Divisores sobre Curvas e o Teorema de Riemann-Roch.

Autor: Anderson Corrêa Porto.

Essa comunicação é resultado do trabalho para a defesa de mestrado, desenvolvido pelo autor, sob a orientação do professor Dr. Frederico Sercio Feitosa e da professora Drª. Beatriz Clasulari Motta Ribeiro. Nela, abordaremos um breve estudo sobre divisores, tendo como objetivo a abordagem do Teorema de Riemann-Roch no contexto de curvas algébricas projetivas não-singulares. Inicialmente, em 1857, Riemann provou um resultado que ficou conhecido como desigualdade de Riemann. A mesma estabele que para uma superfície de Riemann compacta X de gênero g e D um divisor sobre X, temos

$$\ell(D) \geq deg(D) - g + 1,$$

onde $\ell(D)$ é a dimensão do espaço associado ao divisor D. O Teorema de Riemann-Roch tomou a forma como é conhecido atualmente após o trabalho de um aluno de Riemann, Gustav Roch em 1865, que identificou precisamente a diferença na desigualdade transformando-a em uma igualdade. O Teorema de Riemann-Roch para uma superfície de Riemann compacta de gênero g e com divisor canônico K estabelece que:

$$\ell(D) - \ell(K - D) = deg(D) - g + 1,$$

onde $\ell(K - D)$ é o termo de correção (ou especialidade) identificado por Roch. Algumas generalizações deste resultado foram implementadas. Em 1931, Friedrich Karl Schmidt provou o teorema para curvas algébricas. Schmidt trabalhou inicialmente com corpos perfeitos de característica finita. Uma generalização n-dimensional, o Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch, foi descoberta e provada por Friedrich Hirzebruch, como uma aplicação de classes características em Toplogia Algébrica. Alexander Grothendieck provou uma generalização em 1957, hoje conhecida como Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch. Seu trabalho reinterpreta Riemann-Roch não como um teorema sobre variedades, mas sobre um morfismo entre duas variedades, os detalhes desta prova foram publicados por Borel-Serre em 1958. Usando métodos modernos de Geometria Algébrica, que incluem a noção de esquema, feixes e cohomologia, este teorema pode ser provado, sem muito esforço, utilizando a conhecida Dualidade de Serre. Em oposição a esta abordagem, é possível a sua demonstração utilizando métodos da Geometria Algébrica Clássica que incluem os conceitos básicos de divisores, do espaço vetorial associado a estes divisores, do estudo de diferenciais (de Weil) e de distribuições (ou equivalentemente anéis de Adele). Esta última abordagem será nosso foco.

Palavras Chaves: Adele. Divisores. Diferencial de Weill. Teorema de Riemann-Roch