Resultados de existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schrödinger não lineares com potencial magnético

Francisco Odair Vieira de Paiva* Sandra Machado de Souza Lima † Olimpio Hiroshi Miyagaki ‡

26 de dezembro de 2017

RESUMO

Neste trabalho estamos interessados em estudar a existência, multiplicidade e regularidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos côncavo-convexo

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta_A u + u = a_\lambda(x)|u|^{q-2}u + b_\mu(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H_A^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$ e $-\Delta_A = (-i\nabla + A)^2$. Ainda, $1 < q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a_\lambda(x)$ é uma função peso que pode mudar de sinal, $b_\mu(x)$ satisfaz algumas condições e $u \in H_A^1(\mathbb{R}^N)$ (tal espaço definiremos a seguir), $\lambda > 0$, $\mu > 0$ parâmetros reais, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um potencial magnético em $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Ainda, $A \to d$ com d constante quando $|x| \to \infty$.

Faremos uso do operador magnético no qual trabalhamos com o Laplaciano Magnético no lugar do Laplaciano usual. Na física quântica não relativística, o Hamiltoniano associado a uma partícula carregada num campo eletromagnético é dado por $(i\nabla - A)^2 + V$, onde $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é o potencial magnético e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é o potencial elétrico.

Sua importância na física foi discutida em Alves e Figueiredo [7] e também em Arioli and Szulkin[12].

De acordo com Tang, Z.W.[10], denotaremos por $H_A(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Hilbert obtido pelo fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ com o seguinte produto interno:

$$< u, v >_A = Re\left(\int_{\mathbb{R}} \nabla_A u \overline{\nabla_A v} + u\bar{v} dx\right),$$

* franciscoodair@gmail.com; Departamento de Matemática, UFSCar, São Carlos, SP, 13560-970 Brazil

† sandramsl@id.uff.br, was supported by CAPES and received research grants from UFJF, UFSCar, INFES-UFF. Departamento de Ciências Exatas e da Terra, UFF-INFES, RJ-218 - Dezessete, Santo Antônio de Pádua - RJ, 28470-000.

‡O. H. M. received research grants from CNPq/Brazil 304015/2014-8, FAPEMIG CEX APQ 00063/15 and INCTMAT/CNPQ/Brazil. Departamento de Matemática, UFJF, Bairro Martelos, Juiz de Fora - MG, CEP 36036-900.

onde $\nabla_A u := (D_1 u, D_2 u, ..., D_N u)$ e $D_j := -i\partial_j - A_j(x)$, com $j = 1, 2, ..., N$, with $A(x) = (A_1(x), ..., A_N(x))$. A norma induzida por este produto é dada por

$$||u||_A^2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla_A u|^2 + u^2 dx \right).$$

Note que,

$$\begin{aligned} (-i\nabla - A)^2\psi &= -\Delta\psi + 2iA\nabla\psi + |A|^2\psi + i\psi\, divA \text{ in } \mathbb{R}^N \\ &= -\Delta\psi + 2iA\nabla\psi + |A|^2\psi + i\psi\, divA \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (-i\nabla - A)(-i\nabla - A)\psi &= (-\Delta + i\nabla A + iA\nabla + A^2)\psi \\ i\nabla(A\psi) &= iA\nabla\psi + i\psi\nabla A \\ \nabla A &= \; divA \end{aligned}$$

O problema em questão com $A = 0$ possui uma vasta literatura, começando por Ambrosetti, Brezis e Cerami [13] onde é considerado o seguinte problema denominado problema côncavo-convexo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda u^{q-1} + u^{p-1} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com Ω um domínio regular limitado de $\mathbb{R}^N$ $(N > 3)$, com fronteira suave e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$. Combinando métodos de sub e super soluções com método variacional os autores provaram a existência de um certo $\lambda_0 > 0$ tal que existem duas soluções quando $\lambda \in (0, \lambda_0)$, uma solução se $\lambda = \lambda_0$ e nenhuma solução caso $\lambda < \lambda_0$.

A partir deste, muitos estudos foram dedicados à análise de existência e multiplicidade de problemas elípticos côncavo-convexo em domínios limitados, como podemos citar em Brown [3]; Brown e Wu[4]; Brown e Zhang [5]; Hsu [11] e em referências contidas nos artigos.

Já Huang, Wu e Wu[2]; Wu[1]; Chen[9] e Paiva [14], trabalharam casos semelhantes porém, não mais em domínios limitados, mas em $\mathbb{R}^N$.

Os primeiros resultados em equações de Schrödinger não lineares, com $A \neq 0$ podem ser atribuídos à Esteban e Lions [15] em que é estudada a existência de solucões estacionárias para equações do tipo:

$$-\Delta_A + Vu = |u|^{p-2}u, u \neq 0, u \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

$p \in (2, \infty)$, utilizando métodos de minimização forçada para o caso $V = 1$, com campo magnético constante e também para o caso geral.

Inicialmente usaremos a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, para discutir a existência de solução não trivial para esta classe de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Faremos um estudo para estimar os niveis de energia dos infimos em diferentes partes da variedade de Nehari o que vai nos possibilitar encontrar duas soluções distintas para o problema. Faremos ainda um estudo da teoria de categoria para investigar a existência de uma terceira solução. Por fim, mostraremos que para valores bem pequenos de λ o problema possui pelo menos quatro soluções distintas.

Referências

[1] Wu, T.F. **Multiple positive solutions for a class of concave–convex elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ involving sign-changing weight.** Journal of Functional Analysis 258.1 (2010): 99-131. Citado na página 2.

[2] Huang, Y., Wu,T.F. e Wu,Y. **Multiple positive solutions for a class of concave–convex elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ involving sign-changing weight, II.** Communications in Contemporary Mathematics 17.05 (2015): 1450045. Citado na página 2.

[3] Brown, K. J. **The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation involving a sublinear term.** Calculus of Variations and Partial Differential Equations 22.4 (2004): 483-494. Citado na página 2.

[4] Brown, K.J., e Wu,T.F. **A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem.** J. Differential Equations 2007 (2007): 1-9. Citado na página 2.

[5] Brown, K.J. e Zhang, Y. **The Nehari monifold for a semilinear elliptic problem with a sing changing weight function.** J Diferencial Equations, (2003), No. 193, 481-499. Citado na página 2.

[6] Drabek, P. e Pohozaev, S. I.; **Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method.** Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A, 1997, 703-726. Nenhuma citação no texto.

[7] Alves, C. O. e Figueiredo, G.M. **Multiple Solutions for a Semilinear Elliptic Equation with Critical Growth and Magnetic Field.** Milan journal of mathematics 82.2 (2014): 389-405. Citado na página 1.

[8] Arioli, G. e Szulkin, A. **A semilinear Schrödinger equation in the presence of a magnetic field.** Archive for rational mechanics and analysis 170.4 (2003): 277-295. Citado na página 1.

[9] Chen, K. J. **On multiple solutions of concave e convexe nonlinearities in elliptic equation on RN.** BVP ID 147008, 2009, 1-19. Citado na página 2.

[10] Tang, Z.W. **Multi-bump bound states of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields and critical frequency.** Journal of Differential Equations 245.10 (2008): 2723-2748. Citado na página 1.

[11] Hsu, T.S., e Lin, H.L. **Three positive solutions for semilinear elliptic problems involving concave and convex nonlinearities.**Proceedings. Section A, Mathematics-The Royal Society of Edinburgh 142.1 (2012): 115. Citado na página 2.

[12] Arioli, G. e Szulkin, A. **A semilinear Schrödinger equation in the presence of a magnetic field.** Archive for rational mechanics and analysis 170.4 (2003): 277-295. Citado na página 1.

[13] Ambrosetti,A., Brezis, H. e Cerami,G. **Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.** Journal of Functional Analysis 122.2 (1994): 519-543. Citado na página 2.

[14] de Paiva, F.O. **Nonnegative solutions of elliptic problems with sublinear indefinite nonlinearity.** Journal of Functional Analysis 261.9 (2011): 2569-2586. Citado na página 2.

[15] Esteban, M. J. e Lions, P. L. **Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field,** in PDE and Calculus of Variations, in honor of E. De Giorgi, Birkhauser (1990). Citado na página 2.