Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Marcela Nascimento

TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES E DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

Juiz de Fora

2018

Marcela Nascimento

TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES E DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nascimento, Marcela.
TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES E DE SISTEMAS HAMILTONIANOS / Marcela Nascimento. – 2018.
68 f. : il.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Soluções Positivas. 3. Trajetórias Homoclínicas. I. Miyagaki, Olímpio Hiroshi, orient. II. Título.

Marcela Nascimento

TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES E DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Fábio Rodrigues Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Gustavo Ferron Madeira
Universidade Federal de São Carlos

AGRADECIMENTOS

Mais uma etapa chega ao fim e só pude concluí-la devido ao apoio que tive de pessoas muito especiais.

Agradeço primeiramente à minha mãe. Sei que onde quer que esteja, você está extremamente feliz por essa conquista. Sem seus ensinamentos, apoio e dedicação seria impossível chegar até aqui.

Ao meu pai e à minha irmã por todo apoio no decorrer desses dois anos e principalmente por acreditarem que eu seria capaz. Ao meu namorado Davi por estar sempre presente, passando-me calma e serenidade nos momentos em que eu mais precisei.

Agradeço também aos amigos que compartilharam momentos e sentimentos únicos. Aos professores pela colaboração e por todo conhecimento transmitido, à Paula por toda eficiência, competência e amizade.

Ao Olímpio pela orientação, paciência e sabedoria durante esse tempo, aos membros efetivos e suplentes da banca examinadora, Gustavo, Fábio, Luíz Fernando e Mateus, pela disponibilidade e atenção.

À CAPES e à UFJF pelo apoio financeiro.

Por fim, à todos que contribuíram de alguma forma para eu chegar até aqui.

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível."
(Charles Chaplin)

RESUMO

Este trabalho foi baseado nos resultados obtidos por Korman, Lazer e Li em [12] e Korman e Lazer em [11]. Nele, estudamos a existência de trajetórias homoclínicas para a seguinte classe de equações

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0, \; x \in I\!R.$$

Analisamos também a existência de trajetórias homoclínicas para a classe de sistemas hamiltonianos

$$u'' - L(t) \cdot u + V_u(t, u) = 0, \; t \in I\!R.$$

Garantimos a existência de soluções não triviais para os problemas acima quando x e t pertencem a um intervalo limitado da forma $(-T, T)$ com $T \geq 1$, utilizando técnicas variacionais e, depois, analisamos essas soluções quando $T \longrightarrow \infty$.

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos. Soluções Positivas. Trajetórias Homoclínicas.

ABSTRACT

This work is based on the results obtained by Korman, Lazer and Li in [12]; Korman and Lazer in [11]; here in we will study the existence of homoclinic trajectories for the following class of equations

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0,\ \ x \in I\!R.$$

We also analyze the existence of homoclinic trajectories for the following class of Hamiltonian systems

$$u'' - L(t) \cdot u + V_u(t, u) = 0,\ \ t \in I\!R.$$

Using variational techniques we guarantee the existence of non-trivial solutions to the above problems when x and t belong to a bounded interval of the form $(-T, T)$, with $T \geq 1$, and then we analyze these solutions as $T \longrightarrow \infty$.

Keywords: Hamiltonian systems. Positive Solutions. Homoclinic trajectories.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
V_u	Gradiente de V em relação à u
$(\cdot,\cdot)$	Produto interno
$\hookrightarrow$	Imersão
X'	Dual de X
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$f(\pm\infty)$	$\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Consideremos equações diferenciais de segunda ordem da seguinte forma:

$$\ddot{u} = f(t, u), \ t \in I\!R. \tag{1.1}$$

Ao analisarmos as possíveis soluções dessa equação, podemos nos deparar com soluções constantes. Essas soluções recebem uma nomenclatura especial, são chamadas de *pontos de equilíbrio*. Um fato que merece destaque quando analisamos os pontos de equilíbrio da equação acima é a existência de trajetórias, também conhecidas como órbitas, que unem pontos de equilíbrio da equação. Elas são conhecidas como *homoclínicas* ou *heteroclínicas*.

Uma trajetória homoclínica é um caminho cujo ponto inicial e final coincidem. Nesse tipo de trajetória existe apenas um ponto de equilíbrio. Já uma trajetória heteroclínica é um caminho que liga dois pontos de equilíbrio distintos. Ao tomarmos p e q como sendo pontos de equilíbrio da equação (1.1), afirmaremos que u é uma trajetória homoclínica interligando p quando $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t) = p$; e que se trata de uma trajetória heteroclínica interligando p e q quando $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = p$ e $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = q$.

Figura 1 – À esquerda temos um exemplo de uma trajetória homoclínica e à direita uma trajetória heteroclínica.

Consideremos o seguinte sistema de segunda ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases}$$

Segundo Villate em [17], esse sistema é chamado de Sistema Hamiltoniano se as funções f e g satisfazem a seguinte relação:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Se um sistema é hamiltoniano, então existirá uma função de estado, denotada por $H(x, y)$, chamada de função hamiltoniana, que permite definirmos as seguintes equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

Particularmente, a função hamiltoniana abrange toda a informação dinâmica do sistema. Qualquer conjunto de equações de evolução que satisfazem as condições para ser um sistema hamiltoniano definem uma função hamiltoniana através das relações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = f(x,y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -g(x,y). \end{cases}$$

Na mecânica clássica, um sistema hamiltoniano é um sistema físico no qual as forças não variam de acordo com a velocidade. Um exemplo clássico de sistemas hamiltonianos é o pêndulo de Wilberforce, que é formado por um objeto ligado a uma mola, podendo se movimentar nos planos horizontal e vertical.

Através de técnicas variacionais, Ambrosetti e Bertotti em [1], Omana e Willem em [15] e Korman e Lazer em [11], confirmaram a existência de trajetórias homoclínicas e heteroclínicas do seguinte sistema Hamiltoniano:

$$u'' - L(t) \cdot u + V_u(t,u) = 0, \tag{1.2}$$

no qual

(i) $L(t)$ é uma matriz de ordem n;

(ii) $V_u(t,u)$ é um potencial superquadrático;

(iii) u, que é a solução que pretendemos determinar, está na classe $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Esses autores, em seus trabalhos, restringiram o sistema (1.2) a intervalos da forma $(-T, T)$ com as condições de contorno de Dirichlet, que são $u(T) = u(-T) = 0$, expondo a existência de soluções utilizando o Teorema do Passo da Montanha, e fazendo $T \to +\infty$.

O estudo realizado por Ambrosetti e Bertotti em [1] mostra que além da existência de soluções do sistema (1.2), o Teorema do Passo da Montanha obtém uma estimativa uniforme em T da solução na norma H^1.

Neste trabalho, será mostrado que o sistema (1.2) possui uma solução não trivial, quando é estudado sob as seguintes condições:

(i) $-\infty < t < \infty$;

(ii) $u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0$;

(iii) $L(t) = [\ell_{ij}(t)]$ é uma matriz positiva definida e simétrica de classe $C^1(\mathbb{R})$ tal que $(L(t)u, u) \geq \alpha(t)|u|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, na qual $\alpha(t)$ é uma função em $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e estritamente positiva em todos os reais, isto é, $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$;

(iv) $V(t,u) \in C^1(I\!\!R \times I\!\!R^n, I\!\!R)$ e, para alguma constante $\gamma > 2$, tem-se $0 < \gamma V(t,\xi) \leq (V_\xi(t,\xi),\xi)$ para todo $\xi \in I\!\!R^n\backslash\{0\}$ e $t \in I\!\!R$;

(v) Existe uma função real β tal que $(L(t)u,u) > (V_u(t,u),u)$ quando $|u|^2 \leq \beta(t)$;

(vi) $\liminf_{t\to\infty} \alpha_0\beta(t) > \lim_{T\to\infty} \dfrac{2\gamma}{\gamma-2}C_T$, com

$$C_T = \int_{-T}^{T}\Big[\frac{1}{2}|u_T'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u_T,u_T) - V(t,u_T)\Big]dt$$

e u_T sendo solução do sistema (1.2) quando $t \in (-T,T)$ e quando $u_T(\pm T) = 0$.

Também será mostrado que se $a(x)$ e $b(x)$ satisfazem qualquer uma das condições abaixo:

(i) $xa'(x) \geq 0$ e $xb'(x) \leq 0$ para todo $x \in I\!\!R$;

(ii) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{(\sqrt{a(0)}+\sqrt{a(x)})}{2}.\left[\dfrac{(p+1)a(x)}{b(x)}\right]^{\frac{2}{p-1}} > \lim_{T\to\infty}\dfrac{(p+1)}{p-1}C_T$;

ou

(iii) $\liminf_{|x|\to\infty} \sqrt{a_0}\left(\dfrac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > \lim_{T\to\infty}\dfrac{(p+1)}{p-1}C_T$;

então o problema

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0 \text{ para } x \in (-\infty,\infty) \text{ e } p \in (1,\infty) \tag{1.3}$$

com

$$u(-\infty) = u'(-\infty) = u(\infty) = u'(\infty) = 0 \tag{1.4}$$

possui uma solução positiva.

No Capítulo 2, serão apresentados resultados relacionados às condições do problema (1.3-1.4). Mostrar-se-á também que a equação (1.3), quando $x \in (-T,T)$ e $u(-T) = u(T) = 0$ para qualquer $T \geq 1$, possui uma solução positiva.

De forma similar ao que foi abordado no Capítulo 2, no Capítulo 3 será demonstrado que o sistema (1.2), quando t pertence à um intervalo limitado da forma $(-T,T)$ e $u(T) = u(-T) = 0$ com $T \geq 1$, possui uma solução não trivial. Além disso, será apresentado um exemplo que mostra que o resultado não é válido para sistemas.

O Capítulo 4 contém as demonstrações dos principais resultados deste trabalho as quais foram obtidas utilizando os resultados dos Capítulos 2 e 3 na condição em que $T \longrightarrow \infty$, a saber:

Teorema 1.1. *Sejam $a(x),\ b(x) \in C^1(I\!R)$ e também pertencentes à L^∞, tais que para todo x temos $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$. Suponhamos que a, b satisfaçam*

$$\liminf_{|x|\to\infty} \sqrt{a_0}\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > \lim_{T\to\infty} \frac{(p+1)}{p-1} C_T$$

ou

$$\begin{cases} xa'(x) \geq 0 \text{ e } xb'(x) \leq 0 \text{ para todo } x \\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt{a(0)}+\sqrt{a(x)})}{2}\left[\frac{(p+1)a(x)}{b(x)}\right]^{\frac{2}{p-1}} > \lim_{T\to\infty}\frac{(p+1)}{p-1}C_T, \end{cases}$$

com

$$C_T = \int_{-T}^{T}\left[\frac{u_T'^2}{2} + a(x)\frac{u_T^2(x)}{2} - b(x)\frac{u_T^{p+1}}{p+1}\right]dx$$

e

$$\begin{cases} u_T''(x) - a(x)u_T + b(x)u_T^p = 0 \text{ com } x \in (-T,T) \text{ e } T \geq 1 \\ u_T(T) = u_T(-T) = 0. \end{cases}$$

Então o problema

$$\begin{cases} u'' - a(x)u + b(x)u^p(x) = 0 \text{ com } x \in (-T,T) \text{ e } p \in (1,\infty) \\ u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

possui uma solução positiva.

Teorema 1.2. *Seja $L(t) = [\ell_{ij}(t)]$ uma matriz positiva definida e simétrica de classe $C^1(I\!R)$ e $V(t,u) \in C^1(I\!R \times I\!R^n, I\!R)$ tal que para alguma constante $\gamma > 2$ temos*

$$0 < \gamma V(t,\xi) \leq (V_\xi(t,\xi),\xi) \text{ para todo } \xi \in I\!R^n\backslash\{0\} \text{ e } t \in I\!R.$$

Consideremos também uma função $\beta : I\!R \longrightarrow I\!R$ tal que

$$(L(t)u,u) > (V_u(t,u),u) \text{ uma vez que } |u|^2 \leq \beta(t),$$

sendo V_u é o gradiente de V em relação à u.
Suponhamos que

$$\liminf_{t\to\infty} \alpha_0\beta(t) > \lim_{T\to\infty}\frac{2\gamma}{\gamma-2}C_T,$$

com

$$C_T = \int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{2}|u_T'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u_T,u_T) - V(t,u_T)\right]dt,$$

$$u_T'' - L(t)u_T + V_{u_T}(t,u_T) = 0 \text{ para } t \in (-T,T) \text{ e } u(T) = u(-T) = 0,$$

$0 < \alpha_0 \leq \alpha(t)$ *para todo* t *com* $\alpha(t)$ *uma função real contínua tal que*

$$(L(t)u, u) \geq \alpha(t).|u|^2.$$

Então, o problema

$$\begin{cases} u'' - L(t)u + V_u(t,u) = 0 \text{ } para \text{ } x \in (-\infty, \infty) \\ u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

possui uma solução não trivial.

O Capítulo 5 aborda soluções heteroclínicas ímpares para o problema

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (-\infty, \infty),\ u(\pm\infty) = \pm 1 \text{ e } u'(\pm\infty) = 0.$$

Essas soluções serão obtidas seguindo a mesma abordagem do Capítulo 2, analisando o problema quando x pertence à um intervalo limitado da forma $(-T, T)$ com $T \geq 1$.

Já no Capítulo 6, trabalharemos com um princípio de máximo um pouco diferente para um sistema de equações semelhantes à equação (1.3).

O trabalho é finalizado com um Apêndice que conterá alguns resultados clássicos como o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Comparação de Sturm, que serão utilizados do decorrer de todo trabalho.

Este trabalho está baseado nos estudos realizados por Korman, Lazer e Li em [12] e Korman e Lazer em [11]. Os gráficos representados nas figuras 2, 3 e 4 foram obtidos através do site *www.wolframalpha.com*, a figura 1 foi extraída de [5] e as figuras 7 e 8 foram extraídas de [4].

2 TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES

Um dos objetivos deste trabalho é mostrar que o problema

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0, \tag{2.1}$$

com $-\infty < x < +\infty$, $1 < p < +\infty$ e,

$$u(-\infty) = u'(-\infty) = u(\infty) = u'(\infty) = 0 \tag{2.2}$$

possui uma solução positiva. Neste capítulo serão discutidos todos os resultados necessários para essa demonstração.

Para isso, consideremos as funções $a(x)$, $b(x)$ definidas em todos os reais, de classe C^1, L^∞ e estritamente positivas, ou seja, $a(x) \geq a_0 > 0$ e $b(x) \geq b_0 > 0$ para todo x. Para encontrarmos uma solução positiva u que satisfaça (2.1) e (2.2), vamos determinar uma solução da equação

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0 \tag{2.3}$$

sob as seguintes condições

$$x \in (-T, T) \text{ e}$$

$$u(T) = u(-T) = 0,$$

e depois calcular o limite quando $T \to \infty$. Denotaremos as soluções desse problema por u_T.

Lema 2.1. *O problema (2.3) sob as condições citadas acima, possui uma solução positiva para qualquer $T \geq 1$. Essa solução é obtida através do uso de técnicas variacionais e, para essa solução, temos a seguinte estimativa*

$$\int_{-T}^{T} (u'^2(x) + a(x)u^2(x))dx \leq C \tag{2.4}$$

uniformemente em $T \geq 1$.

Demonstração: O problema (2.3) é dado por

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0 \text{ para } x \in (-T, T),\ T \geq 1 \text{ e } u(T) = u(-T) = 0.$$

Para obtermos o resultado desejado, devemos trabalhar com o seguinte problema

$$\begin{cases} u'' - a(x)u + b(x)(u^+)^p = 0 \text{ para } x \in (-T, T) \\ u(-T) = u(T) = 0 \\ u^+ = \max\{u, 0\} \end{cases} \tag{2.5}$$

com u pertencente ao espaço $H_0^1[-T,T]$ composto de funções absolutamente contínuas que se anulam em $\pm T$ com a norma

$$\|u\|^2 = \int_{-T}^{T} (u^{'2}(x) + u^2(x))dx.$$

Consideremos o funcional $f : H_0^1[-T,T] \longrightarrow I\!R$ definido da seguinte forma:

$$f(u) = \int_{-T}^{T} \left[\frac{u'^2}{2} + a(x)\frac{u^2}{2} - b(x)\frac{(u^+)^{p+1}}{p+1} \right] dx.$$

Observe que $f(u)$ possui um mínimo local estrito em $u = 0$.
De fato, como $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in I\!R$ e $a \in C^1(I\!R)$ temos que $a(x)$ é contínua no intervalo limitado $[-T,T]$, daí segue que, definida nesse intervalo, $a(x)$ possui um máximo positivo em $[-T,T]$. Vamos denotá-lo por a_M:

$$0 < a_0 \leq a(x) \leq a_M, \;\; \forall \; x \in [-T,T] \Rightarrow$$

$$\int_{-T}^{T} (u^{'2} + a_0 u^2)dx \leq \int_{-T}^{T} (u^{'2} + a(x)u^2)dx \leq \int_{-T}^{T} (u^{'2} + a_M u^2)dx.$$

Como $\|u\|^2$ difere de $\int_{-T}^{T}(u^{'2} + a_0u^2)dx$ e de $\int_{-T}^{T}(u^{'2} + a_M u^2)dx$ por uma constante, e essas integrais são limites inferiores e superiores, respectivamente, de $\displaystyle\int_{-T}^{T}(u^{'2} + a(x)u^2)dx$ podemos escrever o funcional f da seguinte forma:

$$f(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{-T}^{T} b(x)\frac{(u^+)^{p+1}}{p+1}dx.$$

Como $b \in C^1(I\!R)$ e $b(x) \geq b_0 > 0$, segue que b é contínua em $[-T,T]$ e portanto, possui um valor máximo em $[-T,T]$. Vamos denotá-lo por b_M. Assim temos

$$f(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u^+)^{p+1}dx \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{b_M}{p+1}\int_{-T}^{T}(u^+)^{p+1}dx. \tag{2.6}$$

Sabemos que $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$ pelo Teorema 7.32 no Apêndice, logo existem constantes $C_1,\ C_2 > 0$ tais que

$$\|u^+\|_{L^{p+1}} = \left(\int_{-T}^{T} (u^+)^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \leq C_1 \|u^+\|$$

então,

$$\int_{-T}^{T}(u^+)^{p+1}dx \leq C_2\|u^+\|^{p+1},$$

ou seja,

$$-\int_{-T}^{T}(u^+)^{p+1}dx \geq -C^2\|u^+\|^{p+1}.$$

Assim, voltando em (2.6) e utilizando a desigualdade acima temos

$$f(u) \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{b_M}{p+1}\int_{-T}^{T}(u^+)^{p+1}dx \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{b_M}{p+1}C_2\|u\|^{p+1}. \tag{2.7}$$

Daí, como $p+1>2$ segue que para todo $u \in H_0^1[-T,T]$ com $\|u\|=\rho$ suficientemente pequeno, existe $\beta_\rho > 0$ tal que $f(u) \geq \beta_\rho$. Portanto $f(u)$ possui um mínimo local em $u=0$.
Vamos agora determinar $f'(u)$.
Note que

$$f'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv)-f(u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|u+tv\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u+tv)^{p+1}dx - \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u^+)^{p+1}dx}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}((u,u)+t(v,u)+t(u,v)+t^2(v,v)-(u,u)) + \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)((u^+)^{p+1} - ((u+tv)^+)^{p+1})dx}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{t(2(u,v)+t^2(v,v))}{2t} + \frac{\int_{-T}^{T} b(x)((u^+)^{p+1} - ((u+tv)^+)^{p+1})dx}{t(p+1)} \right).$$

Consideremos $g : [0,+\infty) \longrightarrow I\!R$ dada por $g(x) = x^{p+1}$, assim temos $g'(x) = (p+1)x^p$.
Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$g(a+b)-g(a) = g'(C_{ab})(a+b-a), \text{ com } 0 \leq a \leq C_{ab} \leq a+b \Rightarrow$$

$$(a+b)^{p+1} - a^{p+1} = (p+1)C_{ab}^p b, \text{ com } 0 \leq a \leq C_{ab} \leq a+b.$$

Daí, voltando em $f'(u)v$ temos

$$f'(u)v = \lim_{t\to 0} \left(\frac{2(u,v)+t(v,v)}{2} - \frac{\int_{-T}^{T} b(x)(p+1).C_{utv}^p.tvdx}{t(p+1)} \right), \text{ com } u \leq C_{utv} \leq u+tv,$$

e portanto,

$$f'(u)v = (u,v) - \int_{-T}^{T} b(x)u^p v dx.$$

Agora que já calculamos a derivada de f, vamos mostrar que esse funcional satisfaz a condição de Palais-Smale.
Seja (u_n) uma sequência em H_0^1 tal que $f(u_n)$ é limitada e que $f'(u_n) \longrightarrow 0$. Queremos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente.
Como $f'(u_n) \longrightarrow 0$ temos que

$$\|f'(u_n)\|_{(H_0^1)'} = \sup_{\|v\|=1 \ e \ v \ \in \ H_0^1[-T,T]} |f'(u_n)v| \longrightarrow 0.$$

Daí, existe uma constante $C > 1$ tal que

$$\left| f'(u_n).\frac{u_n}{\|u_n\|} \right| \leq C \Rightarrow |f'(u_n)u_n| \leq C\|u_n\|,$$

logo

$$-C\|u_n\| \leq f'(u_n)u_n \leq C\|u_n\|. \tag{2.8}$$

Temos também que $f(u_n)$ é limitada, logo existe uma constante $k > 0$ tal que

$$|f(u_n)| = \left| \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u_n^+)^{p+1}dx \right| \leq k, \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$-k \leq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u_n^+)^{p+1}dx \leq k, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Vimos que

$$f'(u)v = (u,v) - \int_{-T}^{T} b(x)(u^+)^p v dx.$$

Daí, por (2.8), segue que

$$f'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_{-T}^{T} b(x)(u_n^+)^{p+1}dx \geq -C\|u_n\|,$$

ou seja,

$$-\frac{1}{p+1}f'(u_n)u_n = -\frac{1}{p+1}\|u_n\|^2 + \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u_n^+)^{p+1}dx \leq \frac{C}{p+1}\|u_n\|. \tag{2.10}$$

Somando (2.9) e (2.10) temos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u_n^+)^{p+1}dx - \frac{1}{p+1}\|u_n\|^2 + \frac{1}{p+1}\int_{-T}^{T} b(x)(u_n^+)^{p+1}dx \leq K + \frac{C}{p+1}\|u_n\|.$$

Portanto

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2 \leq K + \frac{C}{p+1}\|u_n\|.$$

Como $p > 1$ temos que $p+1 > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p+1} > 0$.
Logo, $\|u_n\|$ é limitado em $I\!R$, o que implica (u_n) ser limitada em $H_0^1[-T,T]$.
Seja (u_{n_j}) uma subsequência de (u_n) tal que $u_{n_j} \longrightarrow u \ \in H_0^1[-T,T]$ fracamente, quando $j \longrightarrow \infty$. Da definição de convergência fraca, temos

$$(u_{n_j}, v) \longrightarrow (u,v), \ \forall \ v \in H_0^1[-T,T]. \tag{2.11}$$

Aqui, é importante ressaltar que toda sequência limitada de um espaço reflexivo possui uma subsequência fracamente convergente.
Como $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$ é uma imersão compacta, temos $u_{n_j} \longrightarrow u$ em L^{p+1} e $u_{n_j} \longrightarrow u$ quase sempre em $[-T,T] \subset I\!R$, de acordo com Brézis em [3].
Observe que

$$\int_{-T}^{T} b(x)|u_{n_j}|^{p-1}u_{n_j} v dx \longrightarrow \int_{-T}^{T} b(x)|u|^{p-1}uv dx.$$

De fato, utilizando a desigualdade de Hölder, considerando $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$ e devido à convergência forte em L^{p+1} temos

$$\int_{-T}^{T} [||u_{n_j}|^{p-1}.u_{n_j}|]v dx = \int_{-T}^{T} |u_{n_j}|^p v dx \leq \left(\int_{-T}^{T} |u_{n_j}|^{p.s} dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{-T}^{T} v^{s'} dx\right)^{\frac{1}{s'}},$$

com $v \in L^{\frac{ps}{1-ps}}$ e $\int_{-T}^{T} |u_{n_j}|^{p.s} dx < \infty$, pois (u_n) é limitado em $H_0^1 \hookrightarrow L^{ps}$, daí segue que essa sequência também será limitada em L^{ps}.

De $u_n \longrightarrow u$ quase sempre temos que $|u_{n_j}|^{ps} \longrightarrow u^{ps}$. Como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H_0^1 \hookrightarrow L^{ps}$ temos, em particular, que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em L^{ps} e, portanto, $u_{n_j}^p \rightharpoonup u^p$ em L^{ps}. Assim, pelo Teorema da Representação de Riez e pelo Teorema 7.14 temos

$$(\varphi, u_{n_j}^p) = \varphi(u_{n_j}^p) = \int v u_{n_j}^p dx \longrightarrow \int v u^p dx = \varphi(u^p) = (\varphi, u^p) \text{ para todo } v,\ \varphi \in (L^s)'.$$

Daí, concluímos que $\int_{-T}^{T} b(x)|u_{n_j}|^{p-1} u_{n_j} v dx \longrightarrow \int_{-T}^{T} b(x)|u|^{p-1} u v dx,$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Seja u uma solução fraca para o problema (2.5), ou seja, $f'(u)v = 0$ para todo v em $H_0^1[-T, T]$. Assim temos

$$f'(u)u = 0 = \|u\|^2 - \int_{-T}^{T} b(x)|u^+|^{p-1} u u dx.$$

Denotaremos

$$o_{n_j}(1) = f'(u_{n_j} - u)(u_{n_j} - u) = \|u_{n_j} - u\|^2 - \int_{-T}^{T} b(x)|u_n - u|^{p-1}(u_{n_j} - u)^2 dx.$$

Assim temos

$$\|u_{n_j} - u\|^2 = o_{n_j}(1) + \int_{-T}^{T} b(x)|u_{n_j} - u|^{p+1} dx. \tag{2.12}$$

Novamente, como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ temos que $u_{n_j} \longrightarrow u$ quase sempre em $I\!R$ e $u_{n_j} \longrightarrow u$ em L^{p+1}. Logo, pelo Teorema 7.17 existe uma subsequência $(u_{n_{j_k}})$ de (u_{n_j}) tal que

$$u_{n_{j_k}}(x) \longrightarrow u(x) \text{ quase sempre em } I\!R \text{ e } |u_{n_{j_k}}(x)| \leq h(x),\ \text{com } h(x) \in L^{p+1}.$$

Observe que

$$f_{nj_k} = b(x)|u_{n_{j_k}} - u|^{p+1} \longrightarrow 0,$$

pois $u_{n_{j_k}} \longrightarrow 0$ quase sempre, daí temos

$$|f_{n_{j_k}}| = b(x)|u_{n_{j_k}} - u|^{p+1} \leq b_M(|u_{n_{j_k}}| + |u|)^{p+1} \leq b_M 2^p(|u_{n_{j_k}}|^{p+1} + |u|^{p+1}),$$

o que implica

$$|f_{n_{j_k}}| \leq b_M 2^p(h^{p+1} + |u|^{p+1}) \in L^1.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (2.12), segue que

$$\|u_{n_{j_k}} - u\|^2 \longrightarrow 0,$$

e portanto $u_{n_{j_k}} \longrightarrow u$ em $H_0^1[-T, T]$ e (u_n) satisfaz a condição de Palais-Smale, o que prova a nossa afirmação.

Agora, iniciando com qualquer função $u_0(x)$ em $H_0^1[-1, 1]$ tal que $u_0^+ \neq 0$, definimos u^* em $H_0^1[-T, T]$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} u^*(x) = \lambda u_0(x) \text{ para } x \in [-1, 1] \\ u^*(x) = 0 \text{ para } x \in [-T, T] \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Observe que

$$f(u^*) = \int_{-1}^{1} \left[\lambda^2 \frac{u_0'^2}{2} + a(x) \frac{\lambda^2 u_0^2}{2} - b(x) \frac{\lambda^{p+1}(u_0^+)^{p+1}}{p+1} \right] dx < 0 \text{ para } \lambda > 0 \text{ suficientemente grande.}$$

De (2.7) temos $f(u) \geq \beta > 0$ para $\|u\| = \rho$ com ρ suficientemente pequeno. Assim, concluímos pelo Teorema do Passo da Montanha que $f(u)$ possui um ponto crítico não trivial $u(x) \in H_0^1[-T, T]$, que é uma solução de

$$u'' - a(x)u + b(x)(u^+)^p = 0 \text{ para } x \in (-T, T) \text{ com } u(-T) = u(T) = 0, \tag{2.13}$$

e essa solução é estritamente positiva pelo Princípio do Máximo.
A abordagem variacional também nos permite estabelecer a estimativa

$$\int_{-T}^{T} (u'^2(x) + u^2(x)) dx \leq C \text{ uniformemente em } T \geq 1. \tag{2.14}$$

De fato, se considerarmos o conjunto de caminhos

$$\Gamma_T = \{ g : [0,1] \longrightarrow H_0^1[-T, T] \ / \ g(0) = 0,\ g(1) = u^* \}, \tag{2.15}$$

então a solução $u(x)$ de (2.13) é o ponto no qual

$$\inf_{g \in \Gamma_T} \max_{\tau \in [0,1]} f(g(\tau)) \equiv C_T \tag{2.16}$$

é alcançado.
Consideremos agora $T_1 > T$. Então $\Gamma_T \subset \Gamma_{T_1}$, uma vez que qualquer função em $H_0^1[-T, T]$ pode ser considerada como pertencente à $H_0^1[-T_1, T_1]$ se estendermos por zero em $[-T_1, T_1] \backslash [-T, T]$. Por isso, para T_1 o conjunto de caminhos concorrentes em (2.16) é maior do que para T, o que implica

$$C_{T_1} \leq C_T \leq C_1 \ (T_1 > T \geq 1). \tag{2.17}$$

Então, para a solução positiva u de (2.13),

$$f(u) = \int_{-T}^{T} \left(\frac{u'^2}{2} + a(x) \frac{u^2}{2} - b(x) \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx \leq C_1 \text{ uniformemente em } T \geq 1. \tag{2.18}$$

Multiplicando (2.13) por u e integrando temos

$$\frac{1}{p+1} \int_{-T}^{T} (u'^2 + a(x)u^2 - b(x)u^{p+1}) dx = 0. \tag{2.19}$$

Subtraindo (2.18) de (2.19) obtemos a estimativa (2.14).

■

Observação 2.2. *Vimos no início da demonstração que como* $a(x) \geq a_0 > 0$ *e* $b(x) \geq b_0 > 0$ *para todo* x *e* $a,\ b \in C^1(I\!R)$ *temos que* $a(x),\ b(x)$ *são contínuas no intervalo limitado* $[-T,T]$, *daí segue que, definidas nesse intervalo, essas funções possuem um máximo. Se ao invés de analisarmos essas funções em* $[-T,T]$ *estivéssemos trabalhando em* $I\!R$, *para garantir essa limitação, utilizaríamos o seguinte resultado de Brézis em [3]:*

"Seja E *um espaço vetorial com duas normas* $\|x\|_1$ *e* $\|x\|_2$. *Suponhamos que* E, *munido dessas normas seja um espaço de Banach. Além disso, suponhamos que exista uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \ \forall \ x \in E.$$

Então, existe uma constante $K > 0$ *tal que*

$$\|x\|_1 \leq K\|x\|_2 \ \forall \ x \in E,$$

tendo em vista que $I\!R$ *é um espaço de Banach."*

Na demonstração do lema acima, mostramos que

$$C_T = \int_{-T}^{T} \left[\frac{u_T'^2}{2} + a(x)\frac{u_T^2}{2} - b(x)\frac{u_T^{p+1}}{p+1} \right] dx$$

é não-crescente em T, o que implica $C_T \leq C_1$ para todo $T \geq 1$, onde u_T é uma solução positiva de (2.3). Vamos agora simplificar a expressão acima.

Multiplicando a equação (2.3) por u_T temos

$$u_T'' u_T = a(x)u_T^2 - b(x)u_T^{p+1},$$

donde

$$(u_T' u_T)' = (u_T')^2 + a(x)u_T^2 - b(x)u_T^{p+1}.$$

Integrando de $-T$ à T temos

$$\int_{-T}^{T} (u_T' u_T)' dx = \int_{-T}^{T} [(u_T')^2 + a(x)u_T^2 - b(x)u_T^{p+1}] dx,$$

isto é,

$$(u_T'(T)u_T(T) - u_T'(-T)u_T(-T)) = \int_{-T}^{T} [(u_T')^2 + a(x)u_T^2 - b(x)u_T^{p+1}] dx.$$

Portanto

$$\int_{-T}^{T} [(u_T')^2 + a(x)u_T^2 - b(x)u_T^{p+1}] dx = 0. \tag{2.20}$$

Note que, por (2.20)

$$C_T = \int_{-T}^{T} \left[\frac{u_T'^2}{2} + a(x)\frac{u_T^2}{2} - b(x)\frac{u_T^{p+1}}{p+1} \right] dx = \int_{-T}^{T} \left[b(x)\frac{u_T^{p+1}}{2} - b(x)\frac{u_T^{p+1}}{p+1} \right],$$

ou seja,

$$C_T = \int_{-T}^{T} \left[\frac{(p+1)b(x)u_T^{p+1} - 2b(x)u_T^{p+1}}{2(p+1)} \right].$$

Reescrevendo temos,

$$\frac{(p+1)}{(p-1)} C_T = \int_{-T}^{T} \frac{b(x)}{2} u_T^{p+1} dx.$$

Portanto, usando (2.20) novamente

$$\frac{(p+1)}{(p-1)} C_T = \int_{-T}^{T} \left[\frac{u_T'^2}{2} + a(x)\frac{u_T^2}{2} \right] dx.$$

Lema 2.3. *Consideremos*

$$xa'(x) \geq 0 \text{ e } xb'(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in I\!R. \tag{2.21}$$

Seja $u(x)$ uma solução positiva de

$$\begin{cases} u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0 \text{ com } x \in (-T, T) \text{ e } p \in (1, \infty) \\ u(T) = u(-T) = 0 \end{cases}$$

e x_{0_T} seu ponto de máximo. Suponhamos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(\sqrt{a(0)} + \sqrt{a(x)})}{2} \cdot \left[\frac{(p+1)a(x)}{b(x)} \right]^{\frac{2}{p-1}} > \lim_{T \to \infty} \frac{(p+1)}{p-1} C_T. \tag{2.22}$$

Então x_{0_T} pertence a um intervalo uniformemente limitado em $T \geq 1$.

Demonstração: Foi mostrado por Korman e Ouyang em [13] que $u(x)$ tem apenas um ponto de máximo local e esse máximo é global. Vamos denotá-lo por x_{0_T}. Consideremos também, sem perda de generalidade que $x_{0_T} \geq 0$.
Multiplicando $u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0$ por u' temos

$$u''u' - a(x)uu' + b(x)u^p u' = 0.$$

Reescrevendo

$$\left(\frac{u'^2}{2} \right)' - a(x) \left(\frac{u^2}{2} \right)' + b(x) \left(\frac{u^{p+1}}{p+1} \right)' = 0.$$

Integrando a equação acima sobre (x_{0_T}, T) obtemos

$$\int_{x_{0_T}}^{T} \left[\left(\frac{u'^2}{2} \right)' - a(x) \left(\frac{u^2}{2} \right)' + b(x) \left(\frac{u^{p+1}}{p+1} \right)' \right] dx = 0. \tag{2.23}$$

Por hipótese $xa'(x) \geq 0$ e $xb'(x) \leq 0$ para todo $x \in I\!R$ e também temos que $x_{0_T} \geq 0$, logo para todo $x \in [x_{0_T}, T]$ tem-se

$$\underbrace{x}_{>\ x_{0_T}\ \geq\ 0} \quad a'(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \underbrace{x}_{>\ x_{0_T}\ \geq\ 0} \quad b'(x) \leq 0,$$

ou seja,

$$a'(x) \geq 0 \ e \ b'(x) \leq 0 \text{ em } [x_{0_T}, T].$$

Portanto,

$$a(x) \text{ é crescente e } b(x) \text{ é decrescente em } [x_{0_T}, T].$$

Consequentemente

$$a(x) \geq a(x_{0_T}) \ e \ b(x) \leq b(x_{0_T}),$$

ou seja,

$$-a(x) \leq -a(x_{0_T}) \ e \ b(x) \leq b(x_{0_T}).$$

Assim, voltando em (2.23) e usando o fato que $u > 0$ e $u' < 0$ em $[x_{0_T}, T]$ segue que

$$\int_{x_{0_T}}^{T} \left(\frac{u'^2}{2}\right)' dx - \int_{x_{0_T}}^{T} a(x_{0_T}) \left(\frac{u^2}{2}\right)' dx + \int_{x_{0_T}}^{T} b(x_{0_T}) \left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)' dx \leq 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{u'^2}{2}\right)\Bigg|_{x_{0_T}}^{T} - a(x_{0_T}) \left(\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{x_{0_T}}^{T} + b(x_{0_T}) \left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)\Bigg|_{x_{0_T}}^{T} \leq 0.$$

Portanto,

$$\frac{u'^2(T) - u'^2(x_{0_T})}{2} - a(x_{0_T}) \left(\frac{u^2(T) - u^2(x_{0_T})}{2}\right) + b(x_{0_T}) \left(\frac{u^{p+1}(T) - u^{p+1}(x_{0_T})}{p+1}\right) \leq 0.$$

Como x_{0_T} é ponto de máximo global segue que $u'(x_{0_T}) = 0$. Temos também que quando $T \longrightarrow \infty$, $u(T) = u'(T) \longrightarrow 0$. Assim, da desigualdade acima temos

$$\frac{-a(x_{0_T})(-u^2(x_{0_T}))}{2} + \frac{b(x_{0_T})(-u^{p+1}(x_{0_T}))}{p+1} \leq 0,$$

o que acarreta

$$\frac{b(x_{0_T})u^{p+1}(x_{0_T}).2}{2(p+1)} \geq \frac{a(x_{0_T})u^2(x_{0_T})(p+1)}{2(p+1)}.$$

Portanto, temos que

$$2u^2(x_{0_T})(b(x_{0_T})u^{p-1}(x_{0_T})) \geq u^2(x_{0_T})a(x_{0_T})(p+1).$$

Reescrevendo a estimativa acima, segue que

$$2u^{p-1}(x_{0_T})b(x_{0_T}) \geq (p+1)a(x_{0_T}),$$

e consequentemente

$$u(x_{0_T}) \geq \left[\frac{(p+1)a(x_{0_T})}{2b(x_{0_T})}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.24}$$

Por outro lado, vimos que

$$\int_{-T}^{T}\left(\frac{u'^2}{2}+a(x)\frac{u^2}{2}\right)dx = \frac{(p+1)}{p-1}C_T,$$

qualquer que seja a solução u.
Observe que, dados $a,\ b$ quaisquer temos

$$ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}.$$

Daí temos

$$\sqrt{a(x)}u|u'| \leq \frac{au^2}{2}+\frac{u'^2}{2}.$$

Integrando ambos os membros

$$\int_{-T}^{T}\sqrt{a(x)}u|u'|dx \leq \int_{-T}^{T}\left(\frac{au^2}{2}+\frac{u'^2}{2}\right)dx = \frac{(p+1)}{p-1}C_T,$$

ou seja,

$$\int_{-T}^{T}\sqrt{a(x)}u|u'|dx \leq \frac{(p+1)}{p-1}C_T.$$

Por outro lado, por (2.24) temos que

$$\frac{(p+1)}{p-1}C_T \geq \int_{-T}^{T}\sqrt{a(x)}u|u'|dx = \int_{-T}^{x_{0_T}}\sqrt{a(x)}u|u'|dx + \int_{x_{0_T}}^{T}\sqrt{a(x)}u|u'|dx =$$

$$= \int_{-T}^{x_{0_T}}\sqrt{a(x)}uu'dx - \int_{x_{0_T}}^{T}\sqrt{a(x)}uu'dx \tag{2.25}$$

pois, como x_{0_T} é ponto de máximo, u é crescente de $-T$ à x_{0_T} e decrescente de x_{0_T} à T.
Voltando em (2.25) temos

$$= \int_{-T}^{x_{0_T}}\sqrt{a(x)}uu'dx - \int_{x_{0_T}}^{T}\sqrt{a(x)}uu'dx =$$

$$= \int_{-T}^{0}\sqrt{a(x)}uu'dx + \int_{0}^{x_{0_T}}\sqrt{a(x)}uu'dx - \int_{x_{0_T}}^{T}\sqrt{a(x)}uu'dx \geq$$

$$\geq \sqrt{a(0)}\int_{-T}^{0}\left(\frac{u^2}{2}\right)'dx + \sqrt{a(0)}\int_{0}^{x_{0_T}}\left(\frac{u^2}{2}\right)'dx - \sqrt{a(x_{0_T})}\int_{x_{0_T}}^{T}\left(\frac{u^2}{2}\right)'dx =$$

$$= \sqrt{a(0)}\int_{-T}^{x_{0_T}}\left(\frac{u^2}{2}\right)'dx - \sqrt{a(x_{0_T})}\int_{x_{0_T}}^{T}\left(\frac{u^2}{2}\right)'dx =$$

$$= \sqrt{a(0)}\left(\frac{u^2(x_{0_T})-u^2(-T)}{2}\right) - \sqrt{a(x_{0_T})}\left(\frac{u^2(T)-u^2(x_{0_T})}{2}\right) =$$

$$= (\sqrt{a(0)} + \sqrt{a(x_{0_T})})\frac{u^2(x_{0_T})}{2} - \sqrt{a(0)}\frac{u^2(-T)}{2} - \sqrt{a(x_{0_T})}\frac{u^2(T)}{2}.$$

Assim, aplicando o limite quando $T \longrightarrow \infty$ temos

$$\left((\sqrt{a(0)}+\sqrt{a(x_{0_T})})\frac{u^2(x_{0_T})}{2}-\sqrt{a(0)}\frac{u^2(-T)}{2}-\sqrt{a(x_{0_T})}\frac{u^2(T)}{2}\right) \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{a(0)} + \sqrt{a(x_{0_T})}}{2}\right)u^2(x_{0_T}).$$

Portanto,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{(p+1)}{p-1}C_T \geq \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\sqrt{a(0)} + \sqrt{a(x_{0_T})}}{2}\right)u^2(x_{0_T}).$$

Vimos, em (2.24), que $u(x_{0_T}) \geq \left[\frac{(p+1)a(x_{0_T})}{2b(x_{0_T})}\right]^{\frac{1}{p-1}}$, daí segue que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{(p+1)}{p-1}C_T \geq \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\sqrt{a(0)} + \sqrt{a(x_{0_T})}}{2}\right)u^2(x_{0_T}) \geq$$

$$\geq \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\sqrt{a(0)} + \sqrt{a(x_{0_T})}}{2}\right)\left[\frac{(p+1)a(x_{0_T})}{2b(x_{0_T})}\right]^{\frac{2}{p-1}},$$

e assim, por (2.22), temos que x_{0_T} pertence a um intervalo limitado.

■

Observação 2.4. *A condição (2.22) é satisfeita se, por exemplo,* $\lim_{x\to\pm\infty} a(x) = \infty$ *e* $b(x)$ *é limitada.*

Observação 2.5. *Ao invés de (2.21) poderíamos permitir uma condição mais geral*

$$(x-c)a'(x) \geq 0 \text{ e } (x-c)b'(x) \leq 0,$$

para algum $c \in I\!R$ *e para todo* $x \in I\!R$.

Lema 2.6. *Suponhamos que*

$$\liminf_{|x|\to\infty} \sqrt{a_0}\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > \lim_{T\to\infty} \frac{(p+1)}{p-1}C_T. \tag{2.26}$$

Então x_{0_T} *pertence à um intervalo limitado.*

Demonstração: De forma análoga ao lema anterior temos

$$
\begin{aligned}
\frac{(p+1)}{p-1}C_T > \int_{-T}^{T} \sqrt{a(x)}\left|\left(\frac{u^2}{2}\right)'\right|dx = \\
= \int_{-T}^{x_{0_T}} \sqrt{a(x)}\left|\left(\frac{u^2}{2}\right)'\right|dx + \int_{x_{0_T}}^{T} \sqrt{a(x)}\left|\left(\frac{u^2}{2}\right)'\right|dx \geq \\
\geq \min_{[-T,x_{0_T}]} \sqrt{a(x)}. \int_{-T}^{x_0}\left|\left(\frac{u^2}{2}\right)'\right|dx + \min_{[x_{0_T},T]} \sqrt{a(x)}. \int_{x_{0_T}}^{T}\left|\left(\frac{u^2}{2}\right)'\right|dx \geq \\
\geq \sqrt{a_0}u^2(x_{0_T}) \geq \sqrt{a_0}\left(\frac{a(x_{0_T})}{b(x_{0_T})}\right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Daí, por (2.26) e novamente pelo lema anterior temos que x_{0_T} pertence à um intervalo limitado.

■

3 TRAJETÓRIAS HOMOCLÍNICAS PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

Um dos principais objetivos desse trabalho é determinar soluções não triviais $u(t) \in H^1(I\!R, I\!R^n)$ do sistema

$$u'' - L(t)u + V_u(t,u) = 0, \ -\infty < t < \infty, \tag{3.1}$$

com

$$u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0. \tag{3.2}$$

No sistema (3.1), V_u é o gradiente de V com relação à variável u. Consideraremos

$$L(t) = [\ell_{ij}(t)] \tag{3.3}$$

uma matriz positiva definida e simétrica de classe $C^1(I\!R)$, $\alpha(t)$ uma função de classe $C(I\!R, I\!R)$ tal que $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$ para todo t em $I\!R$ e

$$(L(t)u, u) \geq \alpha(t)|u|^2, \tag{3.4}$$

onde $(\cdot\,,\cdot\,)$ é o produto escalar canônico de $I\!R^n$.

Tomaremos também $V(t,u) \in C^1(I\!R \times I\!R^n, I\!R)$ satisfazendo para alguma constante $\gamma > 2$

$$0 < \gamma V(t,\xi) \leq (V_\xi(t,\xi), \xi) \text{ para todo } \xi \in I\!R^n \backslash \{0\} \text{ e } t \in I\!R. \tag{3.5}$$

Analogamente ao Capítulo 2, aproximaremos o problema (3.1-3.2), para um similar, utilizando uma constante $T \geq 1$. Desta forma, iremos trabalhar com o seguinte problema:

$$u'' - L(t)u + V_u(t,u) = 0 \text{ para } t \in (-T,T) \text{ e } u(-T) = u(T) = 0. \tag{3.6}$$

Vale lembrar que, sob nossas condições, o problema acima possui uma solução não trivial $u = u_T$, que é um ponto crítico do funcional

$$J(u) = \int_{-T}^{T} \left[\frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u,u) - V(t,u) \right] dt,$$

e que $C_T = J(u_T)$ é não-crescente em T. Seja t_0 um ponto de máximo global de $|u_T|$ em $[-T,T]$. De forma análoga ao caso escalar, queremos restringir t_0 para uma região limitada. Para isso, assumiremos a existência de uma função $\beta : I\!R \longrightarrow I\!R$ e uma constante $t_1 > 0$ de modo que para $|t| > t_1$ temos

$$(L(t)u, u) > (V_u(t,u), u) \text{ sempre que } |u|^2 \leq \beta(t). \tag{3.7}$$

Teorema 3.1. *Seja $T \geq 1$. Sob as condições*

(i) *$L(t)$ é uma matriz positiva definida e simétrica, cujas entradas são de classe $C^1(\mathbb{R})$ e $L(-t) = L(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$;*

(ii) *$(L'(t)\xi, \xi) \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$;*

(iii) *$0 < \gamma V(\xi) \leq (\nabla V(\xi), \xi)$ para alguma constante $\gamma > 2$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.*

O sistema

$$u'' - L(t)u + \nabla V(u) = 0, \ t \in (-\infty, \infty) \tag{3.8}$$

com

$$u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0, \tag{3.9}$$

possui uma solução não trivial $u(t)$, com $u(t) = u(-t)$ para todo t.

Demonstração: Iniciaremos nossa demonstração mostrando que a condição (iii) nos garante que

$$\frac{V(t,\xi)}{|\xi|^2} \longrightarrow 0, \text{ quando } |\xi| \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Para isso, vamos escrever a condição (iii) em $r\xi$ com alguma constante $r > 0$. Temos

$$0 < \gamma V(r\xi) \leq (\nabla V(r\xi), r\xi),$$

donde

$$(\nabla V(r\xi), r\xi) \geq \gamma V(r\xi) \Rightarrow r(\nabla V(r\xi), \xi) \geq \gamma V(r\xi).$$

Assim,

$$r(\nabla V(r\xi), \xi) - \gamma V(r\xi) \geq 0 \Rightarrow (\nabla V(r\xi), \xi) - \frac{\gamma}{r} V(r\xi) \geq 0$$

e portanto

$$\frac{d}{dr} V(r\xi) - \frac{\gamma}{r} V(r\xi) \geq 0.$$

Multiplicando a inequação acima por $r^{-\gamma}$ temos

$$r^{-\gamma} \frac{d}{dr} V(r\xi) - \gamma r^{-\gamma-1} V(r\xi) \geq 0,$$

e integrando sobre $(\varepsilon, 1)$ com $0 < \varepsilon < 1$, obtemos

$$\int_\varepsilon^1 \Big(r^{-\gamma} \frac{d}{dr} V(r\xi) - \gamma r^{-\gamma-1} V(r\xi) \Big) dr \geq 0,$$

donde

$$\int_\varepsilon^1 \frac{d}{dr} \Big(r^{-\gamma} V(r\xi) \Big) dr \geq 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$r^{-\gamma} V(r\xi) \Big|_\varepsilon^1 \geq 0,$$

donde
$$V(\xi) - \varepsilon^{-\gamma} V(\varepsilon\xi) \geq 0,$$
ou seja,
$$V(\xi) - \frac{V(\varepsilon\xi)}{\varepsilon^{\gamma}} \geq 0.$$
Tomando ξ tal que $|\xi| = 1$ e definindo $\eta = \varepsilon\xi$ temos $|\eta| = |\varepsilon\xi| = |\varepsilon|.|\xi| = \varepsilon$, pois $\varepsilon > 0$. Daí, segue que
$$V(\xi) - \frac{V(\varepsilon\xi)}{\varepsilon^{\gamma}} = V(\xi) - \frac{V(\eta)}{|\eta|^{\gamma}} \geq 0,$$
donde
$$V(\xi) \geq \frac{V(\eta)}{|\eta|^{\gamma}}.$$
Portanto,
$$0 < \frac{V(\eta)}{|\eta|^2} \leq \frac{V(\eta)}{|\eta|^{\gamma}} \leq \quad \text{constante, para } |\eta| \text{ suficientemente pequeno.}$$
Assim, temos que $\dfrac{V(\xi)}{|\xi|^2} \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow 0$, pois $\gamma > 2$.
Aproximaremos a solução de (3.8-3.9) pelo problema
$$u_T'' - L(t)u_T + \nabla V(u_T) = 0 \text{ para } t \in (-T, T) \text{ e } u_T(-T) = u_T(T) = 0 \tag{3.11}$$
com
$$u_T(-t) = u_T(t) \text{ para todo } t \in I\!R. \tag{3.12}$$
Para isso, vamos mostrar que existe $\delta > 0$, de tal forma que qualquer solução não trivial de (3.11-3.12) satisfaça
$$|u_T(0)| > \delta \text{ independente do } T \text{ escolhido.} \tag{3.13}$$
Para demonstrar a inequação acima, vamos introduzir a função "energia" para a solução $u_T(t)$ de (3.11),
$$E(t) = \frac{1}{2}|u_T'(t)|^2 - \frac{1}{2}(L(t)u_T(t), u_T(t)) + V(u_T(t)), \ \forall\ t \in [0, T].$$
Derivando $E(t)$ temos
$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}(u_T'', u_T') + \frac{1}{2}(u_T', u_T'') - \frac{1}{2}((L(t)u_T)', u_T) - \frac{1}{2}(L(t)u_T, u_T') + \nabla V(u_T)u_T' \\ &= (u_T', u_T'') - \frac{1}{2}(L'(t)u_T + L(t)u_T', u_T) - \frac{1}{2}(L(t)u_T, u_T') + (\nabla V(u_T), u_T') \\ &= (u_T', u_T'') - \frac{1}{2}(L'(t)u_T, u_T) - \frac{1}{2}(L(t)u_T', u_T) - \frac{1}{2}(L(t)u_T, u_T') + (\nabla V(u_T), u_T'). \end{aligned}$$
Como $L(t)$ é simétrica, temos que $(L(t)u_T', u_T) = (L(t)u_T, u_T')$. Assim
$$\begin{aligned} E'(t) &= (u_T', u_T'') - \frac{1}{2}(L'(t)u_T, u_T) - \frac{1}{2}(L(t)u_T, u_T') - \frac{1}{2}(L(t)u_T, u_T') + (\nabla V(u_T), u_T') \\ &= -\frac{1}{2}(L'(t)u_T, u_T) + (u_T', u_T'' - \frac{1}{2}L(t)u_T - \frac{1}{2}L(t)u_T + \nabla V(u_T)) \\ &= -\frac{1}{2}(L'(t)u_T, u_T) + (u_T', u_T'' - L(t)u_T + \nabla V(u_T)). \end{aligned}$$

Daí, usando a equação (3.11) e a condição (ii), temos

$$E'(t) = -\frac{1}{2}(L'(t)u_T, u_T) \leq 0, \text{ para todo } t \in [0, T]. \tag{3.14}$$

Como $E(t)$ é decrescente em $[0, T]$ temos

$$E(0) \geq E(T) = \frac{1}{2}|u_T'(T)|^2 - \frac{1}{2}(L(T)u_T(T), u_T(T)) + V(u_T(T)) = \frac{1}{2}|u_T'(T)|^2 \geq 0.$$

Mas $u_T(t)$ é par, daí segue que $u_T'(t)$ é ímpar, ou seja, $u_T'(0) = -u_T'(-0) = -u_T'(0)$. Logo $u_T'(0) = 0$, e portanto segue que

$$E(0) = \frac{1}{2}|u_T'(0)|^2 - \frac{1}{2}(L(0)u_T(0), u_T(0)) + V(u_T(0)) =$$

$$= V(u_T(0)) - \frac{1}{2}(L(0)u_T(0), u_T(0)) \geq 0,$$

devido ao fato de $E(0) \geq E(T) \geq 0$. Portanto, exite $C > 0$ tal que

$$V(u_T(0)) \geq \frac{1}{2}(L(0)u_T(0), u_T(0)) \geq C|u_T(0)|^2, \text{ pois } (L(t)u_T, u_T) \geq \alpha(t)|u_T|^2 \text{ e } \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0.$$

Se $u_T(0) = 0$, teríamos $E(t) = 0$ para todo t em $[0, T]$, e portanto, u_T seria identicamente nula. Daí, segue que $u_T(0) \neq 0$ e

$$\frac{V(u_T(0))}{|u_T(0)|^2} \geq C. \tag{3.15}$$

Comparando (3.15) com (3.10) podemos concluir (3.13).
De fato, se $|u_T(0)| \longrightarrow 0$, teríamos $\dfrac{V(u_T(0))}{|u_T(0)|^2} \longrightarrow 0$ por (3.10), contradizendo (3.15).
Consideremos agora uma sequência $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termos positivos e crescente, ou seja, $0 < T_k < T_{k+1}$ para todo k tal que $T_k \longrightarrow \infty$, quando $k \longrightarrow \infty$.
Vamos denotar por E_k o subespaço de $H_0^1(-T_k, T_k)$ formado pelas funções pares.
Considerando os funcionais $f_k : E_k \longrightarrow I\!R$, definidos por

$$f_k(u) = \int_{-T_k}^{T_k} \left[\frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u, u) - V(u)\right]dt,$$

podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha em $f_k(u)$, criando $u_k \in E_k$, que é uma solução não trivial par de

$$u_k'' - L(t)u_k + \nabla V(u_k) = 0 \text{ para } t \in (-T_k, T_k) \tag{3.16}$$

com

$$u_k(-T_k) = u_k(T_k) = 0. \tag{3.17}$$

Os valores críticos $C_k = f_k(u_k) > 0$ não aumentam em k, e $u_k(0) > \delta$ uniformemente em k devido à (3.13), isso significa que $u_k(0)$ não se anula quando passamos o limite quando

$k \longrightarrow \infty$.

Observe que multiplicando o sistema (3.16) por u_k temos

$$(u_k'', u_k) + (L(t)u_k, u_k) - (\nabla V(u_k), u_k) = 0. \tag{3.18}$$

Integrando sobre $(-T_k, T_k)$ obtemos

$$\int_{-T_k}^{T_k} [|u_k'|^2 + (L(t)u_k, u_k) - (\nabla V(u_k), u_k)]dt = 0. \tag{3.19}$$

Como $C_k = f_k(u_k)$ temos

$$C_k = f_k(u_k) = \int_{-T_k}^{T_k} \left[\frac{1}{2}|u_k'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u_k, u_k) - V(u_k)\right]dt,$$

donde

$$\int_{-T_k}^{T_k} \left[\frac{1}{2}|u_k'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u_k, u_k)\right]dt = \int_{-T_k}^{T_k} V(u_k)dt + C_k. \tag{3.20}$$

Pelo item (iii) temos

$$\int_{-T_k}^{T_k} V(u_k)dt + C_k \leq \frac{1}{\gamma}\int_{-T_k}^{T_k} (\nabla V(u_k), u_k)dt + C_k. \tag{3.21}$$

Observe que de (3.19) temos

$$\int_{-T_k}^{T_k} [|u_k'|^2 + (L(t)u_k, u_k)]dt = \int_{-T_k}^{T_k} (\nabla V(u_k), u_k)dt.$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{1}{2}$ obtém-se

$$\int_{-T_k}^{T_k} \left[\frac{1}{2}|u_k'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u_k, u_k)\right]dt = \int_{-T_k}^{T_k} \frac{1}{2}(\nabla V(u_k), u_k)dt.$$

Substituindo a equação acima em (3.20) e usando (3.21) temos

$$\int_{-T_k}^{T_k} \frac{1}{2}(\nabla V(u_k), u_k)dt \leq \frac{1}{\gamma}\int_{-T_k}^{T_k} (\nabla V(u_k), u_k)dt + C_k.$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\int_{-T_k}^{T_k} (\nabla V(u_k), u_k)dt \leq C_k.$$

Por (3.19) segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\int_{-T_k}^{T_k} [|u_k'|^2 + (L(t)u_k, u_k)]dt \leq C_k \leq C_1, \text{ pois } C_k \text{ não aumentam em } k.$$

Como $\gamma > 2$ temos que $\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{2}$, e portanto $\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} > 0$.

Temos também que

$$(L(t)u_k, u_k) \geq C|u_k|^2, \text{ com } C > 2.$$

Logo,

$$|u_k'|^2 + C|u_k|^2 \leq |u_k'|^2 + (L(t)u_k, u_k).$$

Consequentemente

$$\int_{-T_k}^{T_k} |u_k'|^2 + C|u_k|^2 dt \leq \int_{-T_k}^{T_k} [|u_k'|^2 + (L(t)u_k, u_k)]dt.$$

Portanto

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \int_{-T_k}^{T_k} |u_k'|^2 + C|u_k|^2 dt \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \int_{-T_k}^{T_k} [|u_k'|^2 + (L(t)u_k, u_k)]dt \leq C_k \leq C_1. \quad (3.22)$$

Assim, concluímos que

$$\int_{-T_k}^{T_k} |u_k'|^2 + |u_k|^2 dt \leq C \text{ uniformemente em } k,$$

e portanto que u_k é uniformemente limitada em k na norma H^1.
Daí, podemos concluir que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência (u_{k_j}) que converge uniformemente em intervalos limitados para uma função $u(t)$.
Podemos expressar u_{k_j}'' da seguinte forma:

$$u_{k_j}'' = L(t)u_{k_j} - \nabla V(u_{k_j}). \quad (3.23)$$

Logo, concluímos que a sequência (u_{n_k}'') e também (u_{n_k}'), convergem uniformemente em intervalos limitados.
Para todos os naturais k e j temos que $u_{k_j} : I\!R \longrightarrow I\!R^n$, assim

$$u_{k_j}(t) = (u_{k_j}^1(t), \ldots, u_{k_j}^n(t)),$$

com $u_{k_j}^1, \ldots, u_{k_j}^n : I\!R \longrightarrow I\!R$.
Como

$$u_{k_j}^i(t) = \int_{-T_{k_{j-1}}}^{t} (t-\xi)u_{k_j}^{i''}(\xi)d\xi + (t - T_{k_{j-1}})u_{k_j}^{i'}(-T_{k_{j-1}}) + u_{k_j}^i(-T_{k_{j-1}})$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^n(t)) \in C^2(-\infty, \infty)$, e que $u_{k_j}^{i''} \longrightarrow u^{i''}$ uniformemente em intervalos limitados para todo $i = 1, \ldots, n$.
Assim, podemos passar o limite em (3.16), e concluir que $u(t)$ é solução de (3.8).
Escrevendo

$$((u^1)^2(t), \ldots, (u^n)^2(t)) = \left(\int_0^t 2u^1 u^{1'} dt + (u^1)^2(0), \ldots, \int_0^t 2u^n u^{n'} dt + (u^n)^2(0)\right), \quad (3.24)$$

concluímos que os limites de $u^i(t)$ quando $t \longrightarrow \pm\infty$ e $i = 1, \ldots, n$ existem. A única possibilidade é $u^i(\pm\infty) = 0$.
Observe que, de (3.8) temos

$$|u''| = |L(t)u - \nabla V(u)| \leq C \text{ para todo real } t \text{ e alguma constante } C > 0. \quad (3.25)$$

Note também que $u^{i'}(\pm\infty) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ pois, caso contrário existiriam $\varepsilon n > 0$ e uma sequência $t_n \longrightarrow \infty$ tal que

$$|u^{i'}(t_n)| \geq \varepsilon \text{ para todo } n \text{ e para todo } i = 1, \ldots, n. \tag{3.26}$$

Por (3.25) podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|u^{i'}(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } t \in (t_n - \delta, t_n + \delta),\ i = 1, \ldots, n \text{ e todo } n. \tag{3.27}$$

Isso implicaria

$$\int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} |u'(t)|^2 dt \text{ torna-se grande com } k. \tag{3.28}$$

Seja j um natural tal que $j > k$ e é tão grande que $u_{n_j}(t)$ e $u'_{n_j}(t)$ estão uniformemente próximos de $u(t)$ e $u'(t)$ respectivamente no intervalo $(-T_{n_k}, T_{n_k})$.
Usando (3.22) temos

$$\int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} |u'|^2 dt \simeq \int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} |u'_{n_j}|^2 dt \leq \int_{-T_{n_j}}^{T_{n_j}} |u'_{n_j}|^2 dt \leq C,$$

que é uma contradição por (3.28).
Portanto, o problema (3.8-3.9) possui uma solução não trivial. Essa solução é par, pois é limite de uma sequência de funções pares.

$\blacksquare$

Observação 3.2. *Considerando* $u : I\!R \longrightarrow I\!R^2$, $L(t) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ *com a uma constante positiva e* $V(u) = V(u_1, u_2) = \dfrac{u_1^4 + u_2^4}{2}$ *temos um exemplo do teorema acima. Nesse caso, a solução de (3.8) será determinada no Exemplo 4.2.*

A seguir, encontra-se um exemplo que mostram que o resultado do teorema acima não pode ser transferido para sistemas.

Exemplo 3.3. *Seja* (a, b) *um intervalo limitado e considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} u'' - 2u + u(u^2 + v^2) = 0 \ \textit{para}\ x \in (a, b) \ \textit{e}\ u(a) = u(b) = 0 \\ v'' - v + v(u^2 + v^2) = 0 \ \textit{para}\ x \in (a, b) \ \textit{e}\ v(a) = v(b) = 0. \end{cases}$$

Note que não existem $u > 0$ *e* $v > 0$ *em* (a, b) *que satisfaçam o sistema acima. De fato, podemos considerar a primeira e a segunda equação como equações lineares da seguinte forma, respectivamente*

$$u'' + c(x)u = 0 \ \textit{e}\ v'' + d(x)v = 0.$$

Uma vez que $d(x) > c(x)$, *concluímos que o sistema não possui solução utilizando o Teorema de Comparação de Sturm.*

Observe também que esse sistema é do tipo (3.6) com $V = \dfrac{1}{4}(u^4 + v^4) + \dfrac{1}{2}u^2v^2$.
De fato,

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{4u^3}{4} + \frac{2uv^2}{2} = u^3 + uv^2 = u(u^2 + v^2),$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{4v^3}{4} + \frac{2u^2v}{2} = v^3 + u^2v = v(v^2 + u^2)$$

e considerando $L(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *temos*

$$(u'', v'') + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \nabla V(u, v) = (0, 0).$$

4 PROVA DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo serão demonstrados os dois principais teoremas, utilizando todos os resultados apresentados.

Teorema 4.1. *Suponhamos que $a(x)$ e $b(x)$ satisfaçam quaisquer condições do Lema 2.3 ou do Lema 2.6, então o problema*

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0 \text{ para } x \in (-\infty, \infty) \text{ e } p \in (1, \infty) \tag{4.1}$$

e

$$u(-\infty) = u'(-\infty) = u(\infty) = u'(\infty) = 0, \tag{4.2}$$

possui uma solução positiva.

Demonstração: Vimos, no Lema 2.1, que o problema (2.3) dado por

$$u'' - a(x)u + b(x)u^p = 0 \text{ para } x \in (-T, T) \text{ e } u(T) = u(-T) = 0$$

possui uma solução positiva para qualquer $T \geq 1$.
Para demonstrar esse teorema, usaremos o resultado enunciado acima. Para isso, consideremos uma sequência monótona $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujos termos são maiores ou iguais à 1 e é tal que $T_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Denotaremos por u_n a solução variacional positiva do problema definido em $(-T_n, T_n)$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$u_n'' - a(x)u_n + b(x)u_n^p = 0 \text{ para } x \in (-T_n, T_n) \text{ e } u(-T_n) = u(T_n) = 0. \tag{4.3}$$

Fazendo um abuso de notação, vamos definir a solução acima em toda reta da seguinte forma:

$$u_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{se } x \in [-T_n, T_n] \\ 0, & \text{se } x \notin [-T_n, T_n]. \end{cases}$$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo x, temos

$$(u_n'^2(x) + a(x)u_n^2(x)) \geq 0.$$

Fixado $m \in \mathbb{N}$, e usando a estimativa (2.4), para $n > m$ segue que

$$\int_{-T_m}^{T_m} (u_n'^2(x) + a(x)u_n^2(x))dx \leq \int_{-T_n}^{T_n} (u_n'^2(x) + a(x)u_n^2(x))dx \leq C \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

o que implica um limite uniforme em $H^1[-T_n, T_n]$.
Observe que, pela Desigualdade de Hölder temos

$$u_n(x_2) - u_n(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u_n'(x)dx \leq \sqrt{x_2 - x_1}\left(\int_{x_1}^{x_2} u_n'^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Assim, concluímos que a sequência $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e uniformemente limitada em cada intervalo $[-T_n, T_n]$. Por isso possui uma subsequência uniformemente convergente em cada intervalo $[-T_n, T_n]$. Consideremos então $(u^1_{n_k})$ uma subsequência de (u_n) que converge em $[-T_1, T_1]$. Tome esta subsequência em $[-T_2, T_2]$ e selecione uma subsequência adicional $(u^2_{n_k})$ de $(u^1_{n_k})$ que converge uniformemente em $[-T_2, T_2]$. Repita o processo para todo n, e depois tome uma sequência diagonal (u_{n_k}) que consiste em $u^1_{n_1}, u^2_{n_2}, u^3_{n_3}, \ldots$. Uma vez que a sequência diagonal é uma subsequência de $(u^p_{n_k})$ para qualquer $p \geq 1$, temos que ela converge uniformemente em qualquer intervalo limitado para uma função $u(x)$.
Podemos expressar u''_{n_k} da seguinte forma:

$$u''_{n_k} = a(x)u_{n_k} - b(x)u^p_{n_k}. \tag{4.6}$$

Daí, concluímos que a sequência (u''_{n_k}) e também (u'_{n_k}), convergem uniformemente em intervalos limitados.
Como

$$u_{n_k}(x) = \int_{-T_{n_{k-1}}}^{x} (x-\xi)u''_{n_k}(\xi)d\xi + (x - T_{n_{k-1}})u'_{n_k}(-T_{n_{k-1}}) + u_{n_k}(-T_{n_{k-1}}), \tag{4.7}$$

temos que $u(x) \in C^2(-\infty, \infty)$, e que $u''_{n_k} \longrightarrow u''$ uniformemente em intervalos limitados. Assim, podemos passar o limite em (4.3), e concluir que $u(x)$ é solução de (4.1).
Escrevendo

$$u^2(x) = \int_0^x 2uu'dx + u^2(0) \tag{4.8}$$

concluímos que os limites de $u(x)$ quando $x \longrightarrow \pm\infty$ existem $(uu' \in L^1(-\infty, \infty))$. A única possibilidade é $u(\pm\infty) = 0$.
Observe que, de (4.1) temos

$$|u''(x)| = |a(x)u(x) - b(x)u^p(x)| \leq C \text{ para todo real } x \text{ e alguma constante } C. \tag{4.9}$$

Note também que $u'(\pm\infty) = 0$, pois, caso contrário, existiria um $\varepsilon > 0$ e uma sequência $x_n \longrightarrow \infty$ tal que

$$|u'(x_n)| \geq \varepsilon \text{ para todo } n. \tag{4.10}$$

Por (4.9) podemos encontrar um $\delta > 0$ de tal modo que

$$|u'(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } x \in (x_n - \delta, x_n + \delta) \text{ e todo } n, \tag{4.11}$$

isso implicaria $\int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} u'^2(x)dx$ tornar-se grande com k suficientemente grande. Mais precisamente temos

$$\int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} u'^2(x)dx \geq 2C > C \text{ para todo } k \geq k_0 \in \mathbb{N}, \tag{4.12}$$

onde C é a constante de (4.4). Seja j um natural tal que $j > k$ suficientemente grande tal que $u_{n_j}(x)$ e $u'_{n_j}(x)$ estão uniformemente próximos de $u(x)$ e $u'(x)$ respectivamente no intervalo $(-T_{n_k}, T_{n_k})$. Usando (4.4) temos

$$\int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} u'^2 dx \simeq \int_{-T_{n_k}}^{T_{n_k}} u'^2_{n_j} dx \leq \int_{-T_{n_j}}^{T_{n_j}} u'^2_{n_j} dx \leq C, \tag{4.13}$$

o que é uma contradição por (4.12).

Resta mostrarmos que $u(x) > 0$. Como $u_n(x) > 0$ já temos $u(x) \geq 0$ para todo x. Consideremos x_{0_n} como sendo o ponto de máximo de $u_n(x)$. Temos, pelos Lemas 2.3 e 2.6 que x_{0_n} pertence a um intervalo limitado. Vamos chamá-lo de I.

Pela equação (2.3) temos

$$u''_n(x_{0_n}) - a(x_{0_n})u_n(x_{0_n}) + b(x_{0_n})u^p_n(x_{0_n}) = 0.$$

Como x_{0_n} é máximo, temos que $u''_n(x_{0_n}) \leq 0$, portanto para que a equação acima seja satisfeita é necessário que

$$-a(x_{0_n})u_n(x_{0_n}) + b(x_{0_n})u^p_n(x_{0_n}) \geq 0.$$

Assim temos

$$b(x_{0_n})u^p_n(x_{0_n}) \geq a(x_{0_n})u_n(x_{0_n}),$$

ou seja,

$$\frac{u^p_n(x_{0_n})}{u_n(x_{0_n})} \geq \frac{a(x_{0_n})}{b(x_{0_n})}.$$

Portanto

$$u_n(x_{0_n}) \geq \left(\frac{a(x_{0_n})}{b(x_{0_n})}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.14}$$

Ao longo de uma subsequência $x_{0_{n_k}} \longrightarrow y \in I$ e pela inequação acima, temos

$$\begin{aligned} u_{n_k}(x_{0_{n_k}}) &\geq \left(\frac{a(x_{0_{n_k}})}{b(x_{0_{n_k}})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\geq \min_I \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $k \longrightarrow \infty$, obtemos

$$u(y) \geq \min_I \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0. \tag{4.15}$$

Uma vez que $u(x)$ é não-negativa e não trivial, ela é positiva pelo Princípio do Máximo. Logo, o problema (4.1-4.2) possui uma solução positiva.

$\blacksquare$

Exemplo 4.2. *Consideremos*

$$u'' - a^2u + 2u^3 = 0 \tag{4.16}$$

com $x \in (-\infty, \infty)$, $u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0$ *e* a *uma constante positiva. Comparando a equação (4.16) com a equação (2.1) temos que*

$$a(x) = a^2,\ \ b(x) = 2 \ \text{ e } p = 3$$

Observe que

$$xa'(x) = x(a^2)' = 0 \ \text{ e } xb'(x) = x(2)' = 0,$$

logo $a(x)$ *e* $b(x)$ *satisfazem as condições (2.21) do Lema 2.3. Logo, pelo Teorema 4.1 o problema acima possui uma solução positiva. Vamos agora determiná-la.*
Multiplicando a equação (4.16) por u' *temos*

$$u''u' - a^2uu' + 2u^3u' = 0.$$

Assim,

$$\left(\frac{u'^2}{2}\right)' - a^2\left(\frac{u^2}{2}\right)' + 2\left(\frac{u^4}{4}\right)' = 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{u'^2}{2}\right)' - a^2\left(\frac{u^2}{2}\right)' + \left(\frac{u^4}{2}\right)' = 0.$$

Reescrevendo a equação acima, temos

$$\left(\frac{u'^2 - a^2u^2 + u^4}{2}\right)' = 0,$$

e consequentemente

$$(u'^2 - a^2u^2 + u^4)' = 0.$$

Integrando a expressão acima, segue que

$$u'^2 - a^2u^2 + u^4 = C_1.$$

Como $u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0$ *temos que* $C_1 = 0$, *logo*

$$u'^2 - a^2u^2 + u^4 = 0.$$

Assim,

$$u'^2 = u^2(a^2 - u^2),$$

ou seja,

$$u' = u\sqrt{a^2 - u^2}.$$

Mas note que

$$\frac{-u'}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -1.$$

Como $(arcsech\ x)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ *temos*

$$\left(\frac{1}{a}arcsech\ \frac{u}{a}\right)' = -1,$$

donde

$$arcsech\ \frac{u}{a} = a(-x-C).$$

Consequentemente

$$u = \frac{a}{cosh\ a(-x-C)}.$$

Como $cosh(x)$ *é uma função par, temos*

$$u(x) = \frac{a}{cosh\ a(x+C)}.$$

Considerando $a = 1$ *e* $C = 0$ *temos o seguinte gráfico:*

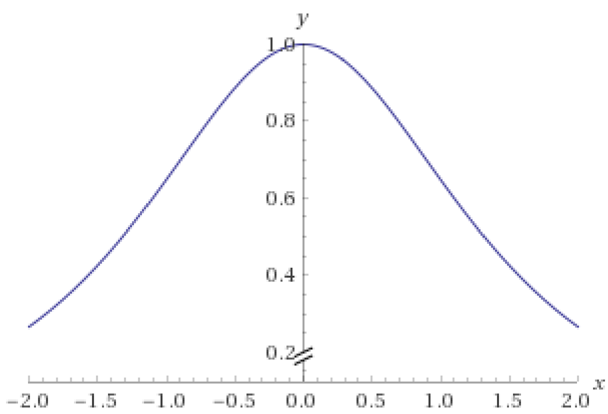

Figura 2 – Gráfico da função $u(x) = \frac{1}{\cosh x}$

Teorema 4.3. *Para o problema (3.1-3.2), que é dado por*

$$u'' - L(t)u + V_u(t,u) = 0 \text{ para } t \in (-\infty, \infty)$$

e

$$u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = 0,$$

suponhamos as condições (3.3), (3.5) e (3.7) e, além disso, consideremos também que a condição seja verificada

$$\liminf_{t\to\infty} \alpha_0\beta(t) > \lim_{T\to\infty} \frac{2\gamma}{\gamma-2} C_T. \tag{4.17}$$

Então, o problema (3.1-3.2) possui uma solução não trivial.

Demonstração: Assim como foi feito anteriormente, vamos aproximar nosso problema por (3.6) utilizando uma sequência monótona $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $T_k \longrightarrow \infty$, ou seja, trabalharemos com o seguinte problema:

$$u''_{T_k} - L(t)u_{T_k} + V_{u_{T_k}}(t, u_{T_K}) = 0 \text{ para } t \in (-T_k, T_k) \text{ e } u_{T_k}(-T_k) = u_{T_k}(T_k) = 0. \tag{4.18}$$

Vimos, no Teorema 3.1, que as soluções u_{T_k} de (4.18) são uniformemente limitadas em k na norma H^1. Daí, podemos concluir que existe uma subsequência de $(u_{T_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em intervalos limitados para uma função $u(t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, que é uma solução de (3.1) (e também de (4.18)).
Resta então, mostrar que $u(t)$ é não trivial.
Vamos definir

$$q(t) := |u(t)|^2 = \left(\sqrt{(u(t), u(t))}\right)^2 = (u(t), u(t)).$$

Calculando sua primeira derivada, obtemos

$$q'(t) = (u'(t), u(t)) + (u(t), u'(t)) = 2(u'(t), u(t)).$$

Derivando novamente obtemos

$$q''(t) = 2(u''(t), u(t)) + 2(u'(t), u'(t)) = 2(u(t), u''(t)) + 2|u'(t)|^2. \tag{4.19}$$

Seja t_0 um ponto de máximo de $q(t)$, então temos que $q''(t_0) \le 0$.
Note que

$$q''(t_0) \le 0 \Rightarrow 2(u(t_0), u''(t_0)) \quad + \quad \underbrace{2|u'(t_0)|^2}_{=0 \text{ pois } t_0 \text{ é ponto de máximo}} \quad \le 0.$$

Portanto

$$(u(t_0), u''(t_0)) \le 0. \tag{4.20}$$

Podemos assumir que $|t_0| > t_1$, caso contrário, t_0 já pertenceria à um intervalo limitado.
Multiplicando a i-ésima equação em (3.1) por $u_i(t_0)$ e somando-as para todo $i = 1, \dots, n$, obtemos, devido à (4.20),

$$-(L(t_0)u(t_0), u(t_0)) + (V_u(t_0, u(t_0)), u(t_0)) \ge 0. \tag{4.21}$$

Em (3.7) temos

$$(L(t)u,u) > (V_u(t,u),u) \text{ desde que } |u|^2 \leq \beta(t) \text{ e } |t| > t_1 > 0. \tag{4.22}$$

Comparando a desigualdade (4.21) com (4.22) podemos concluir que

$$|u(t_0)|^2 > \beta(t_0). \tag{4.23}$$

Foi mostrado no Teorema 3.1 que

$$\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{2}|u_T'|^2 + \frac{1}{2}(L(t)u_T,u_T)\right]dt \leq \frac{2\gamma}{\gamma-2}C_T \leq \frac{2\gamma}{\gamma-2}C_1, \tag{4.24}$$

onde, $C_T = J(u_T)$.
Por outro lado, prosseguindo como no Lema 2.6, e, usando (4.23) e (4.24), temos

$$\frac{2\gamma}{\gamma-2}C_T \geq \int_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha(t)}|u_iu_i'|dt \geq \sqrt{\alpha_0}\int_{-T}^{T}\left|\frac{d}{dt}.\frac{1}{2}|u|^2\right|dt \geq \sqrt{\alpha_0}|u(t_0)|^2 > \sqrt{\alpha_0}\beta(t_0). \tag{4.25}$$

A condição (4.17) implica t_0 permanecer em um intervalo limitado quando $T_k \longrightarrow \infty$. Como no Teorema 4.1, existe $\bar{t}$ tal que

$$|u(\bar{t})|^2 > \liminf_{t\to\infty}\beta(t) > 0. \tag{4.26}$$

Lembrando que na segunda desigualdade usamos (4.17) e o fato de $C_T > 0$, uma vez que C_T é o valor de $J(u)$ no Teorema do Passo da Montanha.
De (4.17) tem-se

$$\liminf_{t\to\infty}\alpha_0\beta(t) > \lim_{T\to\infty}\frac{2\gamma}{\gamma-2}C_T,$$

assim,

$$\liminf_{t\to\infty}\beta(t) > \frac{1}{\alpha_0}\lim_{T\to\infty}\frac{2\gamma}{\gamma-2}C_T > 0.$$

Consequentemente $u(t)$ é uma solução não trivial de (3.1). Como no Teorema 3.1, $u(t)$ também satisfaz (3.2). Logo o problema (3.1-3.2) possui solução não trivial.

$\blacksquare$

Observação 4.4. *A condição (4.17) pode ser generalizada da seguinte forma*

$$\liminf_{t\to\infty}\beta(t)\min_{(-t,t)}\alpha(s) > \lim_{T\to\infty}\frac{2\gamma}{\gamma-2}C_T,$$

pois $\alpha(s) \geq \alpha_0 > 0$ *para todo* s.

Observação 4.5. *Se* $|V_u(t,u)| < C_0u^{1+\delta}$ *uniformemente em* $t \in I\!R$ *para algumas constantes* $C_0, \delta > 0$, *então*

$$(L(t)u,u) \geq \alpha(t)|u|^2 \geq C_0|u|^{2+\delta} > (V_u(t,u),u),$$

fixado $\alpha(t) \geq C_0|u|^\delta$.
Daí, podemos tomar $\beta(t) = \left(\frac{\alpha(t)}{C_0}\right)^{\frac{2}{\delta}}$, *e se tivermos* $\lim_{|t|\to\infty}\alpha(t) = \infty$, *então a condição (4.17) é válida e o nosso teorema se aplica.*

Observação 4.6. *Nossos cálculos numéricos para o problema*

$$u'' - 2u + u^3 = 0 \text{ em } (-T, T) \text{ e } u(-T) = u(T) = 0$$

sugerem que $\lim_{T \to 0} C_T = \infty$, *enquanto* $\lim_{T \to \infty} C_T > 0$.

5 TRAJETÓRIAS HETEROCLÍNICAS ÍMPARES PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES

Neste capítulo serão analisadas as soluções heteroclínicas ímpares para o prolema

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (-\infty, \infty),\ u(\pm\infty) = \pm 1 \text{ e } u'(\pm\infty) = 0.$$

Essas soluções são obtidas seguindo a mesma linha de raciocínio do capitulo anterior. Analisaremos o problema quando x pertence à um intervalo limitado da forma $(-T, T)$ com $T \geq 1$ e depois faremos $T \longrightarrow \infty$.

Vamos iniciar nossa discussão com um exemplo.

Exemplo 5.1. *Consideremos o seguinte problema*

$$u'' + u - u^3 = 0 \textit{ para } x \in (-\infty, \infty) \textit{ com } u(\pm\infty) = \pm 1 \textit{ e } u'(\pm\infty) = 0. \tag{5.1}$$

Multiplicando a equação

$$u'' + u - u^3 = 0$$

do problema (5.1) por u' temos

$$u'.u'' + u'.u - u'.u^3 = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Reescrevendo

$$\left(\frac{u'^2}{2}\right)' + \left(\frac{u^2}{2}\right)' - \left(\frac{u^4}{4}\right)' = 0,$$

temos

$$\left(\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right)' = 0.$$

Integrando a equação acima obtemos

$$\frac{u'^2 + u^2}{2} - \frac{u^4}{4} = C_1,$$

ou seja,

$$u'^2 + u^2 - \frac{u^4}{2} = 2C_1 = C.$$

Como $u(\pm\infty) = 1$ e $u'(\pm\infty) = 0$, quando $x \longrightarrow +\infty$ temos

$$0 + 1 - \frac{1}{2} = C,$$

ou seja,

$$C = \frac{1}{2}.$$

Assim temos,

$$u'^2 + u^2 - \frac{u^4}{2} = \frac{1}{2},$$

donde

$$u'^2 = \frac{u^4}{2} - u^2 + \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$u'^2 = \left(\frac{u^2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Consequentemente

$$u' = \pm\left(\frac{u^2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Reescrevemos temos

$$\frac{u'}{u^2 - 1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5.2}$$

Como sabemos que

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} arctgh\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

e considerando em (5.2) $\dfrac{u'}{1 - u^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *temos*

$$arctgh(u) + C_2 = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

ou seja,

$$arctgh(u) = \frac{x}{\sqrt{2}} - C_2.$$

Escolhendo $C_2 = 0$ *temos*

$$arctgh(u) = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

o que implica

$$u(x) = tgh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

O problema (5.1) é um exemplo de (1.3). Encontramos uma solução não trivial ímpar que pode ser representada da seguinte forma:

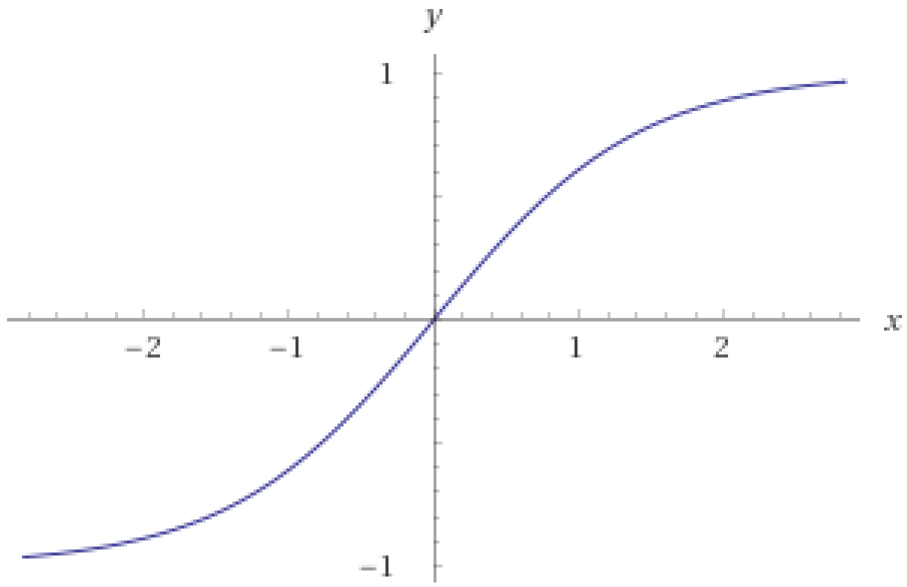

Figura 3 – Gráfico de $u(x) = tgh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Queremos obter um resultado semelhante à equação (1.3) para o seguinte problema:

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (-\infty, \infty),\ u(\pm\infty) = \pm 1 \text{ e } u'(\pm\infty) = 0, \tag{5.3}$$

onde p um número real maior que 1 e a função $a(x) \geq a_0 > 0$ é de classe $C^1(-\infty, \infty)$, com

$$a'(x) < 0 \text{ para quase todo } x > 0 \tag{5.4}$$

e

$$a(\infty) > 0. \tag{5.5}$$

Para isso, devemos obter a solução de (5.1) como um limite quando $T \longrightarrow \infty$ de soluções de

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (-T, T) \text{ e } u(\pm T) = \pm 1. \tag{5.6}$$

Observemos que a solução do problema acima dependerá, por sua vez, do seguinte problema:

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ em } (0, T),\ u(0) = 0 \text{ e } u(T) = 1. \tag{5.7}$$

Para que tudo isso seja feito, vamos trabalhar com alguns lemas.

Lema 5.2. *O problema (5.7) possui, para cada $T \geq 0$ uma única solução positiva, que é uma função crescente.*

Demonstração: Observemos que $u \equiv 1$ é uma supersolução de (5.7) e que $u = \alpha x$, para α suficientemente pequeno é uma subsolução de (5.7).
Como $0 <$ subsolução de $u \leq u \leq$ supersolução de $u = 1$, as soluções de (5.7) estão entre 0 e 1.
Temos que $u > 0$ pela sua subsolução, vamos mostrar agora que $u < 1$. Suponhamos que exista $x_0 \in (0, T)$ tal que $u(x_0) = 1$. Como $u \equiv 1$ é supersolução segue que existe $\delta > 0$ tal que x_0 é máximo local em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e, por (5.7) temos que $u''(x_0) = 0$ logo, pelo Princípio do Máximo $u(x)$ é constante, ou seja, $u \equiv 1$. Mas isso é uma contradição, pois $u(0) = 0$. Logo $0 < u < 1$.
O método das supersoluções e subsoluções nos garantem a existência de uma solução máxima $u(x)$, ou seja, $u(x) \geq v(x)$ para todo $x \in (0, T)$ quando $v(x)$ é qualquer outra solução de (5.7).
Observe que se multiplicarmos a equação (5.7) por uma solução v temos

$$u''v + a(x)(u - |u|^{p-1}u)v = 0. \tag{5.8}$$

Como v também é uma solução de (5.7) temos

$$v'' + a(x)(v - |v|^{p-1}v) = 0. \tag{5.9}$$

Multiplicando a equação acima por u temos

$$v''u + a(x)(v - |v|^{p-1}v)u = 0. \tag{5.10}$$

Subtraindo (5.10) de (5.8) temos

$$u''v - v''u + a(x)(u - |u|^{p-1}u)v - a(x)(v - |v|^{p-1}v)u = 0.$$

Como $0 < u\ ,\ v < 1$, podemos retirar o módulo da equação acima e assim obtermos

$$u''v - v''u + a(x)(u - u^p)v - a(x)(v - v^p)u = 0.$$

Reescrevendo temos

$$u''v - v''u + a(x)uv - a(x)u^p v - a(x)vu + a(x)v^p u = 0.$$

Portanto,

$$a(x)(uv^p - u^p v) + u''v - v''u = 0,$$

onde

$$a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1}) + u''v - v''u = 0. \tag{5.11}$$

Considerando o sistema
$$\begin{cases} (u'v)' &= u''v + u'v' \\ (uv')' &= u'v' + uv'', \end{cases}$$
segue que
$$(u'v)' - (uv')' = u''v - v''u.$$
Usando a expressão acima em (5.11) temos
$$a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1}) + (u'v)' - (v'u)' = 0. \tag{5.12}$$
Integrando (5.12) de 0 à T segue que
$$\int_0^T a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + \int_0^T (u'v)'dx - \int_0^T (v'u)'dx = 0.$$
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos concluir
$$\int_0^T a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u'(T)v(T) - u'(0)v(0) - v'(T)u(T) + v'(0)u(0) = 0. \tag{5.13}$$
Como u e v são soluções de (5.7), temos que
$$u(0) = v(0) = 0 \text{ e } u(T) = v(T) = 1. \tag{5.14}$$
Daí, substituindo (5.14) em (5.13) obtemos,
$$\int_0^T a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u'(T) - v'(T) = 0. \tag{5.15}$$
Consideremos uma função H definida em $(0, T)$ dada por $H(x) = u(x) - v(x)$.
Como $u(x) \geq v(x)$ temos que $u(x) - v(x) = H(x) \geq 0$ para todo x em $(0, T)$.
Observemos também que de (5.14) segue
$$H(0) = u(0) - v(0) = 0 \; e \; H(T) = u(T) - v(T) = 0.$$
Abaixo, segue o esboço do gráfico de H traçado apenas nas proximidades do ponto $(T, 0)$.

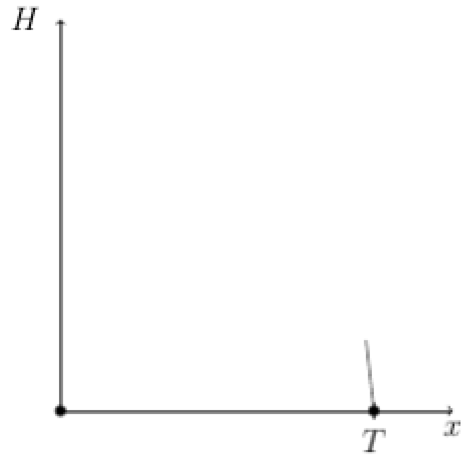

Figura 4 – Gráfico de $H(x)$ apenas nas proximidades de $x = T$.

Pelo gráfico, podemos perceber que

$$H'(T) = u'(T) - v'(T) \leq 0.$$

Como $0 < v \leq u$ e $p \geq 1$ segue que $v^{p-1} \leq u^{p-1}$, ou seja, $v^{p-1} - u^{p-1} \leq 0$ para todo x em $(0, T)$. Assim temos

$$a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1}) \leq 0 \text{ em } (0, T).$$

Integrando temos

$$\int_0^T a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx \leq 0.$$

Por (5.15) temos

$$0 = \underbrace{\int_0^T a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx}_{\leq 0} + \underbrace{u'(T) - v'(T)}_{\leq 0} = 0.$$

Logo $\int_0^T a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx = u'(T) - v'(T) = 0$, e essa igualdade só é válida quando $u \equiv v$. Portanto, (5.7) possui uma única solução.

Suponhamos que $u(x)$ é não-monótona. Então u possui um ponto $\overline{x}$ de mínimo local em $(0, T)$ (Veja Figura 5). Portanto $u''(\overline{x}) \geq 0$ e $u(\overline{x}) - u^p(\overline{x}) > 0$ pois, $0 < u(x) < 1$ para todo x em $(0, T)$, e daí segue que

$$\underbrace{u''(\overline{x})}_{\geq 0} + \underbrace{a(\overline{x})}_{> 0} \underbrace{(u(\overline{x}) - u^p(\overline{x}))}_{> 0} > 0,$$

que é uma contradição, pois u é uma solução do problema (5.7). Logo u é uma solução positiva e crescente de (5.7).

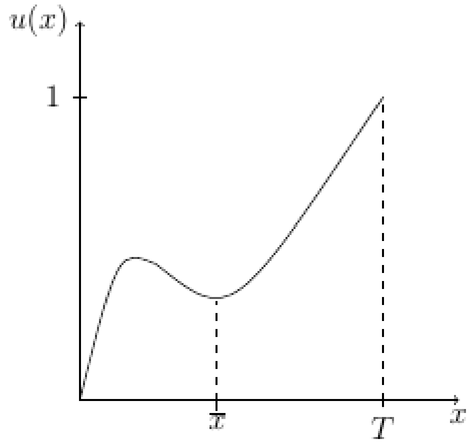

Figura 5 – $u(x)$ não-monótona com $\overline{x}$ seu ponto de mínimo local.

■

Lema 5.3. *O problema (5.6) dado por*

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \textit{ para } x \in (-T, T) \textit{ e } u(\pm T) = \pm 1$$

tem uma única solução, que é uma função ímpar crescente.

Demonstração: Consideremos $u(x)$ uma solução de (5.7) obtida no lema anterior, ou seja,

$$\begin{cases} u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (0, T), \\ u(0) = 0, \ u(T) = 1, \\ u \text{ é positiva }, \\ u \text{ é crescente.} \end{cases}$$

Vamos estender essa solução para $[-T, 0)$ com $h(x) := -u(-x)$.
Essa função é ímpar por construção e crescente pois

$$h(x) = (-u(-x))' = -u'(-x).(-x)' = u'(-x) > 0, \text{ pois } u \text{ é crescente .}$$

A demonstração da unicidade é análoga ao lema anterior, sendo -1 e 1 subsolução e supersolução respectivamente.

■

Teorema 5.4. *O problema (5.3), dado por:*

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (-\infty, \infty),\ u(\pm\infty) = \pm 1 \text{ e } u'(\pm\infty) = 0$$

tem sob as condições

1. $a'(x) < 0$ *para quase todo* $x > 0$,

2. $a(\infty) > 0$,

uma única solução, que é uma função ímpar e estritamente crescente.

Demonstração: Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona tal que $T_n \longrightarrow \infty$ e consideremos o problema (5.6) no intervalo $(-T_n, T_n)$, ou seja,

$$u'' + a(x)(u - |u|^{p-1}u) = 0 \text{ para } x \in (-T_n, T_n) \text{ e } u(\pm T_n) = \pm 1. \tag{5.16}$$

Pelo Lema 5.3, o problema acima possui uma única solução que é uma função ímpar e crescente. Vamos denotar essa solução por $u_n(x)$. Como visto nas demonstrações dos lemas anteriores temos que $|u_n(x)| < 1$, assim temos

$$|u_n''(x)| = |a(x)(u_n - |u_n|^{p-1}u_n)| = |a(x)|.|u_n(x)|.|1 - |u_n(x)|^{p-1}| \leq C, \tag{5.17}$$

para todo $x \in (-T_n, T_n)$ uniformemente em $n \in \mathbb{N}$.
Como $u_n(x)$ é crescente, por (5.17) temos

$$|u_n'(x)| \leq C \text{ para todo } x\ \in (-T_n, T_n) \text{ uniformemente em } n. \tag{5.18}$$

De fato, observe que se $u_n'(x)$ se tornasse grande para alguns valores de x, então, por (5.17), $u_n'(x)$ ficaria grande em um longo intervalo, o que contradiz a variação total de $u_n(x)$ que é 2.
Usaremos agora um processo diagonal no qual existe uma função $u(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ tal que ao longo de subsequências da sequência de soluções $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ apresentadas acima temos, para todo $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x) \text{ e } u'_{nk} \longrightarrow u'(x) \tag{5.19}$$

convergem uniformemente em intervalos limitados, onde $u(x)$ é uma solução de (5.3).
Seja $(u^1_{n_k})$ uma subsequência de (u_n) que converge em $[-T_1, T_1]$. Consideremos esta subsequência em $[-T_2, T_2]$ e escolha uma subsequência adicional $(u^2_{n_k})$ de $(u^1_{n_k})$ que converge uniformemente em $[-T_2, T_2]$. De forma análoga, consideremos uma subsequência $(u^3_{n_k})$ de $(u^2_{n_k})$ que converge uniformemente em $[-T_3, T_3]$. Vamos repetir esse processo para todo n e tomar uma sequência diagonal (u_{n_k}) formada por $(u^1_{n_1}, u^2_{n_2}, u^3_{n_3}, \cdots)$. Como a sequência diagonal é uma subsequência de $(u^p_{n_k})$ para qualquer $p \geq 1$, temos que ela converge

uniformemente em qualquer intervalo limitado para uma função $u(x)$. Expressando u''_{n_k} da equação (5.16) temos

$$u''_{n_k} = a(x)u_{n_k}(|u_{n_k}|^{p-1} - 1).$$

Daí, concluímos que a sequência (u''_{n_k}) e também (u'_{n_k}) convergem uniformemente em intervalos limitados.

Escrevendo

$$u_{n_k}(x) = \int_{-T_{n_{k-1}}}^{x} (x-\xi)u''_{n_k}(\xi)d\xi + (x - T_{n_{k-1}})u'_{n_k}(-T_{n_{k-1}}) + u_{n_k}(-T_{n_{k-1}})$$

podemos concluir que $u(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ e que $u''_{n_k} \longrightarrow u''$ uniformemente em intervalos limitados.

Vamos agora mostrar que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$u'_n \geq C_0 \text{ uniformemente em } n. \tag{5.20}$$

Para isso, consideremos a função "energia" quando $x \geq 0$ (onde $u_n(x) \geq 0$) dada por

$$E(x) = \frac{1}{2}u_n'^2 + a(x)\left(\frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^{p+1}}{p+1}\right). \tag{5.21}$$

Derivando a equação acima temos

$$E'(x) = u'_n u''_n + a'(x)\left(\frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^{p+1}}{p+1}\right) + a(x)(u_n u'_n - u_n^p u'_n) =$$

$$= u'_n(\underbrace{u''_n + a(x)(u_n - u_n^p)}_{=\ 0\ por\ (5.6)}) + a'(x)\left(\frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^{p+1}}{p+1}\right).$$

Assim,

$$E'(x) = a'(x)\left(\frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^{p+1}}{p+1}\right) < 0, \tag{5.22}$$

pois $a'(x) < 0$ e $\dfrac{u_n^{p+1}}{p+1} < \dfrac{u_n^2}{2}$ devido ao fato de $0 < u_n < 1$ e $p > 1$.

Dessa forma,

$$E(0) = \frac{1}{2}u_n'^2(0) + a(0)\left(\frac{u_n^2(0)}{2} - \frac{u_n^{p+1}(0)}{p+1}\right) = \frac{1}{2}u_n'^2(0)$$

visto que $u_n(0) = 0$, uma vez que u_n é solução do problema (5.7) e,

$$E(T_n) = \frac{1}{2}u_n'^2(T_n) + a(T_n)\left(\frac{u_n^2(T_n)}{2} - \frac{u_n^{p+1}(T_n)}{p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}u_n'^2(T_n) + \underbrace{a(T_n)}_{>\ 0}\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)}_{\geq\ 0}.$$

Vimos em (5.22) que a função "energia" é decrescente, e por hipótese temos também que $a'(\infty) < 0$ para quase todo $x > 0$, logo

$$E(0) = \frac{1}{2}u_n'^2(0) > E(T_n) > a(\infty)\frac{p-1}{2(p+1)}. \tag{5.23}$$

Assim, por (5.23) e (5.20) temos que $u(x) \neq 0$.
Por (5.19), segue que $u_n'(x) \geq 0$. Como $-1 \leq u(x) \leq 1$, temos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)$ existe, e a única possibilidade é que ele seja ± 1, uma vez que $a(\infty) > 0$, pois $u''(x)$ deve ser pequeno para x grande. Como $u(x)$ não decresce, segue que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u'(x) = 0$.
Note que $u(x)$ está aumentando estritamente, pois, caso contrário, teríamos $u'(x_0) = 0$ para algum $x_0 > 0$, e então, integrando a equação (5.3) sobre (x_0, ∞) teríamos uma contradição.
Passando agora para a unicidade, seja $v(x)$ uma outra solução do problema (5.3), ou seja,

$$v'' + a(x)(v - |v|^{p-1}v) = 0 \text{ para } x \in (-\infty, \infty),\ v(\pm\infty) = \pm 1 \text{ e } v'(\pm\infty) = 0. \tag{5.24}$$

Temos 4 possíveis casos:

1. Suponhamos agora que $u(x)$ e $v(x)$ se interceptam pelo menos duas vezes em $[0, \infty)$, ou seja, podemos encontrar $0 \leq x_1 < x_2 < \infty$, de tal forma que $u(x_1) = v(x_1) = u_1,\ u(x_2) = v(x_2) = u_2$ e $u(x) > v(x)$ em (x_1, x_2).

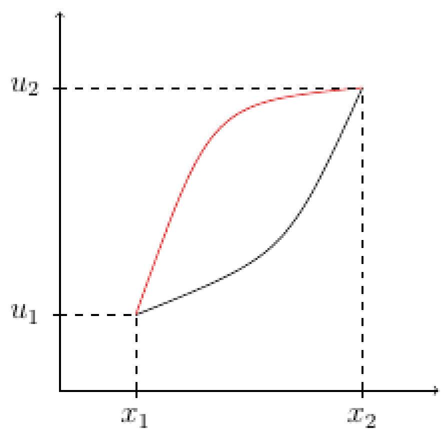

Figura 6 – Esboço de $u(x)$ e $v(x)$.

Integrando (5.12) sobre (x_1, x_2) temos

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + \int_{x_1}^{x_2} (u'v)'dx - \int_{x_1}^{x_2} (v'u)'dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) - v'(x_2)u(x_2) + v'(x_1)u(x_1) = 0.$$

Reescrevendo temos

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u_2u'(x_2) - u_1u'(x_1) - u_2v'(x_2) + u_1v'(x_1) = 0,$$

e consequentemente

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u_2(u'(x_2) - v'(x_2)) - u_1(u'(x_1) - v'(x_1)) = 0,$$

que é uma contradição, pois $u'(x_1) > v'(x_1)$ e $u'(x_2) < v'(x_2)$.

2. Suponhamos agora que $u(x)$ e $v(x)$ se interceptam uma única vez em $[0, \infty)$, digamos em x_1, ou seja, $u(x_1) = v(x_1) = u_1$. Integrando (5.12) sobre (x_1, R) temos:

$$\int_{x_1}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + \int_{x_1}^{R} (u'v)'dx - \int_{x_1}^{R} (v'u)'dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima, segue que

$$\int_{x_1}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u'(R)v(R) - u'(x_1)v(x_1) - v'(R)u(R) + v'(x_1)u(x_1) = 0.$$

Portanto,

$$\int_{x_1}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u'(R)v(R) - u_1u'(x_1) - v'(R)u(R) + u_1v'(x_1) = 0.$$

Quando $R \longrightarrow \infty$ temos:

$$0 < \underbrace{u_1}_{\geq\, 0}\underbrace{(v'(x_1) - u'(x_1))}_{<\, 0} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{x_1}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx}_{<\, 0} = 0,$$

o que é uma contradição.

3. Admitamos que $u(x)$ e $v(x)$ possuem apenas pontos negativos de interseção. Como u e v são funções ímpares temos que $u(x) = -u(-x)$ e $v(x) = -v(-x)$, que também são soluções de (5.3). Daí, podemos fazer o mesmo que foi feito nos casos anteriores.

4. Suponhamos agora que $u(x)$ e $v(x)$ não se interceptam. Integrando (5.12) sobre $(-R, R)$ temos

$$\int_{-R}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + \int_{-R}^{R} (u'v)'dx - \int_{-R}^{R} (v'u)'dx = 0.$$

Portanto

$$\int_{-R}^{R} a(x)uv(v^{p-1}-u^{p-1})dx = -u'(R)v(R)+u'(-R)v(-R)+v'(R)u(R)-v'(-R)u(-R).$$

Usando o fato de que a derivada de uma função ímpar é uma função par, temos que $u'(-R) = u'(R)$ e $v'(-R) = v'(R)$, daí segue que

$$\int_{-R}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + u'(R)v(R) + u'(R)v(R) - v'(R)u(R) - v'(R)u(R) = 0,$$

ou seja,

$$\int_{-R}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx + 2u'(R)v(R) - 2v'(R)u(R) = 0.$$

Fazendo $R \longrightarrow \infty$ temos:

$$0 < \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} a(x)uv(v^{p-1} - u^{p-1})dx = 0,$$

o que é uma contradição.

Portando, $u \equiv v$, e assim concluímos que o problema (5.3) possui uma única solução, que é uma função ímpar e estritamente crescente.

$\blacksquare$

Corolário 5.5. *Considere o seguinte problema*

$$u'' + a(x)(u - u^p) = 0 \ \textit{para} \ x \in (0,\infty), \ u(0) = \infty, \ u(\infty) = 1 \ \textit{e} \ u'(\infty) = 0, \tag{5.25}$$

com $a(x) \in C^1[0,\infty)$ *satisfazendo:*

1. $a'(x) < 0$ *para quase todo* $x > 0$,

2. $a(\infty) > 0$

e p *um número real tal que* $p \geq 1$.
Então, o problema (5.25) tem uma única solução positiva, que é uma função estritamente crescente.

6 UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA SISTEMAS ELÍPTICOS

Inicialmente vamos nos recordar que um domínio é um subconjunto Ω de $I\!R^n$ aberto e conexo. Esse domínio será de classe C^k quando sua fronteira é um gráfico de uma função de classe C^k.

Seja Ω um domínio limitado em $I\!R^d$. Consideraremos o sistema de m equações com m funções não conhecidas $u^1(x), u^2(x), \ldots, u^k(x)$,

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)u_{ij}^k + \sum_{\ell=1}^{m} b_{k\ell}(x)u^\ell = f_k(x,u), \;\; x \in \Omega \;e\; k = 1, \cdots, m, \tag{6.1}$$

com $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Consideremos também que para alguma constante $\theta > 0$ tem-se

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \text{ para todo } x \in \Omega \; e \; \xi \in I\!R^d. \tag{6.2}$$

Vamos denotar $u(x) = (u^1(x), u^2(x), \ldots, u^m(x))$ por $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$.

Não iremos estabelecer nenhuma suposição em relação à suavidade das funções $a_{ij}(x)$, $b_{k\ell}(x)$ e $f_k(x,u)$, porém iremos assumir que (6.1) possui uma solução $u^k \in C^2(\Omega)$.

Teorema 6.1. *Seja $B = [b_{k\ell}(x)]$ uma matriz de ordem m. Suponhamos que $\frac{1}{2}(B + B^T)$ é semidefinida negativa, ou seja,*

$$\sum_{k,\ell=1}^{m} b_{k\ell}(x)u^k u^\ell \leq 0 \textit{ para todo } u \in I\!R^m \textit{ e } x \in \Omega. \tag{6.3}$$

Consideremos também

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x,u)u^k \geq 0 \textit{ para todo } u \in I\!R^m \textit{ e } x \in \Omega, \tag{6.4}$$

e que, para cada $x \in \Omega$ pelo menos uma das desigualdades acima ((6.3) ou (6.4)) é estrita. Então $|u(x)|^2 = \sum_{k=1}^{m}(u^k)^2(x)$ não possui ponto de máximo dentro de Ω.

Demonstração: Denotaremos

$$q(x) = |u(x)|^2 = (u(x), u(x)) = (u^1(x))^2 + (u^2(x))^2 + \ldots + (u^m(x))^2 = u^{1^2} + u^{2^2} + \ldots + u^{m^2},$$

e seja $x_0 \in \Omega$ um ponto de máximo de q. Calculando $q_{ij}(x)$ temos

$$q_i(x) = 2u^1u_i^1 + 2u^2u_i^2 + \ldots + 2u^m u_i^m \Rightarrow$$

$$q_{ij}(x) = 2u_j^1 u_i^1 + 2u^1 u_{ij}^1 + \ldots + 2u_j^m u_j^m + 2u^m u_{ij}^m \Rightarrow$$

$$q_{ij}(x) = \sum_{i,j=1}^{m} 2u_i^k u_j^k + \sum_{k=1}^{m} 2u^k u_{ij}^k. \tag{6.5}$$

Observemos que, calculando (6.1) no ponto x_0, temos

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)u_{ij}^k + \sum_{\ell=1}^{m} b_{k\ell}(x_0)u^\ell = f_k(x_0, u), \ k = 1, \cdots, m. \tag{6.6}$$

Multiplicando por u_k, obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)u_{ij}^k u_k + \sum_{\ell=1}^{m} b_{k\ell}(x_0)u^\ell u_k = f_k(x_0, u)u_k, \ k = 1, \cdots, m. \tag{6.7}$$

Somando (6.6) e (6.7) temos

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)u_{ij}^k u^k}_{(*)} + \underbrace{\sum_{k,\ell=1}^{m} b_{k\ell}(x_0)u^\ell u^k}_{\leq\, 0 \text{ por } (6.3)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} f_k(x_0, u)u^k}_{\geq\, 0 \text{ por } (6.4)}. \tag{6.8}$$

Como x_0 é ponto de máximo de $q(x)$, segue que

$$q_{ij}(x_0) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} 2u_i^k(x_0)u_j^k(x_0)}_{=\,0} + \sum_{k=1}^{m} 2u^k(x_0)u_{ij}^k(x_0) = \sum_{k=1}^{m} 2u^k(x_0)u_{ij}^k(x_0). \tag{6.9}$$

Voltando na parcela (*) da equação (6.8), temos

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)q_{ij}(x_0) \geq 0, \tag{6.10}$$

e por (6.2) tem-se

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)u_i^k u_j^k \geq \theta|\nabla u^k|^2 \geq 0. \tag{6.11}$$

Concluímos assim, usando (6.5) que

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)u_{ij}^k(x_0)u^k(x_0) \leq 0. \tag{6.12}$$

Novamente, multiplicando (6.1) aplicada em x_0 por u_k obtemos

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0)u_{ij}^k u^k}_{\leq\, 0 \text{ por } (6.12)} + \underbrace{\sum_{k,\ell=1}^{m} b_{k\ell}(x_0)u^\ell u^k}_{\leq\, 0 \text{ por } (6.3)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} f_k(x_0, u)u^k}_{\geq\, 0 \text{ por } (6.4)} \tag{6.13}$$

que é uma contradição pois, pelo menos uma das desigualdades (6.3) ou (6.4) é estrita.

Logo, $|u(x)|^2$ não possui ponto de máximo dentro de Ω.

■

Corolário 6.2. *Suponhamos que as condições homogêneas de Dirichlet são impostas*

$$u^k(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, \ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.14}$$

Então, caso exista, a solução trivial é a única solução possível de (6.1) e (6.14).

Observação 6.3. *Se soluções não-negativas de (6.1) forem consideradas, ou seja, soluções nas quais $u^k(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e $k = 1, 2, \ldots, m$, então (6.4) decorrerá da condição*

$$f_k(x, u) \geq 0 \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^m_+, \ k = 1, 2, \ldots, m \text{ e } x \in \Omega.$$

7 APÊNDICE

Neste apêndice, são apresentados alguns resultados utilizados durante todo o trabalho.

7.1 TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Definição 7.1. *Um espaço vetorial X é um espaço de Banach se X é um espaço vetorial normado e completo.*

Definição 7.2. *Seja X um espaço de Banach e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de φ quando existe $u_0 \in X$ tal que $\varphi(u_0) = c$ e $\varphi'(u_0) = 0$. Denotaremos o conjunto dos pontos críticos de φ da seguinte forma*

$$K_c = \{u \in X; \varphi'(u) = 0 \text{ e } \varphi(u) = c\}.$$

Definição 7.3. *Consideremos $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. φ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) quando toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\varphi(u_n)$ é limitada e $\varphi'(u_n) \longrightarrow 0$ possui uma subsequência convergente.*

Lema 7.4 (Lema da Deformação)**.** *Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Suponhamos que $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de φ, então, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$ temos:*

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ *para todo* $u \notin \varphi^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$;

(iii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;

(iv) $\eta(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ *é homeomorfismo.*

Demonstração: Veja [4], página 22.

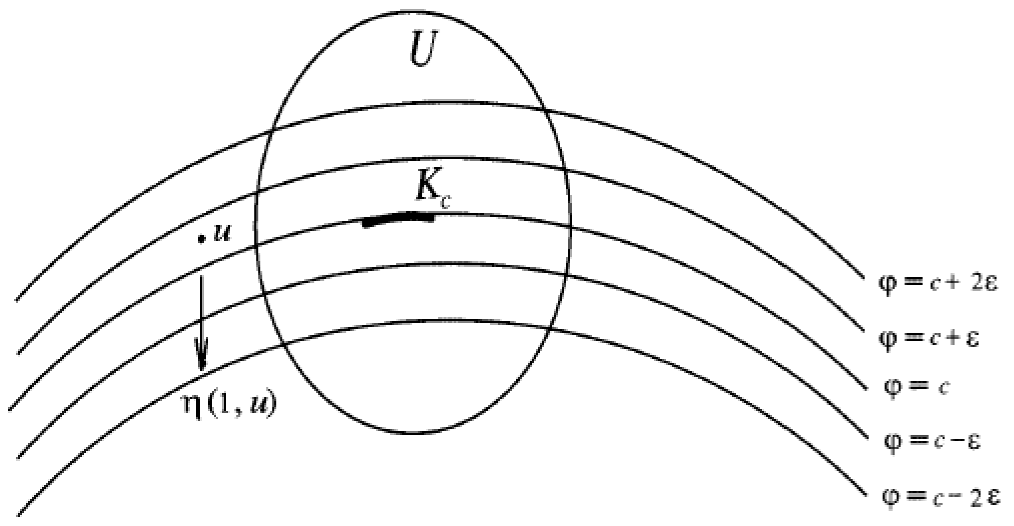

Figura 7 – Ilustração do Lema da Deformação.

Teorema 7.5. *Seja X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, I\!R)$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale. Se $e \in X$ e $0 < r < \|e\|$ é tal que*

$$a = \max\{\varphi(0), \varphi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) = b, \tag{7.1}$$

então

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

é um valor crítico de φ com $c \geq b$, onde Γ é o conjunto dos caminhos que unem os pontos 0 e e, ou seja,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0 \ e\ \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Inicialmente observemos que $\gamma([0,1]) \cap \partial B_r$ é não-vazio para qualquer $\gamma \in \Gamma$ pois, por hipótese, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = e$ e $0 < r < \|e\|$.
Assim temos

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \geq b = \inf_{\partial B_r} \varphi,$$

de modo que $c \geq b$.
Suponhamos que c não seja um valor crítico. Então, pelo Lema da Deformação enunciado acima existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$ tal que

$$\eta(t,u) = u \ se\ u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]),\ t \in [0,1], \tag{7.2}$$

(Lembrando que $a < b$ por (7.1) e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$) e

$$\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}. \tag{7.3}$$

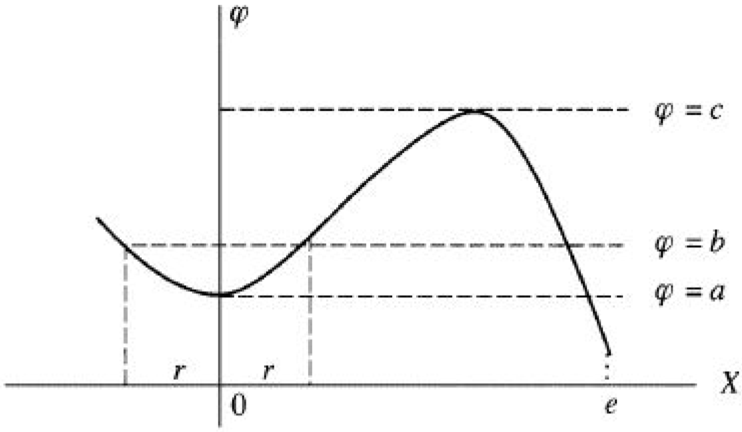

Figura 8 – Ilustração do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, pela definição de c como sendo o ínfimo em Γ, podemos escolher $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon, \tag{7.4}$$

e definir o caminho $\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t))$.
Por (7.2) e o fato de que $2\varepsilon < b - a$, temos que $\hat{\gamma} \in \Gamma$.
De fato, $\hat{\gamma}(0) = 0$ e $\hat{\gamma}(1) = \eta(1, e) = e$ uma vez que $\varphi(0), \varphi(e) \leq a < b - 2\varepsilon$.
Mas (7.3) e (7.4) nos garantem que

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\hat{\gamma}(t)) \leq c - \varepsilon,$$

o que contradiz a definição de c. Portanto, c é um valor crítico de φ.

■

7.2 TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE STURM

Teorema 7.6. *Sejam u e v soluções reais não triviais de*

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0 \ \ e \tag{7.5}$$

$$(p(x)v')' + q_1(x)v = 0, \tag{7.6}$$

onde p, p', q e q_1 são contínuas, $p(x) > 0$ e $q_1(x) \geq q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $x_1 < x_2$ são zeros consecutivos de u então v se anula pelo menos uma vez em (x_1, x_2), a menos que nesse intervalo tenhamos $q(x) \equiv q_1(x)$ e $v(x) \equiv ku(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Veja [16], página 104.

7.3 PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Teorema 7.7. *Suponha que* $u \in C^2(\Omega)$ *satisfaça* $u'' = 0$. *Se* Ω *é conexo e existe um ponto* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $u(x_0) = \max_{\Omega} u$, *então* u *é constante. Em outras palavras, uma função tal que* $u'' = 0$ *não pode assumir um máximo no interior a menos que ela seja constante.*

Demonstração: Veja [2], página 104.

Teorema 7.8. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Seja* L *um operador estritamente elíptico tal que* $c \leq 0$.
Se $Lu \geq 0$ *em* Ω, *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Se $Lu \leq 0$ *em* Ω, *então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-.$$

Consequentemente, se $Lu = 0$ *em* Ω, *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Demonstração: Veja [2], página 137.

Teorema 7.9 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Seja* L *um operador estritamente elíptico tal que* $c = 0$. *Suponha que* u *satisfaz* $Lu \geq 0$ *[*$Lu \leq 0$*] em* Ω. *Se* u *atinge o seu máximo [mínimo] no interior de* Ω, *então* u *é constante.*
Se $c \leq 0$ *e* u *atinge um máximo não-negativo [mínimo não-positivo] no interior de* Ω, *então* u *é constante.*
Independentemente do sinal de c, *se* u *atinge um máximo igual a* 0 *[mínimo igual a* 0*] no interior de* Ω, *então* u *é constante.*

Demonstração: Veja [2], página 140.

7.4 SUBSOLUÇÕES E SUPERSOLUÇÕES

Consideremos o seguinte problema unidimensional de valor de fronteira

$$\begin{cases} Lu(r) = q(r)f(u), \ r \in (0,1) \\ u'(0) = 0, \ u(1) = \alpha, \end{cases} \tag{7.7}$$

com $Lu = (pu')'$, sendo:

(i) p e q são funções contínuas em $[0,1]$ e positivas em $(0,1]$;

(ii) $\lim_{r\to 0} \frac{1}{p(r)} \int_0^r q(s)ds = 0.$

Definição 7.10. *A função* $\underline{u} \in C^0([0,1])$ *é uma subsolução do problema (7.7) se satisfaz*

$$\begin{cases} L\underline{u} \geq q(r)f(\underline{u}), \ r \in [0,1] \\ \underline{u}'(0) \leq 0, \ \underline{u}(1) \leq \alpha. \end{cases}$$

Uma função $\overline{u} \in C^0([0,1])$ *é uma supersolução do problema (7.7) se satisfaz*

$$\begin{cases} L\overline{u} \leq q(r)f(\overline{u}), \ r \in [0,1] \\ \overline{u}'(0) \geq 0, \ \overline{u}(1) \geq \alpha. \end{cases}$$

Teorema 7.11. *Suponhamos que* f *seja uma função lipschitziana crescente. Sejam* $\underline{u}$ *e* $\overline{u}$ *subsolução e supersolução de (7.7), com* $\underline{u}'(0) = 0 = \overline{u}'(0)$*. Então (7.7) possui uma única solução* u *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*.*

Demonstração: Veja [10], página 13.

Definição 7.12. *A variação total de uma função* $f : D \longrightarrow I\!R$ *em um intervalo* $[a,b] \subseteq D$ *é dada por*

$$var_{[a,b]}(f) = \sup \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

As variações positivas e negativas de uma função $f : D \longrightarrow I\!R$ *em um intervalo* $[a,b] \subseteq D$ *são definidas, respectivamente, como*

$$var^+_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{(+)} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \ \ e$$

$$var^-_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{(-)} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Em todos os casos o supremo é tomado sob todas as possíveis partições $x_1, x_2, \ldots$ *do intervalo* $[a,b]$, $(+)$ *significa para todo i tal que* $f(x_1) \geq f(x_{i-1})$ *e* $(-)$ *significa para todo i tal que* $f(x_1) \leq f(x_{i-1})$*.*

7.5 PROPRIEDADES ELEMENTARES DA TOPOLOGIA FRACA

Seja X um espaço normado e X' o dual de X. Considere a família

$$\mathfrak{F} = \{f : X \longrightarrow I\!R; \ f \in X'\} = X'$$

Definição 7.13. *A topologia fraca de* X *é a topologia* $\sigma(X, X')$ *em* X *induzida por* X'*.*

Teorema 7.14. *Seja* (x_n) *uma sequência de um espaço normado* E*. Temos*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *se, e somente se,* $(f, x_n) \longrightarrow (f, x), \ \forall \ f \in X'$*;*

(ii) *Se* $x_n \longrightarrow x$ *fortemente, então* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente em* $\sigma(E, E')$*;*

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente em* $\sigma(E, E')$*, então* $\|x_n\|$ *é limitado e* $\|x\| \leq \liminf \|x\|$*;*

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente em* $\sigma(E, E')$ *e se* $f_n \longrightarrow f$ *fortemente em* E'*, ou seja,* $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$*, então* $(f_n, x_n) \longrightarrow (f, x)$*.*

Demonstração: Veja [3], página 53.

7.6 OS ESPAÇOS L_p

Definição 7.15. *Seja* $1 \leq p < \infty$*. Assim definimos*

$$L_p(\Omega) = \{[u];\ u : \Omega \longrightarrow I\!R \text{ é } uma\ função\ mensurável \text{ à } Lebesgue\ e\ \int_\Omega |u(t)|^p dt < \infty\}$$

como sendo o espaço das classes de funções p-integráveis.

O espaço vetorial das classes de funções p-integráveis definido acima, é um espaço normado e sua norma $\|\cdot\|_{L_p} : L_p(\Omega) \longrightarrow I\!R$ é definida da seguinte forma

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_\Omega |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 7.16 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções de* L^1*. Suponhamos que*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *quase sempre em* Ω *;*

(ii) *Existe uma função* $g \in L^1$ *tal que, para cada* n *temos* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *quase sempre em* Ω*.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$*.*

Demonstração: Veja [3], página 84.

Teorema 7.17. *Seja* (f_n) *uma sequência em* L^p *e* $f \in L^p$ *tal que* $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$*. Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que*

(i) $f_{n_k} \longrightarrow f(x)$ *quase sempre em* Ω*;*

(ii) $|f_{n_k}| \leq h(x)$ *para todo* k *e quase sempre em* Ω*, com* $h \in L^p$*.*

Demonstração: Veja [3], página 91.

Teorema 7.18 (Teorema da Representação de Riez)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e seja* $\varphi \in (L^p)'$*. Então existe* $u \in L^{p'}$ *tal que*

$$\varphi(f) \equiv (\varphi, f) = \int uf, \ \forall \ f \in L^p.$$

Além disso temos

$$\|u\|_{L_{p'}} = \|\varphi\|_{(L_p)'}.$$

Demonstração: Veja [3], página 95.

Teorema 7.19 (Desigualdade de Hölder para $p > 1$)**.** *Se* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$*, onde* $p > 1$ *e* $q = \dfrac{p}{p-1}$*, temos*

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Veja [8], página 80.

7.7 O ESPAÇO $W^{k,p}(\Omega)$

Definição 7.20. *Um vetor da forma* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_{2,\ldots,\alpha_n})$ *onde cada componente* α_i *é um inteiro não-negativo é chamado de multi-índice de ordem* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$*.*

Definição 7.21. *Dado um multi-índice* α *definimos*

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 7.22. *O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste em todas as funções $u : \Omega \longrightarrow I\!R$ *tais que, para cada multi-índice* α *com* $|\alpha| \leq k$*,* $D^\alpha u$ *existe e pertence a* $L^p(\Omega)$*.*

Observação 7.23. *Se* $p = 2$*, geralmente escrevemos*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \ (k = 0, \ 1, \ \ldots).$$

A letra H *é usada devido ao fato de* $H^k(\Omega)$ *ser um espaço de Hilbert. Note que* $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$*.*

Definição 7.24. *Se* $u \in W^{k,p}(\Omega)$*, definimos sua norma da seguinte forma:*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} ess \sup_\Omega |D^\alpha u| \ (p = \infty). \end{cases}$$

7.8 TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI

Definição 7.25. *Seja E um conjunto de funções $f : X \longrightarrow I\!R$, todas com o mesmo domínio $X \subset I\!R$. Dado $x_0 \in I\!R$, diremos que o conjunto E é equicontínuo no ponto x_0 quando, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ qualquer que seja } f \in E.$$

Um fato importante sobre a definição acima é que, além de todas as funções f serem contínuas no ponto x_0, o valor de δ escolhido a partir do ε dado é o mesmo para todas as funções f do conjunto E.

Definição 7.26. *Dizemos que (f_n) é uma sequência equicontínua no ponto $x_0 \in X$ quando o conjunto $E = f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ é equicontínuo no ponto x_0.*

Definição 7.27. *Um conjunto E de funções $f : X \longrightarrow I\!R$ é simplesmente limitado (ou pontualmente limitado) quando para cada $x \in X$ existe um número $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ para toda $f \in E$.*

Definição 7.28. *Um conjunto E de funções $f : X \longrightarrow I\!R$ é uniformemente limitado quando existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para toda $f \in E$ e $x \in X$.*

Definição 7.29. *Uma sequência (f_n) é simplesmente (ou uniformemente) limitada quando o conjunto $\{f_1, f_2, \ldots\}$ for simplesmente (ou uniformemente) limitado.*

Teorema 7.30 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja $K \subset I\!R$ compacto. Toda sequência equicontínua e simplesmente limitada de funções $f_n : K \longrightarrow I\!R$ possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração: Veja [14], página 412.

7.9 IMERSÕES

Definição 7.31. *Seja E um subespaço vetorial normado de um espaço normado F (ou seja, a norma em E não precisa necessariamente ser a norma induzida de F). Dizemos que a inclusão $E \subset F$ é uma imersão contínua se a aplicação inclusão $I : E \longrightarrow F$ definida por $Ix = x$ for contínua. Denotamos este fato por $E \hookrightarrow F$.*
Se, além disso, a aplicação inclusão for compacta, dizemos que a imersão $E \hookrightarrow F$ é compacta.

Como a aplicação inclusão é linear, o fato de existir uma imersão $E \hookrightarrow F$ é equivalente à existência de uma constante C tal que

$$\|x\|_F \leq C\|x\|_E \text{ para todo } x \in E.$$

Teorema 7.32. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \ \forall \ u \in W^{1,p}(I), \ \forall \ 1 \leq p \leq \infty,$$

em outras palavras, temos uma imersão contínua $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ para todo p em $[1, \infty]$. Além disso, quando I é limitado temos as seguintes imersões compactas

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I}), \ \textit{para } 1 < p \leq \infty,$$

$$W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I), \ \textit{para } 1 \leq q < \infty.$$

Demonstração: Veja [3], página 205.

REFERÊNCIAS

[1] AMBROSETTI, A.; BERTOTTI, M. L. Homoclinics for Second Order Conservative Systems. *In Partial Differential Equations and Related Subjects*, v. 107, 17 p., 1991.

[2] BIEZUNER, R. J. *Equações Diferenciais Parciais I/II.* Belo Horizonte: UFMG, 6 out. 2010. Notas de aula dos cursos Equações Diferenciais Parciais I e II do Programa de Pós-Graduação em Matemática. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/rodney/notas_de_aula/edp.pdf >. Acesso em: 2 de janeiro de 2018.

[3] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications.* Paris: Dunod, 1999.

[4] COSTA, D. G. *An Invitation to Variational Methods In Differential Equations.* Nova Iorque: Birkhäuser Boston, 2007. 138 p.

[5] CUNHA, A. C. *Existência de Solução Heteroclínica para Problemas Não-Autônomos de Segunda Ordem.* 2016. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. 2016.

[6] DANCER, E. N.; SWEERS, G. On the Existence of a Maximal Weak Solution for a Semilinear Elliptic Equation. *Differential and Integral Equations*, v. 2, n. 4, p. 533-540, 1989.

[7] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* Berkeley: American Mathematical Society, 1997.

[8] FERNANDEZ, P. J. *Medida e Integração.* 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[9] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996.

[10] FREITAS, P. M. *Soluções Estacionárias para um Modelo de Crescimento de Tumores.* 2002. 42 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2002.

[11] KORMAN, P.; LAZER, A. C. Homoclinic Orbits for a Class of Symmetric Hamiltonian Systems. *Eletronic Journal of Differential Equations Vol. 1994*, n. 1, p. 1-10, 1994.

[12] KORMAN, P.; LAZER, A. C.; LI, Y. On Homoclinic and Heteroclinic Orbits for Hamiltonian Systems. *Differential and Integral Equations*, v. 10, n. 2, p. 357-368, 1997.

[13] KORMAN, P.; OUYANG, T. Solution curves for Two Classes of Boundary-value Problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, v. 27, n. 9, p. 1031-1047, 1996.

[14] LIMA, E. L. *Curso de análise volume 1.* 14ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[15] OMANA, W.; WILLEM, M. Homoclinic Orbits for a Class of Hamiltonian Systems. *Differential Integral Equations 5*, n. 5, p. 1115-1120, 2013.

[16] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[17] VILLATE, J. E. *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com Maxima.* Porto: Porto Editora, 2007.