w_1 f(w_1) dx \\ &= \gamma(w_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue-se que w_1 é um ponto crítico não-degenerado, com índice de Morse 1, pois $< w_1 >$ é o maior subespaço de $H_0^1(\Omega)$ onde $J''(w_1)$ é definida negativa.

De forma completamente similar, obtemos $J''(w_2)(w_2, w_2) < 0$. Fazendo uso de argumentos completamente análogos ao caso anterior, concluímos que w_2 é ponto crítico não-degenerado com índice de Morse 1.

Finalmente, para concluir a prova do Teorema 3.1, observemos que

$$\begin{aligned} C_3 = J(w_3) &= J((w_3)_+) + J((w_3)_-) \\ &\geq J(w_1) + J(w_2). \end{aligned}$$

Lembre-se que $w_3 \in S_1$ então $\gamma((w_3)_+) = 0$ e $\gamma((w_3)_-) = 0$, isto é, $(w_3)_+ \in S$ e $(w_3)_- \in S$. Logo $J((w_3)_+) \geq J(w_1)$ e $J((w_3)_-) \geq J(w_2)$.

Observação 3.10. Algumas considerações:

- Motivados pelo princípio de mini-max apresentado e o resultado de Castro e Aduén, **Infinitely Many Nonradial Solutions to a Superlinear Dirichlet problem** . Seria interessante estudar a existência de soluções não radiais que mudam de sinal exatamente uma vez.
  No artigo de L. A. Maia; O. H. Miyagaki; S. H. M. Soares, **A sign-changing solution for an asymtotically linear schödinger equation** se estuda a existência de uma solução radialmente simétrica que muda de sinal exatamente uma vez. Além disso, se obtêm informação sobre seu índice de Morse.

- O princípio de mini-max ainda é válido quando f é trocado por λf onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

- A condição (3.4) pode ser considerada apenas para u suficientemente grande, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$f(u)u - 2F(u) \geq muf(u) \quad \text{para todo} \quad |u| > K. \tag{3.33}$$

- O resultado apresentado complementa e estende os resultados de Wang em [35], No sentido que os resultados obtidos em [35] não implicam a existência de soluções de mudança de sinal, muito menos a existência de soluções que mudem de sinal exatamente uma vez.

4 O PRINCÍPIO DE MIN-MAX PARA PROBLEMAS ASSINTOTICAMENTE LINEARES

Ao longo deste Capítulo, ω denota um ponto crítico de J satisfazendo a caraterização variacional do Teorema 3.1. Além disso, Assumimos que ω é um ponto crítico isolado e de mudança sinal, deixamos que X denote o subespaço linear de $H_0^1(\Omega)$ gerado por $\{\omega_+, \omega_-\}$. Assim, X é um subespaço bidimensional. Denotamos por Y ao complemento ortogonal de X em $H_0^1(\Omega)$. Agora pela definição do funcional de energia J e da hipótese (3.5), nós temos que

$$\begin{aligned}
< J''(\omega)\omega_+, \omega_+ > &= \int_\Omega \Big(\bigtriangledown \omega_+ \cdot \bigtriangledown \omega_+ - f'(\omega)\omega_+^2 \Big) dx \\
&= \int_\Omega \Big(\omega_+ f(\omega) - f'(\omega)\omega_+^2 \Big) dx \\
&= \int_\Omega \omega_+^2 \Big(\frac{f(\omega_+}{\omega_+} - f'(\omega_+) \Big) dx \\
&< 0.
\end{aligned}$$

De forma completamente similar, obtemos

$$< J''(\omega)\omega_-, \omega_- > < 0.$$

Do fato que ω_+ e ω_- são ortogonais em $H_0^1(\Omega)$ podemos concluir que $J''(\omega)$ é definida negativa sobre X. Agora, como ω é um ponto crítico isolado, podemos assumir que existe $\varepsilon > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\bigtriangledown J(u) \neq 0 \quad \text{se} \quad 0 < \|u - w\| < \sqrt{2}\,\varepsilon,$$

$$< J''(\omega + x + y)v, v > \ \leq -K\|v\|^2 \text{ para todo } v \in X; \ \ x, y \in B_\varepsilon(0). \tag{4.1}$$

Como $J \in C^2$, então permite desenvolver a Fórmula de Taylor de segundo ordem em torno do ponto w:

$$J(\omega + x) = J(\omega) + J'(w)x + J''(w)(x,x) + R(x), \ \text{onde} \lim_{||x|| \longrightarrow +0} \frac{R(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Logo, pela definição do limite, existe $\varepsilon > 0$ tal que $R(x) < K\|x\|^2$ para $||x|| < \varepsilon$. Agora como $J'(w) = 0$, temos que

$$J(\omega + x) = J(\omega) + J''(w)(x,x) + R(x) < J(\omega) - K\|x\|^2 + K\|x\|^2 = J(w).$$

Assim

$$J(\omega + x) < J(\omega) \text{ para todo } x \in B_\varepsilon[0]. \tag{4.2}$$

4.1 LEMAS PRELIMINARES

Lema 4.1. *Existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que se $y \in B(0, \delta) \cap Y$ e $\|x\| \leq \varepsilon$ com $x \in X$, então*

$$J(\omega + x + y) < J(\omega).$$

Demonstração. A prova é por contradição. Suponhamos que existam sequências

$$y_n \in B(0, \frac{1}{n}) \cap Y,\ x_n \in X \ \text{ com } \ \|x_n\| \leq \varepsilon \ \ e \ \ J(\omega + x_n + y_n) \geq J(\omega).$$

Assim, temos que

$$(x_n) \subseteq X, (y_n) \subseteq Y \ \text{ com } \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = 0,\ \|x_n\| \leq \varepsilon \ \ e \ \ J(\omega + x_n + y_n) \geq J(\omega).$$

Desde que X é de dimensão finita, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \hat{u}$ e $\|\hat{u}\| \leq \varepsilon$. Do fato de ser J um funcional continuo, temos que $J(\omega + \hat{u}) \geq J(\omega)$, mas isto é uma contradição com (4.2), desde que $\bigtriangledown J(\omega) = 0$.

□

Lema 4.2. *Existe uma função contínua $\Phi : B(0, \delta) \cap Y \longrightarrow B(0, \varepsilon) \cap X$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1 temos que existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $B(0, \delta) \cap Y \neq \emptyset$. Da hipótese para o funcional J, para $y \in B(0, \delta) \cap Y$ existe $\hat{u} \in B[0, \varepsilon] \cap X$ tal que

$$J(\omega + y + \hat{u}) = \max\Big\{J(\omega + y + x); \|x\| \leq \varepsilon, x \in X\Big\},$$

consequentemente, temos que

$$< \bigtriangledown J(\omega + y + \hat{u}), x_1 > \ = \ 0, \ \text{para todo } x_1 \in X.$$

Prova da unicidade de û: Suponha que existe $u_0 \in B[0, \varepsilon] \cap X$ tal que

$$< \bigtriangledown J(\omega + y + u_0), x_1 > \ = \ 0, \ \text{para todo } x_1 \in X.$$

Então, por (4.1) e pelo Teorema A.21, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \ < \bigtriangledown J(\omega + y + \hat{u}) - \bigtriangledown J(\omega + y + u_0), \hat{u} - u_0 >, \\ &= \ < J''(\omega + y + x')(\hat{u} - u_0), \hat{u} - u_0 >, \\ &\leq \ -K\|\hat{u} - u_0\|^2. \end{aligned}$$

Desde que $K > 0$, concluímos que $\hat{u} = u_0$.

Portanto, a partir da unicidade de û, segue-se a boa definição da função $\Phi : B(0, \delta) \cap Y \longrightarrow B(0, \varepsilon) \cap X$ definida como $\Phi(y) = \hat{u}$.

Prova da continuidade de Φ: Por contradição, suponhamos que Φ não é contínua. Então existem $\rho > 0$ e uma sequência $(y_n) \subseteq B(0,\delta) \cap Y$ tais que

$$y_n \longrightarrow y \text{ quando } n \longrightarrow \infty \quad e \quad \|\Phi(y_n) - \Phi(y)\| \geq \rho,$$

de onde temos

$$\omega + y_n + \Phi(y) \longrightarrow \omega + y + \Phi(y) \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Como o funcional de energia J é de classe C^2, segue-se que

$$\bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y)) \longrightarrow \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)). \tag{4.3}$$

Seja $P : H_0^1(\Omega) \longrightarrow X \subseteq H_0^1(\Omega)$ a projeção de $H_0^1(\Omega)$ sobre X, e $P^* : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ o operador adjunto de P.

Afirmação: $P^* \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)) = 0$ para todo $y \in Y$. Com efeito, sejam $y_0 \in Y$ e $h = y + x \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} < P^* \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)), h > &= < P^* \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)), y > + \\ & \quad < P^* \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)), x > \\ &= < \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)), Py > + \\ & \quad < \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)), Px > \\ &= 0. \end{aligned}$$

De (4.3), da afirmação e pela continuidade de P^*, temos que

$$P^* \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y)) \longrightarrow P^* \bigtriangledown J(\omega + y + \Phi(y)) = 0.$$

Logo para n suficientemente grande segue-se que

$$\|P^* \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y))\| < K\rho. \tag{4.4}$$

Da hipótese, nós temos

$$< \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y_n)) - \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y)), \Phi(y_n) - \Phi(y) > \; \leq -K\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\|^2. \tag{4.5}$$

Usando novamente a afirmação, a desigualdade (4.5) e o fato que $P(\Phi(y) - \Phi(y_n)) = \Phi(y) - \Phi(y_n)$, temos que

$$< \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y)), P(\Phi(y) - \Phi(y_n)) > \; \geq K\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\|^2,$$

Assim, obtemos

$$< P^* \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y)), \Phi(y) - \Phi(y_n) > \; \geq K\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\|^2.$$

Agora, usando a desigualdade de Schwarz, segue-se que

$$\|P^* \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y))\|\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\| \geq K\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\|^2.$$

Portanto, da hipótese auxiliar, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\|P^* \bigtriangledown J(\omega + y_n + \Phi(y))\| &\geq K\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\| \\
&\geq K\rho.
\end{aligned}
$$

O que é uma contradição. Asim, Φ é continua. $\square$

Pelo Lema anterior, podemos definir $J^*(y) := J(\omega+y+\Phi(y)) = \max_{\|x\|\leq\varepsilon} J(\omega+y+x)$ o qual é de classe C^1. Além disso, desde que $\bigtriangledown J(w + y + \Phi(y) \perp X$ segue-se

$$
\begin{aligned}
< \bigtriangledown J(w + y + \Phi(y), u) > &=< \bigtriangledown J(w + y + \Phi(y), x_1 + y_1) > \\
&=< \bigtriangledown J(w + y + \Phi(y), y_1) > \\
&=< \bigtriangledown J^*(y), y_1 > .
\end{aligned}
$$

Lema 4.3. *Para cada $y \in B(0,\delta) \cap Y$, o conjunto $S_1 \cap \{\omega + y + x; \|x\| < \varepsilon\}$ é não vazio. Onde $S_1 = \{u \in S : u_+ \neq 0, u_- \neq 0, \gamma(u_+) = 0\}$ e S é a variedade de Nehari.*

Demonstração. Seja $y \in B(0,\delta) \cap Y$ então $\|y\| < \delta$. Consideremos a seguinte função $P : Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida como

$$
\begin{aligned}
P(y,(s,t)) = &(< \bigtriangledown J(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-), \omega + y + s\omega_+ + t\omega_- >, \\
&< \bigtriangledown J(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-), (\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-)_+ >).
\end{aligned}
$$

Afirmação: $P(0,s,t) = 0 \iff (s,t) = (0,0)$. Em efeito,
($\Rightarrow$) Desde que $P(0,s,t) = 0$, então temos as igualdades

$$
\begin{aligned}
< \bigtriangledown J(\omega + s\omega_+ + t\omega_-), \omega + s\omega_+ + t\omega_- > = 0, \\
< \bigtriangledown J(\omega + s\omega_+ + t\omega_-), (\omega + s\omega_+ + t\omega_-)_+ > = 0.
\end{aligned}
$$

Então, obtemos a igualdade $\gamma(\omega + s\omega_+ + t\omega_-) = 0$. Mais ainda, temos

$$
\gamma(\omega + s\omega_+ + t\omega_-) = 0 \implies \gamma((1+s)\omega_+ + (1+t)\omega_-) = 0 \tag{4.6}
$$

$$
\implies \gamma((1+s)\omega_+) + \gamma(1+t)\omega_-) = 0. \tag{4.7}
$$

Como $\omega \in S_1$. Então, pelo Lema F.1, temos que

$$
\begin{aligned}
\bigtriangledown J(\omega)(\omega_+) = \bigtriangledown J(\omega)(\omega_-) = 0 &\implies \bigtriangledown J(\omega_+)(\omega_+) = \bigtriangledown J(\omega_-)(\omega_-) = 0 \\
&\implies \gamma(\omega_+) = \gamma(\omega_-) = 0 \\
&\implies \omega_+, \omega_- \in S.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema 3.2, segue-se que

$$
\gamma((1+s)\omega_+) \leq \gamma(\omega_+) = 0. \tag{4.8}
$$

$$
\gamma((1+t)\omega_-) \leq \gamma(\omega_-) = 0. \tag{4.9}
$$

De (4.7), (4.8), (4.9) e a unicidade de $\bar{\lambda}$, temos que

$$\begin{aligned} \gamma((1+s)\omega_+) &= 0 \ \text{ então } \ s = 0. \\ \gamma((1+t)\omega_+) &= 0 \ \text{ então } \ t = 0. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $s = t = 0$, implica que $P(0,0,0) = (<\bigtriangledown J(\omega), \omega>, <\bigtriangledown J(\omega), \omega_+>)$. Desde que $\omega \in S_1$, temos que $<\bigtriangledown J(\omega), \omega> \; = \; <\bigtriangledown J(\omega), \omega_+> \; = \; 0$.

Existe $\rho > 0$, tal que

$$\|P(0,s,t)\| \geq \rho \ \text{ se } \ 0 < \|s\omega_+ + t\omega_-\| \leq \varepsilon. \tag{4.10}$$

Como

$$\begin{aligned} P(0,s,t) &= (<\bigtriangledown J(\omega + s\omega_+ + t\omega_-), (1+s)\omega_+ + (1+t)\omega_- > \\ &= \; <\bigtriangledown J(\omega + s\omega_+ + t\omega_-), (1+s)\omega_+ >), \end{aligned}$$

podemos considerar a função $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(s,t) = P(0,s,t)$. Assim, f é diferenciável em seu domínio. Além disso, temos que

$$f'(0,0) \;\; = \;\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial s}(0,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial t}(0,0) \\ & \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial s}(0,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial t}(0,0) \end{bmatrix}$$

Fazendo os cálculos, temos que

$$det(f'(0,0)) = - < J''(\omega)\omega_+, \omega_+ > . < J''(\omega)\omega_-, \omega_- > < \; 0.$$

Dado que $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ é valor regular da função f no conjunto $\{(s,t) : \|s\omega_+ + t\omega_-\| \leq \varepsilon\}$ temos que $(f, \{(s,t) : \|s\omega_+ + t\omega_-\| < \varepsilon\}, 0)$ é uma terna admissível. Logo,

$$d(f, \{(s,t) : \|s\omega_+ + t\omega_-\| < \varepsilon\}, 0) = -1.$$

Podemos definir uma homotopia linear ente $P(0,s,t)$ e $P(y,s,t)$, denotado por $H : [0,1] \times U \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Pela afirmação, temos que

$$H(0,s,t) \neq (0,0), \text{para todo } \ (s,t).$$

Agora por (4.10) temos que $\exists \delta_1 < \delta$ tal que se $\|y\| < \delta_1$, então $\|P(y,s,t)\| \geq \dfrac{\delta}{2} > 0$ para $\|s\omega_+ + t\omega_-\| = \varepsilon$. Assim, temos que $H(1,s,t) \neq (0,0)$ e pela propriedade da invariância homotópica do grau, temos que

$$d(P(0,s,t), U, (0,0)) = d(P(1,s,t), U, (0,0)) = -1.$$

Onde $U = \Big\{(s,t) : \|s\omega_+ + t\omega_-\| < \varepsilon\Big\}$.

Segue-se que $d(P(0,s,t),U,(0,0)) \neq 0$, de onde, pela propriedade da existência de solução do grau, temos que

$$\|y\| < \delta_1, \ \exists (s,t) \text{ tal que } P(y,s,t) = 0,$$

Assim, resulta que

$$\begin{aligned} \bigtriangledown J(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-)(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-) = 0 &\Rightarrow \gamma(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-) = 0 \\ &\Rightarrow \omega + y + s\omega_+ + t\omega_- \in S. \end{aligned}$$

$$\bigtriangledown J(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-)(\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-)_+ = 0 \ \ \Rightarrow \gamma((\omega + y + s\omega_+ + t\omega_-)_+) = 0.$$

Das informações anteriores e pela definição do conjunto S_1, concluímos que $\omega + y + s\omega_+ + t\omega_- \in S_1$. □

4.2 O ÍNDICE DE LERAY-SCHAUDER DO PONTO CRÍTICO

Nesta seção nós vamos provar que se o ponto crítico w dado pelo Teorema 3.1 é isolado então seu índice de Leray-Schauder (grau de $\bigtriangledown J$ em relação a zero em qualquer região contendo w mas nenhum outro ponto crítico de J) é +1.

Teorema 4.4. *Seja ω como no Teorema* 3.1. *Se $\Sigma \subset H_0^1(\Omega)$ é uma região limitada contendo ω e nenhum outro ponto crítico de J no seu fecho, então*

$$d(\bigtriangledown J, \Sigma, 0) = +1.$$

Demonstração. Desde que $J \in C^2$, e ω é uma solução nodal, como no inicio deste capítulo, temos que $X = < \omega_+, \omega_- >$ é fechado e com $dim X = 2$. Então, $H_0^1(\Omega)$ tem a seguinte descomposição $H_0^1(\Omega) = X \bigoplus Y$.

Afirmação: $\bigtriangledown J = I - T$, onde I é a identidade e T é um operador compacto. Com efeito, pelo Teorema da Representação de Riesz, Teorema A.16, é possível identificar $H_0^1(\Omega)$ com seu dual $[H_0^1(\Omega)]^*$, então podemos escrever

$$J'(u)\varphi = < \bigtriangledown J(u), \varphi >, \quad \bigtriangledown J(u) \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, temos $\bigtriangledown J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} < \bigtriangledown J(u), \varphi > &= \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx, \\ &= < u - T, \varphi >, \end{aligned}$$

assim $\bigtriangledown J = I - T$ e o operador $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ é definido por

$$< T(u), \varphi > \ = \int_\Omega f(u)\varphi dx.$$

Agora como f é subcrítica e do Teorema $F.12$, temos que T é compacto.

Pela afirmação segue-se que $(\bigtriangledown J, B_\varepsilon, 0)$ é uma terna admissível para o grau de Leray-Schauder.

Finalmente, pelo Teorema 3 em [27], temos que

$$\begin{aligned} d(\bigtriangledown J, B(\omega,\varepsilon), 0) &= d(\bigtriangledown J^*, B(0,\delta_1)\cap Y, 0)\cdot(-1)^{dimX} \\ &= d(\bigtriangledown J^*, B(0,\delta_1)\cap Y, 0). \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 4.3, para cada $y \in B(0,\delta_1)$ existe $x \in B(0,\varepsilon)$ tal que $\omega + y + x \in S_1$. Consequentemente, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} J^*(y) &= J(\omega + y + x) \\ &> J(\omega) \\ &= J^*(0). \end{aligned}$$

Isto mostra que a funcional J^* tem um mínimo local no ponto 0, então pelo Teorema E.20, temos que $d(\bigtriangledown J^*, B(0,\delta_1)\cap Y, 0) = 1$. Assim, $d(\bigtriangledown J, B(0,\varepsilon), 0) = 1$.

Pela propriedade de excisão do grau de Leray-Schauder, se $\varSigma$ é uma região limitada contendo ω mas nenhum outro ponto crítico, temos que

$$\begin{aligned} d(\bigtriangledown J, \varSigma, 0) =&\ d(\bigtriangledown J, \Sigma - B(\omega,\varepsilon), 0) + d(\bigtriangledown J, B(\omega,\varepsilon), 0) \\ =&\ 0 + 1 \\ =&\ 1. \end{aligned}$$

□

4.3 EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO DE MUDANÇA DE SINAL PARA PROBLEMAS DE DIRICHLET ASSINTOTICAMENTE LINEARES

Neste secção, veremos que combinando os resultados do método Min-Max desenvolvido no Capitulo 3, com os resultados teóricos da Teoria de Grau de Castro e Cossio em [9], no caso em que a não linearidade f seja assintoticamente linear, no problema

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad\quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

Isto é, assumimos que $f'(+\infty) = \lim\limits_{u\longrightarrow+\infty} f'(u) \in \mathbb{R}$, $f'(-\infty) = \lim\limits_{u\longrightarrow-\infty} f'(u) \in \mathbb{R}$. Fornecemos condições suficientes para mostrar: (i) a existência de pelo menos quatro soluções, uma das quais muda de sinal exatamente uma vez, (ii) a existência de pelo menos cinco soluções, duas das quais mudam de sinal. Além disso, uma de dessas duas soluções de mudança de sinal muda exatamente uma vez.

Teorema 4.5. *Se* $tf''(t) > 0$ *para todo* $t \neq 0$, $f(0) = 0$ *e* $f'(-\infty), f'(+\infty) \in (\lambda_2, \infty)$, *então o problema (4.11) satisfazendo (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) tem pelo menos quatro soluções. Uma de estas muda de sinal exatamente uma vez, se é isolado, seu grau de Leray-schauder é +1.*

Demonstração. Como apontado em [9] Lema (3.2), as ultimas suposições implicam que (4.11), tem uma solução positiva e uma solução negativa. Desde que zero é uma solução, então resta apenas mostrar a existência de uma solução que mude de sinal exatamente uma vez.

Seja $\sigma \in (1, 1 + \frac{2}{N})$. Definamos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad |t| \leq n; \\ f(n) + f'(n)(t-n) + (t-n)^\sigma & , \quad t > n; \\ f(-n) + f'(-n)(t+n) + (t+n)^\sigma & , \quad t < -n. \end{cases} \tag{4.12}$$

Como $\sigma > 1$ então existe $C_1 > 0$, pois f tem um crescimento subcrítico, tal que

$$|f(t)| \leq C_1(|t|^\sigma + 1), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Provemos que

$$f_n'(t) > \frac{f_n(t)}{t} \text{ para todo } t \neq 0. \tag{4.13}$$

- *Para* $|t| < n$, temos que

$$f_n'(t) = f'(t) > \frac{f(t)}{t} = \frac{f_n(n)}{t}.$$

- *Para* $t > n$, temos que

$$f_n'(t) = f'(n) + \sigma(t-n)^{\sigma-1}.$$

Desde que $0 < t - n < t$ e da hipóteses (3.5) resulta que

$$(t-n)^\sigma < t(t-n)^{\sigma-1}\sigma \quad e \quad f(n) + f'(n)(-n) < 0.$$

Então temos

$$(t-n)^\sigma < t(t-n)^{\sigma-1}\sigma \quad e \quad f(n) + f'(n)(t-n) < f'(n)t.$$

- *Para* $t < -n$, temos que

$$f_n'(t) = f'(-n) + \sigma(t+n)^{\sigma-1}.$$

Da hipóteses (3.5) resulta que

$$\frac{(n+t)^\sigma}{t} < \sigma(n+t)^{\sigma-1} \quad e \quad \frac{f(-n) + f'(-n)(t+n)}{t} < f'(-n).$$

Por outro lado, temos que $nf'(n) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $tf''(t) > 0$ para $t \neq 0$, temos que f' é crescente em $(0, \infty)$. Além disso, como $f'(+\infty) > 0$ e $f'(-\infty) > 0$. Então, para $t > n$ temos

$$\begin{aligned} f_n(t) &= f(n) + f'(n)(t-n) + (t-n)^\sigma \\ &< nf'(n) + f'(n)(t-n) + (t-n)^\sigma \\ &= f'(n)t + (t-n)^\sigma \\ &\leq f'(\infty)t + (t-n)^\sigma \\ &\leq (f'(+\infty)+1)t^\sigma. \end{aligned}$$

De onde

$$f_n(t) \leq (f'(+\infty)+1)|t|^\sigma, \quad \text{para todo } \ t > n.$$

Por argumentos similares, obtemos

$$f_n(t) \geq -(f'(-\infty)+1)|t|^\sigma, \ \text{ para todo } \ t < -n.$$

Portanto, existe $C_2 > 0$ tal que

$$|f_n(t)| \leq C_2(|t|^\sigma + 1), \ \text{ para todo } \ t \in \mathbb{R} \ \text{ e todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Onde $C_2 = max\{C_1, f'(+\infty)+1, f'(-\infty)+1\}$. Sejam

$$F_n(t) = \int_0^t f_n(s)ds,$$

$$g_n(t) = tf_n(t) - 2F_n(t) - af_n(t) + tf_n(a).$$

Usando a convexidade de f_n no intervalo $(0, +\infty)$; vemos que, para $0 < a < t$ temos

$$\begin{aligned} g_n'(t) &= f_n(t) + tf_n'(t) - 2F_n'(t) - af_n'(t) + f_n(a). \\ &= f_n(t) + tf_n'(t) - 2f_n(t) - af_n'(t) + f_n(a). \\ &= (t-a)f_n'(t) + f_n(a) - f_n(t), \\ &> 0. \end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte desigualdade

$$tf_n(t) - 2F_n(t) \geq af_n(t) - tf_n(a).$$

Por outro lado, desde que $f'(0) < \lambda_1$ existe $a_1 > 0$ tal que $f(a_1) = \lambda_1 a_1$. Seja $\varepsilon \in (0, min\{f'(+\infty) - \lambda_2, f'(-\infty) - \lambda_2\})$. Do fato que $f'(+\infty) > \lambda_2$, existe $b_1 > a_1$ tal que

$$f(t) > (f'(+\infty) - \varepsilon)t \ \text{ para todo } \ t > b_1. \tag{4.15}$$

Para $t > b_1$, de (4.15), da convexidade e da definição da f_n, temos que

$$\begin{aligned} tf_n(t) - 2F_n(t) &\geq a_1 f_n(t) - tf_n(a_1), \\ &\geq a_1 f_n(t)\left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{f'(+\infty) - \varepsilon}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Similarmente, existe $a_2 < 0$ e $b_2 < a_2$ tal que se $t < b_2$ então

$$tf_n(t) - 2F_n(t) \geq a_2 f_n(t)\left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{f'(-\infty) - \varepsilon}\right)\right]. \tag{4.17}$$

Combinando (4.16) e (4.17) vemos que

$$tf_n(t) - 2F_n(t) \geq A|f_n(t)| + D, \tag{4.18}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= min\Big\{a_1, |a_2|\Big\}. \\ D &= min\Big\{min\{tf(t) - 2F(t) - A|f(t)|; t \in [b_2, b_1]\}, \\ &\quad min\{tf_n(t) - 2F_n(t) - A|f_n(t)|, n \in [1, b_1 - b_2]\}\Big\}. \end{aligned}$$

Para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$J_n(u) = \int_\Omega \Big\{\frac{1}{2}| \bigtriangledown u|^2 - F_n(u)\Big\}dx,$$

é o Funcional de Energia associado à equação

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \triangle u + f_n(u) & = & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.19}$$

Pelo Teorema 3.1, esta equação tem uma solução nodal w_n, que muda de sinal exatamente uma vez. Onde,

$$J_n(w_n) = min\Big\{J_n(u); u \in H_0^1(\Omega), < \bigtriangledown J_n(u_\pm), u_\pm >= 0, u_- \neq 0, u_+ \neq 0\Big\}.$$

Agora veremos que, para n suficientemente grande, w_n é uma solução para o problema assintoticamente linear (4.11). Seja $\phi \in C^1(\bar{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega)$ uma autofunção do $-\triangle$ com condição de fronteira Zero de Dirichlet correspondente ao segundo autovalor λ_2. Pelo **Princípio de Courant-Weinstein ([16], pag 452)** ou, artigo, **H. Herrmann, Theorie der eigenwerte und eigenfunktionen 1932**, ϕ muda de sinal exatamente uma vez. Então, pelo Lema 3.2, temos que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\gamma(\beta\phi_-) = 0$ e $\gamma(\alpha\phi_+) = 0$. Agora, seja $\bar{m} \geq \|\phi\|_\infty(\alpha + \beta)$ um inteiro positivo e do fato que: $\alpha\phi_+ \leq \alpha\|\phi\|_\infty$; $\beta\phi_- \leq \beta\|\phi\|_\infty$ se obtêm

$$\alpha\phi_+ \leq (\alpha + \beta)\|\phi\|_\infty \leq \bar{m} \ ; \ \beta\phi_- \leq (\alpha + \beta)\|\phi\|_\infty \leq \bar{m}.$$

Então, para todo $n \geq \bar{m}$ obtemos $f_n(\alpha\phi_+) = f(\alpha\phi_+)$ e $f_n(\beta\phi_-) = f(\beta\phi_-)$. Além disso, como

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx, \\ J_n(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx - \int_\Omega F_n(u)dx, \\ < \bigtriangledown J(u), v > &= \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown v - \int_\Omega f(u)v dx, \\ < \bigtriangledown J_n(u), v > &= \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown v - \int_\Omega f_n(u)v dx. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \bigtriangledown J(\alpha\phi_+) &= \bigtriangledown J_n(\alpha\phi_+), \\ \bigtriangledown J(\beta\phi_-) &= \bigtriangledown J_n(\beta\phi_-). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} J_n(w_n) &\leq J_n(\alpha\phi_+ + \beta\phi_-) \\ &= J(\alpha\phi_+ + \beta\phi_-). \end{aligned}$$

Portanto

$$J_n(w_n) \leq M = max\Big\{J_1(w_1), ..., J_{\bar{m}-1}(w_{\bar{m}-1}), J(\alpha\phi_+ + \beta\phi_-)\Big\}. \tag{4.21}$$

Provaremos a existência de um inteiro positivo K tal que

$$\|w_n\|_\infty \leq n \text{ para todo } n > K. \tag{4.22}$$

Isto vai estabelecer que, para todo $n > K$, w_n seja uma solução para (4.11) que muda de sinal exatamente uma vez, dado que

$$\|w_n\|_\infty \leq n, \text{ implica que } -\triangle w_n = f_n(w_n) = f(w_n).$$

De (4.18) e (4.21) temos

$$\begin{aligned} M &\geq J_n(w_n) \\ &= \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\|\bigtriangledown w_n\|^2 - F_n(w_n)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(w_n f_n(w_n) - 2F_n(w_n)\Big) \\ &\geq \frac{D}{2}|\Omega| + \frac{A}{2}\int_\Omega |f_n(w_n)|. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Seja $v = \frac{2N}{N-2}$. Pelo Teorema da Imersão de Sobolev existe um numero real $C = C(\Omega)$ tal que

$$\left(\int_\Omega |u|^v\right)^{\frac{2}{v}} \leq C\int_\Omega \|\bigtriangledown u\|^2; \ \ para \ \ todo \ \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.24}$$

Por simplicidade de notação vamos escrever $w = w_n$. Multiplicado (4.19) por $|w|^{N-1}w$ e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
-\triangle w &= f_n(w).\\
\int_\Omega |w|^{N-1} w f_n(w) &= N\int_\Omega |w|^{N-1}\|\bigtriangledown w\|^2\\
&= N\int_\Omega \||w|^{\frac{N-1}{2}}\bigtriangledown w\|^2\\
&= \frac{4N}{(N+1)^2}\int_\Omega \|\bigtriangledown |w|^{\frac{N+1}{2}}\|^2 \qquad (4.25)\\
&\geq \frac{4N}{C(\Omega)(N+1)^2}\left(\int_\Omega |w|^{\frac{(N+1)v}{2}}\right)^{\frac{2}{v}}\\
&= M_2\left(\int_\Omega |w|^{\frac{(N+1)v}{2}}\right)^{\frac{2}{v}}.
\end{aligned}$$

Pela definição de v e σ temos que

$$s = \frac{v(N+1)-2N-2\sigma}{v(N+1)-2\sigma} \in (0,1) \ \ e \ \ \sigma(1-s) < 1.$$

Agora sejam

$$p = \frac{1}{s} \ \ ; \ \ q = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-s}.$$

Isto é, p e q são conjugados. Pela desigualdade de Holder e (4.14), (4.23) e (4.25) temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |w|^{\frac{(N+1)v}{2}}\right)^{\frac{2}{v}} &\leq \frac{1}{M_2}\int_\Omega |f_n(w)|^s|w|^N|f_n(w)|^{1-s}\\
&\leq \frac{1}{M_2}\left(\int_\Omega |f_n(w)|^{sp}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega \left(|w|^N|f_n(w)|^{1-s}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \frac{1}{M_2}\left(\int_\Omega |f_n(w)|\right)^{\frac{1}{p}}\left(C_2\int_\Omega \left(|w|^{Nq}(|w|^\sigma+1\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \frac{1}{M_2}\left(\int_\Omega |f_n(w)|\right)^{\frac{1}{p}}\left(C_2\int_\Omega (|w|^{Nq+\sigma}+|w|^{Nq}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq M_3\left(\int_\Omega (|w|^{Nq+\sigma}+\int_\Omega (|w|^{Nq}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq M_3\left[\int_\Omega |w|^{Nq+\sigma}+\int_\Omega \left(|w|^{Nq+\sigma}\right)^{\frac{Nq}{Nq+\sigma}}|\Omega|^r\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\leq M_4\left(\int_\Omega |w|^{Nq+\sigma}\right)^{1-s}+M_5\left(\int_\Omega \left(|w|\right)^{\frac{(N+1)v}{2}}\right)^{\frac{(1-s)Nq}{Nq+\sigma}}.
\end{aligned}$$

De onde temos a seguente desigualdade

$$\left(\int_\Omega |w|^{\frac{(N+1)v}{2}}\right)^{\frac{2}{v(N+1)}} \leq M_6.$$

Com M_6 independente de n, desde que

$$\frac{2}{v} > 1 - s > \frac{(1-s)Nq}{Nq + \sigma}.$$

Portanto de (4.14) temos que $\left\{f_n(w_n) : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ é limitado no espaço $L^{\frac{(N+1)v}{2\sigma}}(\Omega)$. Assim, **por estimativas a priori para problemas elípticos, veja ([4], página 302, Teorema 13.4)**, temos que $\left\{w_n : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ é limitado no espaço de Sobolev $W^{2,\frac{(N+1)v}{2\sigma}}(\Omega)$. Pela escolha da σ temos que $\frac{(N+1)v}{2\sigma} > \frac{N}{2}$ e pelo **Teorema da Imersão de Sobolev, veja ([6], página 283, Corolário 9.13)**, segue-se que $|w_n(x)| \leq n$ para todo $x \in \Omega$ e n suficientemente grande. Assim, pela definição da f_n, a função w_n é uma solução de (4.11). Isso mostra que (4.11) tem uma solução que muda de sinal exatamente uma vez.

Finalmente, se w_n é um ponto crítico isolado de J, então também é um ponto crítico isolado de J_n. Assim, pelo Teorema 4.4, seu índice de Leray-Schauder é $+1$. $\square$

Observação 4.6. Ressaltamos que o Teorema 4.5 inclui o caso em que (4.11) possui não-linearidade saltante. Por sua vez, o Teorema 4.5 nos permite estender os resultados de [9] provando o seguinte Teorema.

Teorema 4.7. *Se $tf''(t) > 0$ para todo $t \neq 0$ e $f'(-\infty), f'(+\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, para $k \geq 2$, então o problema (4.11) satisfazendo (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) tem pelo menos cinco soluções, duas das quais mudam de sinal. Alem disso, uma dessas duas soluções de mudança de sinal muda exatamente uma vez.*

Demonstração. Por hipótese temos que $f'(-\infty), f'(+\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ e por [9] nossas suposições implicam que J tem pelo menos cinco pontos críticos. Além disso, existe $r_1 > 0$ tal que se $\bigtriangledown J(u) = 0$ então

$$d(\bigtriangledown J, B(0, r_1), 0) = (-1)^k. \tag{4.26}$$

Como $f'(0) < \lambda_1$ então o funcional J tem um mínimo local em zero o qual é um ponto crítico isolado de J. Seja $r_2 \in (0, r_1)$ tal que zero é o único ponto crítico de J em $B(0, r_2)$. Então, temos que

$$d(\bigtriangledown J, B(0, r_2), 0) = 1. \tag{4.27}$$

Para $k > 1$ e $f'(0) < \lambda_1$. Se P é uma região que contem todas as soluções positivas do (4.11) e nenhum outro ponto crítico de J, temos que

$$d(\bigtriangledown J, P, 0) = -1. \tag{4.28}$$

De forma completamente similar, segue-se que

$$d(\bigtriangledown J, N), 0) = -1, \tag{4.29}$$

onde N é a região que contem todas as soluções negativas de (4.11) e nenhum outro ponto crítico da J. $\square$

Suponhamos que w é a única solução de (4.11) que muda de sinal, pelo Teorema 4.4, nós temos que

$$d(\bigtriangledown J, B(0, r_1) - [B(0, r_2) \cup P \cup N], 0) = 1. \tag{4.30}$$

Assim, pela propriedade de ecxisão do grau de Leray-Schauder, de (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30), segue-se que

$$(-1)^k = d(\bigtriangledown J, B(0, r_1) - [B(0, r_2) \cup P \cup N], 0) + d(\bigtriangledown J, P), 0) + d(\bigtriangledown J, N), 0) + d(\bigtriangledown J, B(0, r_2), 0).$$

De onde concluímos a prova do Teorema.

Observação 4.8. O Teorema 4.7 é nítido no sentido de que não mais do que duas soluções de mudança de sinal precisam existir. Na verdade temos que: Se $k = 2$ no Teorema 4.7, então (4.11) tem precisamente duas soluções que mudam de sinal exatamente uma vez.

APÊNDICE A – PRELIMINARES

Neste Capítulo, iremos apresentar as definições e os resultados que foram utilizados ao longo deste trabalho.

CÁLCULO DIFERENCIAL EM ESPAÇOS DE BANACH

Definição A.1. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços de Banach, $A \subseteq \mathbb{E}$ aberto, $f : A \longrightarrow \mathbb{F}, u_0 \in A$. f é diferenciável em u_0 se existe uma aplicação linear e continua $L(u_0, .) = L \in \pounds(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ e uma aplicação $r(a, b) = r_a(h) = r(h)$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + r(h), \text{ onde } \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Observação A.2. $L(u_0, .)$ é chamado a diferencial de Fréchet da função f no ponto u_0 com incremento h; generalmente $L(u_0, .)$ é chamado como a aproximação linear de f na vizinhança de u_0. A função $r(u_0, h) = r(h)$ é chamado resto da diferencial. A aplicação linear e continua $L(u_0, .) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ é chamada a derivada de Fréchet de f em u_0 e é denotada por $f'(u_0)$.

Observação A.3. Na definição de diferenciabilidade, não joga papel a norma usada.

Definição A.4. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ dois espaço de Banach, $A \subseteq \mathbb{E}$ aberto, $u_0 \in A, f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ e seja $\upsilon \in \mathbb{E}$. Se existe o limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(u_0 + t\upsilon) - f(u_0)}{t},$$

dizemos que f possui derivada direcional na direção υ no ponto u_0.

Definição A.5. A aplicação $f : A \subseteq \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, A aberto, se diz Gateaux diferenciável em $u_0 \in A$, se existe o limite

$$\partial f(u_0, \upsilon) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(u_0 + t\upsilon) - f(u_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \upsilon}(u_0) = \frac{df}{dt}(u_0 + t\upsilon)|_{t=0}.$$

Observação A.6. A derivada de Gateaux pode ser definido de maneira geral em espaços vetoriais topológicos.

Definição A.7. seja ($\mathbb{E}$, <.,.>) um espaço de Hilbert, A $\subseteq \mathbb{E}$ aberto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável, se define como gradiente de f, denotado como grad $f = \bigtriangledown f$ à aplicação $\bigtriangledown f : A \longrightarrow \mathbb{E}$, caracterizado por:

$$< \bigtriangledown f(x), z >= f'(x)(z) = df(x)(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{E}.$$

Observação A.8. A definição $A.7$ é possível devido ao Teorema da representação de Riesz.

Definição A.9. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ dois espaço de Banach, $A \subseteq \mathbb{E}$, $V \subseteq \mathbb{F}$ abertos, $f : A \longrightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^k, $k \geq 1$, se

i) f é bijeção de A sobre V,

ii) f é de classe C^k,

iii) f^{-1} é de classe C^k.

Teorema A.10. *Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ dois espaços de Banach, $A \subseteq \mathbb{E}$, $V \subseteq \mathbb{F}$ abertos, $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ uma difeomorfismo de classe C^k, $k \geq 1$, de A sobre V. Então para todo $x \in A$, temos que*

$$(f'(x))^{-1} = (f^{-1})'(f(x)).$$

Demonstração. Veja [[8], página 331].

□

Definição A.11. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ dois espaços de Banach, $A \subseteq \mathbb{E}$ aberto, $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$, $u_0 \in A, f$ é um difeomorfismo local no ponto u_0 de classe C^k. Se existe V aberto de $\mathbb{E}$, $u_0 \in V \subseteq A$ tal que $f : V \longrightarrow f(V)$ é um difeomorfismo de classe C^k de V sobre o aberto $f(V)$ de $\mathbb{F}$. Se para todo $u_0 \in A, f$ é um difeomorfismo local de classe C^k em u_0 então f é um difeomorfismo local em A de classe C^k.

Teorema A.12. (***Teorema da função inversa***) *Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ duas espaços de Banach, $A \subseteq \mathbb{E}$ aberto, $u_0 \in A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$, tal que $f'(u_0) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ é homeomorfismo linear. Então existe V aberto, $u_0 \in V \subseteq A$ tal que $f : V \longrightarrow f(V)$ é um difeomorfismo de classe C^k para $y = f(x) \in f(V)$, $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$. Logo $f(V)$ é aberto em $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Veja [[8], página 332].

□

Teorema A.13. (***Teorema da função implícita***) *Sejam $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ espaços de Banach, $U \subseteq \mathbb{E}$, $V \subseteq \mathbb{F}$ abertos, $f :\ U\times V \longrightarrow \mathbb{G}$ uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$, $U_0 \times W_0 \in U \times V$, tal que $\partial_2 f(a,b) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}$ é um homeomorfismo linear. Então existem subconjuntos abertos $U_0 \subseteq U$, $a \in U_0$, $W_0 \subseteq \mathbb{G}$, $f(a,b) \in W_0$ e uma aplicação $g : U_0 \times W_0 \longrightarrow V$ de classe C^k tal que para todo $(x,w) \in U_0 \times W_0$, se tem $f(x, g(x,w)) = w$. Podem escolher-se V_0, W_0 de tal maneira que g seja único.*

Demonstração. Veja [[8], página 339].

□

Teorema A.14. *Seja $\mathbb{E}$ um espaço vectorial normado, $A \subseteq \mathbb{E}$ aberto, $u_0 \in A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A. Então uma condição necessária para que o ponto u_0 seja um máximo local ou mínimo local para f é que $f'(u_0) = 0$.*

Demonstração. Veja [[8], página 370].

□

Definição A.15. Seja $\mathbb{E}$ um espaço vectorial normado, $A \subseteq \mathbb{E}$ aberto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A. Se $u_0 \in A$ e $f'(u_0) = 0$, então u_0 é chamada ponto crítico da função f, neste caso, o valor $f(u_0)$ é chamado valor crítico de f em u_0.

Teorema A.16. (***Teorema da representação de Riesz - Frechet***) *Se $(H, < .,. >)$ é um espaço de Hilbert e $f \in H^*$. Então existe um único $x_f \in H$ que cumpre:*

i) $f(x) = < x, x_f >$, *para todo* $x \in H$,

ii) $\|f\| = \|x_f\|$.

Demonstração. Veja [[6], página 192].

□

Teorema A.17. (***Teorema dos Multiplicadores de Lagrange***) *Sejam $\mathbb{E}$ um espaço de Banach, J, $F : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ e*

$$M = \Big\{u \in \mathbb{E}/F(u) = 0\Big\} = F^{-1}(\{0\}).$$

Com $\bigtriangledown F(u) \neq 0$, para todo $u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} F(u),$$

então existe $\beta \in \mathbb{R}$ verificando

$$\bigtriangledown J(u_0) = \beta \bigtriangledown F(u_0).$$

Demonstração. Veja [[30], página 55].

□

Teorema A.18. (***Teorema de Alaugt-Bourbaki***) *Seja $(V, \|.\|)$ uma espaço de Banach. V é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada em V tem uma subsequencia que converge fracamente em V.*

Demonstração. Veja [[6], página 66].

□

Observação A.19. A reflexividade do espaço esta caracterizada pela compacidade da bola unitária.

Definição A.20. Seja $(\mathbb{E}, \|.\|)$ um espaço vetorial normado; $a, b \in \mathbb{E}$. Chamaremos segmento fechado de extremos a e b ao conjunto

$$[a,b] = \Big\{x \in \mathbb{E};\ \ x = a + t(b-a),\ \ t \in [0,1]\Big\}.$$

E chamaremos segmento aberto de extremos a e b ao conjunto.

$$(a,b) = \Big\{x \in \mathbb{E};\ \ x = a + t(b-a),\ \ t \in (0,1)\Big\}.$$

Teorema A.21. *Seja* $(\mathbb{E}, \|.\|)$ *um espaço vetorial normado,* $A \subseteq \mathbb{E}$ *aberto,* $a, b \in A$, $a \neq b$, $[a,b] \subseteq A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma aplicação diferenciável em* A*, então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demonstração. Consideremos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = a + t(b-a), \end{aligned}$$

então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \psi(t) = (f \circ \phi)(t) = f(\varphi(t)), \end{aligned}$$

é continua no intervalo fechado [0,1] e diferenciável no intervalo aberto (0,1). Logo pela regra da cadeia, temos que

$$\psi'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

agora pelo Teorema do valor meio para funções reais de variável real, aplicado à função φ, seria

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)(1-0) = \psi'(\theta), \text{ para algum } \theta \in (0,1),$$

é dizer,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\varphi(\theta)) \cdot \varphi'(\theta), \\ &= f'(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a). \end{aligned}$$

Tomando $c = a + \theta(b-a) \in (a,b)$, acarreta a prova do Teorema.

$\square$

APÊNDICE B – RESULTADOS DA TEORIA DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Definição B.1. Seja Ω um conjunto mensurável. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, como o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ \text{mensurável e } \int_\Omega |\, u \,|^p \, dx < \infty \Big\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p = \Big(\int_\Omega |\, u \,|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação B.2. $f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow |\, f \,|^p \in L^1(\Omega)$.

Definição B.3. Seja Ω um subconjunto mensurável. Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como o espaço das (classes de equivalência de) funções reais u essencialmente limitadas, isto é, existe $C = C(u) > 0$ tal que $|\, u(x) \,| \leq C$, q.t.p. em Ω.

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{mensurável e essencialmente limitada em } \ \Omega \Big\},$$

dotado de norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_\infty = \inf \Big\{ C > 0 : |\, u(x) \,| \leq C, \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega \Big\}.$$

Teorema B.4. (***Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue***) *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis sobre Ω, satisfazendo*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω,

ii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|\, f_n \,| \leq g$ *q.t.p* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_1 \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Demonstração. Veja [[6], página 84]

□

Teorema B.5. (***Desigualdade de Holder***) *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *com* p, $q \in [1, +\infty]$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$. *Então* f, $g \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |\, fg \,| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Veja[[6], página 92]

□

Lema B.6. (***Brézis-Lieb, Primeira Versão***) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *aberto e seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Se*

i) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

ii) $u_n \to u$ *q.t.p em* Ω.

Então, $u_n \to u$ *em* $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Veja [[6], página 123]

□

Teorema B.7. *Seja* (u_n) *uma sequência em* L^p *e* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$. *Então, existe uma subsequência* (u_{k_n}) *de* (u_n) *e existe* $h \in L^p(\Omega)$ *tais que*

i) $u_{k_n} \to u$, *q.t.p em* Ω,

ii) $| u_{k_n} | \leq h$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e q.t.p em* Ω.

Demonstração. Veja [[6], página 94]

□

Teorema B.8. *Seja* $\mathbb{E}$ *um espaço vetorial normado e* $(x_n) \subset \mathbb{E}$ *uma sequência, então valem as seguintes afirmações:*

i) Se (x_n) *é fracamente convergente, então existe um único* $x \in \mathbb{E}$, *tal que* $x_n \rightharpoonup x$;

ii) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in \mathbb{E}^*$;

iii) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$;

iv) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (x_n)$ *é limitado e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;

v) $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *no espaço* $\mathbb{E}^*$ (*isto* é, $\|f_n - f\|_{\mathbb{E}^*} \to 0$) $\Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$ (*isto* é, $< f_n, x_n > \to < f, x >$).

Demonstração. Veja [[6], página 63]

□

Definição B.9. Seja $X \neq \emptyset$ e denotamos por $P(X)$ o conjunto potência de X. Dizemos que $\tau \subseteq P(X)$ é uma topologia sob X, se e somente se,

i) $\emptyset$, X;

ii) $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$;

iii) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

Definição B.10. Dizemos que (X,τ) é um espaço topológico se, e somente se, $X \neq \emptyset$ e $\tau \subseteq P(X)$ é um topologia sobre X.

Observação B.11. Se $X \neq \emptyset$ e τ_1,$\tau_2 \subseteq P(X)$, com $\tau_1 \neq \tau_2$ são topologias sobre X, então $(X,\tau_1) \neq (X,\tau_2)$.

Seja $\mathbb{R}$, com sua topologia usual, dado $F \in \mathbb{E}^*$, defina

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \varphi_f(x) = f(x), \end{aligned}$$

e consideremos a família

$$\left\{\varphi_f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}\right\}_{F\in\mathbb{E}^*}$$

Definição B.12. A topologia fraca sobre $\mathbb{E}$, denotado por $\tau(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)$ é a topologia gerada por

$$\sum = \left\{\varphi_f^{-1}(V) : V \subseteq \mathbb{R} \;\; aberto\right\}_{F\in\mathbb{E}^*}.$$

Observação B.13. $\tau(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)$ é a topologia mais fraca, isto é, o conjunto com menor número de abertos, que torna contínuos a todos os funcionais lineares e limitados. Se denotamos por τ à topologia sobre $\mathbb{E}$, gerada pela norma, então temos que $\tau(\mathbb{E},\mathbb{E}^*) \subseteq \tau$

APÊNDICE C – RESULTADO DA TEORIA CLÁSSICA DE EDP E DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição C.1. Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ é chamado um multi-índice se, e somente se, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_0^+$, isto é, são números inteiros não negativos.

Definição C.2. O ordem do multi-índice α é denotado por $\mid \alpha \mid$ e definido como:

$$\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Definição C.3. O fatorial de um multi-índice α é denotado por $\alpha!$ e definido como:

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

Logo o combinatório de α com relação a β é denotado por $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e definido como:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

além disso, $\alpha \leq \beta$ se, e somente se , $\alpha_i \leq \beta_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$.

Definição C.4. Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ e α um multi-índice, então definimos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n},$$

o operador derivação.

Se u, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções numéricas com um número suficiente de derivadas, então temos:

i) $D^\alpha u(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x);$

ii) $D^\alpha(uv) = \displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v.$ (Formula de Leibniz)

Observação C.5. $D^\alpha u(x)$ denota uma derivada parcial iterada de u de ordem $\mid \alpha \mid$, isto é , derivamos α_i vezes em cada uma das variáveis x_i com $i = 1, 2, \cdots, n$.

Exemplo C.6. Seja $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\alpha = (1, 0, 2)$ logo $\mid \alpha \mid = 3$, então

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_1^1 \partial x_2^0 \partial x_3^2} = \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_1^1 \partial x_3^2}.$$

Definição C.7. Seja k um inteiro não negativo,

$$D^k u = \Big\{ D^\alpha u : \mid \alpha \mid = k \Big\},$$

é o conjunto de todos as derivadas parciais de ordem k. Considerando alguma ordem para as derivadas parciais, podemos considerar $D^k u(x)$ como um vetor.

Exemplo C.8. Seja $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, para $k = 2$ temos

$$D^2u(x) = (D^\alpha u(x) : \mid \alpha \mid = 2)\,,$$

onde $\alpha = (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$. Logo

$$D^2u(x) = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2}\right),$$

é o vetor de todas as derivadas parciais de $u(x)$ de ordem 2. Agora se $u = \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $k = 2$, então,

$$D^2u(x) = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right).$$

Definição C.9. Dizemos que um subconjunto A de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ esta compactamente contido em Ω, denotado $A \subset\subset \Omega$, se $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ e $\bar{A}$ é compacto em $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Definição C.10. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. O suporte da função f, denotado por $suppf$, é definido como:

$$suppf = \overline{\Big\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\Big\} \bigcap \Omega}.$$

Então

$$\begin{aligned} x \in suppf \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \Omega \quad e \quad \exists (x_n) \subset \Omega \quad com \quad f(x_n) \neq 0 \quad \text{tal que} \quad x_n \to x. \\ z \in \Omega \backslash suppf \quad &\Leftrightarrow \quad z \in int\Big\{x \in \Omega : f(x) = 0\Big\}, \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 : y \in B_\epsilon(z). \end{aligned}$$

Definição C.11. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ aberto. Denotemos e definimos os seguentes conjuntos:

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) \quad &= \quad \Big\{f : \Omega \to \mathbb{R};\ D^\alpha f \ \text{é}\ continua\ em\ \Omega,\ para\ todo\ \mid \alpha \mid \leq k\Big\}. \\ C(\bar{\Omega}) \quad &= \quad \Big\{f : \Omega \to \mathbb{R};\ u\ \text{é}\ continua\ e\ admita\ uma\ extens\tilde{a}o\ cont\acute{i}nua\ em\ \bar{\Omega}\Big\}. \\ C_0(\Omega) \quad &= \quad \Big\{f \in C(\Omega);\ suppf\ \text{é}\ compacta\ contido\ em\ \Omega\Big\}. \\ C_0^k(\Omega) \quad &= \quad \Big\{f \in C^k(\Omega);\ suppf\ \text{é}\ compacta\ contido\ em\ \Omega\Big\}. \\ C_0^\infty(\Omega) \quad &= \quad \Big\{f \in C^\infty(\Omega);\ suppf\ \text{é}\ compacta\ contido\ em\ \Omega\Big\}. \\ C_0^k(\Omega) \quad &= \quad C(\Omega) = \Big\{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f\ \text{é}\ continua\ em\ \Omega\Big\}. \\ C^\infty(\Omega) \quad &= \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega). \end{aligned}$$

Observação C.12. Dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $D^\alpha\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, para todo multi-índice α, o fato segue-se da propriedade $SuppD^\alpha\varphi \subseteq Supp\varphi$, para todo multi-índice α.

Definição C.13. O espaço das funções localmente integráveis é denotado e definido como:

$$L^p_{Loc}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to \mathbb{R} \quad : \quad u\ seja\ mensur\acute{a}vel\ e\ \displaystyle\int_K \mid u(x) \mid^p dx < \infty, \\ para\ todo\ K \subset \Omega\ compacto \end{array} \right\}.$$

Observação C.14. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aberto não limitado, então $L^p(\Omega) \subsetneq L^p_{Loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Definição C.15. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto, α um multi-índice e f, $g \in L^p_{Loc}(\Omega)$. Dizemos que g é a α-ésimo derivada fraca de f em Ω, denotada por $D^\alpha f = g$, se

$$\int_\Omega f(x).D^\alpha \Phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x).\Phi dx, \;\; \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição C.16. Seja k um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, como o espaço das funções $v \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada fraca de v, até a ordem k, é uma função do espaço $L^p(\Omega)$. Isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ccl} v \in L^p(\Omega) & : & D^\alpha v \in L^p(\Omega), \;\; para \;\; todo \;\; multi-índice \\ & & \alpha \;\; com \;\; \mid \alpha \mid \leq k \end{array} \right\}.$$

Definição C.17. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos sua norma como sendo

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \mid D^\alpha u \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} ess \; sup_\Omega \mid D^\alpha u \mid, \;\; p = \infty. \end{array} \right.$$

$$essupf = inf\Big\{ C \in \mathbb{R} / \;\; \nu(f > r) = 0 \Big\},$$

onde ν denota a medida usual de $\mathbb{R}^N$.

Observação C.18. Nota-se que para cada $1 \leq p \leq \infty$, temos

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \tag{C.1}$$

Além disso, $W^{k_1,p} \subseteq W^{k_2,p}$ se $k_2 \leq k_1$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, temos que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma $\|.\|_{W^{k,p}} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \mid D^\alpha v \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}, \;\; se \;\; 1 \leq P < \infty \tag{C.2}$$

Uma norma equivalente a $(C.2)$ para $W^{k,p}(\Omega)$ é

$$\|v\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p}.$$

Em particular, para $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, para cada $k \geq 0$, munido do produto interno.

$$< u, v >_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \;\; \forall u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Usualmente denota-se H^k o espaço $W^{k,2}(\Omega)$. Assim, de (C.1) temos que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definição C.19. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{K,p}(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado por $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, se

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}} = 0.$$

Definição C.20. Definimos o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Analogamente, denotaremos por $H_0^k(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$

Observação C.21. $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\varphi_\epsilon \in D(\Omega) : \|u - \varphi_\epsilon\|_{m,p} < \epsilon$.

Observação C.22. Vamos interpretar $W_0^{k,p}(\Omega)$ como aquelas funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que $D^\alpha u = 0$ sobre $\partial\Omega$ para todo $\mid \alpha \mid \leq k-1$, veja [[4], pag. 229].

Notemos que, para cada k não negativo, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$. Também note-se que, para $p = 2$, $H_0^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a noma induzida de $H^k(\Omega)$. Uma norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente à norma dada em $(C.2)$ pode ser definida por

$$\|u\|_{W_0^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \mid D^\alpha u \mid^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

como $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ são espaço de Hilbert então são espaços reflexivos.

Definição C.23. (Imersão) Sejam E e V duas espaços normados. Dizemos que E está imerso no espaço V, e denotemos por $E \hookrightarrow V$, se satisfaz as seguintes condições

i) E é um subespaço de V;

ii) O operador identidade $I : E \to V$ definido por $I_x = x$, para todo $x \in E$, é continuo, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_V = \|I(x)\|_V \leq C\|x\|_E,\ \ \forall x \in E.$$

Lembremos que se E e V são espaços normados, dizemos que um operador linear $T : E \to V$ é compacto quando T é continuo e T leva conjunto limitados em conjunto relativamente compactos na topologia forte de V, isto é, se $A \subseteq E$ é limitado então $\overline{T(A)} \subseteq V$ é compacto.

Observação C.24. T é compacto se, e somente se, qualquer que seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma subsequência convergente.

Observação C.25. Se $E \hookrightarrow V$ e o operador identidade $I : E \to V$ é compacto, então dizemos que a imersão de E em V é compacto e a denotamos por $E \hookrightarrow^c V$

Teorema C.26. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto de classe C^1 com fronteira limitada e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são continuas:*

i) Se $1 \leq p < N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$; onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

ii) Se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, +\infty)$.

iii) Se $p > N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Veja [[6], página 284].

□

Teorema C.27. (***Rellich-Kondrachov***) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $N \leq 2$. Então as seguintes imersões são compactas*

i) Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega)$; $\forall q \in [1, p^*]$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

ii) Se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$.

iii) Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c C(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Veja [[6], página 285].

□

Observação C.28. Se $2 = p < N$. Pelo Teorema (C.26), temos que $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, 2^*)$ com $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Analogamente, se $p = 2 = N$, pelo Teorema (C.26), temos que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

Teorema C.29. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Então*

i) Se $N > 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq 2^*$; a imersão é compacta para $1 \leq q < 2^*$.

ii) Se $N = 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.

iii) Se $N < 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\infty}(\Omega)$, onde $\alpha = 1 - \dfrac{N}{2}$.

Demonstração. Veja [[6], página].

□

Observação C.30. Para $q = 2$, $N > 2$ temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow^c L^2(\Omega)$

Teorema C.31. (***Sobolev, Galiardo, Ninenberg***) *Seja $1 \leq p < N$, então $W^{1,p} \subset L^{P^*}(\mathbb{R}^N)$ onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$ e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que*

$$| u |_{p^*} \leq C \mid \bigtriangledown u |_p, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Veja [[6], página 278].

□

Teorema C.32. (***Desigualdade de Poincaré***) *Seja Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ e $p \in [1, \infty)$. Então, existe uma constante $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_p \leq C\| \bigtriangledown u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja [[6], página 290]. □

Teorema C.33. *Seja Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se*

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega \mid \bigtriangledown u \mid^2$$

Demonstração. Veja [[6], página 168]. □

Teorema C.34. (***Lema de Deformação***) *Seja φ uma funcional de classe $C^1(X)$, X uma variedade, sejam B e C duas subconjuntos fechados e disjuntos de X. Suponha que C é compacto e que $\|d\varphi(x)\| > 2\epsilon > 0$ para todo $x \in C$. Então, para algum $K > 1$, existe $g : X \to \mathbb{R}$ funcional continuo e positivo, existe $\alpha \in ([0, 1] \times X, X)$ deformação, tal que para algum $t_0 > 0$ se cumprem as seguintes afirmações, para todo $t \in [0, t_0]$*

i) $\alpha(t, x) = x$ *para todo* $x \in B$.

ii) $\rho(\alpha(t, x), x) \leq Kt$, *para todo* $x \in X$.

iii) $\varphi(\alpha(t, x)) - \varphi(x) \leq -\epsilon g(x)t$ *para todo* $x \in X$.

iv) $g(x) = 1$, *para todo* $x \in C$.

Demonstração. Veja [[26], página 55]. □

Teorema C.35. (***Principio do Máximo Forte***) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto conexo. Seja $u \in C^2(\Omega)$. Então,*

i) Se $\triangle u \geq 0$ em Ω e u atinge o seu máximo no interior de Ω, então u é constante.

ii) Se $\triangle u \leq 0$ em Ω e u atinge o seu mínimo no interior de Ω, então u é constante.

Demonstração. Veja [[5], página 30].

□

APÊNDICE D – O ESPECTRO DO LAPLACIANO

Definição D.1. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema de autovalor do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

$$(PD) = \begin{cases} \triangle u + f(u) & = & 0 & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown v dx = \lambda \int_\Omega u.v dx, \quad para \quad todo \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Observação D.2. O problema é tradicionalmente escrito nesta forma, com o sinal negativo multiplicando o Laplaciano, porque assim todos os autovalores são não-negativos, este fato segue-se do princípio do máximo.

Teorema D.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto limitado com fronteira de classe C^∞. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema de autovalor do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet (PD) então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Demonstração. Veja [[5], página 21].

□

Teorema D.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor (PD) possui um número infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfazem*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

tais que $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, e autofunções $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que constitui um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular,

$$| v |_2^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} < v, u_k >_{L^2(\Omega)}^2$$

Demonstração. Veja [[5], página 21].

□

Teorema D.5. *Defina, para $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$, o coeficiente de Rayleigh*

$$R(v) \quad = \quad \frac{\displaystyle\int_\Omega | \bigtriangledown v |^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega v^2 dx}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{<\bigtriangledown u, \bigtriangledown u>_2^2}{<u,u>_2^2} \\
&= \frac{|\bigtriangledown u|_2^2}{|u|_2^2}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \min_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} R(v) = R(w_1). \\
\lambda_m &= \max_{\substack{v\in <W_1,\cdots,W_m>\\ v\neq 0}} R(v) = R(w_m). \\
\lambda_m &= \min_{\substack{v\perp <w_1,\cdots,w_m>\\ v\neq 0}} R(v).
\end{aligned}
$$

Para $m \geq 2$, onde w_i é uma autofunção associado ao autovalor λ_i.

Demonstração. Veja [[31], página 150].

□

Lema D.6. *Seja $w \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $R(w) = \lambda_1$. Então, w é uma autofunção associado a λ_1.*

Demonstração.

$$R: H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \to \mathbb{R},$$

mostremos que o $w \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ é solução fraca para o problema de autovalor do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet associado a λ_1, isto é

$$\int_\Omega \bigtriangledown w. \bigtriangledown v dx = \lambda_1 \int_\Omega w v dx, \;\; para \;\; todo \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Como $R(w) = \lambda_1$ então w é um mínimo para o funcional R e para $v \in H_0^1(\Omega)$ arbitrário, temos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{R(w+tv) - R(w)}{t} = 0, \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{|\bigtriangledown (w+tv)|_2^2}{|w+tv|_2^2} - \dfrac{|\bigtriangledown w|_2^2}{|w|_2^2}}{t}, \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{|\bigtriangledown w|_2^2 + t^2 |\bigtriangledown v|_2^2 + 2t <\bigtriangledown w, \bigtriangledown v>_2}{|w|_2^2 + t^2|v|_2^2 + 2t<w,v>_2} - \dfrac{|\bigtriangledown w|_2^2}{|w|_2^2}}{t},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 |\bigtriangledown v|_2^2 |w|_2^2 + 2t <\bigtriangledown w, \bigtriangledown v>_2 |w|^2 - t^2 |v|^2 |\bigtriangledown w|_2^2 - 2t <w,v>_2 |\bigtriangledown w|_2^2}{(|w|_2^2 + t^2 |v|_2^2 + 2t <w,v>_2)\, |w|_2^2\, t} \\
&= \frac{2 <\bigtriangledown w, \bigtriangledown v>_2 |w|^2 - 2 <w,v>_2 |\bigtriangledown w|_2^2}{|w|_2^2 |w|_2^2} \\
&= 2 <\bigtriangledown w, \bigtriangledown v>_2 - 2 <w,v>_2 \lambda_1,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\begin{aligned} < \bigtriangledown w, \bigtriangledown v >_2 &= \lambda_1 < w, v >_2, \\ \int_\Omega \bigtriangledown w \bigtriangledown v dx &= \lambda_1 \int_\Omega wv dx, \ \ para \ todo \ v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

□

Teorema D.7. *O primeiro autovalor λ_1 do problema de autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet (PD) é simples e a autofunção associada não muda de sinal em Ω.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que a autofunção associada a λ_1 não muda de sinal em Ω. Seja w uma autofunção associada a λ_1, com $w \in H_0^1(\Omega)$, então w^+, $w^- \in H_0^1(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega \bigtriangledown w. \bigtriangledown w^+ dx = \lambda_1 \int_\Omega w w^+ dx$$

$$\int_\Omega \mid \bigtriangledown w^+ \mid^2 dx - \int_\Omega \bigtriangledown w^-. \bigtriangledown w^+ dx = \lambda_1 \int_\Omega (w^+)^2 dx - \lambda_1 \int_\Omega w^- w^+ dx$$

Daí,

$$\int_\Omega \mid \bigtriangledown w^+ \mid^2 = \lambda_1 \int_\Omega (w^+)^2 dx, \tag{D.1}$$

e similarmente, obtemos

$$\int_\Omega \mid \bigtriangledown w^- \mid^2 dx = \lambda_1 \int_\Omega (w^-)^2 dx \tag{D.2}$$

Agora suponhamos que w muda de sinal em Ω, isto é, w^+ e $w^- \neq 0$. Dividendo (D.1) por $\int_\Omega (w^+)^2 dx$ e dividendo (D.2) por $\int_\Omega (w^-)^2 dx$ descure que

$$R(w^+) = R(w^-) = \lambda_1.$$

Por Lema (D.1) temos que w^+ e w^- são autofunções associados a λ_1, isto é,

$$- \bigtriangleup w^+ = \lambda_1 w^+, \ - \bigtriangleup w^- = \lambda_1 w^-.$$

Pelo Principio do Máximo Forte, veja Teorema (C.34) temos que $w^+(x) > 0$ e $w^-(x) > 0$ em Ω, o que não pode acontecer, pois, se $w^+(x) > 0$ em Ω temos $w^- = 0$ e vice-versa. Assim, w tem sinal definido em Ω.

Agora mostremos que λ_1 é simples. Por contradição suponhamos que a $\dim W_1 > 1$, onde W_1 é o sub-espaço associado a λ_1. Então, podemos considerar $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$ autofunção associado a λ_1, com $w \neq \tilde{w}$ tal que

$$\int_\Omega w\tilde{w} dx = 0,$$

o que é uma contradição, pois, w e $\tilde{w}$ ou são positivos ou são negativos.

□

Observação D.8. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto limitado e conexo, então todos os autovalores do problema de autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet, são positivos. De fato, seja Φ uma autofunção associado a λ, então temos

$$\int_\Omega \bigtriangledown\Phi. \bigtriangledown v dx = \lambda \int_\Omega \Phi v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

então

$$\int_\Omega \mid \bigtriangledown\Phi \mid^2 dx = \lambda \int_\Omega \Phi^2 dx,$$

$$0 \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega \mid \bigtriangledown\Phi \mid^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \Phi^2 dx} = \lambda. \tag{D.3}$$

Observamos que se $\lambda = 0$ na equação (D.3), então $\bigtriangledown\Phi = 0$ o que implica que Φ seja uma aplicação constante pois Ω é conexo. Então $\Phi \equiv 0$ o que não pode acontecer. Pois Φ é solução do problema de Dirichlet.

Observação D.9. Autofunções associados a diferentes autovalores são ortogonais. Com efeito, sejam Φ e ψ autofunções associados a diferentes autovalores, λ e α, respectivamente. Então

$$\int_\Omega \Phi \bigtriangleup \psi dx = \int_\Omega \alpha\psi\Phi dx. \tag{D.4}$$

$$\int_\Omega \psi \bigtriangleup \Phi dx = \int_\Omega \lambda\psi\Phi dx. \tag{D.5}$$

Subtraindo (D.4) de (D.5) temos

$$\int_\Omega (\Phi \bigtriangleup \psi - \psi \bigtriangleup \Phi) dx = (\alpha - \lambda) \int_\Omega \Phi\psi dx,$$

pela segunda identidade de Green

$$0 = (\alpha - \lambda) \int_\Omega \Phi\psi dx,$$

logo, segue-se que

$$\int_\Omega \Phi\psi dx = 0.$$

APÊNDICE E – TEORIA DE GRAU

GRAU TOPOLÓGICO DE BROUWER

Nesta seção o objetivo é definir o grau topológico de Brouwer num espaço normado real de dimensão finita quaisquer.

Definição E.1. Seja $\mathbb{V}$ um espaço normado de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Considere Ω um subconjunto de $\mathbb{V}$ e U um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{V}$ com $\bar{U} \subset \Omega$. Se $F : \Omega \to \mathbb{V}$ é continua em $\bar{U}$ e $y \in V$ é tal que, $F(x) \neq y$ para todo $x \in \partial U$, então dizemos que $(F, \bar{U}, y)$ é uma terna admissível para o grau topológico.

Definição E.2. Sejam X e Y subvariedades diferenciáveis de $\mathbb{R}^N$ e $f : X \to Y$ de classe C^1. Dizemos que $x \in X$ é ponto regular de f se $f'(x)$ é sobrejetor. Caso contrario dizemos que x é ponto critico de f.

Além disso, se $y \in Y$ é tal que $f^{-1}(y)$ contém pelo menos um ponto crítico, dizemos que y é valor crítico de f. Se $f^{-1}(y)$ é vazio ou contém apenas pontos regulares, dizemos que y é valor regular de f.

Teorema E.3. (***Teorema de Sard***) *Consideremos X e Y duas subvariedades diferenciáveis de $\mathbb{R}^N$ e $f : X \to Y$ uma função de classe C^k, com $\dim X - \dim Y < k$. Então, o conjunto dos valores regulares de f é denso em Y.*

Demonstração. Veja [[34], página 124].

$\square$

Definição E.4. Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U. Então, definimos o grau de Brauwer de (f, U, y) como

$$deg_B(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \bigcap U} sgn f'(x),$$

onde $sgn f'(x)$ denota o sinal do determinante da matriz associada ao operador linear $f'(x)$ em qualquer base de $\mathbb{V}$. Se $f^{-1}(y) \bigcap U = \Phi$, então definimos $dig_B(f, U, y) = 0$.

Observação E.5. $sgn f'(x)$ não depende da base escolhida para $\mathbb{V}$. O conjunto $f^{-1}(y) \bigcap U$ é finito. Desta forma o grau de Brouwer esta bem definida.

Definição E.6. Sejam f_0, $f_1 : X \to Y$ duas funções continuas quaisquer. Uma homotopia de f_0 a f_1 é uma função continua

$$H : X \times [0, 1] \to Y,$$

tal que para qualquer $x \in X$, $H(x, 0) = f_0(x)$ e $H(x, 1) = f_1(x)$. Em tal caso dizemos que f_0 é homotópica a f_1 e se escreve $f_0 \backsimeq f_1$.

Teorema E.7. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. (*Normalização*) *Sejam* $\mathbb{V}$ *um espaço normado de dimensão* n *sobre* $\mathbb{R}$, $I : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *a projeção canônica e* U *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{V}$, *então*

$$deg_B(I, U, y) = \begin{cases} 1 & , \ se \quad y \in U \\ \\ 0 & , \ se \quad y \notin \overline{U} \end{cases}$$

2. (*Aditividade*) *Seja* (f, U, y) *uma terna admissível. Se* U_1, $U_2 \subseteq U$ *são abertas e disjuntas com* $y \notin f(\bar{U} \backslash (U_1 \bigcup U_2))$, *então*

$$deg_B(f, U, y) = deg_B(f, U_1, y) + deg_B(f, U_2, y).$$

3. (*Invariância homotópica*) *Sejam* $\mathbb{V}$ *um espaço normado de dimensão* n *sobre* $\mathbb{R}$, U *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{V}$, $H : \overline{U} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{V}$ *uma função contínua em* $\overline{U} \times [0, 1]$, *considere* $y \in \mathbb{V}$ *tal que* $H(x, \lambda) \neq y$ *para todo* $x \in \partial U$ *e para todo* $\lambda \in [0, 1]$, *então* $deg_B(H(., t), U, y) = constante$, *para todo* $t \in [0, 1]$, *isto é, o grau topológico de H(.,t) não depende de t.*

4. (*Existência de solução – principio de Kronecker*) *Seja* (f, U, y) *uma terna admissível. Se*

$$deg_B(f, U, g) \neq 0,$$

então $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$, *isto é, existe um ponto* $x_0 \in U$ *tal que* $f(x_0) = y$.

Observação E.8. Essas quatro propriedades do grau topológico podem ser considerados como axiomas da teoria do grau, no sentido que as demais propriedades que saguim, podem ser obtidas a partir destas.

5. (*Propriedade do bordo*) *Sejam* (f, U, y) *e* (g, U, y) *ternas admissíveis. Se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \partial U$, *então*

$$deg_B(f, U, g) = deg_B(g, U, y).$$

6. (*Traslação*) *Seja* (f, U, y) *uma terna admissível, então*

$$deg_B(f, U, g) = deg_B(f - y, U, 0).$$

7. (*Continuidade em relação à função* f) *Seja* (f, U, y) *uma terna admissível. Então, existe* $\epsilon > 0$ *tal que, para toda função continua* $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{V}$ *com*

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|g(x) - f(x)\| < \epsilon,$$

a terna (g, U, y) *e admissível e*

$$deg_B(f, U, y) = deg_B(g, U, y).$$

8. *(função oposta) Se (f, U, y) for uma terna admissível, então $(-f, -U-y)$ será admissível e*
$$deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n deg_B(f, U, y).$$
Aqui, n é a dimensão de espaço $\mathbb{V}$ que contém o domínio de f.

Exemplo E.9. Seja $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida como $h(x) = sen(x)$. Consideremos $\Omega = (0, \frac{5\pi}{2})$ e peguemos $y = \frac{\pi}{4}$. Agora nós vamos determinar o grau de Brower da função h, respeito ao aberto Ω no ponto y.

Afirmação: (h, Ω, y) é uma terna admissível para o grau de Brower. Com efeito, desde que

$$\partial\Omega = \Big\{0, \frac{5\pi}{2}\Big\} \text{ então } h(\partial\Omega) = \Big\{0, 1\Big\} \text{ e}$$

$$S_h = \Big\{x \in (0, \frac{5\pi}{2}); cos(x) = 0\Big\} = \Big\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big\} \text{ então } h(S_f) = \Big\{-1, 1\Big\}.$$

Temos que $y = \frac{\pi}{4}$ é um valor regular e $y \neq h(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$. Assim o grau de Brower, $d\Big(h, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big)$, esta bem definido como

$$d\Big(h, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) = \sum_{\zeta \in h^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\}) \cap U} sgnh'(\zeta) \ \ Onde \ \ h^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\}) = \Big\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\Big\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} d\Big(h, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}\Big) &= sgn(h'(\zeta_1)) + sgn(h'(\zeta_2)) + sgn(h'(\zeta_3)), \\ &= 1 + (-1) + 1, \\ &= 1. \end{aligned}$$

GRAU TOPLÓGICO DE LERAY - SCHAUDER

Nesta seção presenta-se o grau topológico de Leray-Schauder como a extensão do grau topológico de Brouwer a espaços de dimensão infinita.

Definição E.10. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ duas espaços de Banach e $M \subset E$ um conjunto quaisquer. Dizemos que a função $T : M \longrightarrow \mathbb{F}$ é completamente contínua se

i) T é continua;

ii) $\overline{T(A)}$ é um conjunto compacto para todo $A \subset M$ limitado.

Se além das propriedades (i) e (ii), tivermos $\overline{T(M)}$ compacto, dizemos que T é uma função compacta.

Definição E.11. (**Terna admissível para o grau de Leary-Schauder**) Sejam $\mathbb{E}$ um espaço de Banach, $\Omega \subseteq \mathbb{E}$ um subconjunto quaisquer e $U \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto aberto e limitado tal que $\overline{U} \subseteq \Omega$. Considere uma função completamente continua $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$. Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ é definida por $f(x) = x - T(x)$ e $y \in \mathbb{E} \backslash f(\partial U)$, então dizemos que (f, U, y) é uma terna admissível para o grau de Leray - Schauder.

Definição E.12. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ duas espaços de Banach e $M \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto qualquer. Diremos que a função $T : M \longrightarrow \mathbb{F}$ tem dimensão finita se $T(M)$ está contido num subespaço de $\mathbb{F}$ de dimensão finita.

Lema E.13. *Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços de Bannach. Assuma que $M \subseteq \mathbb{E}$ seja um conjunto limitado e considere uma função compacta $T : M \longrightarrow \mathbb{F}$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon : M \longrightarrow \mathbb{F}$ de dimensão finita tal que*

$$\|T(x) - T_\epsilon x\|_{\mathbb{F}} < \epsilon \text{ para todo } x \in M,$$

onde $\|.\|_{\mathbb{F}}$ denota a norma em $\mathbb{F}$.

Demonstração. Veja [[20], página 69].

□

Definição E.14. Sejam M e N dois espaços métricos, $\Omega \subseteq M$ um subconjunto quaisquer e $f : M \longrightarrow N$ uma função. Então, dizemos que f é própria em Ω se $f^{-1}(K) \cap \Omega$ é compacta em M para todo K subconjunto compacto de N.

Definição E.15. (**Grau topológico de Leray-Schauder**) Sejam (f, U, y) uma terna admissível e $\widehat{T} : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{E}$ uma função de dimensão finita tal que, para todo $x \in \overline{U}$.

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < dist(y, f(\partial U)),$$

onde $T = I - f$. Defina $\widehat{f} : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{E}$ por $\widehat{f}(x) = x - \widehat{T}(x)$. Se $S \subseteq \mathbb{E}$ é um espaço vectorial de dimensão finita tal que $y \in S$ e $\widehat{T}(\overline{U}) \subseteq S$, então definamos o grau topológico de Leray-Schauder de (f, U, y) por

$$d(f, U, y) = deg_{LS}(f, U, y) = deg_B(\widehat{f}_{\ \overline{U \cap S}}, U \cap S, y).$$

As propriedades apresentadas a seguir são análogas aquelas para o grau de Brouwer.

Observação E.16. A definição acima é consistente, isto é, independe da escolha do subespaço S. O grau de Leray-Schauder pode ser obtido a partir do grau de Brouwer quando tivermos uma perturbação completamente contínua da identidade, $I - T$, e T seja aproximado por uma função de dimensão finita.

Teorema E.17. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. *(Normalização) Sejam* $\mathbb{E}$ *um espaço de Banach,* $I : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ *a função identidade e* U *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{E}$*, então , para* $y \in U$*,*
$$d(I, U, y) = 1.$$

2. *(Invariância homotópica) Sejam* $\mathbb{E}$ *um espaço de Banach e* $U \subseteq \mathbb{E}$ *um conjunto aberto e limitado. Considere* $y \in \mathbb{E}$ *e uma função compacta* $F : \overline{U} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{E}$ *tais que* $X - F(x, t) \neq y$ *para todo* $x \in \partial U$ *e para todo* $t \in [0, 1]$ *então,*
$$d(I - F(., t), U, y),$$
não depende de t*.*

3. *(Invariância local) Seja* (f, U, y) *uma terna admissível. Então, existe uma vizinhança* V *de* y *tal que, para todo* $z \in V$*,* $d(f, U, z)$ *está definida e*
$$d(f, U, z) = d(f, U, y).$$

4. *(Existência de solução) Seja* (f, U, y) *uma terna admissível. Se*
$$d(f, U, y) \neq 0,$$
então existe $x \in U$ *tal que* $f(x) = y$*.*

5. *(Excisão) Seja* (f, U, y) *uma terna admissível e considere um conjunto compacto* $K \subseteq \overline{U}$ *tal que* $y \notin f(K)$*. Então,* $(f, U \backslash K, y)$ *é admissível e*
$$d(f, U, y) = d(f, U \backslash K, y).$$

6. *(Propriedade do bordo) Sejam* (f, U, y) *e* (g, U, y) *ternas admissíveis. Se* f *e* g *coincidem em* ∂U*, então*
$$d(f, U, y) = d(g, U, y).$$

Teorema E.18. *Seja* M *um espaço de Hilbert real. Seja* X *e* Y *subespaços fechados de* M *tal que* $M = X \oplus Y$*. Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1*. Se existe uma constante* $m > 0$ *e* $\alpha > 1$ *tal que*

$$< \bigtriangledown f(x - y) - \bigtriangledown f(x + y_1), y - y_1 > \ \geq \ m\|y - y_1\|^{\alpha} \text{ para todo } x \in X; \ \ y, y_1 \in Y.$$

Então,

1. *Existe uma função continua $\Psi : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$f(x+\Psi(x)) = \min_{y\in Y} f(x+y).$$

Além disso, $\Psi(x)$ é o único elemento de Y tal que

$$< \triangledown f(x-\Psi(y)), y >= 0 \text{ para todo } y \in Y.$$

2. *A função $f^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^*(x) = f(x+\Psi(x)$ é de classe C^1, e*

$$< \triangledown f^*(x), x_1 >=< \triangledown f(x+\Psi(x)), x_1 > \text{ para todo } x, x_1 \in X.$$

3. *$x \in X$ é ponto critico de f^* se e somente se $x+\Psi(x)$ é ponto crítico de f.*

4. *Se $dimX < \infty$ e P é a projeção de X sobre Y. Se $S \subset X$ e $\Sigma \subset Y$ são regiões abertas limitadas tal que*

$$S = \Big\{x \in X : x+\Psi(x) \in \Sigma\Big\}.$$

Se $\triangledown f^*(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial S$ então

$$d(\triangledown f^*, S, 0) = d(\triangledown f, \Sigma, 0),$$

Onde d denota o grau de Leray-Schauder.

Demonstração. Veja [[9], pagina 1556].

□

Teorema E.19. *Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\triangledown J(u_0) = 0$, e se u_0 é um ponto crítico isolado. Então,*

$$d(\triangledown J, V, 0) = (-1)^k,$$

onde V é uma região que contem u_0 e nenhum outro ponto crítico de J.

Demonstração. Veja [[12], página 3659].

□

Teorema E.20. *Seja U um subconjunto aberto de algum espaço de Hilbert real H. Seja $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Suponhamos que $x_0 \in U$ é um ponto crítico isolado de f onde tem um mínimo local, então*

$$d(\triangledown f, B, 0) = 1,$$

onde B é uma região que contem x_0 e nenhum outro ponto crítico de f.

Demonstração. veja [[3], página 592].

□

APÊNDICE F – PROVA DE RESULTADOS USADOS

Neste seção mostraremos alguns fatos assumidos como verdadeiros, que foram usados.

Lema F.1. *Seja w uma solução que troca de sinal, ou seja, uma solução que assume valores positivas e negativas. Então w^+ e $w^- \in S$.*

Demonstração. Como w é solução, então

$$J'(w)v = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular temos que $J'(w)w_+ = 0$.
Dado que

$$\int_\Omega \bigtriangledown w. \bigtriangledown w_+ dx = \int_\Omega \bigtriangledown w_+. \bigtriangledown w_+,$$

então,

$$0 = J'(w)w_+ = J'(w_+)w_+ = \gamma(w_+)$$

concluímos que $w_+ \in S$. A outra parte da demonstração é análoga.

□

Observação F.2. Se $w \in S$ e $\gamma(w_+) = 0$ então $w_+,\ w_- \in S$. Com efeito, temos que $\gamma(w_-) = 0$ e como $w_+,\ w_- \in H_0^1(\Omega)$, então pela definição da variedade de Nehari obtemos $w_+,\ w_- \in S$.

Observação F.3. Se $w \in S_1$ então $w_+,\ w_- \in S$.

Observação F.4. Se $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ e $\gamma(u_+) = \gamma(u_-) = 0$, então $u \in S$ e em particular $u \in S_1$.

Teorema F.5. *Se $u \in S$ é um ponto crítico de $J\ |_S$, então u é um ponto crítico não trivial de $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e em consequência, uma solução não trivial do problema 3.1.*

Demonstração. Se $u \in S$ é ponto crítico de J sobre S, então

$$J'(u)(v) = 0 \text{ para todo } v \in T_uS,$$

Como $u \in S$ então $\gamma(u) = 0$, isto é, $J'(u)u = 0$. Agora como o espaço tangente T_uS tem codimensão 1 e $u \notin T_uS$, segue-se que $H_0^1(\Omega) = T_uS \bigoplus \mathbb{R}u$ em consequência

$$J'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

A prova de $u \notin T_uS$ é por contradição. Suponha que $u \in T_u(S)$, então $\gamma'(u)u = 0$ o que é uma contradição pois $\gamma'(u)u < 0$.

$\square$

Teorema F.6. *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $u_+, u_- \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Desde que $u_+ = \frac{1}{2}(u + \mid u \mid)$, $u_- = \frac{1}{2}(u - \mid u \mid)$, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço vetorial e $|u| \in H_0^1(\Omega)$, então temos que u_+, $u_- \in H_0^1(\Omega)$. Além disso

$$(D_i u_+)_{(x)} = \begin{cases} D_i u(x) & , \quad u(x) \geq 0; \\ \\ 0 & , \quad u(x) < 0. \end{cases}$$

$$(D_i u_-)_{(x)} = \begin{cases} 0 & , \quad u(x) > 0; \\ \\ D_i u(x) & , \quad u(x) \leq 0. \end{cases}$$

$\square$

Teorema F.7. *$J(u) = J(u_+) + J(u_-)$.*

Demonstração. Do fato que u_+ é nula quando u_- não é, temos

$$\int_0^{u_+ + u_-} f(s)ds \quad = \quad \int_0^{u_+} f(s)ds + \int_0^{u_-} f(s)ds,$$

isto é,

$$F(u) = F(u_+) + F(u_-). \tag{F.1}$$

Integrando (F.1), sobre Ω, nós temos

$$\int_\Omega F(u)dx = \int_\Omega F(u_+)dx + \int_\Omega F(u_-)dx,$$

por tanto

$$\begin{aligned} J(u) = J(u_+ + u_-) &= \frac{1}{2}\|u_+ + u_-\|^2 - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u_+\|^2 + \frac{1}{2}\|u_-\|^2 - \int_\Omega F(u_+)dx - \int_\Omega F(u_-)dx \\ &= J(u_+) + J(u_-). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema F.8. *$\gamma(u) = \gamma(u_+) + \gamma(u_-)$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 - uf(u)\Big\} dx \\
&= \|u\|^2 - \int_\Omega uf(u)dx \\
&= \|u_+ + u_-\|^2 - \int_\Omega (u_+ + u_-)f(u)dx \\
&= \|u_+\|^2 + \|u_-\|^2 - \int_\Omega u_+ f(u_+)dx - \int_\Omega u_- f(u_-)dx \\
&= \|u_+\|^2 - \int_\Omega u_+ f(u_+)dx + \|u_-\|^2 - \int_\Omega u_- f(u_-)dx \\
&= \gamma(u_+) + \gamma(u_-).
\end{aligned}$$

□

Teorema F.9. *A função $\gamma : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\gamma(u) = < \bigtriangledown J(u), u > = \int_\Omega \{\mid \bigtriangledown u \mid^2 - uf(u)\} dx$$

é diferenciável. Além disso

$$\begin{aligned}
\gamma'(u)(v) &= < \bigtriangledown \gamma(u), v > \\
&= 2\int_\Omega \bigtriangledown u . \bigtriangledown v dx - \int_\Omega f(u)v dx - \int_\Omega f'(u)uv dx.
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\gamma'(u)(v) &= < \bigtriangledown \gamma(u), v > \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown (u+tv) \mid^2 - (u+tv)f(u+tv)\Big\} dx \\
&\quad - \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 - uf(u)\Big\} dx\Big] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 + 2t \bigtriangledown u . \bigtriangledown v + t^2 \mid \bigtriangledown v \mid^2 - \\
&\quad - (u+tv)f(u+tv)\Big\} dx - \int_\Omega \Big\{ \mid \bigtriangledown u \mid^2 - uf(u)\Big\} dx\Big] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\int_\Omega \Big\{ 2t \bigtriangledown u . \bigtriangledown v + t^2 \mid \bigtriangledown v \mid^2 - \\
&\quad - (tv)f(u+tv)\Big\} dx - \int_\Omega \Big\{ u(f(u+tv) - f(u))\Big\} dx\Big] \\
&= \int_\Omega \Big\{ 2 \bigtriangledown u . \bigtriangledown v - vf(u)\Big\} dx \\
&\quad - \int_\Omega \Big\{ u \lim_{t\to 0} \frac{(f(u+tv) - f(u))}{t}\Big\} dx \\
&= 2\int_\Omega \bigtriangledown u . \bigtriangledown v dx - \int_\Omega f(u)v dx - \int_\Omega f'(u)uv dx.
\end{aligned}$$

□

Teorema F.10. *O funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$J(u) = \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{2} \mid \bigtriangledown u \mid^2 - F(u)\Big\} dx, \tag{F.2}$$

está bem definido.

Demonstração. Afirmamos que o funcional J está bem definido. De fato, a função $I_o(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2} < u, u >$, está bem definida para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim, basta verificar que a função I, dado por $I(u) = \int_\Omega F(u)dx$ está bem definida, isto é uma consequência da hipóteses de restrição de crescimento da f, pois

$$\begin{aligned} |F(u)| &= |\int_0^u f(s)ds|, \\ &\leq \int_0^{|u|} |f(s)|ds, \\ &\leq \int_0^{|u|} B\Big(|s|^p + 1\Big)ds, \\ &= B\Big(|u| + \frac{|u|^{p+1}}{p+1}\Big). \end{aligned}$$

Uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, nossas hipóteses garantem que $|u|, |u|^{p+1} \in L^1(\Omega)$ e consequentemente

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F(u)|dx &\leq \int_\Omega B\Big(|u| + \frac{|u|^{p+1}}{p+1}\Big)dx, \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

Teorema F.11. (*Teorema de Hadamard*) *Seja H um espaço de Hilbert real. Se $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, então*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 < \bigtriangledown f(x + s(y-x)), y - x > ds, \ \ para\ \ todo\ \ x, y \in H.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in H$ e seja a função

$$\begin{aligned} \lambda : [0,1] &\to H \\ s &\to \lambda(s) = x + s(y-x). \end{aligned}$$

Logo, temos que $f \circ \lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\begin{aligned} f(\lambda(1)) - f(\lambda(0)) &= \int_0^1 (f \circ \lambda)'(s)ds, \\ f(y) - f(x) &= \int_0^1 (f'(\lambda(s)))\lambda'(s)ds, \\ &= \int_0^1 < \bigtriangledown f(x + s(y-x)), y - x > ds. \end{aligned}$$

□

Teorema F.12. *Seja $1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ para $N > 2$, e seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Assumindo a seguinte condição de crescimento para f:*

$$|f(x,u)| \leq a|u|^p + b.$$

Então o operador é compacto.

Demonstração. Suponhamos que $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$, então $u_n \longrightarrow u$ em $L^{s_1}(\Omega)$, com $s_1 \in [1, s)$, onde $s = \frac{2N}{N-2}$. Escolhendo $s_1 \in (p+1, s)$ e r_1 o dual de s_1, então temos

$$
\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu\|_{H_0^1(\Omega)} &= sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)=1}} < Tu_n - Tu, \varphi >_{H_0^1(\Omega)}, \\
&= sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)=1}} \int_\Omega \Big[f(x, u_n) - f(x, u) \Big] \varphi dx, \\
&= C\|f(., u_n) - f(., u)\|_{L^{r_1}}.
\end{aligned}
$$

E pela continuidade do operador de Nemytzki, temos que $f(., u_n) - f(., u) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ no espaço $L^{\frac{s_1}{p}}$ portanto também no espaço L^{r_1} $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press 1975.

[2] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* Journal of Functional Analysis Vol. 14 (1973), pp 349-3811.

[3] AMANN, H. *A Note on Degree Theory for Gradient Mappings*, Proc. of the Am. Math. Soc., Vol. 85, No. 4, (1982), pp. 591-595.

[4] BIEZUNER, R. J. *Equações Diferencias Parciais I/II*, UFMG, Brasil, 2010.

[5] BIEZUNER, R. J. *Autovalores do Laplacianao. Notas de aula do curso tópicos em Análise*, UFMG, Brasil, 2006.

[6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations.* New York: Springer. 2010.

[7] BENAZIC, R. *Topología en Espacios Euclidianos*, XVIII Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana (SMP), IMCA-Lima, Perú, 2000.

[8] CAICEDO, J. F. *Cálculo avanzado*, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia, 2012.

[9] CASTRO, A.; COSSIO, J. *Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem*, SIAM J, Math. Anal., Vol 25 (1994), pp. 1554-1561.

[10] CASTRO, A.; COSSIO, J.; NEUBERGER, M. *A Sign Changing Solutions for a Superlinear Dirichlet Problem*, Rocky Mountain J. M., Vol 27, No. 4 (1997), pp. 1041-1053.

[11] CASTRO, A.; COSSIO, J.; NEUBERGER, M. *A Minmax principle, index of the critical point, and existence of sign changing solutions to elliptic boundary value problems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 1998. No. 02 (1998), pp. 1072- 6691.

[12] CASTRO, A.; COSSIO, J.; NEUBERGER, M. *On Multiple Solutions of a Nonlinear Dirichlet Prblems*, To appear in Nolinear Analysts TMA.

[13] CASTRO, A.; CAICEDO, F. *Notas en Problemas Elípticos Superlineales*, Bogotá 2009.

[14] COFFMAN, C. V. *A minimum principle for a class of nonlinear integral equations*, J. Analyse Math. Vol. 20 (1969), pp. 391-419.

[15] CLAPP, M. *Métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales.* Dissertação de Mestrado apresentado - UNAM, 2016. http://piazza.com/get_resource.

[16] COURANT, R.; HILBERT, D. *Methodod of Mathematical Physics*, Volume I, New York, John Wiley (1989).

[17] ALVES, C.; TORRES, C. *Una introducción a las ecuaciones elípticas*, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo - Perú, 2017.

[18] RABINOWITZ, P. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to differential Equations*, Regional Conference Series in Mathematics, 65, Providence, RI, AMS 1986.

[19] COSSIO, J. *Contribución al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico.* Rev. Acad. Colomb. Cienc. 28(106): 135-145, 2004. ISSN 0370-3908.

[20] DE SOUZA, S. M. *Existência de soluções para duas classes de problemas elípticos usando a aplicação fibração relacionada à Variedade de Nehari.* Dissertação de Mestrado - UFJF, 2014. http://www.ufjf.br/mestradomatematica/files/2014.

[21] DE SOUZA, S. *Soluções clássicas para uma equação elíptica semilinear não homogênea.* Dissertação de Mestrado - UFPB, 2011. http://www.mat.ufpb.br/dissertaçoes.

[22] CHANG, K. C. *Methods Nonlinear Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2005.

[23] FIGUEIREDO, D. G. *The ekeland variational principle with applications and detours*, TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH BOMBAY, 1989.

[24] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

[25] GILBARG, D. TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer - Verlag, New York, 1983.

[26] GHOUSSOUB, N. *Duality and perturbation methods in critical piont theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[27] HOFER, H. *The Topological Degree at a Critical Point of Mountain Pass Type*, Proc, Sympos. Pure Math., Vol. 45, 1986, pp. 501-509.

[28] WILLEM, M. *Minimax theorems*, Birkhäuser, 1996.

[29] HENON, M. *Numerical Experiments on the Stability of spherical Stellar Systems*, Astro. Astropohys. 24(1973), 229-238.

[30] KAVIAN, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques: et Aplications aux Problèmes Elliptiques.* Berlim: Springer - Verlag, 1993.

[31] KESAVAN, S. *Topics in functional analysis and applications.* John Wiley Sons, Inc., New york, 1989.

[32] MITRIVIĆ, D,; ŽUBRINIĆ, D. *Fndamentals of Applied Functional Analysis.* England: Logman, 1998.

[33] MALCHER, G. *Sobre o método de Nehari.* Encontro Nacional de Análise Matemática(ANAMA) - Brasília, 2018.

[34] OUTERELO, E.; RUIZ, J. M. *Mapping Degree Theory.* Madrid: A.M.S., 2009, 244p. (Graduate studies in mathematics; Vol. 108).

[35] WANG, Z. Q. *On a superlinear Elliptic equation*, Ann. Inst. H. Poincare Analyse Non Lineaire, vol. 8 (1991), pp. 43-57.

[36] CHANDRASEKHAR, S. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, 1939.

[37] LJUSTERNIK, L.; SCHNIRELMANN, L. *Methodes topologique dans les problémes variationnnels*, Paris, 1934.

[38] MARTIN, R. H. *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, New York, 1976.

[40] MARCIAL, M. R. *Estrutura topológica do conjunto de soluções de perturbações não lineares do p-laplaciano*. 126f. Tese (Doutorado em Matemática)-Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

[41] CASTRO, A. *Métodos de Reducción via Minimax*, Primer Simposio Colombiano de Análisis funcional, Medellín, Colombia, 1981.

[42] BADIALE, M; SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Berlin: Springer Verlag, 2011.