Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Guillermo Enrique Alemán López

Estudo de geometria diferencial de superfície com aplicações para construção de mecânica quântica de partícula em coordenadas curvilíneas e no espaço curvo

Juiz de Fora

2018

Guillermo Enrique Alemán López

Estudo de geometria diferencial de superfície com aplicações para construção de mecânica quântica de partícula em coordenadas curvilíneas e no espaço curvo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexei Deriglazov

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alemán López, Guillermo Enrique.
Estudo de geometria diferencial de superfície com aplicações para construção de mecânica quântica de partícula em coordenadas curvilíneas e no espaço curvo / Guillermo Enrique Alemán López. – 2018.
57 f. : il.

Orientador: Alexei Deriglazov
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Geometria Diferencial e Superfícies. 2. Mecânica Clássica. 3. Mecânica Quântica. 4. Quantização Canônica. I. Deriglazov, Alexei, orient. II. Título.

Guillermo Enrique Alemán López

Estudo de geometria diferencial de superfície com aplicações para construção de mecânica quântica de partícula em coordenadas curvilíneas e no espaço curvo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Alexei Deriglazov - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Thales Costa Soares
Professor Efetivo do Instituto Federal do Sudeste
Universidade de Minas Gerais

Professor Dr. Bruno Ferreira Rizzuti
Universidade Federal Juiz de Fora

A minha mãe, cuja memória continua a me guiar no caminho para realizar meus objetivos e ainda mais para ser um bom homem.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por cuidar de mim e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu pai, Hernan, por me guiar no caminho correto e minha mãe, Carmela, por me levar ao caminho do estudo.

A minha esposa Esther por seu apoio incondicional desde o Perú.

Ao meu orientador Professor Dr. Alexei Deriglazov por sua paciência e por dedicar seu tempo. Obrigado infinitamente por me ensinar que não há desculpas para fazer um trabalho correto.

Aos professores Dr. Thales Costa Soares, Dr. Bruno Ferreira Rizzuti, Dr. Andrey Pupasov e Dr. Emanuel Antônio de Freitas por terem aceito o convite para participar da minha banca.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do ICE - UFJF. À coordenação do Mestrado em Matemática da UFJF, em especial ao professor Dr. Grigori Chapiro, juntamente com todos os professores do programa.

Aos meus amigos do curso de Mestrado. Em especial a meu amigo Danilo.

À CAPES, pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

"Todo novo conhecimento essencialmente novo nos coloca de volta na situação de Colombo, que teve a coragem de deixar toda a terra conhecida até então."

Werner Heisenberg

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo de procedimento de quantização canônica de uma partícula em um espaço curvo e sobre uma superfície de espaço Euclidiano. Estudaremos quantização canônica em coordenadas curvilineares, e em seguida vamos adaptar no caso de espaço curvo. Fizemos comparação crítica deste formalismo com três procedimentos principais apresentados na literatura desta área.

Palavras-chave: Geometria Diferencial de Superfície. Mecânica Clássica. Mecânica Quântica. Quantização Canônica.

ABSTRACT

The aim of this work is to study the canonical quantization procedure of a particle in a Riemann space, as well as on a surface embedded in Euclidean space. To this aim, we rewrite quantum mechanics of a particle in Euclidean space in curvilinear coordinates. This allows us to formulate certain quantization procedure in a Riemann space. The resulting picture is compared with three quantization proposals known in the literature.

Key-words: Surface Differential Geometry. Classical Mechanics. Quantum Mechanics. Canonical quantization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pendulo Matemático 12
Figura 2 – Pêndulo Thomson-Tait 17
Figura 3 – Partícula confinada por força forte 20
Figura 4 – Confinamento a um Circulo 22
Figura 5 – Força de confinamento e gradiente a curva não são ortogonais 24
Figura 6 – Coordenadas normais de Gauss 31

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{L}$	Função Lagrangiana
$\mathbf{T}$	Energia cinética
$\mathbf{U}$	Energia potencial
$\mathbf{q}^a$	Coordenada generalizada
∇^2	Operador laplaciano
$\mathbf{S}$	Superfície de $\mathbf{R}^3$
ω_{ij}	Métrica de $\mathbf{R}^3$
$g_{\alpha\beta}$	Métrica de superfície
$\triangle_{LB}$	Operador de Laplace-Beltrami
$\Psi(\mathbf{x}, t)$	Função de onda em coordenadas Cartesianas
$\Psi(\mathbf{q}, t)$	Função de onda em coordenadas curvilíneas
$\tilde{\mathrm{H}}$	Hamiltoniano Quàntico de da Costa
$\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{x})$	Hamiltoniano Quàntico em coordenadas Cartesianas
$\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{q})$	Hamiltoniano Quàntico em coordenadas curvilíneas
$\hat{H}_{\mathbf{SP}}$	Hamiltoniano Quàntico de Schrödinger- Podolsky
$\Phi_{\parallel}$	Função de onda paralela à superfície
$\Phi_{\perp}$	Função de onda perpendicular à superfície

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 CONCEITOS PRELIMINARES 12

2.1 AÇÃO DE UM SISTEMA VINCULADO 12

2.2 A RECEITA 13

2.3 JUSTIFICATIVA DA RECEITA 20

2.4 DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA RESTRITO POR UMA AÇÃO SINGULAR 25

2.5 COORDENADAS DE GAUSS NORMAIS DE $\mathbf{R}^2$ ADAPTADAS A UMA CURVA 27

2.6 COORDENADAS DE GAUSS NORMAIS DE $\mathbf{R}^3$ ADAPTADAS A UMA SUPERFÍCIE 30

3 OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM $\mathbf{R}^3$ 37

4 DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA NO ESPAÇO EUCLIDIANO EM COORDENADAS CURVILÍNEAS 41

5 MECÂNICA QUÂNTICA EUCLIDIANA EM COORDENADAS CARTESIANAS 43

6 MECÂNICA QUÂNTICA EUCLIDIANA EM COORDENADAS CURVILÍNEAS 45

7 PRESCRIÇÃO DA QUANTIZAÇÃO NO ESPAÇO CURVO 49

8 ABORDAGENS DE SCHRODINGER-PODOLSKY E DE DEWITT 50

9 ABORDAGEM DE JENSEN-KOPPE E DA COSTA 51

10 CONCLUSÃO 55

REFERÊNCIAS 56

1 INTRODUÇÃO

Construção de mecânica quântica de uma partícula no espaço Euclidiano na presença de um campo potencial representa um assunto bem estabelecido, que consta nos livros-textos [7],[19]. Mas o mesmo problema no caso de espaço de Riemann tem uma longa história [14], [13], [9], [6], [3], e está sob discussão ate os dias de hoje [2], [8], [10], [11], [12], [15], [16], [17], [18]. Objetivo principal desta dissertação é estudo e análise crítica dos três principais propostas, apresentadas na literatura nesta área: abordagens de Schródinger-Podolsky [14], [13], de DeWitt [6] e de Jensen-Koppe e da Costa [9], [3].

Mecânica clássica sugere três formalismos diferentes para descrever movimento de partícula no espaço de Riemann (em particular, sobre uma superfície de $\mathbf{R}^3$), veja [1], [4]. Todos os três nos levam aos mesmos resultados finais. No entanto, as mecânicas quânticas, construídas em base destes formalismos, diferem entre si. Em particular, eles implicam expressões diferentes para Hamiltoniano quântico de sistema [14], [13], [9], [6], [3]. Para analisar a origem destas divergências, o nosso procedimento é como se segue. É conhecido que a geometria Euclidiana no plano, sendo reescrita em coordenadas curvilíneas, coincide formalmente com a geometria diferencial de uma superfície de $\mathbf{R}^3$. Portanto parece natural de esperar, que mecânica quântica do espaço curvo coincida formalmente com a mecânica quântica Euclidiana nas coordenadas curvilíneas. A última vai ser construída e analisada no Paragrafo 6. Nossos resultados são a favor de Hamiltoniano de Schródinger-Podolsky, e mostram necessidade de revisão mais detalhada das abordagens de DeWitt e de Jensen-Koppe e da Costa.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 estudaremos vários formalismos de mecânica clássica para descrição de movimento de uma partícula no espaço de Riemann e sobre uma superfície de espaço Euclidiano. Em seguida, descrevemos as coordenadas adaptadas de uma superfície (curva), que vamos precisar nos parágrafos seguintes. No Capítulo 3 escrevemos operador de Laplace do espaço Euclidiano em coordenadas curvilíneas e apresentamos propriedades dele. No Capítulo 4 apresentaremos a dinâmica de uma partícula em mecânica clássica começando com suas Lagrangiana e Hamiltoniano, primeiro em coordenadas Cartesianas e depois em coordenadas curvilíneas. No Capítulo 5 vamos resumir conceitos básicos de mecânica quântica em coordenadas cartesianas. No Capítulo 6 reescrevemos a mecânica quântica Euclidiana em coordenadas curvilíneas, assim obtendo a prescrição de quantização canônica em coordenadas curvilíneas. No Capítulo 7 vamos adaptar esta prescrição para o caso de espaço de Riemann. Nos Capítulos a seguir, apresentaremos comentários sobre abordagem de Schrödinger-Podolsky, de DeWitt, e de Jensen-Koppe e Da Costa. Capítulo 11 contem resumo dos resultados desta dissertação.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 AÇÃO DE UM SISTEMA VINCULADO

A função lagrangiana pode muitas vezes ser escrita como a diferença entre energia cinética e potencial, $L = T - U$, mas regra não é universal. Existem muitos sistemas simples, para quais esta regra deve ser modificada. Tomemos, por exemplo, um pêndulo matemático num plano (ver Fig. 1).

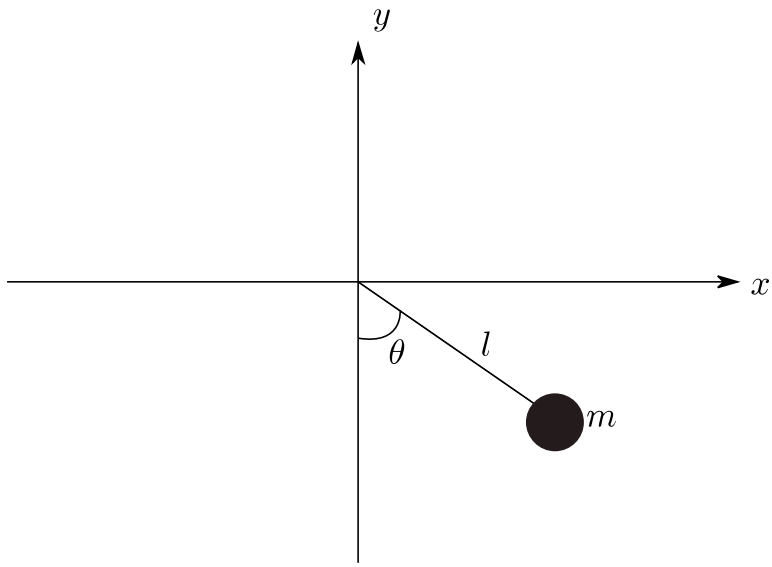


Figura 1 – Pendulo Matemático

Então a diferença:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy, \tag{2.1}$$

sendo considerado como um sistema Lagrangiano, nós leva as equações de movimento erradas. Pois estes descrevem uma queda livre em um campo gravitacional e não levam em consideração a restrição $x^2 + y^2 = l^2$, que deve ser satisfeita em qualquer instante do movimento. Com efeito, usando (2.1), vamos encontrar as equações de Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0; \tag{2.2}$$

primeiro obtemos $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = -mg$ e $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$. Substituindo em (2.2) para x: $\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, nos obtemos:

$$\ddot{x} = 0; \tag{2.3}$$

logo calculando a lagrangiana para y e substituindo em (2.2), nós obtemos:

$$\ddot{y} = -g. \tag{2.4}$$

Podemos observar também que é impossível simplesmente adicionar a restrição às equações de movimento, já que isso levaria a um sistema incompatível.

2.2 A RECEITA

O pêndulo é um exemplo de sistema com uma restrição holonômica (ou cinemática). Geralmente, uma restrição holonômica é uma restrição algébrica sobre variáveis de configuração do espaço $G(q^a, \tau) = 0$ que deve ser satisfeita em qualquer instante. Nesta seção discutiremos uma receita adequada para a construção de uma Lagrangiana para este caso. A grosso modo, a receita pode ser formulada da seguinte forma: primeiro, esqueça as restrições e escreva a Lagrangiana do sistema não-restrito (pode ser $L = T - U$). Em segundo lugar, encontre uma solução para restrições e escreva L em termos das variáveis independentes.

Para o pêndulo, temos duas possibilidades $y = \pm\sqrt{l^2 - x^2}$. Nossa escolha será $y = -\sqrt{l^2 - x^2}$, então temos $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{l^2-x^2}}$. Façamos substituição em (2.1), obtemos

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{l^2 - x^2}) + mg\sqrt{l^2 - x^2}, \tag{2.5}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\frac{l^2}{l^2 - x^2})\dot{x}^2 + mg\sqrt{l^2 - x^2}, \tag{2.6}$$

logo,

$$L = \frac{1}{2}m(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-1}\dot{x}^2 + mgl\sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2}. \tag{2.7}$$

Agora façamos uso da ação

$$S[x] = \int dt L(x, \dot{x}, \tau), \tag{2.8}$$

e então substituindo (2.7) em (2.8) temos

$$S[x] = \int dt[\frac{1}{2}m(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-1}\dot{x}^2 + mgl\sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2}], \tag{2.9}$$

agora fazendo uso de (2.2) nos temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-1}\dot{x}. \tag{2.10}$$

Então

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2m}{l^2}(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-2}x\dot{x}^2 + m(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-1}\ddot{x}, \tag{2.11}$$

e logo temos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{m}{l}(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-2}(\frac{x}{l})\dot{x}^2 - mg(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-\frac{1}{2}}(\frac{x}{l}), \tag{2.12}$$

então substituindo (2.11) e (2.12) em (2.2) obtemos finalmente

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x\sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2)} + \frac{x\dot{x}^2}{l^2(1 - (\frac{x}{l})^2)} = 0. \tag{2.13}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x\sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2)} + O\left(\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) = 0.$$

Agora na aproximação de pequeno deslocamentos vamos tomar $\frac{x}{l} \ll 1$. Isso vai reduzir (2.13) a uma equação de um oscilador harmônico, como segue: fazendo uso de expansão geométrica na seguinte expressão,

$$\left(\frac{x\dot{x}^2}{l^2}\right)\left(\frac{1}{1-(\frac{x}{l})^2}\right) = \left(\frac{x\dot{x}^2}{l^2}\right)\left(1+(\frac{x}{l})^2+(\frac{x}{l})^4+.....\right), \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{x\dot{x}^2}{l^2}\right)\left(\frac{1}{1-(\frac{x}{l})^2}\right) = \left(\frac{\dot{x}^2}{l}\right)\left(\cancel{(\frac{x}{l})}+\cancel{(\frac{x}{l})^3}+\cancel{(\frac{x}{l})^5}+.....\right), \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{x\dot{x}^2}{l^2}\right)\left(\frac{1}{1-(\frac{x}{l})^2}\right) = 0, \tag{2.16}$$

e fazendo uso da expansão em séries na seguinte expressão temos

$$\frac{g}{l}x\sqrt{1-(\frac{x}{l})^2} = \frac{g}{l}x(1-(\frac{x}{l})^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{g}{l}x(1-\binom{\frac{1}{2}}{1}\cancel{(\frac{x}{l})^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\cancel{(\frac{x}{l})^4}+.....) = \frac{g}{l}x, \tag{2.17}$$

então substituindo (2.16) e (2.17) na (2.13) nos temos resultado bem conhecido para oscilações pequenas

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x = 0. \tag{2.18}$$

Vamos discutir a receita do ponto de vista geométrico. As posições possíveis do pêndulo estão no círculo (subespaço de dimensão 1 no plano) $x^2+y^2=l^2$. Nas proximidades do ponto $(0,-l)$, estamos interessados na variável x que podemos tomar como uma coordenada do subespaço, de modo que a receita consiste em restringir uma função lagrangiana sem restrições no subespaço.

É importante notar uma liberdade implícita na receita. Primeiro, somos livres para escolher uma parametrização do subespaço. Tomemos, por exemplo, o ângulo Θ como uma coordenada. Então as equações paramétricas do círculo são $x = l\sin\Theta$ e $y = -l\cos\Theta$ onde elas resolvem a restrição, por isso podem ser usadas em (2.1) . Isto dá uma Lagrangiana em termos de Θ e substituindo em (2.1) temos

$$L(\Theta) = \frac{1}{2}m((l\dot{\Theta}\cos\Theta)^2+(l\dot{\Theta}\sin\Theta)^2)+mgl\cos\Theta, \tag{2.19}$$

$$L(\Theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\Theta}^2+mgl\cos\Theta. \tag{2.20}$$

Calculemos as equações de Lagrange (2.2) da (2.20),

$$\frac{\partial L}{\partial\Theta} = -mgl\sin\Theta, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\Theta}} = ml^2\dot{\Theta}, \tag{2.22}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{\Theta}} = ml^2\ddot{\Theta}, \tag{2.23}$$

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0, \tag{2.24}$$

enquanto, para valores pequenos de Θ, fazendo uso da fórmula de Taylor no $\sin\theta$ temos a aproximação de $\sin\Theta \approx \Theta$. Assim nós conseguimos a equação de oscilações harmônicas para Θ

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l}\Theta = 0. \tag{2.25}$$

Segundo, poderíamos usar as coordenadas generalizadas escrevendo um **anzatz** em (2.1) para L. Isso pode ser feito para um exemplo em coordenadas polares $x = r\sin\Theta$ e $y = -r\cos\Theta$, que temos

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\Theta + r\dot{\Theta}\cos\Theta, \tag{2.26}$$

$$\dot{y} = -\dot{r}\cos\Theta + r\dot{\Theta}\sin\Theta, \tag{2.27}$$

substituindo em (2.1)

$$L(r,\Theta) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) + mgr\cos\Theta, \tag{2.28}$$

então se usarmos a restrição $r = l$, nós conseguimos (2.20) e (2.25) mais uma vez.

Receita Geral: Generalizando, vamos considerar um sistema com coordenadas generalizadas q^a , $a = 1, 2, 3, ..., n$, restringindo seu movimento a uma superfície k-dimensional, definida por

$$G_i(q^a) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n-k. \tag{2.29}$$

As equações da superfície são consideradas funcionalmente independentes

$$\text{posto}\frac{\partial G_i(q^a)}{\partial q^b} = n - k. \tag{2.30}$$

Suponha agora que o sistema não tem restrições. A Lagrangiana será escrito como $L(q^a, \dot{q}^q)$, então vamos escrever a Lagrangiana do sistema restrito, escolhendo algum sistema de coordenadas (parametrização) s^α , $\alpha = 1, 2, 3, ..., k$ na superfície, e vamos escrever as equações paramétricas da superfície

$$q^a = q^a(s^\alpha). \tag{2.31}$$

Por construção isso resolve as restrições $G_i(q^a(s^\alpha)) \equiv 0$. Substituindo as equações paramétricas em $L(q^a)$, teremos a Lagrangiana do sistema restrito

$$L(s^\alpha, \dot{s}^\alpha) \equiv L(q^a(s^\alpha), \dot{q}^a(s^\alpha)) \equiv L(q^a(s^\alpha), \frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha}\dot{s}^\alpha), \tag{2.32}$$

usando fórmula básica (2.2), as equações de Lagrange $L(s^\alpha, \dot{s}^\alpha)$ são

$$\frac{\delta S[s]}{\delta s^\alpha} \equiv \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L(s)}{\partial \dot{s}^\alpha} - \frac{\partial L(s)}{\partial s^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., k, \tag{2.33}$$

usando equação (2.32) e derivando a função composta fazemos as seguintes contas

$$\frac{\partial L}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial^2 q^a}{\partial s^\alpha \partial s^\beta}\dot{s}^\beta, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha}, \tag{2.35}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^\alpha} = (\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a})\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial^2 q^a}{\partial s^\alpha \partial s^\theta}\dot{s}^\theta. \tag{2.36}$$

Assim temos

$$\frac{\delta S[s]}{\delta s^\alpha} = (\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a})\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial^2 q^a}{\partial s^\alpha \partial s^\theta}\dot{s}^\theta} - \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial^2 q^a}{\partial s^\alpha \partial s^\beta}\dot{s}^\beta}, \tag{2.37}$$

$$\frac{\delta S[s]}{\delta s^\alpha} = (\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a})\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha}, \tag{2.38}$$

por (2.2) e [4] nós podemos escrevê-lo como

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q^a} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0. \tag{2.39}$$

E por (2.38) rescrevemos assim

$$\frac{\delta S[s]}{\delta s^\alpha} = (\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a})\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha}. \tag{2.40}$$

Então, substituindo (2.39) em (2.38) obtemos a equação (2.33) em termos da Lagrangiana inicial

$$\frac{\delta S[s]}{\delta s^\alpha} = \frac{\delta S[q]}{\delta q^a}\bigg\|_{q^a(s^\alpha)}\frac{\partial q^a}{\partial s^\alpha}. \tag{2.41}$$

Vamos especificar estes resultados para um caso particular de parametrização da superfície. A condição (2.30) garante que as restrições podem ser resolvidas em relação às $n-k$ variáveis entre q^a, dizemos q^i. Então a solução é

$$q^i = q^i(q^\alpha), \tag{2.42}$$

e assim as q^α são as coordenadas da superfície. Logo a lagrangiana é dada por

$$L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) = L(q^i(q^\alpha), q^\alpha, \dot{q}^i(q^\alpha), \dot{q}^\alpha), \tag{2.43}$$

calculando as equações de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial^2 q^i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\beta, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha}, \tag{2.45}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial^2 q^i}{\partial q^\alpha \partial q^\Theta}\dot{q}^\Theta, \tag{2.46}$$

e então, fazendo diferença entre (2.46) e (2.44), conseguimos

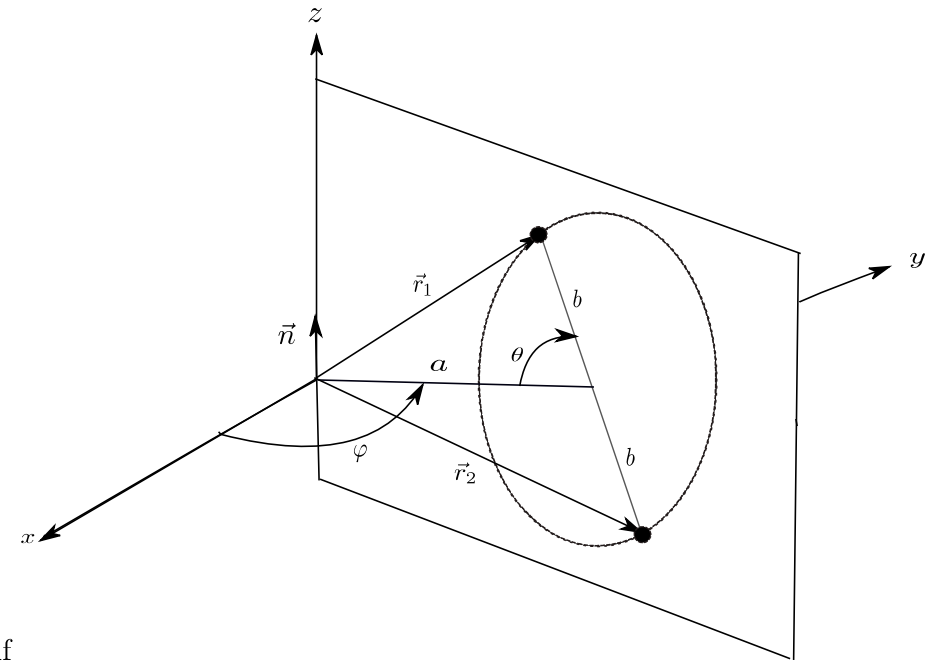
$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} = (\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}) + (\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i})\frac{q^i}{\partial q^\alpha}. \tag{2.47}$$

Reescrevendo o (2.47) dependendo do (2.33) temos

$$\left.\frac{\delta S[q^a]}{\delta q^\alpha}\right\|_{q^i(q^\alpha)} + \left.\frac{\delta S[q^a]}{\delta q^i}\right\|_{q^i(q^\alpha)}\frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{2.48}$$

Se as restrições dependerem do tempo, $G_i(q^a, \tau) = 0$, isso é considerado como um parâmetro fixo do problema. A receita continua a mesma, é suficiente substituir $q^a(s^\alpha)$ por $q^a(s^a, \tau)$ nas fórmulas anteriores.

Exemplo. Pêndulo Thomson-Tait. O pêndulo consiste em duas massas iguais m conectadas por um pivô sem massa de comprimento $2b$ cujo centro está unido à extremidade de outro pivô sem massa de comprimento a, veja Figura 2.



tait.pdf

Figura 2 – Pêndulo Thomson-Tait

O pivô a pode girar livremente no plano (x, y) enquanto o pivô b pode girar livremente

em um plano vertical. A posição das massas pode ser descrita pelos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, ou seja, o espaço de configuração que tem seis dimensões. As massas são forçadas a mover-se na superfície bidimensional determinada por

$$([\vec{r}_1, \vec{r}_2], \vec{n}) = 0,\ (\vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{n}) = 0,\ |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 2b,\ |\vec{r}_1 + \vec{r}_2| = 2a, \tag{2.49}$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário na direção do eixo z, $(.,.)$ é produto escalar e $[.,.]$ é produto vetorial. Esquecendo as restrições, a ação está descrita por

$$S = \int dt \frac{1}{2} m(\dot{\vec{r}}_1^2 + \dot{\vec{r}}_2^2). \tag{2.50}$$

Tome os ângulos $\varphi \in [0, 2\pi)$ no plano xy e $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ no plano formados por os pivôs a e $2b$, como coordenadas na superfície. As expressões para $\vec{r}_i$ através destes são

$$x_1 = a\sin\varphi - b\cos\theta\sin\varphi,\ \ y_1 = a\cos\varphi - b\cos\theta\cos\varphi,\ \ z_1 = b\sin\theta,$$
$$x_2 = a\sin\varphi + b\cos\theta\sin\varphi,\ \ y_2 = a\cos\varphi + b\cos\theta\cos\varphi,\ \ z_2 = -b\sin\theta,$$

onde

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\varphi}\cos\varphi(a - b\cos\theta) + \dot{\theta}b\sin\varphi\sin\theta, \\
\dot{y}_1 &= \dot{\varphi}\sin\varphi(a - b\cos\theta) - b\sin\theta\cos\varphi, \\
\dot{z}_1 &= b\dot{\theta}\cos\theta, \\
\dot{x}_2 &= \dot{\varphi}\cos\varphi(a + b\cos\theta) - \dot{\theta}b\sin\varphi\sin\theta, \\
\dot{y}_2 &= \dot{\varphi}\sin\varphi(a + b\cos\theta) + b\sin\theta\cos\varphi, \\
\dot{z}_2 &= b\dot{\theta}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Agora calculamos $\dot{\vec{r}}_1^2 + \dot{\vec{r}}_2^2$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}_1^2 + \dot{\vec{r}}_2^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2, \\
\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 &= 2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi(a^2 + b^2\cos^2\theta) - 4\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2b^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi\sin^2\theta, \\
\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 &= 2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi(a^2 + b^2\cos^2\theta) + 4\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2b^2\dot{\theta}^2\cos^2\varphi\sin^2\theta, \\
\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 &= 2b^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta, \\
\dot{\vec{r}}_1^2 + \dot{\vec{r}}_2^2 &= 2\dot{\varphi}^2(a^2 + b^2\cos^2\theta) + 2b^2\dot{\theta}^2.
\end{aligned}$$

Essas equações resolvem as restrições (2.49). Substituindo os cálculos anteriores em (2.50) obtemos a ação do pêndulo da Thomson-Tait

$$S = \int dt m(b^2\dot{\theta}^2 + (a^2 + b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}^2). \tag{2.51}$$

Então de $L = m[(a^2 + b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\theta}^2]$, calculamos as equações de movimento fazendo uso de (2.2). Em relação à θ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -2m\dot{\varphi}^2 b^2\sin\theta\cos\theta, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2mb^2\dot{\theta}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mb^2\ddot{\theta},
\end{aligned}$$

temos

$$\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta = 0.$$

Em relação à φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2(a^2 + b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= [2(a^2 + b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}]^{\cdot}, \end{aligned}$$

obtemos

$$[(a^2 + b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}]^{\cdot} = 0.$$

Agora seja $c = constante$ tal que

$$(a^2 + b^2\cos^2\theta)\dot{\varphi} = c,$$

isto implica

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{a^2 + b^2\cos^2\theta}, \tag{2.52}$$

dai temos

$$\ddot{\theta} + \frac{c^2 \sin\theta\cos\theta}{(a^2 + b^2\cos^2\theta)^2} = 0.$$

Note que o movimento das massas não é uma composição de dois movimentos circulares com velocidade angular constante, como se poderia esperar ingenuamente.

2.3 JUSTIFICATIVA DA RECEITA

As restrições holonômicas representam a idealização de uma força muito forte em direção a superfície, forçando uma partícula a se mover perto a superfície. Isto sugere um caminho natural, vê [1], para confirmar a receita (2.33) para o sistema.

Nós começamos de um sistema com um potencial que produz uma força forte $\vec{F}$, veja Figura 3,

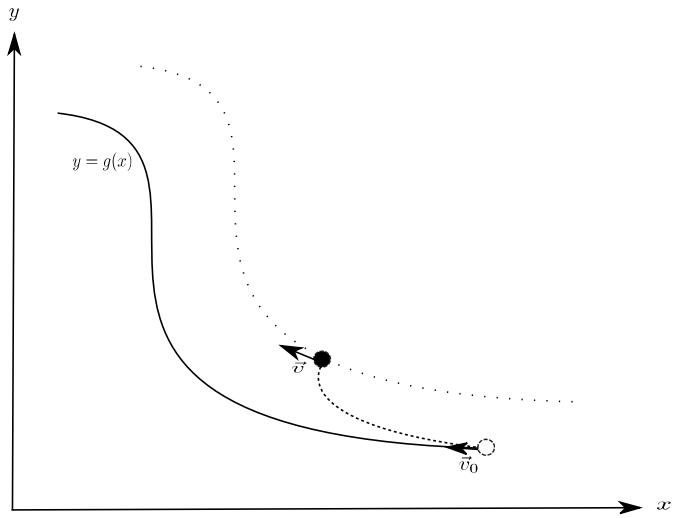


Figura 3 – Partícula confinada por força forte

e então nós tomamos o limite da força infinita. Como a dimensão do espaço de configuração não é essencial para o discussão, vamos pegar um sistema com duas coordenadas generalizadas x e y. Vamos analisar a ação seguinte

$$S = \int d\tau[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - U(x,y) - s(y - g(x))^2].$$

A ação depende do parâmetro $s = constante$. Em termos concretos suponha que $U \geq 0$ na região de interesse. O segundo termo da energia potencial cresce quando a partícula se afasta da linha $y = g(x)$. Vamos considerar uma partícula, que começa seu movimento na linha e tem velocidade inicial tangencial a linha, como segue

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \upsilon_0,\ y(0) = g(x_0),\ \dot{y}_0 = \dot{g}(x_0).$$

Vamos mostrar que no limite $s \longrightarrow \infty$, há uma ação que descreve uma partícula no potencial U e está sujeito à restrição $y = g(x)$.

Para confirmar isso, é conveniente escrever a ação em coordenadas x e $\tilde{y} \equiv y - g(x)$,

$$S = \int d\tau[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\tilde{y}} + \dot{g}(x))^2 - U(x, \tilde{y} + g(x)) - s(\tilde{y})^2].$$

Calculando as equações de movimento $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\tilde{y}} + \dot{g}(x))^2 - U(x, \tilde{y} + g(x)) - s(\tilde{y})^2$ vamos usar (2.2),para calcular

em relação a x

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, \tilde{y} + g(x)), \tag{2.53}$$

assim, pela regra da cadeia, $\frac{dg(x)}{d\tau} = \frac{dg(x)}{dx}\frac{dx}{d\tau}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \dot{x} + (\dot{\tilde{y}} + \dot{g}(x))\frac{dg}{dx}, \\ \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \ddot{x} + (\ddot{\tilde{y}} + \ddot{g}(x))\frac{dg}{dx}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Em relação a y

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}}(x, \tilde{y} + g(x)) - 2s\tilde{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{\tilde{y}} + \dot{g}(x), \tag{2.55}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \ddot{\tilde{y}} + \ddot{g}(x). \tag{2.56}$$

Usando (2.2) calculamos as equações de movimento

$$\ddot{x} + (\ddot{\tilde{y}} + \ddot{g}(x))\frac{dg}{dx} + \frac{\partial}{\partial x}U(x, \tilde{y} + g(x)) = 0, \tag{2.57}$$

$$\ddot{\tilde{y}} + \ddot{g}(x) + \frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} + 2s\tilde{y} = 0. \tag{2.58}$$

Podemos estimar a coordenada $\tilde{y}$ usando a lei de conservação de energia, $E = T + U + s\tilde{y}^2$, como segue: $\tilde{y}(\tau) = s^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2(E - T - U)} \ll s^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2E}$. Portanto, a partícula com energia total E não pode se afastar da curva (na direção $\tilde{y}$) mais do que uma distância proporcional a $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Então $\tilde{y} \overset{s\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $y(\tau) \overset{s\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} g(x(\tau))$, isso é, no limite que nossa partícula está confinada para se mover na linha. Neste limite, equação para x fica.

$$\ddot{x} + (\ddot{g}(x))\frac{dg}{dx} + \frac{\partial}{\partial x}U(x, g(x)) = 0. \tag{2.59}$$

A observação final é que (2.59) pode ser obtida a partir da ação

$$S = \int d\tau[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{y})^2 - U(x, y)], \tag{2.60}$$

no qual y é substituído de acordo com a restrição $y = g(x)$. Portanto, chegamos à receita (2.44).

Exemplo. Confinamento a um círculo. Considere uma partícula em um plano xy sob o potencial, $U = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2$, $\alpha > 0$. Temos $U = 0$ sobre a circunferência $x^2+y^2 = a$, veja Figura 4.

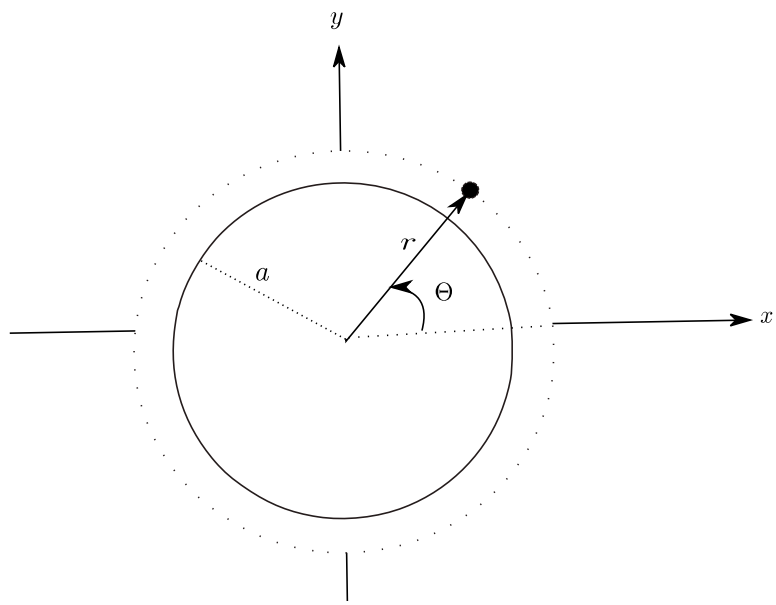


Figura 4 – Confinamento a um Circulo

A função de Lagrange é

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{\alpha}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2; \tag{2.61}$$

substituindo $x = rcos\Theta$ e $y = rsin\Theta$ em (2.61), temos

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) - \frac{\alpha}{2}(r-a)^2. \tag{2.62}$$

Estamos interessados no movimento que começa no círculo com velocidade tangente, ou seja tem as seguintes condições iniciais $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\Theta(0) = 0$ e $\dot{\Theta}(0) = \vartheta > 0$. De (2.61) calculamos as equações do movimento (2.2) para x

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\alpha(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \quad \text{então} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}. \end{aligned}$$

Tomando $r = \sqrt{x^2+y^2}$ temos $m\ddot{x} = -\alpha(r-a)\frac{x}{r}$, analogamente, fazendo os mesmos cálculos para y temos $m\ddot{y} = -\alpha(r-a)\frac{y}{r}$. Isto implica a força é normal ao círculo e é dirigida para: ele $\mathbf{F} \sim \pm\mathbf{r}$. As equações em coordenadas polares são

$$\ddot{r} - r\ddot{\Theta}^2 + \frac{\alpha}{m}(r-a) = 0, \quad (r^2\dot{\Theta})^{\cdot} = 0. \tag{2.63}$$

Note que $r = a$ e $\dot{\Theta} \neq 0$ não é solução para um α finito, isto é, a partícula não pode se mover exatamente no círculo (mas pode permanecer nele, por exemplo, $r = a$ e $\dot{\Theta} = 0$

é uma solução). A segunda equação envolve a conservação da quantidade $r^2\dot{\Theta} = c$ onde c é uma constante. A multiplicação da primeira equação por $\dot{r}$ implica mais uma quantidade conservada (energia): $E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) + \frac{\alpha}{2}(r-a)^2$. Usamos $(r^2\dot{\Theta}^2)^{\cdot} = 2r\dot{r}\dot{\Theta}^2 + 2r^2\dot{\Theta}\ddot{\Theta} = 2r\dot{r}\dot{\Theta}^2 + 2(r^2\dot{\Theta}\dot{\Theta})^{\cdot}$, a última igualdade é devido a $(r^2\dot{\Theta})^{\cdot} = 0$, assim que $r\dot{r}\dot{\Theta}^2 = -\frac{1}{2}(r^2\dot{\Theta}^2)^{\cdot}$. Calculando as quantidades conservadas em $t = 0$, podemos relacionar as constantes de integração com as condições iniciais a e ϑ. Tomamos a e E como constantes independentes, então $\vartheta = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2E}{m}}$ e $c = a\sqrt{\frac{2E}{m}}$. Usando a primeira quantidade conservada, $\dot{\Theta} = \frac{c}{r^2}$, podemos excluir $\dot{\Theta}$ da expressão para E. No resultado, temos duas equações diferenciais de primeira ordem, onde as variáveis r e Θ são separadas

$$\dot{r}^2 + \frac{\alpha}{m}(r-a)^2 + \frac{2E}{m}\frac{a^2}{r^2} = \frac{2E}{m}, \tag{2.64}$$

$$\dot{\Theta} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{\frac{2E}{m}}. \tag{2.65}$$

Note que a equação $\dot{r}\frac{\delta S}{\delta r} = 0$ tem soluções extras, $\dot{r} = 0$, comparando com $\frac{\delta S}{\delta r} = 0$. Então as equações de movimento (2.59) não são equivalentes ao sistema (2.60), (2.61), onde o último tem soluções extras da forma $\dot{r} = 0$, $\dot{\Theta} = constante$. Para a partícula com energia dada E temos a equação

$$\dot{r}^2 < \frac{2E}{m}, \;\; \frac{a^2}{r^2} < \frac{2E}{m}, \;\; (r-a)^2 < \frac{2E}{\alpha}. \tag{2.66}$$

A primeira desigualdade estabelece que a velocidade máxima não depende da magnitude α do potencial de confinamento. A segunda desigualdade implica que a partícula nunca entra no interior do círculo. A última desigualdade afirma que o desvio máximo da partícula do círculo a tende a 0 quando $\frac{1}{\alpha} \longrightarrow 0$. Então, neste limite, a partícula é limitada a se mover no círculo: $r(t) = a$, e tem velocidade angular constante $\dot{\Theta}(t) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \vartheta$. Para qualquer solução $r(t,\alpha)$ das Eq.(1.59) deveria ser $lim_{\alpha\longrightarrow\infty}\frac{\alpha}{m}(r-a) = \frac{2E}{am}$ e $lim_{\alpha\longrightarrow\infty}\frac{\alpha}{m}(r-a)^2 = 0$. A solução limite (movimento livre no círculo) segue da Lagrangiana livre $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, substituindo a restrição $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Obtemos

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + ((\sqrt{a^2-x^2})^{\cdot})^2) = \frac{m}{2}(1 + \frac{x^2}{a^2-x^2})\dot{x}^2 = \frac{ma^2}{2(a^2-x^2)}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}a^2\dot{\Theta}^2. \tag{2.67}$$

A solução $\Theta = \vartheta t$ tem a mesma energia que a solução limite para o problema (2.57) e (2.58): $E = \frac{m}{2}a^2\vartheta^2$.

O potencial $s(y-g(x))^2$ não esta criando uma força perpendicular a curva no contrario com a ideia inicial. Com efeito, dado a curva diferenciável de classe $\mathbf{C}^k$ com $k>1$, no plano $y=g(x)$ e o potencial $V=s(y-g(x))^2$ então a força produzida pelo potencial externo é $F=-(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y})=-(2s(y-g(x))(-\frac{dg}{dx}),2s(y-g(x)))$, expressamos a curva convenientemente como $\phi(x,y)=y-g(x)$. Como em $\phi(x,y)$ existem seus derivadas parciais, vamos calcular seu gradiente no ponto $(x,g(x))\in\gamma$, assim $\bigtriangledown\phi(x,y)=(\frac{\partial\phi}{\partial x};\frac{\partial\phi}{\partial y})=(-\frac{dg}{dx},1)$. Então reescrevendo temos:

$$F=-2s(y-g(x))\begin{pmatrix}-\frac{dg}{dx}\\1\end{pmatrix};\ \bigtriangledown\phi=\begin{pmatrix}-\frac{dg}{dx}\\1\end{pmatrix}\ \text{onde}\ \ -2s(y-g(x))\ \text{é um escalar.}\tag{2.68}$$

Logo da (2.68) observamos que os vetores F e $\bigtriangledown\phi$, são paralelos, vê Figura 5.

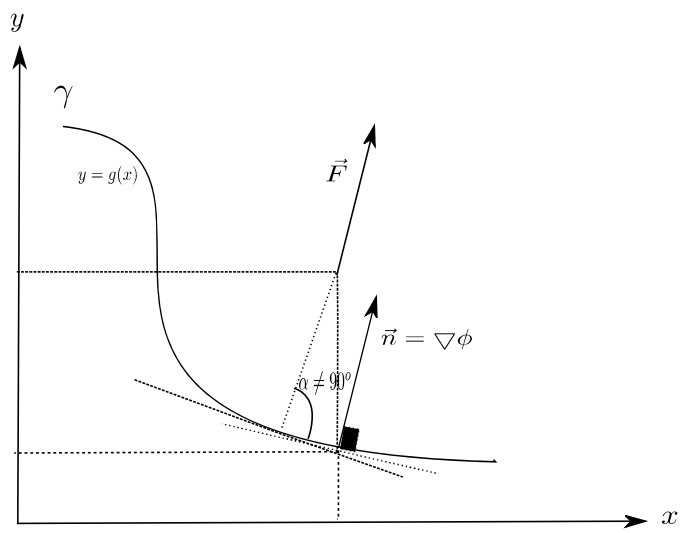


Figura 5 – Força de confinamento e gradiente a curva não são ortogonais

Isso implica que a força externa F, não é necessariamente ortogonal à curva, para melhorar essa inconveniência anteriormente mencionada, precisamos um potencial da forma $V=\frac{\alpha}{2}d^2$ onde d^2 representa a distância ao quadrado de um ponto (x,y) próximo à curva. Este tipo de potencial tem expressão complicada em coordenadas cartesianas. Com efeito quadrado da distancia d^2, pode ser calculado por meio da fórmula $d^2=(x-x_0)^2+(y-g(x_0))^2$ e também o ponto (x,y) pode ser calculado do seguinte modo: pois note que os vetores

$$\begin{pmatrix}x-x_0\\y-g(x_0)\end{pmatrix}\ \text{e}\ \ \bigtriangledown\phi(x_0,g(x_0))=\begin{pmatrix}-\frac{dg(x_0)}{dx}\\1\end{pmatrix}\tag{2.69}$$

são vetores paralelos, tal que para qualquer $t\in\mathbf{R}$ tem-se

$$\begin{pmatrix}x-x_0\\y-g(x_0)\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-\frac{dg(x_0)}{dx}\\1\end{pmatrix}\ \text{então}\ (x,y)\ \text{satisfaz o seguinte sistema,}\tag{2.70}$$

$$x=x_0-\frac{dg(x_0)}{dx}t;\ \ y=g(x_0)+t.\tag{2.71}$$

Para evitar isto, abaixo nos vamos trabalhar em coordenadas curvilíneas adaptadas a superfície, nos quais o potencial $\frac{\alpha}{2}d^2$ tem expressão simples.

2.4 DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA RESTRITO POR UMA AÇÃO SINGULAR

Para descrever um sistema restrito, nossa ideia era reduzir o número de variáveis q^a $a = 1, 2, ..., n$ para s^α, $\alpha = 1, 2, ..., k < n$. Infelizmente, isso pode resultar na perda de algumas das propriedades apresentadas nas variáveis iniciais. Por exemplo, tanto a ação irrestrita (2.51) quanto as restrições (2.50) do pêndulo da Thomson-Tait possuem uma simetria de rotação manifesta $\overrightarrow{r} \longrightarrow R\overrightarrow{r}$ que está oculta na formulação (2.52) (onde apenas a simetria de rotação no plano xy, dada por $\varphi \longrightarrow \varphi+$ constante, é evidente).

O mesmo acontece se usarmos algumas das variáveis iniciais para parametrizar a superfície de restrição. Por exemplo, se pegamos uma partícula livre em um círculo de raio l, tanto a lagrangiana sem restrições $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ e a restrição $x^2 + y^2 = l^2$ têm a simetria de rotação manifesta $\overrightarrow{r} \longrightarrow R\overrightarrow{r}$ (geralmente, se uma simetria pode ser expressa como uma transformação linear, ela é chamada de manifesta.). Contudo, isso não esta manifesta na lagrangiana $\frac{1}{2}m(1 - (\frac{x}{l})^2)^{-1}\dot{x}^2$ que aparece depois de usar a restrição $y = \pm\sqrt{l^2 - x^2}$.

As simetrias geralmente desempenham um papel fundamental na análise de uma teoria, seria desejável encontrar uma maneira de mantê-las intactas. Isso implica que continuamos usando as variáveis iniciais do espaço de configuração para descrição de um sistema restrito. Estranhamente, isso pode ser alcançado seguindo a ideia oposta, isto é, em vez de reduzir o espaço de configuração, expandimos e adicionamos novas variáveis a formulação.

Agora, nós pegamos um sistema com uma lagrangiana irrestrita $L(q^a, \dot{q}^a)$ e as restrições $G_i(q^a) = 0,\ i = 1, 2, ..., n - k$. Introduziremos um espaço $(2n - k) - dimensional$ com as coordenadas independentes q^a, λ^i e consideramos a ação

$$S = \int d\tau[L(q^a, \dot{q}^a) + \lambda^i G_i(q^a)]. \tag{2.72}$$

Como as coordenadas iniciais não são tocadas, a formulação não estraga as propriedades de simetria da teoria. O preço que pagamos é a aparência da variável adicional λ^i que não têm uma interpretação física direta. Eles não participam da determinação de configuração do sistema (posições, velocidades, energias das partículas, etc.). Então não podemos (e não precisamos) medi-los. Por esta razão eles são chamados graus de liberdade não físicos (ou auxiliares). Em todos os outros aspectos, tratamos variáveis auxiliares de igual maneira com os outros. Em particular, escrevemos e resolvemos equações de movimento para ambos q^a e λ^i.

Ação não contém derivadas de λ, ela representa um exemplo de uma teoria singular. A matriz Hessiana tem blocos que desaparecem, $\frac{\partial^2 S}{\partial\dot{\lambda}^i\partial\dot{\lambda}^j} = 0$, $\frac{\partial^2 S}{\partial\dot{\lambda}^i\partial\dot{q}^a} = 0$. Então seu posto é menor que a dimensão $(2n - k)$ do espaço estendido. Agora mostramos que a nova formulação (2.72) implica a mesma evolução para q^a que a anterior (2.33). Portanto, eles são equivalentes. Será conveniente escrever equações de movimento separadamente para as variáveis q^i e q^α (estas foram descritas na (2.43). Aplicando o princípio da mínima ação,

encontramos

$$\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \lambda^j \frac{\partial G_j}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{2.73}$$

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \lambda^j \frac{\partial G_j}{\partial q^i} = 0, \tag{2.74}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda^i} \equiv G_i(q^i, q^\alpha) = 0. \tag{2.75}$$

Note que as restrições (2.75) apareceram como parte das equações de movimento. Desse sistema obtemos equações fechadas para q^α. Eles podem ser obtidos da seguinte maneira: Assumimos que a solução $q^i = q^i(q^\alpha)$ de (2.75) foi substituída em (2.73) e (2.74), primeiro fazemos diferenciação de $G_i(q^i(q^\alpha), q^\alpha) = 0$ usando (2.43) temos $\frac{\partial G_j}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial G_j}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha} = 0$ então $\frac{\partial G_j}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial G_j}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha}$. Usando essa expressão em (2.73), o último é lido como

$$(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha})|_{q^i(q^\alpha)} - \lambda^j \frac{\partial G_j}{\partial q^i}|_{q^i(q^\alpha)} \frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{2.76}$$

Fazendo uso de (2.74), podemos excluir o termo $\lambda^j \frac{\partial G_j}{\partial q^i}$ de (2.76) (Para evitar a possibilidade $\lambda^i = 0$ nós poderíamos começar a lagrangiana como $\frac{1}{\lambda^i}$ ao invés de λ^i). O resultado é,

$$(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha})|_{q^i(q^\alpha)} + (\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})|_{q^i(q^\alpha)} \frac{\partial q^i}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{2.77}$$

o que é precisamente (2.49).

Para ter certeza da autoconsistência na nova formulação, vamos analisar a estrutura de soluções em todo o sistema (2.77), (2.74) e (2.75). A última dessas equações já foi resolvida por $q^i(q^\alpha)$. Seja $q^\alpha = q^\alpha(\tau)$. Nós substituímos as funções $q^\alpha(\tau)$, $q^i(q^\alpha(\tau))$ em (2.74), isso fornece uma equação algébrica para determinar λ^i. Da construção $det\frac{\partial G_j}{\partial q^i} \neq 0$, temos que (2.74) pode ser resolvido em relação a λ^i. Consequentemente, já que todo λ^i são determinados algebricamente, não precisamos impor condições iniciais para as variáveis auxiliares.

2.5 COORDENADAS DE GAUSS NORMAIS DE $\mathbf{R}^2$ ADAPTADAS A UMA CURVA

Considere a curva $\gamma = \{(x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$ tal que $g(x^1, x^2) = 0\}$, definimos $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, como uma função diferenciável de classe $\mathbf{C}^k$ para todo inteiro $k > 1$, com gradiente diferente de zero, onde $g(x^1, x^2) = 0$ é a equação cartesiana de γ. Então, também podemos descrever a curva pela equação $f(x^1, x^2) = 0$, na qual definimos $f(x^1, x^2) = \frac{g(x^1,x^2)}{\sqrt{(\nabla g, \nabla g)}}$. Seja $\boldsymbol{r}(\xi)$ a equação paramétrica da curva γ, em coordenada local ξ temos que $f(x^1(\xi), x^2(\xi)) = 0$, e teremos $\frac{df}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{dx^1}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{dx^2}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\xi} = (\nabla f|_\gamma, \frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}) = 0$ em que $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}$ é o vetor tangente a curva. Então podemos implicar que $\nabla f|_\gamma$ é ortogonal a curva γ e também nós afirmamos que ∇f é vetor unitário para qualquer ponto da curva. Com efeito

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^1} &= \frac{\frac{\partial g}{\partial x^1}}{\sqrt{(\nabla g, \nabla g)}} - \frac{g(x^1, x^2)(\frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\partial^2 g}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^1 \partial x^2})}{(\nabla g, \nabla g)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\frac{\partial g}{\partial x^1}}{\sqrt{(\nabla g, \nabla g)}} - \frac{g(x^1, x^2)(\nabla g, \frac{\partial}{\partial x^1} \nabla g)}{(\nabla g, \nabla g)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

lembrando como $g(x^1, x^2) = 0$ temos $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x^1}}{\sqrt{(\nabla g, \nabla g)}}$. Analogamente $\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x^2}}{\sqrt{(\nabla g, \nabla g)}}$ implica $|\nabla f|_\gamma = 1$. Então vamos denotar $\nabla f|_\gamma \equiv \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)$.

Para nosso estudo, precisamos de um sistema de coordenadas adaptadas a curva γ contida em $\mathbf{R}^2$. Vamos definir em geral, um difeomorfismo não linear

$$\varphi : C \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow A \subset \mathbf{R}^n,$$

com regra de correspondência

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n) \text{ ou } x^i = \varphi^i(\xi^a). \tag{2.78}$$

Onde A é o plano equipado com coordenadas Cartesianas x^i, $i = 1, 2, 3, ..., n$ e C outro exemplar do plano equipado com coordenadas ξ^a, $= 1, 2, 3, ..., n$. Então temos identificações: $M \sim (x^1, x^2, ..., x^n) \sim \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, onde $\boldsymbol{x}$ é vetor posição do ponto M, os números ξ^a são chamados coordenadas curvilíneas de ponto $\boldsymbol{x} \in A$ e $x^i = \varphi^i(\xi^a)$ são funções de passagem de coordenadas curvilíneas para Cartesianas. Cada bijeção não linear φ, permite usar ξ^a como coordenadas dos puntos de A.

Quando $n = 2$, seja um ponto com coordenadas cartesianas $\boldsymbol{R}$ próximo da curva γ, definimos coordenadas curvilíneas em $\mathbf{R}^2$ (chamadas coordenadas de Gauss normais) de acordo com a seguinte regra: vamos tomar a projeção ortogonal do ponto $\boldsymbol{R}$ na curva. Seja o ponto $\boldsymbol{r}(\xi)$ de γ, então podemos escrever

$$\boldsymbol{R}(\xi, \mu) = \boldsymbol{r}(\xi) + \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)\mu. \tag{2.79}$$

Os números (ξ, μ) são chamados coordenadas de Gauss normais do ponto $\boldsymbol{R}$. Note que o (2.79) contém o vetor gradiente calculado em pontos da curva γ tal que $\hat{\boldsymbol{n}}(\xi) = \bigtriangledown f|_\gamma$, onde $n^2 = 1$, implicando $(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\xi}) = 0$. Por construção μ é a distância de um ponto até a curva, então as coordenadas são adaptadas à curva γ; quando $\boldsymbol{R}$ está na curva, temos $\boldsymbol{R}(\xi, 0) \equiv \boldsymbol{r}(\xi)$, ou seja, $\mu = 0$, e os pontos da curva têm coordenadas $(\xi, 0)$.

Comentário. Vamos comparar as curvas $f(\boldsymbol{r}) = 0$ e $f(\boldsymbol{r}) = c = constante$. Seja $f(\boldsymbol{R}) = c$ onde $\boldsymbol{R}$ é um ponto próximo da curva $f(\boldsymbol{r}) = 0$. Escrevendo $f(\boldsymbol{R})$ em séries em uma vizinhança do ponto $\boldsymbol{r}(\xi)$, obtemos

$$\begin{aligned}
c &= f(\boldsymbol{R}) = f(\boldsymbol{r}(\xi) + \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)\mu) \\
&= f(\boldsymbol{r}(\xi)) + \tfrac{\partial f}{\partial x_i} n_i \mu + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j \mu^2 + r(\hat{\boldsymbol{n}}\mu) \\
&= f(\boldsymbol{r}(\xi)) + (\bigtriangledown f|_\gamma, \hat{\boldsymbol{n}}(\xi))\mu + \tfrac{1}{4}(2(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_1}, \bigtriangledown f)n_1 + 2(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_2}, \bigtriangledown f)n_2) \\
&= f(\boldsymbol{r}(\xi)) + (\bigtriangledown f|_\gamma, \hat{\boldsymbol{n}}(\xi))\mu + \tfrac{1}{4}(\{(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_1}, \bigtriangledown f) + (\bigtriangledown f, \tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_1})\}n_1 + \{(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_2}, \bigtriangledown f) + \\
&\quad (\bigtriangledown f, \tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_2})\}n_2).
\end{aligned}$$

Lembremos que $\bigtriangledown f|_\gamma = \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)$, então

$$c = f(\boldsymbol{r}(\xi)) + (\bigtriangledown f|_\gamma, \hat{\boldsymbol{n}}(\xi))\mu + \frac{1}{4}\partial_i f \partial_i (\bigtriangledown f, \bigtriangledown f)|_{\boldsymbol{r}(\xi)}(\mu)^2 + ... \tag{2.80}$$

Usando $f(\boldsymbol{r}(\xi)) = 0$ e $(\bigtriangledown f|_\gamma, \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)) = 1$, obtemos

$$c = f(\boldsymbol{r}(\xi) + \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)\mu) = \mu + \frac{1}{4}\partial_i f \partial_i (\bigtriangledown f, \bigtriangledown f)|_{r(\xi)}(\mu)^2 + ... \tag{2.81}$$

Portanto, $f = 0$ e $f = c$ não são curvas equidistantes, a menos que $|\bigtriangledown f| = constante$ em uma vizinhança de γ.

Considere uma partícula $\boldsymbol{R}(t)$ que começa seu movimento em γ com velocidade tangente inicial e se move sobre o potencial $U(\boldsymbol{R}) = \frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R})$, onde d é a distância até a curva γ, e $U(\boldsymbol{R})$ é o potencial que limita a partícula a mover-se próximo da curva, a lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 - \frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R}). \tag{2.82}$$

Vamos reescrever a (2.82) em coordenadas curvilíneas. Para isto, primeiro fazemos os seguintes cálculos de $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(\xi(t), \mu(t))$. Temos $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu}\dot{\mu}$ logo $\dot{\boldsymbol{R}}^2 = (\dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\boldsymbol{R}}) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 + 2(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu})\dot{\xi}\dot{\mu} + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu})\dot{\mu}^2 \equiv (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda^i}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda^j})\dot{\lambda}^i\dot{\lambda}^j$ onde $\omega_{ij} = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda^i}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda^j})$ é a métrica induzida em $\boldsymbol{R}^2$. Calculamos as derivadas de (2.79), primeiro sobre $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi} + \mu\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi}$ e isso implica que $(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu}) = 0$, logo, sobre $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu} = \hat{\boldsymbol{n}}(\xi)$ temos que $(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \mu}) = 1$, então em (2.82) temos

$$L = \frac{m}{2}(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 + \frac{m}{2}\dot{\mu}^2 - \frac{\alpha}{2}\mu^2. \tag{2.83}$$

Como já expressamos a Lagrangiana em coordenadas curvilíneas. Procederemos agora ao cálculo de suas equações de movimento

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = m(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2, \tag{2.84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}, \tag{2.85}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\ddot{\xi} + 2m[(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 + (\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \mu}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}\dot{\mu}], \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = m(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \mu})\dot{\xi}^2 - \alpha\mu, \tag{2.87}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} = m\dot{\mu} \text{ isto implica } \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} = m\ddot{\mu}. \tag{2.88}$$

Por (2.2) temos

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\ddot{\xi} + (\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 + 2(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \mu}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\mu}\dot{\xi} = 0, \tag{2.89}$$

$$(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \mu}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 = \ddot{\mu} + \frac{\alpha}{m}\mu. \tag{2.90}$$

Fazendo uso de (2.79), obtemos

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}) &= (\frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}, \frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}) + 2(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}, \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi})\mu + (\frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi}, \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi})\mu^2, \\
(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}) &= (\frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\xi^2}) + \frac{d}{d\xi}(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}, \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi})\mu + (\frac{d^2\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi^2}, \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi})\mu^2, \\
(\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \xi \partial \mu}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}) &= (\frac{d\boldsymbol{r}}{d\xi}, \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi}) + (\frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi}, \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{d\xi})\mu.
\end{aligned}$$

Para uma curva de forma geral, a única quantidade conservada é a energia, $E = T + U$, ou seja

$$E = \frac{m}{2}(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 + \frac{m}{2}\dot{\mu}^2 + \frac{\alpha}{2}\mu^2 \tag{2.91}$$

Ela é uma soma de números positivos. Para a partícula com energia dada E temos as desigualdades

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi})\dot{\xi}^2 < \frac{2E}{m} \text{ e } \mu^2 < \frac{2E}{\alpha}. \tag{2.92}$$

Isto implica que no limite $\alpha \longrightarrow \infty$ a partícula está confinada sobre γ.

2.6 COORDENADAS DE GAUSS NORMAIS DE $\mathbf{R}^3$ ADAPTADAS A UMA SUPERFÍCIE

Considere a superfície regular $\mathbf{S} \subset \mathbf{R}^3$, com equação $g(x^i) = 0 \;\; i = 1, 2, 3$ diferenciável de classe $\mathbf{C}^k$ com $k > 1$, onde g é uma função diferenciável, com vetor gradiente não nulo $\bigtriangledown g(x^i) = (\frac{\partial g}{\partial x^1}, \frac{\partial g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial x^3})$ vê [5]. Também podemos descrever isso pela equação $f(x^i) = 0$, onde definimos $f(x^i) = \frac{g(x^i)}{\sqrt{(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)}}$. Seja $\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) \equiv \mathbf{x}(\xi^\alpha)$ a equação paramétrica da superfície $\mathbf{S}$ em coordenadas locais, temos que $f(x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2)) = 0$, onde teremos $\frac{\partial f}{\partial \xi^1} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} = (\bigtriangledown f, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1}) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} = (\bigtriangledown f, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2}) = 0$ onde $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1}$ e $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2}$ são os dois vetores tangentes a superfície $\mathbf{S}$. Podemos afirmar que $\bigtriangledown f$ é vetor unitário para qualquer ponto da superfície. Com efeito, $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x^1}}{\sqrt{(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)}} - \frac{g(x^1, x^2, x^3)\frac{\partial}{\partial x^1}(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)}{(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)^{\frac{3}{2}}}$ agora como $g(x^1, x^2, x^3) = 0$ temos $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x^1}}{\sqrt{(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)}}$ mesmo $\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x^2}}{\sqrt{(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)}}$ e $\frac{\partial f}{\partial x^3} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x^3}}{\sqrt{(\bigtriangledown g, \bigtriangledown g)}}$ isto implica $\mid \bigtriangledown f|_{\mathbf{S}} = 1$. Denotaremos o vetor unitário $\bigtriangledown f|_{\mathbf{S}} \equiv \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha)$. Para o ponto com coordenadas euclidianas $\boldsymbol{R}$ próximo da superfície $\mathbf{S}$ definiremos isso em coordenadas curvilíneas de $\mathbf{R}^3$ de acordo com a seguinte regra: tomamos a projeção ortogonal do ponto $\boldsymbol{R}$ na superfície, um ponto $\mathbf{x}$ de $\mathbf{S}$, então escrevemos

$$\boldsymbol{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{x}(\xi^\alpha) + \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha)\xi^3. \tag{2.93}$$

Os números (ξ^1, ξ^2, ξ^3) são chamados as coordenadas de Gauss de $\boldsymbol{R}$. Note que a equação (2.93) contém um vetor gradiente calculado em pontos na superfície $\mathbf{S}$: $\hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha) \equiv \bigtriangledown f|_{\mathbf{S}}$, isso implica $(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}) = n^2 = 1$. Derivando esta última expressão para cada coordenada curvilínea, temos $(\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\alpha}) = 0$.

Por construção, ξ^3 é a distância do ponto à superfície $\mathbf{S}$, veja a Figura 6. Assim as coordenadas são adaptadas à superfície, quando $\boldsymbol{R}$ está na superfície, temos: $\boldsymbol{R}(\xi^1, \xi^2, 0) = \mathbf{x}(\xi^\alpha)$, portanto os pontos da superfície têm as coordenadas $(\xi^1, \xi^2, 0)$.

Comentário. Vamos comparar as superfícies $f(x^i) = 0$ e $f(x^i) = c =$ constante. De modo que $f[\boldsymbol{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)] = c$ é um ponto próximo da superfície $f = 0$, desenvolvemos $f(\boldsymbol{R})$ em série no ponto $\mathbf{x}(\xi^\alpha)$ e conseguimos

$$\begin{aligned} c = f[\boldsymbol{R}] = f[\mathbf{x}(\xi^\alpha) + \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha)\xi^3] = f[(x^1(\xi^\alpha), x^2(\xi^\alpha), x^3(\xi^\alpha)) + \\ (n^1(\xi^\alpha), n^2(\xi^\alpha), n^3(\xi^\alpha))\xi^3], \end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned} &= f(\mathbf{x}(\xi^\alpha)) + \tfrac{\partial f}{\partial x_i} n_i \xi^3 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j (\xi^3)^2 + r(\mathbf{n}\xi^3) \\ &= f(\mathbf{x}(\xi^3)) + (\bigtriangledown f|_{\mathbf{S}}, \mathbf{n}(\xi^\alpha))\xi^3 + \tfrac{1}{4}(2(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_1}, \bigtriangledown f)n_1 + 2(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_2}, \bigtriangledown f)n_2 + 2(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_3}, \bigtriangledown f)n_3) \\ &= f(\mathbf{x}(\xi^\alpha)) + (\bigtriangledown f|_{\mathbf{S}}, \mathbf{n}(\xi^\alpha))\xi^3 + \tfrac{1}{4}(\{(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_1}, \bigtriangledown f) + (\bigtriangledown f, \tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_1})\}n_1 + \{(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_2}, \bigtriangledown f) + \\ &\quad (\bigtriangledown f, \tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_2})\}n_2 + \{(\tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_3}, \bigtriangledown f) + (\bigtriangledown f, \tfrac{\partial \bigtriangledown f}{\partial x_3})\}n_3). \end{aligned}$$

Lembremos $\bigtriangledown f|_{\mathbf{S}} = \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha)$

$$= f(\mathbf{x}(\xi^\alpha)) + (\bigtriangledown f|_{\mathbf{S}}, \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha))\xi^3 + \frac{1}{4}\partial_i f \partial_i (\bigtriangledown f, \bigtriangledown f)|_{\mathbf{x}(\xi)}(\xi^3)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{2.95}$$

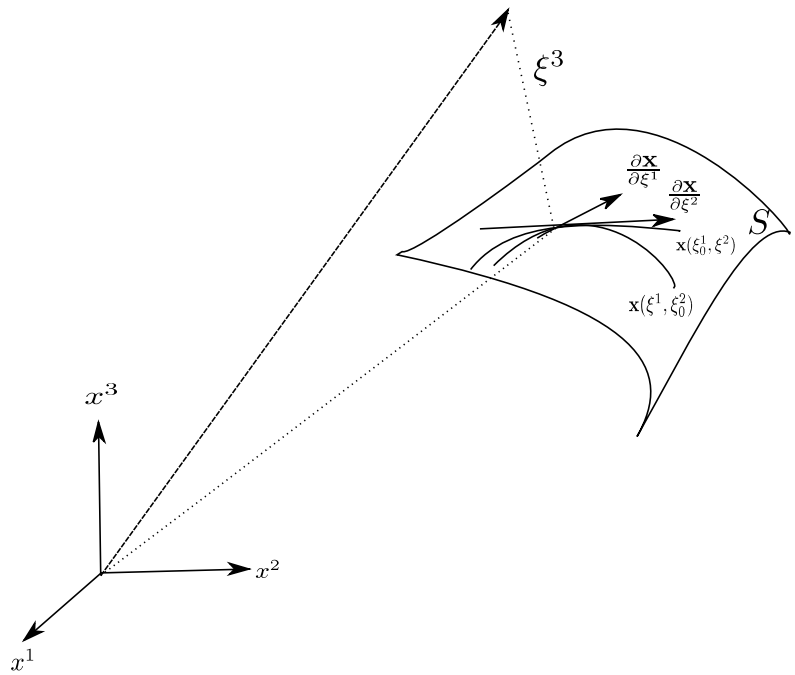


Figura 6 – Coordenadas normais de Gauss

então como $f(x^1, x^2, x^3) = 0$, $(\bigtriangledown f, \hat{\boldsymbol{n}}) = 1$ temos

$$c = \xi^3 + \frac{1}{4}\partial_i f \partial_i (\bigtriangledown f, \bigtriangledown f)|_{\mathbf{X}(\xi)}(\xi^3)^2 + ... \tag{2.96}$$

Então temos de (2.96) que as superfícies não são equidistantes, a menos que $|\bigtriangledown f| =$ constante em uma vizinhança de $\mathbf{S}$.

Considere a partícula $\boldsymbol{R}(t)$ que começa seu movimento na superfície $\mathbf{S}$ com velocidade tangente inicial e se move sobre o potencial $U(\boldsymbol{R}) = \frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R})$, que confina partícula mover-se próximo a superfície. Aqui d é distância ate $\mathbf{S}$. A lagrangiana é:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 - \frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R}). \tag{2.97}$$

Vamos reescrever (2.96) em coordenadas curvilíneas: Primeiro

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}\dot{\xi}^1, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}\dot{\xi}^2, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}\dot{\xi}^3),$$

logo $\dot{\boldsymbol{R}}^2 = (\dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\boldsymbol{R}}) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1})(\dot{\xi}^1)^2 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2})\dot{\xi}^1\dot{\xi}^2 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3})\dot{\xi}^1\dot{\xi}^3 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1})\dot{\xi}^2\dot{\xi}^1 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2})(\dot{\xi}^2)^2 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3})\dot{\xi}^2\dot{\xi}^3 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1})\dot{\xi}^3\dot{\xi}^1 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2})\dot{\xi}^3\dot{\xi}^2 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3})(\dot{\xi}^3)^2 \equiv (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^i}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^j})\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j$.

Onde $\omega = \omega_{ij} = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^i}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^j})$ é a métrica induzida em $\mathbf{R}^3$

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) & (\frac{\partial R}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}) \\ (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}) \\ (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}) \end{pmatrix}. \tag{2.98}$$

Desenvolvendo cada um dos termos de (2.98) temos

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + 2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1})\xi^3 + (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1})(\xi^3)^2,$$

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) + 2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2})\xi^3 + (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2})(\xi^3)^2,$$

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) + 2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2})\xi^3 + (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2})(\xi^3)^2.$$

Lembrando $(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}) = 1$ derivando esta última expressão para cada coordenada curvilínea temos $(\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}) = 0$ e $(\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}) = 0$. Substituindo obtemos

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}) = (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) = 0,$$

$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^3}) = 1$, então de ω_{ij} em (2.98) podemos obter

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) & 0 \\ (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) & (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.99}$$

Obtemos $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha,3}$ e ω_{33} em geral para $\alpha, \beta = 1, 2$ de (2.98) que já foi explicitamente desenvolvido anteriormente.

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^\beta}), \\ \omega_{\alpha 3} &= (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}, \hat{\boldsymbol{n}}) + (\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\alpha}) = 0, \\ \omega_{33} &= (\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}) = 1. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Então substituindo em (2.100) temos

$$\omega_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta}) + 2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\beta})\xi^3 + (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\beta})(\xi^3)^2, \tag{2.101}$$

e de (2.101) nós podemos obter a métrica da superfície $\mathbf{S}$, que é dada por

$$g_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta}), \tag{2.102}$$

onde temos que para os pontos da superfície $\omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. A inversa da métrica de superfície vamos denotar como $g^{\alpha\beta}$ ou $\tilde{g}$.

Agora representaremos os vetores $\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1})$, $\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})$, $\frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1})$, $\frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})$, ou em geral $\partial_b \mathbf{x}_a = \frac{\partial}{\partial \xi^b}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^a})$ em função de vetores da base $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}; \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \hat{\boldsymbol{n}}$ em termos dos coeficientes de conexão e os coeficientes da segunda forma fundamental

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) = \Gamma^1_{11}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} + N_{11}\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{2.103}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) = \Gamma^1_{12}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} + N_{12}\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{2.104}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) = \Gamma^1_{21}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} + \Gamma^2_{21}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} + N_{21}\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{2.105}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) = \Gamma^1_{22}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} + \Gamma^2_{22}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} + N_{22}\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{2.106}$$

Fazendo o produto escalar por $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}$, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}$ e $\hat{\boldsymbol{n}}$ as equações (2.103), (2.104), (2.105), (2.106) e $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$ de acordo com [5] são dadas por

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1})) &= \Gamma^1_{11}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + \Gamma^2_{11}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),\\
(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})) &= \Gamma^1_{12}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + \Gamma^2_{12}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),\\
(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})) &= \Gamma^1_{22}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + \Gamma^2_{22}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),\\
(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1})) &= \Gamma^1_{11}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + \Gamma^2_{11}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),\\
(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})) &= \Gamma^1_{12}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + \Gamma^2_{12}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),\\
(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})) &= \Gamma^1_{22}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + \Gamma^2_{22}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}).
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Derivando $(\hat{\boldsymbol{n}}(\xi^1,\xi^2), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) = 0$ e $(\hat{\boldsymbol{n}}(\xi^1,\xi^2), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) = 0$ com respeito a ξ^1 e ξ^2 temos $(\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta})) = -(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta}) = -(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\beta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha})$ onde $\alpha, \beta = 1, 2$

$$\begin{aligned}
N_{11} &= (\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1})) = -(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}),\\
N_{12} &= N_{21} = (\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})) = -(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),\\
N_{22} &= (\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2})) = -(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}).
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Lembremos que $(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}) = 1$, então, derivando com respeito de ξ^1 e ξ^2 temos $(\hat{\boldsymbol{n}}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\alpha}) = 0$ com $\alpha = 1, 2$ o que implica vetor $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\beta} \in T_{\mathbf{X}(\xi^\alpha)}\mathbf{S}$ pode ser escrito como combinação linear de vetores $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}$ desta forma $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^\alpha} = b^\beta_\alpha \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta}$ onde $\alpha, \beta = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1} &= b^1_1\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} + b^2_1\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2},\\
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2} &= b^1_2\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} + b^2_2\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Vamos calcular o produto escalar com $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\gamma}$ onde $\gamma = 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
-N_{11} &= (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) = b_1^1(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + b_1^2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}), \\
-N_{12} &= (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) = b_1^1(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + b_1^2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}),
\end{aligned}
$$

logo temos,

$$
\begin{aligned}
-N_{21} &= (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) = b_2^1(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + b_2^2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}), \\
-N_{22} &= (\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) = b_2^1(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) + b_2^2(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}). \qquad (2.110)
\end{aligned}
$$

Escrevendo (2.109) em notação compacta $b_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} = -N_{\alpha\gamma}$, obtemos os coeficientes de (2.108) assim $b_\alpha^\beta = -N_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \equiv N_\alpha^\beta$, isto implica reescrever (2.108) como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1} &= -N_1^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} - N_1^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \\
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2} &= -N_2^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} - N_2^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \qquad (2.111)
\end{aligned}
$$

onde a equação (2.111) implica

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}) &= N_1^1 N_{11} + N_1^2 N_{21}, \\
(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}) &= N_1^1 N_{12} + N_1^2 N_{22}, \\
(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^1}) &= N_2^1 N_{11} + N_2^2 N_{21}, \\
(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \xi^2}) &= N_2^1 N_{12} + N_2^2 N_{22}. \qquad (2.112)
\end{aligned}
$$

Fazendo uso de (2.98) até (2.112) reescrevemos a lagrangiana (2.97) como

$$
L = \frac{m}{2}[(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1})(\dot{\xi}^1)^2 + 2(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2})\dot{\xi}^1\dot{\xi}^2 + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2})(\dot{\xi}^2)^2 + (\dot{\xi}^3)^2] - \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2. \quad (2.113)
$$

Daí temos

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) &= (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) - 2N_{11}\xi^3 + (N_1^1 N_{11} + N_1^2 N_{21})(\xi^3)^2, \\
(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) &= (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) - 2N_{12}\xi^3 + (N_1^1 N_{12} + N_1^2 N_{22})(\xi^3)^2, \\
(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1}) &= (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}) - 2N_{21}\xi^3 + (N_2^1 N_{11} + N_2^2 N_{21})(\xi^3)^2, \\
(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^2}) &= (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}) - 2N_{22}\xi^3 + (N_2^1 N_{12} + N_2^2 N_{22})(\xi^3)^2. \qquad (2.114)
\end{aligned}
$$

Usando (2.114), podemos escrever (2.113), como se segue

$$L = \frac{m}{2}[g_{\alpha\beta} - 2N_{\alpha\beta}\xi^3 + N^\gamma_\alpha N_{\gamma\beta}(\xi^3)^2]\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta + \frac{m}{2}(\dot{\xi}^3)^2 - \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2,$$

onde, de acordo com (2.101) temos

$$\omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - 2N_{\alpha\beta}\xi^3 + N^\gamma_\alpha N_{\gamma\beta}(\xi^3)^2.$$

Agora vamos calcular as equações de movimento fazendo uso de (2.2) para variável ξ^3

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi^3} &= m(-N_{\alpha\beta} + N^\gamma_\alpha N_{\gamma\beta}\xi^3)\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta - \alpha\xi^3, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^3} &= m\ddot{\xi}^3, \end{aligned} \tag{2.115}$$

então de (2.115) temos

$$\ddot{\xi}^3 + \frac{\alpha}{m}\xi^3 = -N_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta + \xi^3 N^\gamma_\alpha N_{\gamma\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta. \tag{2.116}$$

Logo as equações de movimento para ξ^α são

$$D\dot{\xi}^\alpha \equiv \ddot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma}(\omega_{\alpha\beta})\dot{\xi}^\beta\dot{\xi}^\sigma = 0, \tag{2.117}$$

onde,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\gamma}(\partial_\beta\omega_{\gamma\sigma} + \partial_\sigma\omega_{\beta\gamma} - \partial_\gamma\omega_{\gamma\sigma}).$$

Comentário. As variáveis ξ^α e ξ^3 não estão separadas. (2.117) tem uma forma semelhante *à* equação de geodésica, com conexão de Riemann Γ construído com a ajuda da métrica $\omega_{\alpha\beta}$ em vez da métrica $g_{\alpha\beta}$ de **S**. Em particular, ω depende de $\xi^3(t)$. (2.116) não tem um limite bem definido se $\alpha \longrightarrow \infty$. Notemos também que (2.115) tem um termo independente de ξ^3, que é $-N_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta$. Portanto, $\xi^3 = 0$. não é solução dessas equações, a menos que $\dot{\xi}^\alpha = 0$.

Para uma superfície de forma geral, a única quantidade conservada é a energia

$$E = \frac{m}{2}\omega_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta + \frac{m}{2}(\dot{\xi}^3)^2 + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2, \tag{2.118}$$

esta é uma soma de números positivos. Para uma partícula com energia E temos as desigualdades

$$\omega_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta < \frac{2E}{m}, \tag{2.119}$$

$$(\xi^3)^2 < \frac{2E}{\alpha}. \tag{2.120}$$

A velocidade tangencial máxima em (2.119) não depende da magnitude α do potencial de confinamento, enquanto o desvio máximo em (2.120) da partícula de **S** tende a zero

quando $\alpha \longrightarrow \infty$. Então, nesse limite a partícula fica confinada a mover-se em $\mathbf{S}$: $\xi^3 = 0$, e nossa expectativa é que ξ^α obedeça (2.117) com $\xi^3 = 0$. A equação do limite é

$$D\dot{\xi}^\alpha \equiv \ddot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma}(g_{\alpha\beta})\dot{\xi}^\beta\dot{\xi}^\sigma = 0. \tag{2.121}$$

Essa é a equação (2.121) da linha geodésica na superfície $\mathbf{S}$ com métrica induzida dada por $g_{\alpha\beta}$.

Agora notamos que a equação limite segue a partir da lagrangiana livre $L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2$, onde substituímos a solução $\mathbf{x}(\xi^\alpha)$ da restrição $f(x^i) = 0$

$$L = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta. \tag{2.122}$$

A Lagrangiana resultante coincide com resultado anterior (2.122), como foi esperado.

3 OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM $\mathbf{R}^3$

Seja

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (t, R^i) & \longrightarrow & \Psi(t, R^i), \end{array}$$

uma função com R^i coordenadas Cartesianas. Calcularemos o operador $\Psi(t, R^i)$. O qual sera de interesse para estudar na equacao de Schrödinger que vamos tratar mais a frente.

Agora vamos reescrever o operador de Laplace no espaço de funções $\Psi(t, R^1, R^2, R^3)$ em coordenadas curvilíneas.

$$\bigtriangledown^2 \Psi(R^k) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^i \partial R^i}. \tag{3.1}$$

O resultante é operador de Laplace-Beltrami denotado por $\triangle_{LB}$.

Considerando coordenadas curvilíneas $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \equiv \xi^a$, relacionadas com às coordenadas euclidianas pelas funções de passagem (2.78), $R^i = R^i(\xi^a)$, onde i=1,2,3 (usamos índices do começo da alfabeto latino para denotar as coordenadas curvilíneas, ou seja, $a = 1, 2, 3$). Nós introduzimos a notação.

$$\Psi(\xi^a) = \Psi(R^i(\xi^a)), a^i_a(\xi) = \frac{\partial R^i}{\partial \xi^a}, \tilde{a}^a_i(\xi) = \frac{\partial \xi^a}{\partial R^i}|_{\boldsymbol{R}(\xi)}, \text{ então } a^j_a \tilde{a}^b_j = \delta^b_a, \tilde{a}^b_i a^j_b = \delta^j_i. \tag{3.2}$$

Note que as linhas da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial R^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial R^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial R^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial R^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial R^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial R^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial R^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial R^3}{\partial \xi^3} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

representam as coordenadas (numa base euclidiana) dos vetores tangentes $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^a} = \boldsymbol{R}_a$. Por exemplo:$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi^1} = a^i_1 \mathbf{e}_i$.

Vamos obter algumas relações úteis. Derivando $\tilde{a}^c_i a^j_c = \delta^j_i$ temos

$$\frac{\partial \tilde{a}^c_i}{\partial \xi^b} a^j_c + \tilde{a}^c_i \frac{\partial a^j_c}{\partial \xi^b} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{a}^c_i}{\partial \xi^b} a^j_c = -\tilde{a}^c_i \frac{\partial a^j_c}{\partial \xi^b}, \quad \frac{\partial \tilde{a}^c_i}{\partial \xi^b} = -\tilde{a}^c_i \frac{\partial a^j_c}{\partial \xi^b} \tilde{a}^a_j. \tag{3.4}$$

Vamos apresentar as derivadas $\partial_b R_c$ onde b,c=1,2,3 na base R_e com e=1,2,3

$$\partial_b \boldsymbol{R}_c = \Gamma^e_{bc} \boldsymbol{R}_e \text{ de (3.2) } \partial_b a^j_c = \Gamma^e_{bc} a^j_e \text{ ou } \partial_b a^j_c - \Gamma^e_{bc} a^j_e = 0 \text{ então } D_b a^j_c = 0. \tag{3.5}$$

Usando as equações (3.4) e (3.5) temos

$$\partial_b \tilde{a}^a_i = -\tilde{a}^c_i \partial_b a^j_c \tilde{a}^a_j; \partial_b \tilde{a}^a_i = -\tilde{a}^c_i \Gamma^e_{bc} a^j_e \tilde{a}^a_j \text{ então } a^j_e \tilde{a}^a_j = \delta^a_e \text{ se } e = a, \delta^a_a = 1,$$

$$\partial_b \tilde{a}_i^a = -\Gamma_{bc}^a \tilde{a}_i^c \text{ ou } \; D_b \tilde{a}_i^c = 0. \tag{3.6}$$

Calculando a derivada ∂_b da formula $\ln\det \mathbf{a} = tr \ln \mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$ é matriz de (3.3), obtemos $\partial_b(\ln\det \mathbf{a}) = tr(\partial_b \ln \mathbf{a})$, e então $\frac{1}{\det \mathbf{a}}\partial_b \det \mathbf{a} = tr(a^{-1}\partial_b a) = tr(\tilde{a}\partial_b a)$. Notando que

$$0 < \det \mathbf{a} = \sqrt{\det(\mathbf{a}^T\mathbf{a})} = \sqrt{\det(a_c^i a_d^i)} = \sqrt{\det \omega},$$

onde ω é a métrica de $\mathbf{R}^3$ em (2.97), podemos reescrever a igualdade anterior da seguinte maneira

$$\frac{1}{\det \mathbf{a}}\partial_a \det \mathbf{a} = tr(\tilde{a}\partial_a a) = \frac{1}{\sqrt{\det \omega}}\partial_a \sqrt{\det \omega} = \tilde{a}_i^b \partial_a a_b^i,$$

então de (3.5)

$$\Gamma_{ba}^b \equiv \tilde{a}_i^b \partial_a a_b^i = \frac{1}{\sqrt{\det \omega}}\partial_a \sqrt{\det \omega}. \tag{3.7}$$

Precisamos uma expressão para o operador $\bigtriangledown^2 = \frac{\partial}{\partial R^i}\frac{\partial}{\partial R^i}$, de Laplace em coordenadas curvilíneas. O resultante é o operador de Laplace-Beltrami, denotado por $\triangle_{LB}$. Para encontrá-lo, apresentamos a função $[\partial_i \partial_i \Psi(\boldsymbol{R})]|_{\boldsymbol{R}(\xi)}$ como

$$[\partial_i \partial_i \Psi(\boldsymbol{R})]|_{\boldsymbol{R}(\xi)} = \triangle_{LB}\Psi(\xi). \tag{3.8}$$

Então calculamos primeiro

$$\partial_a \Psi(\xi^b) = \partial_i \Psi \frac{\partial R^i}{\partial \xi^a},$$

de (3.2)

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial R^i}\partial_a \Psi(\xi^b) = \partial_i \Psi,$$

agora,

$$\partial_i \partial_i \Psi = \partial_i(\frac{\partial \xi^a}{\partial R^i}\partial_a \Psi(\xi^b)),$$

de (3.2),

$$\partial_i \partial_i \Psi = \partial_i(\tilde{a}_i^a \partial_a \Psi(\xi^b)),$$

logo de (3.8) temos

$$\begin{aligned} \triangle_{LB}\Psi(\xi) &= [\partial_i \partial_i \Psi(\boldsymbol{R})]|_{\boldsymbol{R}(\xi)} \\ &= \tilde{a}_i^b \partial_b[\tilde{a}_i^a \partial_a \Psi(\xi)]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lembremos que $\omega_{ab} = \partial_a R^i \partial_b R^i = a_a^i a_b^i$ é a métrica de $\mathbf{R}^3$ induzida em coordenadas curvilíneas, $\omega^{ab} = \tilde{a}_i^a \tilde{a}_i^b$ é a inversa da métrica, e D_a é a derivada covariante:$D_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma_{ac}^b(\omega) v^c$. Fazendo uso da expressão (3.6) nós calculamos a derivada ∂_b em (3.9)

$$\tilde{a}_i^b \partial_b[\tilde{a}_i^a \partial_a \Psi(\xi)] = \tilde{a}_i^b \tilde{a}_i^a \partial_b \partial_a \Psi + \tilde{a}_i^b(\partial_b \tilde{a}_i^a)\partial_a \Psi = \omega^{ba}\partial_b \partial_a \Psi - \tilde{a}_i^b \tilde{a}_i^a \Gamma_{ba}^c \partial_c \Psi = \omega^{ba} D_b \partial_a \Psi,$$

$$\text{então } \triangle_{LB}\,\Psi(\xi) \;=\; \omega^{ba}D_b\partial_a\Psi(\xi). \tag{3.10}$$

Usando $\partial_b[\tilde{a}_i^b\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi] = \tilde{a}_i^b\partial_b[\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi] + (\partial_b\tilde{a}_i^c)\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi$ em (3.9).

$$\begin{aligned}
\triangle_{LB}\Psi(\xi) &= \tilde{a}_i^b\partial_b[\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi(\xi)] = \partial_b[\tilde{a}_i^b\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi] - (\partial_b\tilde{a}_i^c)\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi \\
&= \partial_b[\tilde{a}_i^b\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi] - (\partial_b\tilde{a}_i^c)(a_c^j\tilde{a}_j^b)\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi \\
&= \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi] - (\partial_b\tilde{a}_i^c)(a_c^j\tilde{a}_j^b)\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi \\
&= \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi] + (-\partial_b\tilde{a}_i^c a_c^j)\tilde{a}_j^b\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi,
\end{aligned}$$

usando (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\triangle_{LB}\Psi(\xi) &= \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi] + (\tilde{a}_i^c\partial_b a_c^j)\tilde{a}_j^b\tilde{a}_i^a\partial_a\Psi \\
&= \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi] + (\partial_b a_c^j)\tilde{a}_j^b(\tilde{a}_i^c\tilde{a}_i^a)\partial_a\Psi = \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi] + (\partial_b a_c^j)\tilde{a}_j^b\omega^{ca}\partial_a\Psi,
\end{aligned}$$

substituindo (3.7)

$$\begin{aligned}
\triangle_{LB}\Psi(\xi) &= \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi] + \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}[\partial_c\sqrt{\det\omega}]\omega^{ca}\partial_a\Psi, \\
\triangle_{LB}\Psi(\xi) &= \partial_b[\omega^{ba}\partial_a\Psi]\frac{\sqrt{\det\omega}}{\sqrt{\det\omega}} + \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}[\partial_c\sqrt{\det\omega}]\omega^{ca}\partial_a\Psi, \\
\triangle_{LB}\Psi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}\partial_c[\omega^{ca}\partial_a\Psi]\sqrt{\det\omega} + \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}[\partial_c\sqrt{\det\omega}]\omega^{ca}\partial_a\Psi, \\
\triangle_{LB}\Psi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}\partial_c(\sqrt{\det\omega}\omega^{ca}\partial_a\Psi).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A equação (3.11) é resultado principal desta seção. Mostraremos também algumas identidades adicionais são elas,

$$\Gamma_{ba}^b = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\partial_a\sqrt{\omega} = \frac{1}{2}\omega^{bc}\partial_a\omega_{bc} = \tilde{a}_i^b\partial_a a_b^i, \tag{3.12}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\partial_k(\sqrt{\omega}\omega^{ak}) = -\partial_b\omega^{ab} - \Gamma_{bc}^b\omega^{ac}. \tag{3.13}$$

e

$$D_a\tilde{a}_i^a = \partial\tilde{a}_i^a + \Gamma_{ab}^a\tilde{a}_i^b = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\partial_a(\sqrt{\omega}\tilde{a}_i^a). \tag{3.14}$$

Provaremos (3.13). Com efeito

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\partial_k(\sqrt{\omega}\omega^{ak}) &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\{(\partial_k\sqrt{\omega})\omega^{ak} + \sqrt{\omega}(\partial_k\omega^{ak})\} \\
&= -\{\partial_k\omega^{ak} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}(\partial_k\sqrt{\omega})\omega^{ak}\},
\end{aligned}$$

de (3.5)

$$= -\partial_b\omega^{ab} - \Gamma_{bc}^b\omega^{ac}.$$

Provaremos (3.14). Usando (3.6), com efeito

$$D_a\tilde{a}_i^a = \partial_a\tilde{a}_i^a + \Gamma_{ac}^a\tilde{a}_i^c,$$

usando (3.7)

$$\begin{aligned}
D_a\tilde{a}_i^a &= \partial_a\tilde{a}_i^a + \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}[\partial_c\sqrt{\det\omega}]\tilde{a}_i^c, \\
D_a\tilde{a}_i^a &= \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}\partial_a\tilde{a}_i^a\sqrt{\det\omega} + \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}[\partial_c\sqrt{\det\omega}]\tilde{a}_i^c, \\
D_a\tilde{a}_i^a &= \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}\partial_a\tilde{a}_i^a\sqrt{\det\omega} + \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}[\partial_a\sqrt{\det\omega}]\tilde{a}_i^a, \\
D_a\tilde{a}_i^a &= \frac{1}{\sqrt{\det\omega}}\partial_a(\sqrt{\det\omega}\tilde{a}_i^a).
\end{aligned}$$

4 DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA NO ESPAÇO EUCLIDIANO EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

Considere uma partícula que se move em um plano com coordenadas Euclideanas $x^i,\ i = 1, 2, 3$, na presença de potencial $\mathbf{U(x)}$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}). \tag{4.1}$$

O momento conjugado nas coordenadas euclidianas x^i é proporcional à velocidade

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i = mV_i. \tag{4.2}$$

As equações Hamiltonianas do movimento são obtidas do Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{U(x)}, \tag{4.3}$$

com uso dos parênteses de Poisson

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{4.4}$$

Para uso posterior, reescrevemos o sistema em coordenadas curvilíneas $\mathbf{q} = (q^a),\ a = 1, 2, 3$.

$$x^i = x^i(q^a), \quad a^i_a(\mathbf{q}) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial q^a}, \quad \tilde{a}^a_i(\mathbf{q}) \equiv \frac{\partial q^a}{\partial x^i}|_{x(q)}. \tag{4.5}$$

A métrica induzida e sua inversa são

$$g_{ab}(\mathbf{q}) = \sum_i a^i_a a^i_b, \quad g^{ab} = \sum_i \tilde{a}^a_i \tilde{a}^b_i. \tag{4.6}$$

As colunas a^1_a ,a^2_a e a^3_a da matriz Jacobiana por construção, obedecem

$$\partial_b a^i_a = \partial_a a^i_b. \tag{4.7}$$

Como consequência, são campos covariantemente constantes. Com efeito

$$\begin{aligned} &\text{de (3.5) } D_a a^i_b \equiv \partial_a a^i_b - \Gamma^c_{ab} a^i_c = 0, \\ &\text{de (3.6) } D_a \tilde{a}^b_i \equiv \partial_a \tilde{a}^b_i + \Gamma^b_{ac} \tilde{a}^c_i = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Observe também que (4.7) é uma condição compatível para a existência de soluções $x^i(q^a)$ de (4.5) com funções dadas por $a^i_a(q^c)$.

Substituindo (4.5) em (4.1) a lagrangiana curvilínea

$$L \;=\; \frac{m}{2} g_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b - \mathbf{U(q)}, \text{ onde } \mathbf{U(q)} \equiv \mathbf{U(x(q))}. \tag{4.9}$$

Momento conjugado para q^a é

$$\pi_a \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = m g_{ab}\dot{q}^b \equiv m g_{ab} v^b. \tag{4.10}$$

Das relações (4.10) temos

$$\dot{q}^a \equiv v^a = \frac{1}{m} g^{ab} \pi_b = \frac{1}{m} \tilde{a}_i^a \tilde{a}_i^b \pi_b,$$

como

$$\dot{x}^i = a_a^i \dot{q}^a \text{ e } p_i = m\dot{x}^i = m a_a^i \dot{q}^a,$$

temos também,

$$\dot{q}^a = \frac{1}{m} \tilde{a}_i^a p_i = \tilde{a}_i^a \dot{x}^i \equiv \tilde{a}_i^a V_i. \tag{4.11}$$

Eles implicam que os momentos curvilíneos π^a não são proporcionais à velocidade curvilínea v^a, ao contrário do caso euclidiano (4.2).

Equações Hamiltonianas do movimento podem ser obtidas do Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} g^{ab} \pi_a \pi_b + \mathbf{U(q)}, \tag{4.12}$$

com o uso dos parênteses de Poisson

$$\{q^a, \pi_b\} = \delta_b^a. \tag{4.13}$$

5 MECÂNICA QUÂNTICA EUCLIDIANA EM COORDENADAS CARTESIANAS

Em mecânica quântica, a quantidade básica associada a uma partícula é a função de onda $\Psi(t, \mathbf{x})$. Esta é uma função complexa, que obedece à condição de normalização

$$\int d^3x \Psi^* \Psi = 1. \tag{5.1}$$

Evolução da função de onda é governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{x})]\Psi. \tag{5.2}$$

O quadrado da função de onda $P = \Psi^* \Psi$ tem interpretação de densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade de encontrar uma partícula na região do espaço Ω no instante t é dada por

$$P_\Omega = \int_\Omega d^3x \Psi^*(t, \mathbf{x}) \Psi(t, \mathbf{x}). \tag{5.3}$$

De acordo com o mecânica quântica, a função de onda traz para nós a informação mais completa que podemos ter sobre o sistema quântico. Em particular, partícula quântica não tem a noção de uma trajetória e, como consequência, não há noções de posição e de velocidade. Em vez disso, podemos calcular os valores médios de posição e velocidade de uma partícula com a função de onda $\Psi(t, \mathbf{x})$. De acordo com a teoria da probabilidade, a posição média da partícula pode ser calculada da seguinte forma

$$\langle x^i \rangle = \int d^3x \Psi^* x^i \Psi. \tag{5.4}$$

Vamos calcular a velocidade média. Usando equação de Schrödinger (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle v^i \rangle \equiv \tfrac{d}{dt}\langle x^i \rangle &= \textstyle\int d^3x x^i [\partial_t \Psi^* \Psi + \Psi^* \partial_t \Psi] = \int d^3x x^i [(\frac{-i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^i \partial x^i} + \\
&\quad \tfrac{i}{\hbar} U \Psi^*)\Psi + \Psi^*(\tfrac{i\hbar}{2m} \tfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^i} - \tfrac{i}{\hbar} U \Psi)] \\
&= \textstyle\int d^3x x^i [\frac{-i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^i \partial x^i} \Psi + \Psi^* \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^i}] \\
&= \tfrac{i\hbar}{2m} \textstyle\int d^3x x^i [\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^i \partial x^i} \Psi].
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo $\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}$,

$$\begin{aligned}
\langle v^i \rangle &= \tfrac{i\hbar}{2m} \textstyle\int d^3x x^i [\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^i} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^i \partial x^i} \Psi] \\
&= \tfrac{i\hbar}{2m} \textstyle\int d^3x x^i \frac{\partial}{\partial (x^i)} [\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \Psi].
\end{aligned}$$

Fazendo integração por partes,

$$\begin{aligned}
\langle v^i \rangle &= \tfrac{i\hbar}{2m} [\cancel{(x^i \Psi^* \tfrac{\partial \Psi}{\partial x^i} - x^i \tfrac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \Psi)|_{-\infty}^{\infty}} - \textstyle\int d^3x (\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \Psi)] \\
&= -\tfrac{i\hbar}{2m} \textstyle\int d^3x (\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^i} \Psi),
\end{aligned}$$

e novamente fazendo integração por partes,

$$\langle v^i \rangle = -\tfrac{i\hbar}{2m} (\textstyle\int d^3x \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \cancel{\Psi \Psi^*|_{-\infty}^{\infty}} + \int d^3x \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}),$$

obtemos o resultado

$$\langle v^i \rangle \equiv \frac{d}{dt}\langle x^i \rangle = -\frac{i\hbar}{m}\int d^3x \Psi^* \partial_i \Psi. \tag{5.5}$$

Para trabalhar com as quantidades médias desse tipo, é conveniente introduzir operadores lineares de posição e velocidade (momento), associados às grandezas clássicas $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{p}$. Eles atuam no espaço de Hilbert das funções de onda com o produto escalar

$$(\Psi, \Phi) = \int d^3x \Psi^* \Phi, \tag{5.6}$$

e são definidos da seguinte forma

$$x^i \longrightarrow \hat{x}^i = x^i, \quad p_i \longrightarrow \hat{p}_i = -i\hbar\partial_i, \quad v_i \longrightarrow \hat{v}_i = \frac{1}{m}\hat{p}_i. \tag{5.7}$$

Eles são os operadores Hermitianos, isto garante que os valores médios (5.4) e (5.5) sejam números reais, como deveria ser esperado. Seus comutadores se assemelham aos parênteses clássicos de Poisson.

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] \equiv \hat{x}^i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{x}^i = i\hbar\delta^i_j. \tag{5.8}$$

Vamos verificar se o operador do momento euclidiano $\hat{p}$ é Hermitiano em relação ao produto interno (5.6), com efeito

$$(\Psi, \hat{p}_i\Phi) = \int d^3x \Psi^*(-i\hbar\partial_i\Phi);$$

então fazendo a integração por partes

$$(\Psi, \hat{p}_i\Phi) = \cancel{-i\hbar\Psi^*\Phi|_{-\infty}^{+\infty}} + \int d^3x (i\hbar\partial_i\Psi^*)\Phi = \int d^3x(-i\hbar\partial_i\Psi)^*\Phi = (\hat{p}_i\Psi, \Phi).$$

Observe também que o operador de velocidade nas **coordenadas Euclidianas** é proporcional ao operador do momento.

Em base destes cálculos, podemos formular uma prescrição formal para a passagem da mecânica clássica para a mecânica quântica (procedimento de quantização)

1. Dada a teoria clássica (4.2), (4.3) e (4.4), vamos associar as variáveis de espaço de fase operadores Hermitianos, com comutadores que se assemelham aos parênteses clássicos (5.8).

2. Substituindo coordenadas e momentos pelos operadores em (4.3), obtemos o operador Hamiltoniano (que representa a energia da partícula quântica)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\bigtriangledown^2 + \mathbf{U(x)}. \tag{5.9}$$

Então, a equação de Schrödinger é

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})\Psi,$$

isso implica (5.2).

3. Os valores médios dos operadores introduzidos nos dão a posição média e a velocidade media da partícula de acordo com (5.4) e (5.5).

6 MECÂNICA QUÂNTICA EUCLIDIANA EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

Nesta seção, analisamos uma possibilidade natural de construir a mecânica quântica no espaço curvo. Podemos pegar a mecânica quântica no espaço Euclidiano e reescrevê-la em coordenadas curvilíneas. É bem sabido que a geometria euclidiana em $\mathbf{R}^3$, sendo reescrita em coordenadas curvilíneas, coincide formalmente com a geometria diferencial de uma superfície regular em $\mathbf{R}^3$, de modo que esperamos que a mecânica quântica do espaço curvo coincida formalmente com o mecânica quântica em coordenadas curvilíneas. O procedimento descrito esclarecerá também alguns pontos confusos das abordagens anteriores.

A função de onda em coordenadas curvilíneas (4.5) é definida a partir da função de onda em coordenadas Cartesianas $\Psi(t, \mathbf{x})$, pela expressão

$$\Psi(t, \mathbf{q}) \equiv \Psi(t, \mathbf{x}(\mathbf{q})). \tag{6.1}$$

O elemento de volume em coordenadas curvilíneas é

$$d^3x \equiv \sqrt{g} d^3q.$$

Então o produto escalar, induzido por (5.6), é

$$(\Psi, \Phi) = \int d^3q \sqrt{g} \Psi^*(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}) \equiv \int d^3q \det(a^i_a) \Psi^*(\mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}). \tag{6.2}$$

É conveniente introduzir o operador Hermitiano $\hat{q}^a = q^a$ e operador não-Hermitiano (em relação ao produto escalar (6.2))

$$\hat{\pi}^a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^a}, \qquad \text{portanto} \qquad [\hat{q}^a, \hat{\pi}_b] = i\hbar \delta^a_b. \tag{6.3}$$

Agora, a mecânica quântica Euclidiana (5.9), (5.2) (5.4) e (5.5) pode ser diretamente reescrita em coordenadas curvilíneas como segue

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\det g_{cd}}} \partial_a [\sqrt{\det g_{cd}} g^{ab} \partial_b] + U(\mathbf{x}(\mathbf{q})), \tag{6.4}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\det g_{cd}}} \partial_a [\sqrt{\det g_{cd}} g^{ab} \partial_b \Psi] + U(\mathbf{x}(\mathbf{q})) \Psi. \tag{6.5}$$

$$\langle x^i \rangle = \int d^3q \sqrt{\det g} \Psi^*(\mathbf{q}) x^i(\mathbf{q}) \Psi(\mathbf{q}), \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \langle v^i \rangle &= -\frac{i\hbar}{m} \int d^3q \sqrt{\det g} \Psi^*(\mathbf{q}) \tilde{a}^a_i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^a} \Psi(\mathbf{q}) \\ &\equiv \frac{1}{m} \int d^3q \sqrt{\det g} \Psi^*(\mathbf{q}) \tilde{a}^a_i(\mathbf{q}) \hat{\pi}_a \Psi(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Para obter (6.4) e (6.5) usamos (3.9),(3.10) e (3.11). As equações (6.6) e (6.7) são seguidas por (5.4) e (6.2) após a mudança das variáveis $x^i = x^i(q^a)$ nas integrais. Foi usada a igualdade

$$[\partial_i \Psi(x)]|_{x(q)} = \tilde{a}_i^a \partial_a \Psi(q), \tag{6.8}$$

a última pode ser confirmada por meio de calculo direto $\partial_a \Psi(q^a) = \partial_a \Psi(x^i(q^a)) = \partial_a x^i \partial_i \Psi(x)|_{x(q)} = a_a^i \partial_i \Psi(x)|_{x(q)}$.

Isso completa a reformulação da mecânica quântica em coordenadas curvilíneas. Faremos dois comentários.

1. De acordo com (6.6), o operador de posição é $\hat{x}^i = x^i(\hat{q}^a)$. Escrevendo (6.8) como $[-i\hbar\partial_i \Psi(x)]|_{x(q)} = \tilde{a}_i^a(-i\hbar)\partial_a \Psi(q)$, podemos dizer que o operador de momento Euclidiano $\hat{p}_i = -i\hbar\partial_i$ em coordenadas curvilíneas é dado por

$$\hat{p}_i = -i\hbar\tilde{a}_i^a(\mathbf{q})\partial_a = \tilde{a}_i^a(\mathbf{q})\hat{\pi}_a, \tag{6.9}$$

então

$$\hat{v}_i = \frac{1}{m}\hat{p}_i.$$

Operador $\hat{p}_i$ é invariante sob a mudança de coordenadas e é um operador Hermitiano em relação ao produto escalar (6.2). Observamos também que o comutador (5.8) é induzido pelo comutador curvilíneo (6.3).

2. Ressaltamos que o procedimento de quantização conduz, sem ambiguidades, à expressão (6.4) para o Hamiltoniano quântico. É manifestamente o operador hermitiano em relação ao produto escalar (6.2). Parte cinética dele é exatamente o operador de Laplace-Beltrami, em acordo com sugestão de Schrödinger.

Em resumo, a prescrição da quantização formal nas coordenadas curvilíneas do espaço Euclidiano poderia ser formulada da seguinte maneira: Dado o sistema clássico (4.10) - (4.13),

A) defina os operadores

$$\hat{q}^a = q^a, \quad \hat{\pi}^a = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^a}, \quad [\hat{q}^a, \hat{\pi}_b] = i\hbar\delta_b^a. \tag{6.10}$$

Eles atuam no espaço de funções da onda $\Psi(t, q^a)$ com produto escalar (6.2). Aqui notamos que $\hat{\pi}_a$ não é um operador Hermitiano. Com efeito

$$(\Psi, \hat{\pi}_a \Phi) = \int d^3q \det(a_a^i)\Psi^*(q)(-i\hbar\partial_a \Phi),$$

fazendo integração por partes temos

$$= \cancel{-i\hbar\Phi(q)\det(a_a^i)\Psi^*(q)|_{-\infty}^{+\infty}} + \int d^3q i\hbar(\partial_a \det(a_a^i))\Psi^*(q)\Phi +$$

$$\begin{aligned}
& \int d^3q \det(a^i_a)(i\hbar\partial_a\Psi^*)\Phi \\
= & \int d^3q(\partial_a \det(a^i_a))(-i\hbar\Psi(q))^*\Phi + \int d^3q \det(a^i_a)(-i\hbar\partial_a\Psi)^*\Phi.
\end{aligned}$$

Comparando com

$$(\hat{\pi_a}\Psi;\Phi) = \int d^3q \det(a^i_a)(-i\hbar\partial_a\Psi)^*(q)\Phi(q).$$

Concluímos

$$(\Psi;\hat{\pi_a}\Phi) \neq (\hat{\pi_a}\Psi;\Phi).$$

Isso não leva a nenhum problema especial, já que no espaço curvo o operador π_a não representa a velocidade (Euclidiana ou curvilínea).

B) A equação de Schrödinger segue do Hamiltoniano clássico (4.12), escolhendo o seguinte ordem de variáveis: $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\tilde{a}^a_i\pi_a\tilde{a}^b_i\pi_b + \mathbf{U(q)}$, e, em seguida, substituindo as variáveis por operadores.

C) A posição e a velocidade são representadas pelos operadores Hermitianos covariantes $x^i(\hat{q}^a)$ e $\hat{p}_i$, o último escrito em (6.9).

Infelizmente, o item **C**) desta prescrição não funciona no espaço curvo, onde não há analogia para as coordenadas x^i. Portanto, somos forçados a usar as coordenadas q^a para descrever a trajetória de uma partícula clássica e então, construir nessa base os operadores, que podem ser usados para calcular a posição e a velocidade media da partícula quântica. Vamos ver, como construir esses operadores no caso das coordenadas curvilíneas no espaço Euclidiano. Nós definimos a posição curvilínea média

$$\langle q^a\rangle = \int d^3q\sqrt{g}\Psi^*(\mathbf{q})q^a\Psi(\mathbf{q}), \tag{6.11}$$

e calculamos a velocidade curvilínea média

$$\begin{aligned}
\langle v^a\rangle &= \frac{d\langle q^a\rangle}{dt} = \int d^3q\sqrt{g}q^a[\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}] \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int d^3q\sqrt{g}q^a[\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_b(\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*)\Psi - \Psi^*\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_b(\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi)] \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int d^3q[q^a\partial_b(\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*)\Psi - q^a\Psi^*\partial_b(\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi)].
\end{aligned}$$

Usando $q^a\partial_b(\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*) = \partial_b(q^a\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*) - \sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle v^a\rangle &= -\frac{i\hbar}{2m}\int d^3q[(\partial_b(q^a\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*) - \sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi^*)\Psi - \\
&\quad \Psi^*(\partial_b(q^a\sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi) - \sqrt{g}g^{bc}\partial_c\Psi)] \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int d^3q[-\sqrt{g}g^{ac}\partial_c\Psi^*\Psi + \sqrt{g}\Psi^*g^{ac}\partial_c\Psi] \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int d^3q\sqrt{g}\Psi^*[\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac}\Psi) + g^{ac}\partial_c\Psi] \\
&= -\frac{i\hbar}{m}\int d^3q\sqrt{g}\Psi^*[g^{ac}\partial_c + \frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})]\Psi \\
&= -\frac{i\hbar}{m}\int d^3q\sqrt{g}\Psi^*[\tilde{a}^a_i(\tilde{a}^c_i\partial_c + \frac{1}{2}(D_c\tilde{a}^c_i)) + \frac{1}{2}\tilde{a}^c_i(\partial_c\tilde{a}^a_i)]\Psi.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Podemos representar a velocidade media como

$$\langle v^a \rangle = \int d^3q\sqrt{g}\Psi^*(\mathbf{q})\hat{v}^a\Psi(\mathbf{q}), \tag{6.13}$$

definindo operador de velocidade como segue

$$\hat{v}^a = -\frac{i\hbar}{m}[g^{ac}\partial_c + \frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})] \tag{6.14}$$

$$= -\frac{i\hbar}{m}[\tilde{a}_i^a(\tilde{a}_i^c\partial_c + \frac{1}{2}(D_c\tilde{a}_i^c)) + \frac{1}{2}\tilde{a}_i^c(\partial_c\tilde{a}_i^a)]. \tag{6.15}$$

No espaço Euclidiano temos $D_c\tilde{a}_i^c = 0$, portanto podemos omitir segundo termo em (6.15). Usando a expressão (6.14), podemos verificar, que $\hat{v}^a$ é operador hermitiano em relação ao produto escalar (6.2). Com efeito

$$\begin{aligned}
(\Psi, \hat{v}\Phi) &= \int d^3q\sqrt{g}\Psi^*\{(-\tfrac{i\hbar}{m})[g^{ac}\partial_c\Phi + \tfrac{1}{2\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})\Phi]\} \\
&= \int d^3q\Psi^*\{(-\tfrac{i\hbar}{m})[\sqrt{g}g^{ac}\partial_c\Phi + \tfrac{1}{2}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})\Phi]\} \\
&= \int d^3q\Psi^*\{(-\tfrac{i\hbar}{m})[\sqrt{g}g^{ac}\partial_c\Phi + \partial_c(\sqrt{g}g^{ac})\Phi - \tfrac{1}{2}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})\Phi]\} \\
&= \int d^3q\{(-\tfrac{i\hbar}{m})\Psi^*\partial_c(\sqrt{g}g^{ac}\Phi)\} - \tfrac{1}{2}\int d^3q(-\tfrac{i\hbar}{m})\Psi^*\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})\Phi.
\end{aligned}$$

Fazendo a integração por partes

$$\begin{aligned}
(\Psi, \hat{v}\Phi) &= \cancel{-\tfrac{i\hbar}{m}\sqrt{g}g^{ac}\Psi^*\Phi|_{-\infty}^{+\infty}} + \int d^3q(\tfrac{i\hbar}{m})\sqrt{g}g^{ac}\partial_c\Psi^*\Phi + \\
&\quad \tfrac{1}{2}\int d^3q(\tfrac{i\hbar}{m})\Psi^*\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})\Phi \\
&= \int d^3q\{(\tfrac{i\hbar}{m})[\sqrt{g}g^{ac}\partial_c\Psi^* + \tfrac{1}{2}\Psi^*\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})]\}\Phi \\
&= \int d^3q\sqrt{g}\{(\tfrac{i\hbar}{m})[g^{ac}\partial_c\Psi^* + \tfrac{1}{2\sqrt{g}}\Psi^*\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})]\}\Phi \\
&= \int d^3q\sqrt{g}\{(-\tfrac{i\hbar}{m})[g^{ac}\partial_c\Psi^* + \tfrac{1}{2\sqrt{g}}\Psi^*\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})]\}^*\Phi \\
&= (\hat{v}\Psi, \Phi).
\end{aligned}$$

Devido ao último termo em (6.15), o operador da velocidade curvilínea não é um vetor sob transformações gerais de coordenadas. A esse respeito, notamos que a velocidade média, sendo uma quantidade não local, não é um vetor sob transformações gerais de coordenadas. Associamos operadores ao valor médio da variável clássica, e não à variável em si. Portanto, pode não ser uma surpresa, que o operador $\hat{v}^a$ não seja um vetor. Por mesmas razoes, relação entre $\hat{v}^a$ e $\hat{v}^i$ difere da relação entre v^a e v^i (ver (6.9))

$$\hat{v}^a = \tilde{a}_i^a\hat{v}^i = -\frac{i\hbar}{2m}\tilde{a}_i^c(\partial_c\tilde{a}_i^a), \quad \text{enquanto} \quad \text{classicamente} \quad v^a = \tilde{a}_i^a v^i. \tag{6.16}$$

Em resumo, se adotarmos as coordenadas curvilíneas q^a para a descrição de uma partícula, podemos quantizá-la de acordo com os pontos **A)** e **B)** acima, e ainda declarar $\hat{q}^a$ como operador de posição, e operador (6.14) = (6.15) como operador de velocidade.

7 PRESCRIÇÃO DA QUANTIZAÇÃO NO ESPAÇO CURVO

Considere o sistema clássico (4.9) em espaço curvo com a métrica $g_{ab}(q^a)$. A formulação hamiltoniana é dada por (4.10) e (4.12). É natural supor que a mecânica quântica de sistema deveria estar em correspondência com a mecânica quântica do plano em coordenadas curvilíneas. Ou seja, deve coincidir com o mecânica quântica considerada na seção anterior, quando $g_{ab}(q^a)$ é uma métrica do espaço Euclidiano em coordenadas curvilíneas.

Vamos decompor a métrica de Riemann através de uma matriz tétrada (isto pode ser conseguido usando, por exemplo, o procedimento de orto normalização de Gramm-Schmidt)

$$g_{ab}(\mathbf{q}) = \sum_i e^i_a(\mathbf{q}) e^i_b(\mathbf{q}). \tag{7.1}$$

Existe uma tétrada inversa $\tilde{e}^b_i$

$$e^i_a \tilde{e}^b_i = \delta^b_a, \quad \tilde{e}^a_i e^i_a = \delta^j_i, \tag{7.2}$$

então

$$g_{ab} \tilde{e}^a_i \tilde{e}^b_j = \delta_{ij}, \tag{7.3}$$

isto é $\tilde{e}_i$ são vetores ortonormais em relação a g_{ab}. A métrica inversa pode ser decomposta através da tétrada inversa

$$g^{ab} = \sum_i \tilde{e}^a_i \tilde{e}^b_i. \tag{7.4}$$

Ao contrário da seção anterior, a matriz da tétrada não obedece (4.7) (quando esta equação é satisfeita, as coordenadas q^a resultam ser coordenadas curvilíneas do espaço Euclidiano). Como consequência, as matrizes e e $\tilde{e}$ não são campos covariantemente constantes.
Com a matriz da tétrada nas mãos, podemos fazer a quantização de acordo com os pontos **A)** e **B)** da seção anterior. Isso leva à equação de Schrödinger (6.5). O operador Hermitiano da posição é $\hat{q}^a = q^a$. O operador Hermitiano da velocidade é a quantidade não-covariante e é dada por

$$\hat{v}^a = -\frac{i\hbar}{m}[g^{ac}\partial_c + \frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}g^{ac})] \tag{7.5}$$

$$= -\frac{i\hbar}{m}[\tilde{e}^a_i(\tilde{e}^c_i\partial_c + \frac{1}{2}(D_c\tilde{e}^c_i)) + \frac{1}{2}\tilde{e}^c_i(\partial_c\tilde{e}^a_i)]. \tag{7.6}$$

8 ABORDAGENS DE SCHRODINGER-PODOLSKY E DE DEWITT

Abordagem de Schrödinger- Podolsky. No seu terceiro trabalho principal sobre fundamentos de mecânica quântica, Schrödinger sugeriu o Hamiltoniano quântico para partícula no espaço curvo com o Hamiltoniano clássico $H = \frac{1}{2m}\tilde{g}^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta$. Ele sugeriu escrever H em forma

$$H = \frac{1}{2m}\frac{1}{\sqrt{g}}p_\alpha\sqrt{g}\tilde{g}^{\alpha\beta}p_\beta, \tag{8.1}$$

e substituir $p_a \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^\alpha}$, obtendo o operador de Laplace- Beltrami

$$\hat{H}_{SP} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha[\sqrt{g}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\beta]. \tag{8.2}$$

$\hat{H}_{SP}$ é operador Hermitiano, é covariante em relação de transformações gerais de coordenadas. Portanto ele foi considerado como um bom candidato para Hamiltoniano quântico em coordenadas arbitrarias.

Podolsky confirmou este resultado. Ele observou também, que forma explícita de Hamiltoniano quântico depende de normalização de função de onda, e ainda tem certo arbítrio devido o ordenamento de operadores. Para análise detalhado do arbítrio, veja [2].

Abordagem de DeWitt. No trabalho [6], DeWitt sugeriu uma prescrição de quantificação no espaço curvo com coordenadas q^a e métrica $g_{ab}(q^a)$. Abaixo apresentamos dois comentários sobre esta construção.

1. DeWitt construiu operadores Hermitianos e covariantes

$$\hat{q}^a = q^a, \quad \hat{p}_a = -i\hbar[\partial_a + \frac{1}{2}\Gamma^b_{ba}]. \tag{8.3}$$

Eles obedecem ao comutador esperado (5.8), e DeWitt os tomou como operadores básicos para a descrição de partícula. A esse respeito, notamos que o operador de DeWitt $\hat{p}_a$ não representa a velocidade (7.6) de uma partícula e, portanto, não possui um significado físico direto.

2. Além disso, DeWitt postulou que o Hamiltoniano quântico é o operador de Laplace-Beltrami, e comparou-o com o Hamiltoniano clássico $H = \frac{1}{2m}g^{ab}p_a p_b$. Ele tentou associar seu $\hat{p}_a$ com as variáveis clássicas p_a, isto é, substituir $p_a \longrightarrow \hat{p}_a$ em H. Ele notou que, independentemente da escolha de ordem dos operadores em H, é impossível obter o operador Laplace-Beltrami seguindo este caminho. Então ele sugeriu modificar o Hamiltoniano clássico adicionando termos que implicam a resposta desejada.

A análise realizada nas seções **6** e **7** mostra que essa sugestão não se justifica: mesmo no caso de coordenadas curvilíneas, com variável p_a, devemos associar consistentemente o operador não-Hermitiano $-i\hbar\partial_a$, ver item **A)** na seção **6**. Além disso, no espaço curvo o operador $\frac{1}{m}\hat{p}_a$ de (8.3) não representa a velocidade da partícula, esta é dada por (7.5).

9 ABORDAGEM DE JENSEN-KOPPE E DA COSTA

Nos artigos [9], [3], [11], [15] foi adotado o seguinte procedimento para construir mecânica quântica sobre uma superfície. Primeiro, construa a mecânica quântica de sistema (2.96) no espaço Euclidiano de 3 dimenções, com potencial fictício $\frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R})$, e depois considere o limite $\alpha \longrightarrow \infty$. Equações Hamiltonianas de movimento são obtidas a partir de Hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R}), \tag{9.1}$$

com uso de parênteses de Poisson

$$\{R^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{9.2}$$

A mecânica quântica é obtida pela substituição de variáveis de espaço-fase por operadores

$$R^i \longrightarrow \hat{R}^i, \quad p_i \longrightarrow \hat{p}_i = -\hbar\partial_i, \quad \text{então} \quad [\hat{R}^i, \hat{p}_j] \equiv \hat{R}^i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{R}^i = i\hbar\delta^i_j. \tag{9.3}$$

Eles atuam no espaço de Hilbert da função de onda $\Psi(t, R^1, R^2, R^3)$ com o produto escalar

$$(\Psi, \Phi) = \int d^3R\Psi^*\Phi. \tag{9.4}$$

A função de onda obedece a equação de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H(\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\mathbf{p}})\Psi$, ou seja

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\bigtriangledown^2 + \frac{\alpha}{2}d^2(\boldsymbol{R})]\Psi. \tag{9.5}$$

Usando (3.9),(3.10) e (3.11), reescrevemos a equação de Schrödinger em coordenadas curvilíneas ξ^a

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\det\omega_{cd}}}\partial_a[\sqrt{\det\omega_{cd}}\omega^{ab}\partial_b\Psi] + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Psi, \tag{9.6}$$

no espaço com produto escalar

$$(\Phi, \Psi) = \int d^3\xi\sqrt{\det\omega_{cd}}\Phi^*\Psi. \tag{9.7}$$

Vamos especificar (9.6) para o caso das coordenadas de Gauss

$$\boldsymbol{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{x}(\xi^\alpha) + \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha)\xi^3. \tag{9.8}$$

Usando (2.110), (2.111), obtemos $a^i_a = \frac{\partial R^i}{\partial\xi^a}$ ou, com mais detalhes

$$\begin{aligned} \partial_\alpha\boldsymbol{R} &= (\delta^\beta_\alpha - \xi^3N^\beta_\alpha)\mathrm{x}_\beta, \\ \frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\xi^3} &= \hat{\boldsymbol{n}}(\xi^\alpha). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Em $\mathbf{R}^3$ a métrica em coordenadas curvilíneas (ξ^1, ξ^2, ξ^3) é $\omega_{ab} = (\frac{\partial R}{\partial\xi^a}, \frac{\partial R}{\partial\xi^b})$. Usando (9.9), temos

$$\omega_{\alpha\beta} = (\delta^\gamma_\alpha - \xi^3N^\gamma_\alpha)g_{\gamma\sigma}(\delta^\sigma_\beta - \xi^3N^\sigma_\beta)) \tag{9.10}$$

$$\equiv g_{\alpha\beta} - 2\xi^3 N_{\alpha\beta} + (\xi^3)^2 N_\alpha^\gamma N_{\gamma\beta}, \tag{9.11}$$

$$\omega_{\alpha 3} = \omega_{3\alpha} = 0, \quad \omega_{33} = 1,$$

ou

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} \omega_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\det \omega_{ab} = \det \omega_{\alpha\beta}, \tag{9.12}$$

dai

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \omega_{ab}} &= \sqrt{\det \omega_{\alpha\beta}} = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}}(1 - \xi^3 tr N_\alpha^\beta + (\xi^3)^2 \det N_\alpha^\beta) \\ &= \sqrt{\det g_{\alpha\beta}}(1 - 2\xi^3 \mathrm{H} + (\xi^3)^2 \mathrm{K}) \\ &\equiv \sqrt{\det g_{\alpha\beta}}.\mathrm{f}(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Na formula (9.13) apareceram:
curvatura de Gauss de S

$$\det N_\alpha^\beta = \det(g^{-1}N) \equiv \mathrm{K},$$

e curvatura média de S

$$\frac{1}{2} tr N_\alpha^\beta = \frac{1}{2} tr(g^{-1}N) \equiv \mathrm{H}.$$

Apesar disto, foi denotado

$$\mathrm{f} \equiv 1 - \xi^3 tr N_\alpha^\beta + (\xi^3)^2 \det N_\alpha^\beta \equiv 1 - 2\xi^3 \mathrm{H} + (\xi^3)^2 \mathrm{K}.$$

Produto escalar em coordenadas curvilíneas de $\mathbf{R}^3$

$$(\Psi, \Phi) = \int d^3 R \Psi^* \Phi = \int d^3\xi \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha)} \mathrm{f}(\xi^\alpha, \xi^3) \Psi^*(\mathrm{x}(\xi)) \Phi(\mathrm{x}(\xi)). \tag{9.14}$$

O operador de Laplace-Beltrami fica

$$\triangle_{LB}(\xi^\varphi, \xi^3) = \frac{1}{\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\mathrm{f}} \partial_\alpha(\sqrt{\det g_{\alpha\beta}} \mathrm{f} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \partial_\beta \Psi) + \frac{1}{\mathrm{f}} \partial_3(\mathrm{f} \partial_3 \Psi). \tag{9.15}$$

Vamos anotar

$$\frac{1}{\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\mathrm{f}} \partial_\alpha(\sqrt{\det g_{\alpha\beta}} \mathrm{f} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \partial_\beta \Psi) = D(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \Psi,$$

onde $g_{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2)$, $\mathrm{f}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ foram especificados acima.

Observe: no limite $\xi^3 \longrightarrow 0$, obtemos operador de Laplace-Beltrami do plano em coordenadas curvilíneas com métrica $g_{\alpha\beta}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$: $\frac{1}{\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}}\mathrm{f}\partial_\alpha[\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\mathrm{f}\omega^{\alpha\beta}(\xi^\varphi,\xi^3)\partial_\beta\Psi]$. Último termo de podemos reescrever como se segue

$$\frac{1}{\mathrm{f}}\partial_3(\mathrm{f}\partial_3\Psi) = \frac{-2\mathrm{H}+2\xi^3\mathrm{K}}{1-2\xi^3\mathrm{H}+(\xi^3)^2\mathrm{K}}\partial_3\Psi + (\partial_3)^2\Psi, \tag{9.16}$$

e equação de Schrödinger (9.6) fica:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}D(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}[\frac{\partial_3\mathrm{f}\partial_3\Psi}{\mathrm{f}} + (\partial_3)^2\Psi] + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Psi. \tag{9.17}$$

Se vamos buscar Ψ na forma $\Psi = \mathbf{f}^{-1/2}\Phi$, obtemos equação sem termo linear em relação de $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi^3}$

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -f^{1/2}\frac{\hbar^2}{2m}D(f^{-1/2}\Phi) - \frac{\hbar^2}{2m}[\partial_3^2\Phi + \frac{1}{4f^2}\{(\partial_3 f)^2 - f\partial_3^2 f\}\Phi] + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Phi. \tag{9.18}$$

Para buscar autoestados de energia, escreva: $\Phi(t,\xi^1,\xi^2,\xi^3) = e^{\frac{i}{\hbar}Et}\Phi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$, então

$$E\Phi(\xi) = f^{1/2}\frac{\hbar^2}{2m}D(f^{-1/2}\Phi) + \frac{\hbar^2}{2m}[\partial_3^2\Phi + \frac{1}{4f^2}\{(\partial_3 f)^2 - f\partial_3^2 f\}\Phi] - \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Phi, \tag{9.19}$$

onde em todos lugares $\Phi = \Phi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ e $\mathbf{f} = 1 - 2\xi^3\mathrm{H} + (\xi^3)^2\mathbf{K}$.

Seja a superfície S tem curvaturas K e H constantes, então podemos cancelar f e $\mathrm{f}^{1/2}$ no primeiro termo, e (9.18) fica

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}D\Phi - \frac{\hbar^2}{2m}[\partial_3^2\Phi + \frac{1}{4f^2}\{(\partial_3 f)^2 - f\partial_3^2 f\}\Phi] + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Phi, \tag{9.20}$$

onde

$$D\Phi = \frac{1}{\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}}\partial_\alpha[\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\partial_\beta\Phi]. \tag{9.21}$$

Para comparar esta equação com o resultado de Schrödinger-Podolsky, vamos seguir o procedimento, sugerido em artigos [3], [11] e [15]

A) Pega $\xi^3 = 0$ em todos os termos, a menos o último

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha[\sqrt{g}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\beta\Phi] - \frac{\hbar^2}{2m}[\partial_3^2\Phi + \frac{1}{2}(2\mathrm{H}^2 - \mathrm{K})\Phi] + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Phi. \tag{9.22}$$

B) Agora podemos separar as variáveis ξ^1, ξ^2 e ξ^3. Escrevendo

$$\Phi(t,\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \Phi_\parallel(t,\xi^1,\xi^2)\Phi_\perp(t,\xi^3), \tag{9.23}$$

obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Phi_\perp}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_3^2\Phi_\perp + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Phi_\perp, \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_\parallel}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}[D\Phi_\parallel + \frac{1}{2}(2\mathrm{H}^2 - \mathrm{K})\Phi_\parallel]. \end{aligned} \tag{9.24}$$

C) Desprezando a componente $\Phi_\perp$ em (9.24), temos o Hamiltoniano para função de onda $\Phi_\parallel(t,\xi^1,\xi^2)$ de superfície

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}[D + \frac{1}{2}(2\mathrm{H}^2 - \mathrm{K})]. \tag{9.25}$$

No contrário a $\hat{H}_{SP}$ veja (8.2), ele contém contribuições extras, que dependem das curvaturas H e K da superfície.

No mesmo tempo, no item B), no lugar das equações (9.24), poderíamos escrever:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Phi_\perp}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}[\partial_3^2\Phi_\perp + \frac{1}{2}(2\mathrm{H}^2 - \mathrm{K})\Phi] + \frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2\Phi_\perp, \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_\parallel}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}D\Phi_\parallel, \end{aligned} \tag{9.26}$$

obtendo assim $\hat{H}_{SP}$ de Schrödinger-Podolsky para $\Phi_\parallel(t,\xi^1,\xi^2)$ no lugar de $\tilde{H}$.

Portanto, o procedimento adotado em [3], [11] e [15] não parece bem definido, e o resultado (9.25) não parece de ser uma fórmula bem justificada.

Para esclarecer este assunto seria interessante resolver o problema (9.19) para potencial $\frac{\alpha}{2}(\xi^3)^2$ com α finito, para, somente depois, estudar se existe algum limite razoável $\alpha \longrightarrow \infty$ para as soluções encontradas.

10 CONCLUSÃO

Nós reescrevemos mecânica quântica de uma partícula no espaço Euclidiano em coordenadas curvilíneas. Usando formalismo de tétrada para dada métrica de Riemann, isto permite formular um procedimento de quantização canônica no espaço de Riemann. Vamos destacar alguns pontos interessantes do procedimento resultante, que foi formulado no Paragrafo 7.

1. O formalismo nos levou, de modo único, o Hamiltoniano quântico dada por meio de operador de Laplace-Beltrami, em acordo com a sugestão inicial de Schródinger.

2. Com momento π_a, conjugado de coordenada curvilínea q^a, está associado um operador não Hermitiano.

3. Velocidade de partícula está apresentada por meio de um operador não covariante (7.6). Apesar disto, operadores de velocidade e de momento não são proporcionais no espaço curvo.

Estes pontos foram importantes também para analisar as abordagens de DeWitt, e de Jensen-Koppe e da Costa. Nosso estudo implica a necessidade de revisão e de análise mais detalhada destas abordagens.

REFERÊNCIAS

[1] ARNOLD, VLADIMIR IGOREVICH. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer Science & Business Media, vol. 60. 2013.

[2] ASSIRATI, J. L. M.; GITMAN, DMITRI. Covariant quantizations in plane and curved spaces. *The European Physical Journal C*, Springer, vol. 77(7), p.476. 2017.

[3] DA COSTA, R. C. T. Quantum mechanics of a constrained particle. *Journal Review A*, A. P. S. vol. 23(4), p.1982- 1987. 1981.

[4] DERIGLAZOV, ALEXEI. *Classical mechanics*. Springer. 2016.

[5] DERIGLAZOV, ALEXEI. *Notas de geometria diferencial*. `https://www.ufjf.br/alexei_deriglazov/notas-de-geometria-diferencial`. 2016.

[6] DEWITT, BRYCE SELIGMAN. Point transformations in quantum mechanics. *Physical Review*, A. P. S. vol. 85(4), p.653- 661. 1952.

[7] GRIFFITHS, DAVID J. *Introduction to quantum mechanics*. Second edition, Pearson Prentice Hall, Upper Sadle River, 2005.

[8] KLEINERT, HAGEN; SHABANOV, SERGEI V. Proper dirac quantization of free particle on d-dimensional sphere. *Physics Letters A232*, p.327-332. 1997.

[9] KOPPE H.; JENSEN H. Quantum mechanics with constraints. *Annals of Physics*, p.586-591, 1971.

[10] LIU, Q.H.; TONG, C.L.; LAI, M.M. Constraint induced mean curvature dependence of cartesian momentum operators. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, I. O. P. Publishing, vol. 40(15), p.4161-4168. 2007.

[11] MARANER, P. A. complete perturbative expansion for quantum mechanics with constraints. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, I. O. P. Publishing, vol. 28(10), p.2939-2951. 1995.

[12] OUYANG P.; MOHTA V.; JAFFE, R. L. Dirac particles in twisted tubes. *Annals of Physics*, vol. 275(2), p.297-313. 1999.

[13] PODOLSKY, BORIS. Quantum mechanically correct form of hamiltonian function for conservative systems. *Physical Review*, A. P. S. vol. 32(5), p.812-816. 1928.

[14] SCHRÖDINGER, ERWING. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical review*, A. P. S. vol. 28(6), p.1049-1070. 1926.

[15] SCHUSTER, PHILIP CHISTIAN; JAFFE R. L. Quantum mechanics on manifolds embedded in euclidean space. *Annals of Physics*, Elsevier, vol. 307(1), p.132-143. 2003.

[16] TAGIROV, E.A. On Geometric Paradox in Quantization of Natural Dynamical Systems. *ArXiv:1805.11493*, 2018.

[17] TAKAGI, SHIN; TANZAWA, TORU. Quantum mechanics of a particle confined to a twisted ring. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, vol. 87(3), p.561-568. 1992.

[18] WANG, YONG-LONG; LAI, MENG-YUN; WANG, FAN; ZONG, HONG-SHI; CHEN, YAN-FENG. Quantum mechanics of a particle confined to a space curve embedded in three-dimensional Euclidean space. *ArXiv:1711.05453*, 2017.

[19] WEINBERG, STEVEN. *Lectures on quantum mechanics*, Cambridge University Press. 2015.