

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Alberth John Nuñez Sullca

Decomposição Celular de Variedades Grassmannianas via Teoria de Morse

Juiz de Fora

2017

Alberth John Nuñez Sulca

Decomposição Celular de Variedades Grassmannianas via Teoria de Morse

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria Diferencial, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lonardo Rabelo

Coorientador: Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nuñez Sulca, Alberth.

Decomposição Celular de Variedades Grassmannianas via Teoria de
Morse / Alberth John Nuñez Sulca. – 2017.

68 f. : il.

Orientador: Lonardo Rabelo

Coorientador: Laércio José dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. I. Sobrenome,
Nome do orientador, orient. II. Título.

Alberth John Nuñez Sullca

Decomposição Celular de Variedades Grassmannianas via Teoria de Morse

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria Diferencial, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lonardo Rabelo - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Laércio José dos Santos - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. ??
Universidade ???

Professor Dr. ??
Universidade ??

AGRADECIMENTOS

Agradezco a Dios por iluminarme y a mi tío abuelo Juan que está en el cielo, dedico este trabajo en primer lugar a mi madre Miriam por todo su apoyo en todo este tiempo que estuve fuera, a mi novia Claudia por darme la fuerza y motivación a diario para seguir adelante no hubiera logrado nada sin ella y mostrarme que lo imposible es posible ,a mis hermanos: Dalma Teresa , Malton Crest ,Mini, Galan, Princesa,Morena por esperarme , a mis orientadores Dr lonardo y Dr laercio por todas sus enseñanzas y hacerme estudiar cada semana sin descanso y hacer que continuara por el camino de la matemática y ser además de mis orientadores unos hermanos mayores para mí ,a los miembros de la banca Dr Lucas Seco por haber leído mi trabajo y contribuir mucho en la mejora de este y Dr Rogerio Cassagrande por sus contribuciones y ayuda. A mis mejores amigos: Javier , Henry, Maldonado, Pichon , Diego , por todas las veces que me fueron a recibir al aeropuerto y las amanecidas bebiendo hasta no recordar nada y perderlo todo y estar siempre en las buenas y malas.A mi hermano Diego por las veces que nos escapábamos con el pretexto de ir a hacer documentos y volvíamos ebrios. A mis amigos de la maestría : Marcos, Almendra, Mario , Rossini , Marco, Julio ,Giovanna , Pablo , Jorge ,Cachimbo ,Rodrigo, Camilo , por todos las veces que bebimos en estos dos años.

Un agradecimiento especial para el Mestre Daniel Rodriguez Pereira por su importante contribución en este trabajo, al Mestre Juan Pacheco por ser mi maestro y tomar bombitas en estos dos años, a Graciliano por su ayuda fundamental al momento de obtener los teoremas de este trabajo. A la UFJF (la mejor universidad de todo Brasil)por darme la oportunidad y a Cappes por pagarme todas las bolsas.

Por último a todas las personas que confiaron en que este trabajo saldría bien y que no sería desligado. Gracias totales !!!!

RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma decomposição celular CW das variedades Grassmannianas via teoria de Morse. Isto é feito de duas maneiras distintas por meio de representações matriciais das Grassmannianas chamadas modelo projeção e modelo reflexão. Definimos funções de Morse, a saber, uma função do tipo altura e uma função do tipo “distância ao quadrado”, respectivamente, para cada um dos modelos projeção e reflexão. Estudamos os seus pontos críticos e os índices dos mesmos, obtendo assim duas formas para calcular a decomposição celular CW. Em particular, no modelo projeção, isto é feito exibindo-se as curvas integrais associadas ao campo gradiente da função altura.

Palavras-chave: Decomposição celular. Variedades Grassmannianas. Teoria de Morse. Campo Gradiente.

ABSTRACT

We present in this work a CW cellular decomposition of Grassmannian varieties via Morse theory. This is done in two different ways. By means of matrix representations of Grassmannian called model projection and reflection model. We define Morse functions, namely a height-type function and a "square-distance" function, respectively, for each of the projection and reflection models. We study their critical points and their indices, thus obtaining two ways to calculate the CW cellular decomposition. In particular, in the projection model, this is done by displaying the integral curves associated with the gradient field of the height function.

Keywords: Cellular decomposition. Grassmannian varieties. Morse theory. Gradient field.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Retrato por deformação	15
Figura 2 – Representação em torno do ponto p	16
Figura 3 – A função u ilustrada	16
Figura 4 – Representação da alça	18
Figura 5 – Exemplo do toro	24
Figura 6 – Exemplo do toro	25
Figura 7 – Exemplo do toro	25
Figura 8 – Exemplo do toro	26
Figura 9 – Representação da função distância	38
Figura 10 – Decomposição de \mathbb{RP}^2	43
Figura 11 – Variedade estável $S(L_1)$	52
Figura 12 – Variedade instável $U(L_1)$	52
Figura 13 – Representação do fluxo	52
Figura 14 – Colagem de uma r -célula através de f	68

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	Teoria de Morse	10
2.1	Definições Básicas	10
2.2	Teoremas fundamentais da teoria de Morse	12
2.3	CW-Complexos	19
3	Variedades Grassmannianas	27
3.1	Grassmannianas como variedades diferenciáveis	27
3.2	Representações Matriciais das Grassmannianas	31
3.2.1	Modelo Projecção	31
3.2.2	Modelo Reflexão	35
4	Funções de Morse em Grassmannianas	38
4.1	Função distância	38
4.2	Função Altura	42
4.3	Variedades de Schubert	55
	REFERÊNCIAS	58
	APÊNDICE A – Variedades Diferenciáveis	59
A.1	Variedades Diferenciáveis	59
A.2	Aplicações diferenciáveis entre variedades	60
	APÊNDICE B – Noções de Homotopia	63
	APÊNDICE C – Noções de Sistemas Dinâmicos	64
C.1	Campo Gradiente	65
C.2	Variedades estável e instável	66
	APÊNDICE D – Células e colagem de células	67
D.1	Células e colagem de células	67

1 Introdução

Este trabalho consiste no estudo da teoria de Morse em variedades Grassmannianas para a obtenção de uma decomposição celular CW para tais variedades. A teoria de Morse, cujo desenvolvimento deu-se nas décadas de 50 e 60, se tornou uma importante ferramenta no campo da topologia de variedades. É uma área de pesquisa muito ativa com variadas ramificações em física e geometria. Os surveys de Bott [1] e Guest [5] detalham este desenvolvimento e como suas ideias são aplicadas em diversos contextos. O foco desta obra consiste em ilustrar a decomposição celular CW obtida por funções de Morse definidas em variedades compactas: para cada ponto crítico, faz-se a “colagem” de uma célula de dimensão dada pelo índice deste ponto crítico de modo que, ao final deste processo, obtém-se uma decomposição celular que é homotopicamente equivalente a variedade (ver Teorema 2.11).

O objetivo desta dissertação é ilustrar este importante teorema no caso das variedades Grassmannianas. Estas são muito conhecidas por apresentar uma geometria muito rica e servir como exemplos mais básicos de um objeto mais geral conhecido como variedade flag (“bandeira”). Partimos de sua definição mais básica, como conjunto de subespaços de uma dada dimensão fixa de um espaço vetorial, mostramos que elas são variedades diferenciáveis e, além disto, são compactas (ver Proposição 3.1).

Para fazer a junção entre teoria de Morse e variedades Grassmannianas, apresentamos adiante duas maneiras distintas de representação das Grassmannianas em termos de matrizes (ver Seções 3.2.1 e 3.2.2). Por um lado, o survey Duan [3] fornece o modelo chamado reflexão no qual se definem funções de Morse do tipo “distância ao quadrado”. Por sua característica geométrica, tais funções tem uma descrição analítica mais direta para a obtenção dos pontos críticos e, principalmente, do cálculo de seus respectivos índices (ver Teorema 4.2). Por outro lado, o survey [5] nos fornece o modelo chamado projeção no qual se definem funções de Morse do tipo altura. Como funções do tipo altura são restrições de funcionais lineares definidos num espaço Euclidiano, é possível obter explicitamente as curvas integrais do campo gradiente da função de Morse (ver Teorema 4.7). Isto fornece uma descrição explícita da decomposição celular das Grassmannianas de modo que os índices são obtidos indiretamente a partir da dimensão das variedades instáveis associadas aos pontos críticos.

Vale ressaltar que decomposições celulares CW são de extrema importância em Topologia Algébrica na obtenção dos grupos de homologia fornecendo, em alguns casos, uma maneira mais direta de se calcular estes grupos (ver Hatcher [6]).

Em termos estruturais, a dissertação está organizada do seguinte modo.

- No capítulo 2, vemos a teoria clássica de Morse e os teoremas importantes tais como

os retratos por deformação das superfícies de nível, o conceito de um CW-complexo e o Teorema que nos fala que toda variedade compacta pode ser vista como um CW-complexo através de uma função Morse (Teorema 2.11).

- No capítulo 3, vamos mostrar que as Grassmannianas são uma variedade diferenciável compacta e dar outras formas de representar estas variedades através de uma identificação matricial tais como o modelo da Projeção e modelo da Reflexão.
- No capítulo 4, apresentamos duas funções de Morse sobre as variedades Grassmannianas: a função “distância ao quadrado” e a função altura. Para cada uma destas funções vamos estudar os pontos críticos e os índices dos mesmos e assim daremos um exemplo da decomposição celular CW das Grassmannianas. No final, utilizando a função altura estudaremos o fluxo associado a seu campo gradiente e assim definiremos as células de Schubert.

2 Teoria de Morse

Neste capítulo vamos introduzir um tipo especial de funções chamadas funções de Morse que admitem uma boa expressão local em torno de seus pontos críticos. Vamos nos concentrar em apresentar os teoremas fundamentais da teoria de Morse que mostram como que as funções de Morse, por meio de subvariedades determinadas por elas, dão origem a um CW-complexo de mesmo tipo homotópico da variedade.

As principais referências são o livro de Milnor [11] e o trabalho de tese de Caicedo [2]. No restante do trabalho, vamos considerar M uma variedade diferenciável de classe C^n e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, salvo menção em contrário.

2.1 Definições Básicas

Definição 2.1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto $q \in M$ é um ponto crítico de f se $df_q = 0$.*

Em coordenadas locais (U_q, φ) , isso quer dizer que $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} |_{\varphi(q)} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Esta propriedade não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Denotamos o conjunto de pontos críticos de f por $\mathcal{C}(f)$.

Proposição 2.1. *Se f é suave então o conjunto dos pontos críticos de f é fechado.*

Sejam $v, w \in T_q M$ e sejam V, W dois campos vetoriais sobre M que estendem a v e w .

Definição 2.2. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $q \in M$ um ponto crítico de f . Definimos uma forma bilinear simétrica*

$$H_f : T_q M \times T_q M \rightarrow \mathbb{R}$$

chamada forma hessiana de f em q , mediante a seguinte fórmula

$$H_f(v, w) = V_q(W(f)) = v(W(f)),$$

onde $W(f)_p = df_p(w_p)$

Observe que H_f é independente da escolha da extensão V . Mostremos agora que H_f é simétrica e, portanto, independente da extensão W .

Podemos escrever $H_f(v, w) - H_f(w, v) = [V, W]_q(f)$, onde $[V, W]$ é colchete de Lie de V e W . Como q é um ponto crítico de f , então $[V, W]_q(f) = 0$ e, portanto, H_f é simétrica.

Definição 2.3. Dizemos que um ponto crítico q é não degenerado se H_f é não degenerada. Em coordenadas locais $(U_q; x^1, \dots, x^n)$, isso quer dizer que a matriz hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\bigg|_q\right)$ é não singular.

Observe que esta condição é independente da escolha dos sistemas de coordenadas ao redor de q .

Definição 2.4. Uma função suave tal que todos seus pontos críticos são não degenerados chama-se uma função de Morse.

Proposição 2.2. Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então os pontos críticos não degenerados de f são isolados no conjunto dos pontos críticos.

Demonstração. Seja q um ponto crítico não degenerado de f e tome $(U_q; x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas ao redor de q . Consideremos a seguinte função

$$g : U_q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$p \longmapsto g(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right).$$

Então $g(p) = 0$ se e somente se p é um ponto crítico de f . Agora a matriz jacobiana de g é

$$Jg = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

e como $\det(Jg(q)) \neq 0$, uma vez que q é um ponto crítico não degenerado, pelo Teorema da função inversa, existe uma vizinhança $V_q \subset U_q$ tal que $g|_{V_q}$ é 1-1. Agora afirmamos que $V_q \cap \mathcal{C}(f) = q$. Por construção: se $x \in V_q \cap \mathcal{C}(f)$ então $g(x) = 0 = g(q)$. Logo $x = q$ pois está em V_q . \square

Lema 2.1. Se M é compacta e f é uma função de Morse, então o conjunto dos pontos críticos é finito.

Demonstração. O conjunto dos pontos críticos $\mathcal{C}(f)$ de f é compacto pois é fechado pela Proposição 2.1 e M é compacta. Além disso, pela Proposição 2.2, $\mathcal{C}(f)$ é discreto e, portanto, $\mathcal{C}(f)$ é finito. \square

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(x)$. A origem é um ponto crítico degenerado e todos os demais são não degenerados.

Exemplo 2.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2$. Então todos os pontos do eixo Y são pontos críticos degenerados e formam uma subvariedade de \mathbb{R}^2 .

Definição 2.5. O índice de um ponto crítico não degenerado q é o número de autovalores negativos da matriz simétrica $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ e o denotamos por $\text{ind}_f(q)$.

Note que também é independente do sistema de coordenadas, pois corresponde à dimensão do maior subespaço linear de $T_q M$ onde a forma bilinear H_f é definida negativa.

Lema 2.2. [Lema de Morse] Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $q \in M$ um ponto crítico não degenerado. Existe um sistema de coordenadas $(U_q; x^1, \dots, x^n)$ ao redor de q tal que

$$f|_{U_q} = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2,$$

onde λ é o índice de f em q .

2.2 Teoremas fundamentais da teoria de Morse

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $a \in \mathbb{R}$. Denotamos por $M^a = \{m \in M : f(m) \leq a\}$ chamado "o nível abaixo de a ".

Teorema 2.3. Sejam f suave e $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ e considere $f^{-1}([a, b]) \subset M$.

Se $f^{-1}([a, b])$ é compacto e não tem pontos críticos então:

- (i) M^a é difeomorfo a M^b ;
- (ii) M^a é retrato por deformação de M^b .

Observação 2.4. As definições do campo gradiente ∇f , curva integral e grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos se encontram no Apêndice C. A definição de retrato por deformação, no Apêndice B.

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que M^a é difeomorfo a M^b . Tome o campo vetorial $X = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$. Como $f^{-1}([a, b])$ não tem pontos críticos, X está bem definida dentro de $f^{-1}([a, b])$. Seja

$$\begin{aligned} \varphi_t : f^{-1}([a, b]) &\longrightarrow f^{-1}([a, b]) \\ m &\longmapsto \varphi_t(m) = c_m(t) \end{aligned}$$

onde c_m é a curva integral de X tal que $c_m(0) = m$ e φ_t é um elemento do grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos.

Considere a função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pelo $\alpha(t) = f(\varphi_t(m))$, para todo $m \in M$ (fixo). Logo $\alpha(0) = f(\varphi_0(m)) = f(c_m(0)) = f(m)$ e

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{df(\varphi_t(m))}{dt} = df_{\varphi_t(m)} \circ \frac{d\varphi_t(m)}{dt} \\ &= df_{\varphi_t(m)}(c'_m(t)) \\ &= \left\langle \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}, \nabla f \right\rangle = 1 \end{aligned}$$

Segue-se que $\int_0^t \frac{d\alpha(s)}{ds} ds = \int_0^t ds = t$. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que $\int_0^t \frac{d\alpha(s)}{ds} ds = \alpha(t) - \alpha(0) = t$ e $\alpha(t) = \alpha(0) + t = f(m) + t$. Agora, se $m \in f^{-1}(a)$ então $\alpha(t) = a + t$ e $\alpha(b - a) = a + b - a = b$.

Considere $\varphi_{b-a} : f^{-1}([a, b]) \rightarrow f^{-1}([a, b])$ e seja $x \in M^a$. Note que

- (a) se $f(x) = a$ então $f(\varphi_{b-a}(x)) = \alpha(b - a) = b$;
- (b) se $f(x) < a$ então $f(\varphi_{b-a}(x)) = \alpha(b - a) = f(x) + b - a < b$.

Assim $\varphi_{b-a}(M^a) \subseteq M^b$. Agora, vejamos que

$$M^b \subseteq \varphi_{b-a}(M^a) \Leftrightarrow \varphi_{b-a}^{-1}(M^b) \subseteq M^a.$$

Lembramos que $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ e assim $\varphi_{b-a}^{-1}(M^b) = \varphi_{a-b}(M^b)$. Desta maneira, consideramos $\varphi_{a-b} : M \rightarrow M$ e seja $x \in M^b$.

- (a) se $f(x) = b$ então $f(\varphi_{a-b}(x)) = \alpha(a - b) = a$;
- (b) se $f(x) < b$ então $f(\varphi_{a-b}(x)) = \alpha(a - b) = f(x) + a - b < a$.

Assim $\varphi_{a-b}(M^b) \subseteq M^a$. Portanto $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$ e, usando o fato que φ_{b-a} é um difeomorfismo, então M^b é difeomorfo a M^a .

Agora, vejamos que M^a é uma retrato por deformação de M^b . Vamos mostrar que existem funções contínuas $r_t : M^b \rightarrow M^a$ com $0 \leq t \leq 1$ tais que

- (a) $r_0(M^b) = M^b$;
- (b) $r_t|_{M^a} = Id$;
- (c) $r_1(M^b) = M^a$;
- (d) A aplicação

$$\begin{aligned} M^b \times [0, 1] &\longrightarrow M^b \\ (x, t) &\longmapsto r_t(x) \end{aligned}$$

é contínua.

Seja $r_t : M^b \rightarrow M^b$ definida por

$$r_t(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in M^a; \\ \varphi_{t(a-f(x))}(x), & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

Logo

$$f(r_t(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in M^a; \\ f(\varphi_{t(a-f(x))}(x)) = f(x) + t(a - f(x)) = (1 - t)f(x) + ta, & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

Como $(1 - t)f(x) + ta \leq (1 - t)b + tb = b$ para todo $t \in [0, 1]$, temos que $r_t(x) \in M^b$.
Vejam as propriedades mencionadas:

- (a)

$$r_0(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in M^a; \\ \varphi_0(x) = x, & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

Assim $r_0 = Id$.

- (b) $r_t|_{M^a} = Id$ (imediato pela definição de r_t).
- (c) $r_1(M^b) = M^a$. Note que

$$r_1(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in M^a; \\ \varphi_{a-f(x)}(x) ; & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

Disto temos que

$$f(r_1(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in M^a; \\ a, & \text{se } x \in f^{-1}([a, b]). \end{cases}$$

Logo $r_1(M^b) = M^a$.

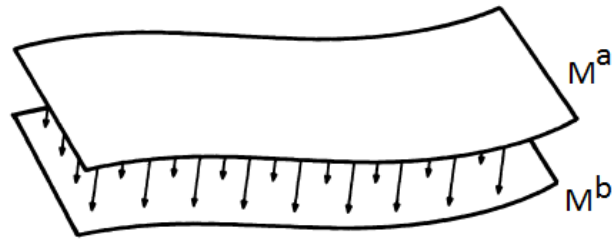
- (d) Fixe $x \in M^b$. Logo $r_t(x) = c_x(t)$ é contínua pois as curvas integrais são C^∞ ja que f é suave. Agora, fixe $t \in [0, 1]$. É suficiente mostrar a continuidade em $x \in f^{-1}(a)$. Como

$$r_t(x) = \begin{cases} x & ; \text{ se } x \in M^a \\ \varphi_{t(a-f(x))}(x) & ; \text{ se } x \in f^{-1}([a, b]) \end{cases}$$

e $x \in f^{-1}(a)$ temos que $r_t(x) = x$ e, portanto, é contínua. Assim temos provado que as derivadas parciais de $r_t(x)$ são contínuas então $r_t(x)$ é diferenciável, portanto é contínua.

□

Figura 1 – Retrato por deformação



Fonte: extraída de [11]

Teorema 2.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ e considere $f^{-1}([a, b]) \subset M$ compacto. Se existe um único ponto crítico p não degenerado de f (suave) em $f^{-1}([a, b])$ de índice λ então M^b é um retrato por deformação de M^a com uma λ -célula e^λ colada pelo bordo \dot{e}^λ .*

Observação 2.6. *As definições de célula e colagem de células se encontram no Apêndice D.*

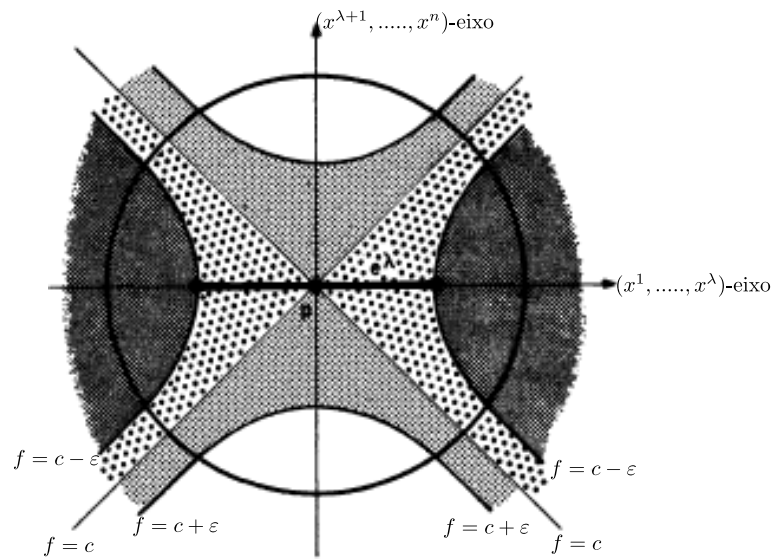
Demonstração. Seja $c = f(p)$. Vamos mostrar que, dado um $\varepsilon' > 0$ tal que $f^{-1}([c - \varepsilon', c + \varepsilon'])$ não contém outro ponto crítico distinto do p , então existe $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ tal que $M^{c+\varepsilon}$ é um retrato por deformação de $M^{c-\varepsilon}$ com uma λ -célula e^λ colada pelo bordo \dot{e}^λ .

Pelo Lema de Morse 2.2, existe $(U; x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas ao redor de p tal que $f|U = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2$. Escolhamos um ε tal que $\{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid (r_1)^2 + \dots + (r_n)^2 \leq 2\varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Seja $e^\lambda = \{m \in U \mid x^1(m)^2 + \dots + x^\lambda(m)^2 \leq \varepsilon \text{ e } x^{\lambda+1}(m) = \dots = x^n(m) = 0\}$.

É claro que e^λ é homeomorfa a B^λ (bola de dimensão λ). Agora vejamos que $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon} = \dot{e}^\lambda$ visto que, se $q \in e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$ então $x^1(q)^2 + \dots + x^\lambda(q)^2 \leq \varepsilon$, $x^{\lambda+1}(q) = \dots = x^n(q) = 0$ e $f(q) \leq c - \varepsilon$.

Como $f(q) = c - x^1(q)^2 - \dots - x^\lambda(q)^2 \leq c - \varepsilon$, pela desigualdade anterior obtemos $x^1(q)^2 + \dots + x^\lambda(q)^2 = \varepsilon$, isto é, $q \in \dot{e}^\lambda$. Agora, se $q \in \dot{e}^\lambda$ é fácil ver que $q \in e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$. Isto mostra que e^λ está colada a $M^{c-\varepsilon}$ pelo bordo.

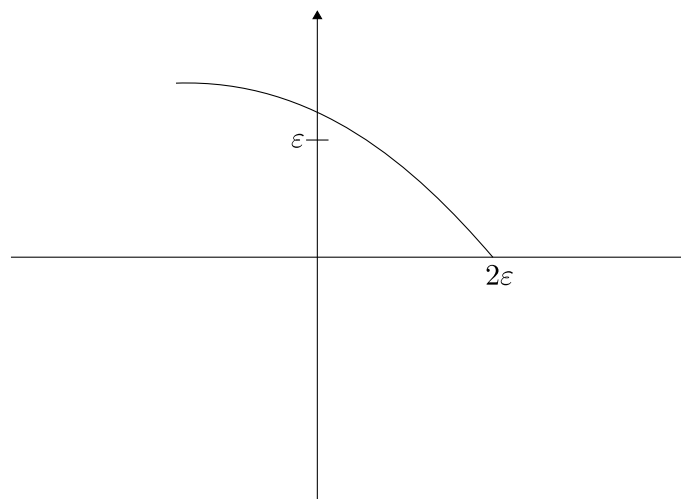
A situação resultante é ilustrada esquematicamente na figura 2. As linhas coordenadas representam os planos $x^{\lambda+1} = \dots = x^n = 0$ e $x^1 = \dots = x^\lambda = 0$ respectivamente. O círculo representa a fronteira da bola de raio $\sqrt{2\varepsilon}$ e as hipérbolas representam as hipersuperfícies $f^{-1}(c - \varepsilon)$ e $f^{-1}(c + \varepsilon)$. A região $M^{c-\varepsilon}$ é fortemente sombreada, a região $f^{-1}[c - \varepsilon, c]$ é fortemente pontilhada e a região $f^{-1}[c, c + \varepsilon]$ é levemente pontilhada. A linha horizontal escura através de p representa a célula e^λ . Observe que $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$ é precisamente a fronteira de \dot{e}^λ de modo e^λ está anexado a $M^{c-\varepsilon}$ como requerido.

Figura 2 – Representação em torno do ponto p 

Fonte: extraída de [11]

Agora queremos mostrar que $e^\lambda \cup M^{c-\varepsilon}$ é um retrato por deformação de $M^{c+\varepsilon}$.
Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave que cumpre o seguinte

- (a) $u(0) > \varepsilon$;
- (b) $u(r) = 0$ para $r \geq 2\varepsilon$;
- (c) $-1 < u'(r) \leq 0 \quad \forall r$.

Figura 3 – A função u ilustrada

Definamos a função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(m) = \begin{cases} f(m), & \text{se } m \notin U; \\ f(m) - u(x^1(m)^2 + \cdots + x^\lambda(m)^2 + 2x^{\lambda+1}(m)^2 + \cdots + 2x^\lambda(m)^2), & \text{se } m \in U. \end{cases}$$

Mostraremos que F é suave. Como $B = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid (r_1)^2 + \cdots + (r_n)^2 \leq 2\varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$, consideremos a cobertura de M pelos abertos U e $M - \varphi^{-1}(B)$. Agora F é suave em U e $F|_{M - \varphi^{-1}(B)} = f|_{M - \varphi^{-1}(B)}$ pois se $m \in M - \varphi^{-1}(B)$ então $\varphi(m) \notin B$, logo $x^1(m)^2 + \cdots + x^\lambda(m)^2 > 2\varepsilon$ e portanto $u(x^1(m)^2 + \cdots + x^\lambda(m)^2 + 2x^{\lambda+1}(m)^2 + \cdots + 2x^\lambda(m)^2) = 0$.

Então F é suave em dois abertos cuja reunião é M . Para simplificar a notação introduziremos duas funções $g, h : U \rightarrow [0, \infty)$ definidas por

$$\begin{aligned} g &= (x^1)^2 + \cdots + (x^\lambda)^2; \\ h &= (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2. \end{aligned}$$

O resto da prova se decompõe em cinco partes.

Primeira parte: $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$.

Seja $m \in f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Se $m \in M - \varphi^{-1}(B)$ então $F(m) = f(m) \leq c + \varepsilon$, logo $m \in F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Se $m \in \varphi^{-1}(B) \subset U$ então $F(m) = f(m) - u(g(m) + 2h(m)) \leq f(m)$ logo $m \in F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Agora, seja $m \in F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$ vamos ver que $m \in f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Se $g(m) + 2h(m) < 2\varepsilon$ então $\frac{g(m)}{2} + h(m) < \varepsilon$ e $f(m) = c - g + h \leq c + \frac{g}{2} + h \leq c + \varepsilon$, logo $m \in f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Se $g(m) + 2h(m) \geq 2\varepsilon$ então $u(g(m) + 2h(m)) = 0$ por definição da função u assim $F(m) = f(m)$ portanto $m \in f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$.

Segunda parte: os pontos críticos de F são os mesmos que os pontos críticos de f .

Como $F|_{M - \varphi^{-1}(B)} = f|_{M - \varphi^{-1}(B)}$ então $dF = df$ em $M - \varphi^{-1}(B)$ assim F e f tem os mesmos pontos críticos. Agora, se $m \in \varphi^{-1}(B)$ então $dF|_m(\frac{\partial}{\partial x^i}) = df|_m(\frac{\partial}{\partial x^i} - du|_{g(m)+2h(m)}(d(g(m) + 2h(m))))|_m(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_m - \frac{\partial(g+2h)}{\partial x^i}|_m u'|_m(g(m) + 2h(m))$. Logo

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}|_m = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x^i}|_m - 2x_i(m)u', & \text{se } 1 \leq i \leq \lambda; \\ \frac{\partial f}{\partial x^i}|_m - 4x_i(m)u', & \text{se } \lambda < i \leq n. \end{cases}$$

Como $f = c - g + h$ (pelo Lema de Morse 2.2) então

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \begin{cases} -2x_i(m)(1 + u'), & \text{se } 1 \leq i \leq \lambda; \\ 2x_i(m)(1 - 2u'), & \text{se } \lambda < i \leq n. \end{cases}$$

Agora

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}|_m = \begin{cases} -2x_i(m), & \text{se } 1 \leq i \leq \lambda; \\ 2x_i(m), & \text{se } \lambda < i \leq n. \end{cases}$$

Logo $dF|m = 0$ se e somente se $df|m = 0$ pois $1 + u' \neq 0$ e $1 - 2u' \neq 0$ e, portanto, F e f tem os mesmos pontos críticos.

Terceira parte: $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ é um retrato por deformação de $M^{c+\varepsilon}$.

Vejamus que $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ não contém ponto crítico exceto possivelmente p . Mas como $(\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)) = 0 = (\pm 2x^i(p))$ então $x^i(p) = 0$ para todo i e $u(g(p) + 2h(p)) = u(0)$ e, portanto, $F(p) = c - u(0) < c - \varepsilon$. Segue que $p \notin F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Portanto, a terceira parte segue da primeira parte e do teorema 2.3.

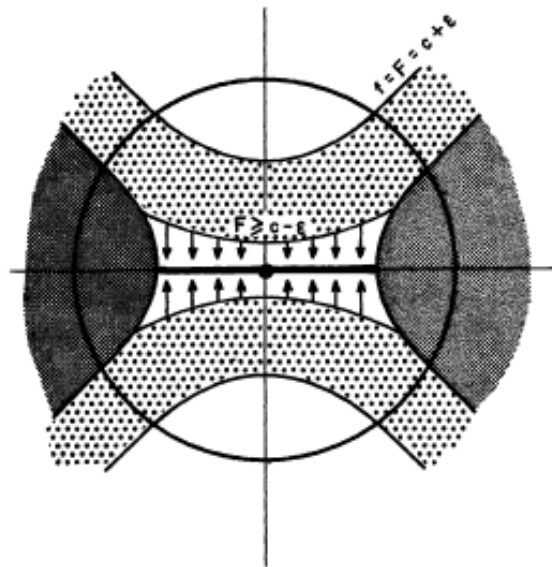
Quarta parte: Definamos $H = \overline{F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) - M^{c-\varepsilon}}$. É fácil ver que $M^{c+\varepsilon} \cup H = F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ (utilizando que $F \leq f$ em M). Vamos mostrar que $e^\lambda \subseteq H$.

Seja $q \in e^\lambda$. Queremos mostrar que para toda vizinhança U_q de q temos

$$(F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) - M^{c-\varepsilon}) \cap U_q \neq \emptyset.$$

Seja $q' \in U_q \cap (e^\lambda - \dot{e}^\lambda)$ então se cumpre que $g(q') < \varepsilon$ e $h(q') = 0$, logo $f(q') = c - g(q')$ e daí que $f(q') > c - \varepsilon$, isto é, $q' \notin f^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$. Por outro lado, $F(q') = f(q') - u(g(q')) = c - g(q') - u(g(q'))$ mas como $-1 < u'$ então $-1 < \frac{u(g(q')) - u(0)}{g(q')}$ (pelo Teorema do valor médio). Portanto $-g(q') - u(g(q')) < -u(0)$ e tem-se que $F(q') < c - u(0) < c - \varepsilon$. Logo $q' \in U_q \cap (F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) - f^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]))$ de onde temos que $U_q \cap \{F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) - M^{c-\varepsilon}\} \neq \emptyset$.

Figura 4 – Representação da alça



Fonte: extraída de [11]

A região $M^{c-\varepsilon} \cup H$ é descrita como $M^{c-\varepsilon}$ com alça anexada. A presente situação é

ilustrada na figura 4. A região $M^{c-\varepsilon}$ é a fortemente sombreado, a alça H é sombreada com setas verticais e a região $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ é pontilhada.

Quinta parte: $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ é um retrato por deformação de $M^{c-\varepsilon} \cup H$.

Definamos $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$ por

$$r_t(m) = \begin{cases} m, & \text{se } m \notin U; \\ \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), tx^{\lambda+1}(m), \dots, tx^n(m)), & \text{se } g(m) \leq \varepsilon; \\ \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), s_t x^{\lambda+1}(m), \dots, s_t x^n(m)), & \text{se } \varepsilon < g(m) \leq h(m) + \varepsilon; \\ m, & \text{se } h(m) + \varepsilon < g(m), \end{cases}$$

$$\text{onde } s_t = t + (1-t) \sqrt{\frac{g(m) - \varepsilon}{h(m)}}.$$

Primeiramente, mostremos que: $r_t(M^{c-\varepsilon} \cup H) \subseteq M^{c-\varepsilon} \cup H$.

Lembre que $M^{c-\varepsilon} \cup H = F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ (quarta parte). Seja $m \in F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ e suponhamos que $m \in U$. Segue que $r_t(m) = \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), tx^{\lambda+1}(m), \dots, tx^n(m))$ e assim $F(\varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), tx^{\lambda+1}(m), \dots, tx^n(m))) = c - g(m) + t^2 h(m) - u(g(m) + 2t^2(h(m)))$.

Definamos a função $\alpha(t) = c - g(m) + t^2 h(m) - u(g(m) + 2t^2(h(m)))$ para $t \in [0, 1]$. A sua derivada é dada por $\alpha'(t) = 2th(m) - u'(g(m) + 2t^2(h(m)))4th(m)$. Como $u' \leq 0$ então $0 \leq \alpha'(t)$ e sabemos que $\alpha(1) \leq c - \varepsilon$. Logo $\alpha(t) \leq c - \varepsilon$ para $t \in [0, 1]$ que era o que queríamos mostrar. O caso em que $r_t(m) = \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), s_t x^{\lambda+1}(m), \dots, s_t x^n(m))$ se faz igual, basta observar que $0 < s_t \leq 1$. Para observar que é um retrato por deformação, revisar [1]. Assim mostramos o que queríamos. Agora, como em $[a, c - \varepsilon]$ não tem pontos críticos, por hipótese, então $M^a \simeq M^{c-\varepsilon}$ (tem mesmo tipo homotópico, por teorema anterior). Analogamente $[c + \varepsilon, b]$ não tem pontos críticos e assim $M^{c-\varepsilon} \simeq M^b$ (tem o mesmo tipo homotópico). Agora, como já mostramos $M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$, é fácil ver que, já que \simeq é relação de equivalência, então $M^b \simeq M^a \cup e^\lambda$ e assim é mostrado o teorema. \square

Corolário 2.1. *Se existem k pontos críticos p_1, \dots, p_k , com $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ seus respectivos índices, então $M^{c+\varepsilon}$ é um retrato por deformação de $M^{c-\varepsilon} \amalg e^{\lambda_1} \dots \amalg e^{\lambda_k}$.*

Demonstração. Basta repetir a demonstração do teorema 2.5 para cada ponto crítico. \square

2.3 CW-Complexos

Os CW-complexos são uma generalização dos complexos simpliciais e sua importância se dá pela possibilidade de calcular sua homologia. Nosso objetivo é mostrar como pode se expressar uma variedade como um CW-complexo com a ajuda de uma função de Morse.

Definição 2.6. Um espaço topológico X é um CW-complexo se existem subespaços $X^{(n)}$, com $X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$ tais que:

- (i) $X^{(0)}$ é um conjunto discreto de pontos (0-célula).
- (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $X^{(n+1)}$ é obtido de $X^{(n)}$ por colagem de $(n+1)$ -células.
- (iii) Um subespaço $U \subset X$ é aberto se e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $U \cap X^{(n)}$ é aberto em $X^{(n)}$.

Um subcomplexo de um complexo CW X é um subespaço $A \subset X$ fechado que é uma união de células de X .

Observação 2.7. A condição (3) é desnecessária quando X for de dimensão finita, isto é, $X = X^n$ para algum n (para mais detalhes, ver [6], Apêndice).

A definição seguinte trata sobre aplicações celulares entre CW-complexos que tem um papel similar às aplicações simpliciais entre complexos simpliciais.

Observação 2.8. As definições de homotopia, inversa homotópica e equivalência estão no Apêndice C.

Definição 2.7. Sejam X e Y CW-complexos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ se chama celular se $f(X^{(p)}) \subseteq Y^{(p)}$, para cada p .

Teorema 2.9. Sejam X e Y CW-complexos, A um subcomplexo de X e $f : A \rightarrow Y$ uma aplicação celular contínua. Então $X \amalg_f Y$ é um CW-complexo que tem Y como subcomplexo.

Teorema 2.10. Sejam X e Y CW-complexos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então f é homotópica a uma aplicação celular entre X e Y .

Estes teoremas se encontram em Munkres [13].

O objetivo agora é mostrar que uma variedade se descreve como um CW-complexo em termos dos pontos críticos de uma função de Morse. Para isto, necessitaremos de alguns lemas.

Lema 2.3. Sejam X um espaço topológico e $\varphi_0, \varphi_1 : e^\lambda \rightarrow X$ duas aplicações homotópicas. Então a identidade de X se estende a uma equivalência homotópica $K : X \amalg_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \amalg_{\varphi_1} e^\lambda$.

Demonstração. Definamos a função K pelas seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} K(x) &= x, \text{ se } x \in X; \\ K(tu) &= 2tu, \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in \dot{e}^\lambda; \\ K(tu) &= \varphi_{2-2t}(u), \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

onde $\dot{e}^\lambda = s^{\lambda-1}$ e φ_t é a homotopia entre φ_0 e φ_1 . Definimos também a função $L : X \amalg_{\varphi_1} e^\lambda \rightarrow X \amalg_{\varphi_0} e^\lambda$ por

$$\begin{aligned} L(x) &= x, \text{ se } x \in X; \\ L(tu) &= 2tu, \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in \dot{e}^\lambda; \\ L(tu) &= \varphi_{2t-1}(u), \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

Agora queremos mostrar que $L \circ K : X \amalg_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \amalg_{\varphi_0} e^\lambda$ é homotópica à identidade. Calculemos $L \circ K$. Seja $u \in e^\lambda$. Então

$$\begin{aligned} L \circ K &= x, \text{ se } x \in X; \\ L \circ K &= L(2tu) = 4tu, \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ L \circ K &= L(2tu) = \varphi_{4t-1}, \text{ se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ L \circ K &= L(\varphi_{2-2t}(u)) = \varphi_{2-2t}(u), \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Definamos agora a função $h : [0, 1] \times X \amalg_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \amalg_{\varphi_0} e^\lambda$ como

$$\begin{aligned} h(t, x) &= x, \text{ se } x \in X \\ h(t, xu) &= (4 - 3t)xu, \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{4 - 3t}, u \in e^\lambda; \\ h(t, xu) &= \varphi_{(4-3t)(1-x)}(u), \text{ se } \frac{1}{4 - 3t} \leq x \leq \frac{2 - 2t}{4 - 3t}, u \in e^\lambda; \\ h(t, xu) &= \varphi_{\frac{1}{2}(4-3t)(1-x)}(u), \text{ se } \frac{2 - 2t}{4 - 3t} \leq x \leq 1, u \in e^\lambda. \end{aligned}$$

É fácil verificar que h é uma homotopia entre $L \circ K$ e a identidade. \square

Lema 2.4. *Sejam X, Y espaços topológicos e $F : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Suponha que f tem uma inversa homotópica pela esquerda L e uma inversa homotópica pela direita R . Então F é uma equivalência e L e R são inversas homotópicas.*

Demonstração. Utilizaremos \simeq para indicar que duas funções são homotópicas. Agora, as hipóteses do lema são $LF \simeq Id$ e $FR \simeq Id$. Logo $L \simeq L(FR) = (LF)R \simeq R$. Utilizando a relação $LF \simeq Id$, obtemos que $RF \simeq Id$ e, portanto, R é uma inversa homotópica de F . De igual maneira, obtemos $FL \simeq Id$, logo L é uma inversa homotópica de F . \square

Lema 2.5. *Sejam X um espaço topológico, $\varphi : \dot{e}^\lambda \rightarrow X$ uma aplicação contínua e $f : X \rightarrow Y$ uma equivalência. Então f se estende a uma equivalência $F : X \amalg_\varphi e^\lambda \rightarrow Y \amalg_{f\varphi} e^\lambda$.*

Demonstração. Definimos F pela seguinte fórmula

$$F(m) = \begin{cases} f(m), & \text{se } m \in X; \\ m, & \text{se } m \in e^\lambda. \end{cases}$$

Seja g uma inversa homotópica de f e definamos $G : Y \amalg_{f\varphi} e^\lambda \rightarrow X \amalg_{g\varphi} e^\lambda$ da seguinte maneira

$$G(m) = \begin{cases} g(m), & \text{se } m \in Y; \\ m, & \text{se } m \in e^\lambda. \end{cases}$$

Agora, posto que $g \circ f \circ \varphi$ é homotópica a φ então existe uma equivalência $K : X \amalg_{gf\varphi} e^\lambda \rightarrow X \amalg_\varphi e^\lambda$ explicitamente definida pelo Lema 2.3. Isto quer dizer que temos as seguintes aplicações

$$Y \amalg_{f\varphi} e^\lambda \rightarrow Y \amalg_{gf\varphi} e^\lambda \rightarrow X \amalg_\varphi e^\lambda.$$

Primeiro mostremos que $K : X \amalg_\varphi e^\lambda \rightarrow X \amalg_\varphi e^\lambda$ é uma equivalência. Seja h_t uma homotopia entre gf e a identidade. Calculemos KGF tendo em conta a forma em que está definida K no lema 2.3. Seja $U \in e^\lambda$ então

- Se $x \in X$, $KGF(x) = Kgf(x) = gf(x)$ porque $K|x = id$.
- Se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $KGF(tu) = K(tu) = 2tu$ porque $G|e^\lambda = F|e^\lambda = id$,
- Se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, $KGF(tu) = K(tu) = h_{2-2t}(\varphi(u))$ porque se h_t é a homotopia entre gf e a identidade então $h_t \circ \varphi$ é a homotopia entre $gf\varphi$ e φ .

A homotopia $\alpha_t : X \amalg_\varphi e^\lambda \rightarrow X \amalg_\varphi e^\lambda$ entre KGF e a identidade se define assim

$$\begin{aligned} \alpha_t(x) &= h_t(x), \quad \text{se } x \in X; \\ \alpha_t(ru) &= \frac{2}{1+r}tu, \quad \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1+r}{2}, \quad u \in \dot{e}^\lambda; \\ \alpha_t(ru) &= h_{2-2t+r}(\varphi(u)), \quad \text{se } \frac{1+r}{2} \leq t \leq 1, \quad u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

Logo F tem uma inversa homotópica pela esquerda. Uma prova similar mostra que G tem uma inversa homotópica pela direita. Logo como $KGF \simeq Id$ e K é uma equivalência então, pelo Lema 2.4, $(GF)K \simeq Id \simeq G(FK)$. Agora, como G tem inverso homotópico pela esquerda, então $(FK)G \simeq Id \simeq F(KG)$. Mas sabemos que $(KG)F \simeq Id$ e daí que F é uma equivalência. \square

Agora já temos as ferramentas para mostrar o teorema mais importante desta seção.

Teorema 2.11. *Seja M uma variedade diferenciável compacta, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então M tem o mesmo tipo homotópico de um CW-complexo com uma λ -célula para cada ponto crítico de índice λ .*

Demonstração. : Como M é compacto e f é uma função de Morse então M tem um número finito de pontos críticos (ver Lema 2.1), portanto tem um número finito de valores críticos $c_1 < c_2 < \dots < c_n$.

Vamos mostrar o teorema usando indução matemática sobre os valores críticos.

Para o caso $n = 2$, temos $c_1 < c_2$ os valores críticos associados aos pontos de mínimo e máximo. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $c_1 < a < c_2$. Pelo Corolário 2.1, existe um ε tal que $M^a \simeq M^{c_1-\varepsilon} \amalg_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \dots \amalg_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$, onde λ_i são os índices dos pontos críticos em $f^{-1}(c_1)$. Mas $M^{c_1-\varepsilon} = \emptyset$ então $M^a \simeq e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$. Agora também sabemos que $M^{c_2+\varepsilon} \simeq M^a \amalg_{\varphi_1} e^{\psi_1} \dots \amalg_{\varphi_\beta} e^{\psi_\beta}$ com ψ_i , são os índices dos pontos críticos em $f^{-1}(c_2)$. Como $M^{c_2+\varepsilon} = M$ e $M^a \simeq e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$ então $M \simeq e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha} \amalg_{\varphi_1} e^{\psi_1} \dots \amalg_{\varphi_\beta} e^{\psi_\beta}$ e, portanto, M tem o mesmo tipo homotópico que um CW-complexo.

Por hipótese indutiva, suponha que o teorema é válido para toda variedade com i valores críticos tal que $i < n$. Nós vamos mostrar no caso em que $i = n$. Seja M uma variedade diferenciável com $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ seus valores críticos.

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $c_{n-1} < a < c_n$ então M^a tem uma quantidade menor que n de valores críticos. Pela hipótese indutiva, $M^a \simeq K$, isto é, tem o mesmo tipo homotópico que um CW-complexo K . Portanto existe uma equivalência

$$h' : M^a \rightarrow K.$$

Agora, pelo Teorema 2.3, $M^{c_n-\varepsilon} \simeq M^a$, isto é, existe uma equivalência $h : M^{c_n-\varepsilon} \rightarrow M^a$. Além disto, pelo Corolário 2.1, $M^{c_n+\varepsilon} \simeq M^{c_n-\varepsilon} \amalg_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \amalg_{\varphi_2} e^{\lambda_2} \dots \amalg_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$ onde λ_i é o índice de um ponto p_i tal que p_i é um ponto crítico com $f(p_i) = c_n$ e $\varphi_i : \dot{e}^{\lambda_i} \rightarrow M^{c_n+\varepsilon}$. Concluindo, temos $M^{c_n-\varepsilon} \xrightarrow{h} M^a \xrightarrow{h'} K$ de onde temos que $h' \circ h : M^{c_n-\varepsilon} \rightarrow K$ é uma equivalência.

Pelo Lema 2.5, $h' \circ h$ se estende a equivalência $H : M^{c_n-\varepsilon} \amalg_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \rightarrow K \amalg_{h' \circ h \circ \varphi_1} e^{\lambda_1}$. Vamos chamar $\psi_i = h' \circ h \circ \varphi_i$. Se aplicarmos α vezes o Lema 2.5, obtemos uma equivalência

$$\bar{H} : M^{c_n-\varepsilon} \amalg_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \amalg_{\varphi_2} e^{\lambda_2} \dots \amalg_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha} \rightarrow K \amalg_{\psi_1} e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\psi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$$

onde $\psi_i : \dot{e}^{\lambda_i} \rightarrow K$ é homotópico a uma aplicação celular $\tilde{\psi} : \dot{e}^\lambda \rightarrow K$, pelo Lema 2.3. Logo pelo Lema 2.4 $K \amalg_{\psi_1} e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\psi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $K \amalg_{\tilde{\psi}_1} e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\tilde{\psi}_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$. Como as $\tilde{\psi}_i$ são aplicações celulares então, pelo Teorema 2.9, $K_1 = K \amalg_{\tilde{\psi}_1} e^{\lambda_1} \amalg \dots \amalg_{\tilde{\psi}_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$ é um CW-complexo, e como $M^{c_n+\varepsilon} = M$ portanto M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo. \square

Exemplo 2.12. Vamos explicar a decomposição do toro 2-dimensional. Seja $M = T^2$ e

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \sin v; r \sin u; (R + r \cos u) \cos v) \end{aligned}$$

uma carta local. É fácil ver que φ é uma parametrização do toro acima do plano XY obtida girando-se uma circunferência em torno do eixo y .

Seja

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = z \end{aligned}$$

assim $(f \circ \varphi)(u, v) = (R + r \cos u) \cos v$ e $\nabla(f \circ \varphi)(u, v) = (-r \sin u \cos v, -(R + r \cos u) \sin v)$.

Os pontos críticos de f são aqueles que satisfazem $\nabla(f \circ \varphi) = 0$, isto é o mesmo que $r \sin u \cos v = 0$ e $(R + r \cos u) \sin v = 0$.

(u, v)	$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	(π, π)	$(0, \pi)$
$\varphi(u, v)$	$(0, 0, R + r) = P_4$	$(0, 0, R - r) = P_3$	$(0, 0, -(R - r)) = P_2$	$(0, 0, -(R + r)) = P_1$
Matriz hessiana	$\begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -R - r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -R + r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & R - r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & R + r \end{bmatrix}$
Índice	2	1	1	0

Chamemos $c_1 = f(p_1)$, $c_2 = f(p_2)$, $c_3 = f(p_3)$, $c_4 = f(p_4)$ e seja a_i tal que $c_i < a_i < c_{i+1}$.

Claramente $M^{c_1} = \{p_1\}$ e $M^{a_0} = \emptyset$ e, pelo teorema 2.11, obtemos que

Figura 5 – Exemplo do toro



Fonte: extraída de [2]

$$M^{c_1 - \varepsilon} \amalg_{\varphi_1} e^0 = \emptyset \amalg_{\varphi_1} \{.\} \simeq M^{c_1 + \varepsilon} \simeq M^{a_1}$$

A figura à direita pode ser deformada na figura à esquerda empurrando os lados até se encontrarem. A figura à esquerda também se deforma em um ponto se as linhas são empurradas.

Figura 6 – Exemplo do toro



$$M^{c_2-\varepsilon} \amalg_{\varphi_2} e^1 = M^{c_2+\varepsilon} \simeq M^{a_2}$$

Novamente se tivermos que empurrar os extremos superiores da figura à direita, em algum ponto devemos chegar ao ponto crítico p_2 . Se continuássemos empurrando o ponto p_2 e alguns pontos abaixo permaneceriam inalterados por qualquer outro ponto que alcançaria.

Figura 7 – Exemplo do toro



Fonte: extraída de [2]

$$M^{c_3-\varepsilon} \amalg_{\varphi_3} e^1 \simeq M^{c_3+\varepsilon} \simeq M^{a_3}$$

Neste ponto vemos que o mesmo argumento usado para as etapas anteriores se aplica a este e ao próximo passo. Uma vez que recriarmos o toro inteiro não precisamos de mais passos.

Figura 8 – Exemplo do toro



Fonte: extraída de [2]

$$M^{c_4-\varepsilon} \amalg_{\varphi_4} e^2 \simeq M^{c_4+\varepsilon} \simeq M$$

3 Variedades Grassmannianas

Neste capítulo vamos definir as variedades Grassmannianas que são a priori um conjunto que parametriza todos os subespaços lineares de um espaço vetorial V de determinada dimensão. Por exemplo, a variedade Grassmanniana dos subespaços lineares de dimensão um é o conjunto de linhas através da origem em V correspondendo ao espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$. Em geral, a variedade Grassmanniana generaliza a idéia dos espaços projetivos. Neste capítulo, mostramos inicialmente que são de fato variedades diferenciáveis. Posteriormente, apresentamos representações matriciais: a representação via matrizes de projeção e a representação via matrizes de reflexão. As principais referências são o livro de Elon [10] e as notas de aula de Eschenburg [4].

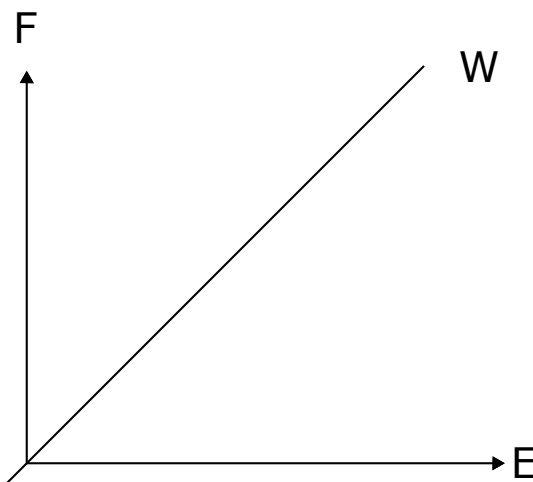
3.1 Grassmannianas como variedades diferenciáveis

Seja V um espaço vetorial real tal que $\dim V = n < \infty$. Tome $k \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq k \leq n$. De agora em diante, $W \leq V$ quer dizer que W é um subespaço de V , $L(E, F)$ é o espaço vetorial das aplicações lineares de E em F e

$E^\perp = \{v \in V : v \perp E\}$ é chamado complemento ortogonal do E .

Definição 3.1. *O conjunto dos subespaços lineares de V de dimensão k , denotado por $\text{Gr}_k(V) = \{W \leq V : \dim W = k\}$, é chamado de Grassmanniana de ordem k .*

Seja $E \in \text{Gr}_k(V)$. Consideremos $F \leq V$ tal que $V = E \oplus F$ ($\dim E = k, \dim F = n - k$). Consideremos $U_F = \{W \in \text{Gr}_k(V) : W \cap F = \{0\}\}$.



A família U_F cobre $\text{Gr}_k(V)$ (dado $E \in \text{Gr}_k(V)$ então $E \in U_F$ onde $F = E^\perp$). Para cada $T \in L(E, F)$, definimos

$$\text{graf}(T) = \{v + Tv : v \in E\}.$$

Segue que $\text{graf}(T)$ e E são isomorfos e $\text{graf}(T) \in U_F$. Com efeito, vamos definir

$$\begin{aligned} H : E &\longrightarrow \text{graf}(T) \\ v &\longmapsto v + Tv \end{aligned}$$

Isso é claramente um isomorfismo entre estes dois espaços. Agora vejamos que $\text{graf}(T) \in U_F$. Seja $v \in F \cap \text{graf}(T)$. Então $v = u + Tu$ (com $u \in E$). Mas $Tu \in F$ então assim $v - Tu = u \in F$ então $u \in E \cap F$ logo $u = 0$. Portanto $v = 0$ e assim $F \cap \text{graf}(T) = 0$. Concluimos que $\text{graf}(T) \in U_F$.

Definimos agora

$$\psi : L(E, F) \longrightarrow U_F \tag{3.1}$$

$$T \longmapsto \text{graf}(T) \tag{3.2}$$

Vamos provar que ψ é uma bijeção.

- ψ é injetora. Sejam T_1 e T_2 tal que $\text{graf}(T_1) = \text{graf}(T_2)$. Vamos provar que $T_1 = T_2$. Para todo $e \in E$, existe $v \in E$ tal que $e + T_1(e) = v + T_2(v)$. Como $T_1(e)$ e $T_2(v)$ pertencem a F então $e - v = T_2(v) - T_1(e)$ está em $E \cap F = 0$ e, portanto, $e - v = 0$ e assim $e = v$. Logo $T_1(e) = T_2(e)$ e, conseqüentemente, $T_2 = T_1$.
- ψ é sobrejetora. Seja $W \in U_F$. Vejamos que existe $T \in L(E, F)$ com $\psi(T) = W$. Note que, para $W \in U_F$ se, e somente se $\pi_E|W$ (onde π_E é a projeção sobre o subespaço E) é isomorfismo linear. Vamos chamar $S_W = \pi_E|W$ a esse isomorfismo linear

$$\begin{array}{ccccc} F & \xleftarrow{\pi_F} & W & \xrightarrow{S_W} & E \\ & & & \xleftarrow{S_W^{-1}} & \end{array} \tag{3.3}$$

Considerando $\pi_F \circ S_W^{-1}$, obtemos que $\text{graf}(\pi_F \circ S_W^{-1}) = W$. Então $\psi(\pi_F \circ S_W^{-1}) = W$ e, portanto, ψ é sobrejetora. Com efeito, seja $w \in W$ então

$$\pi_E(w) + \pi_F(w) = w$$

e observe que:

$$\pi_E(w) + \pi_F \circ S_W^{-1}(\pi_E(w)) = w$$

portanto temos que $w \in \text{graf}(\pi_F \circ S_W^{-1})$. Assim $W \subseteq \text{graf}(\pi_F \circ S_W^{-1})$. A outra inclusão é imediata.

Seja $\varphi = \psi^{-1} : U_F \rightarrow L(E, F)$. Dado $W \in U_F$, $\varphi(W) : E \rightarrow F$ é a única aplicação linear de $L(E, F)$ tal que $\text{graf}(\varphi(W)) = W$, isto é, $\varphi(W) = \pi_F \circ S_W^{-1}$. Como φ é injetora e $\varphi(U_F) = L(E, F)$ temos que (U_F, φ) satisfaz 1 da Proposição A.1.

Sejam $E' \in \text{Gr}_k(V)$ e $F' \leq V$ tal que $V = E' \oplus F'$. Sejam φ' e φ as aplicações correspondentes a U_F e $U_{F'}$. Vamos mostrar que $\varphi(U_F \cap U_{F'})$ é aberto. Inicialmente, $\varphi(U_F \cap U_{F'}) = \{\varphi(W) : W \in U_F \cap U_{F'}\}$. Lembre-se que $\text{graf}(\varphi(W)) = W$ assim temos que $\varphi(U_F \cap U_{F'}) = \{T \in L(E, F) : \text{graf}(T) \cap F' = \{0\}\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 L(E, F) & \longrightarrow & L(E, E \oplus F) & \longrightarrow & L(E, E') \\
 S & \longmapsto & \tilde{S} & \longmapsto & \pi_{E'} \circ \tilde{S} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \phi & &
 \end{array}$$

Defina $\phi : L(E, F) \rightarrow L(E, E')$ por $\phi(S) = \pi_{E'} \circ \tilde{S}$ onde $\tilde{S}(v) = v + S(v)$. Segue que $\tilde{S}(E) = \text{graf}(S)$. Assim ϕ é C^∞ . Logo obtemos que

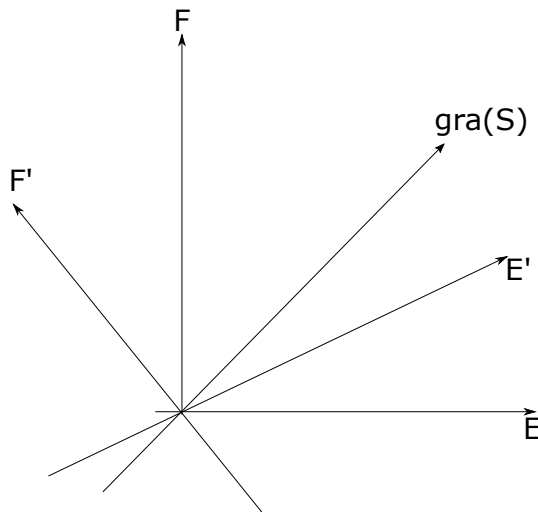
$$S \in \varphi(U_F \cap U_{F'}) \Leftrightarrow \text{graf}(S) \cap F' = \{0\} \Leftrightarrow \pi_{E'} \circ \tilde{S} \text{ é isomorfismo} \Leftrightarrow \phi(S) \in \text{Gl}(E, E').$$

Logo $\varphi(U_F \cap U_{F'}) = \phi^{-1}(\text{Gl}(E, E'))$ é aberto pois $\text{Gl}(E, E')$ é aberto e ϕ é contínua. Assim $\varphi(U_F \cap U_{F'})$ é aberto.

Vamos agora provar que a mudança de coordenadas

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_F \cap U_{F'}) & \longrightarrow & \varphi^{-1}(U_F \cap U_{F'}) \\
 S & \longmapsto & S'
 \end{array}$$

é C^∞ . Seja $S' = \varphi' \circ \psi(S) = \varphi'(\text{graf}(S))$, S' é a única aplicação $S' \in L(E', F')$ tal que $\text{graf}(S') = \text{graf}(S)$.



Assim $\varphi' \circ \varphi^{-1}(S) = \pi_{F'} \circ \tilde{S} \circ (\pi_{E'} \circ \tilde{S})^{-1}$ é um difeomorfismo. Então satisfaz a propriedade 3 da Proposição A.1.

Assim $\text{Gr}_k(V)$ é uma variedade topológica e as mudanças de coordenadas são de classe C^∞ .

Vejamos que $\text{Gr}_k(V)$ tem base enumerável. Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Para cada $\alpha = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ sejam $E_\alpha = \text{ger} \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ e F_α o gerado pelos restantes. Vamos mostrar que U_{F_α} cobre $\text{Gr}_k(V)$. De fato, dado um $W \in \text{Gr}_k(V)$, seja $B' = \{w_1, \dots, w_k\}$ base de W , assim $\{w_1, \dots, w_k; v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto linearmente dependente pois possui $n + k$ elementos e $\dim V = n$. Pelo teorema do completamento de bases temos que existem índices $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ tal que $\{w_1, \dots, w_k; v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-k}}\}$ é uma base de V . Se chamamos $\alpha^c = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ e $F_{\alpha^c} = \text{ger} \{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-k}}\}$ logo assim $W \cap F_{\alpha^c} = \{0\}$ e então $W \in U_{F_\alpha}$. Portanto, devido ao Corolário A.1, $\text{Gr}_k(V)$ tem base enumerável pois a quantidade de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ com k elementos é finita, isto é, existe um número finito de conjuntos que cobrem $\text{Gr}_k(V)$.

Vejamos agora que $\text{Gr}_k(V)$ é um espaço de Hausdorff. Sejam $E, E' \in \text{Gr}_k(V)$ com $E \neq E'$ então existe um $F \leq V$ tal que $E \oplus F = E' \oplus F = V$, onde escolhermos F da seguinte forma: seja $\{w_1, \dots, w_r\}$ base de $E \cap E'$ então completamos até obter uma base de E , $\{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s\}$. Fazemos o mesmo para obter uma base de E' , $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$. Agora definimos $F = \text{ger} \{u_1 + v_1, \dots, u_s + v_s\}$ então assim $E \oplus F = E' \oplus F = V$. Logo $E, E' \in U_F$ e, portanto, pelo Corolário A.2 $\text{Gr}_k(V)$ é Hausdorff. Logo, pelo Teorema A.1, $\text{Gr}_k(V)$ é paracompacto e pela definição A.5 concluímos que $\text{Gr}_k(V)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ , chamada variedade de Grassmann dos subespaços de dimensão k em V .

Proposição 3.1. $\text{Gr}_k(V)$ é uma variedade compacta.

Demonstração. Seja $E \in \text{Gr}_k(V)$ e tomamos $\{e_1, \dots, e_k\}$ uma base ortonormal de E . Seja $S(V)$ o conjunto de todos os subespaços do V . Definimos

$$\begin{aligned} \delta : \iota(E, V) &\rightarrow \text{Gr}_k(V) \\ T &\mapsto \text{ger} (Te_1, \dots, Te_k), \end{aligned}$$

onde $\iota(E, V) = \{T : E \rightarrow V : T \text{ é linear é injetora} \}$.

E agora seja

$$\begin{aligned} \iota(E, V) &\xrightarrow{\psi} E \oplus V \xrightarrow{\pi_V} \text{Gr}_k(V) \\ T &\mapsto \text{graf}(T) \mapsto \pi_V(\text{graf}(T)) = \text{ger} \{Te_1, \dots, Te_k\}, \end{aligned}$$

onde $\delta = \pi_V \circ \psi$ é uma função contínua. Chamamos

$$O(E, V) = \{T \in L(E, V) : \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle \text{ para todo } u, v \in E\}.$$

Observação 3.1. $O(E, V) \subset \iota(E, V)$.

Sabemos que $O(E, V)$ é compacto (fechado e limitado). Vamos ver que $\delta(O(E, V)) = Gr_k(V)$. Com efeito, seja $T \in O(E, V) \Rightarrow \delta(T) = \text{ger } \{Te_1, \dots, Te_k\} \in Gr_k(V)$, agora seja $W \in Gr_k(V)$ com $\{v_1, \dots, v_k\}$ base ortonormal de W . Pelo teorema de existência de transformações lineares existe uma transformação T tal que

$$T : E \rightarrow V$$

$$e_j \mapsto Te_j = v_j.$$

Então $T \in O(E, V)$ e $\delta(T) = W$ e, portanto, $W \in \delta(O(E, V))$. Logo temos que $\delta(O(E, V)) = Gr_k(V)$ e, como δ é contínua e $O(E, V)$ é compacto, então $Gr_k(V)$ é compacto. \square

Na sequência, vamos considerar apenas o caso em que $V = \mathbb{R}^n$ e vamos denotar por $Gr_k(n) = Gr_k(\mathbb{R}^n)$.

Vamos ver agora que a dimensão da $Gr_k(n)$ é $k(n - k)$. Em efeito pois a dimensão de uma variedade depende da dimensão dos abertos associados para as cartas locais e, como já provamos no caso geral, estes abertos tem a mesma dimensão que $L(E, F)$, a qual é dada por $\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F$. Neste caso temos que E é um subespaço de dimensão k de \mathbb{R}^n então $\dim F = (n - k)$ e, portanto, $\dim Gr_k(n) = k(n - k)$.

Exemplo 3.2. $Gr_k(n) \simeq Gr_{n-k}(n)$ via o isomorfismo $E \mapsto E^\perp$. Para o caso $n = 3, k = 1$ $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq Gr_2(3) : \text{direções} \simeq \text{direções normais a um plano}$.

3.2 Representações Matriciais das Grassmannianas

Podemos representar a variedade Grassmanniana real por meio de um subconjunto de matrizes. Vamos chamar o espaço das matrizes reais $n \times n$ de $M(n)$ o qual tem dimensão n^2 . Seja $S(n) = \{x \in M(n) : x^T = x\}$ o espaço das matrizes simétricas o qual tem dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$. Considere o produto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^T y) \quad x, y \in M(n).$$

Lembre-se que o traço de uma matriz quadrada é a função matricial que associa a matriz a soma dos elementos da sua diagonal principal. Se $A = [a_{ij}]$ então $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \dots + a_{nn}$. O produto interno definido acima é chamado produto interno de Frobenius, é comutativo, não-negativo e bilinear. Tal produto nos leva a definir uma norma matricial $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ chamada norma de Frobenius. Para mais detalhes ver [9].

No caso em que $x, y \in S(n)$, temos que $\langle x, y \rangle = \text{tr}(xy)$ pois $x = x^T$.

3.2.1 Modelo Projecção

Uma primeira representação da Grassmanniana é obtida associando a cada subespaço $E \in \text{Gr}_k(n)$ a respectiva matriz da projecção ortogonal sobre E (para definição da projecção ortogonal sobre subespaços ver [9]).

Definição 3.2. *Seja $P = \{p \in S(n) : p^2 = p\}$ o conjunto das matrizes de projecção ortogonal. Vamos denotar por $P_k = \{p \in P : \text{posto}(p) = k\}$ o conjunto das projecções ortogonais de posto k .*

Segue que $P = \cup P_k$ onde a união é disjunta. Agora vamos mostrar que P_k é uma variedade difeomorfa a $\text{Gr}_k(n)$.

Proposição 3.2. *P_k é uma variedade que é difeomorfo a $\text{Gr}_k(n)$.*

Esboço da demonstração. Para mostrar que P_k é uma variedade, provemos que é uma subvariedade de $S(n)$. Definamos a função

$$\begin{aligned} H : S(n) &\longrightarrow S(n) \\ x &\longmapsto x^2 - x \end{aligned} \tag{3.4}$$

Segue que $H^{-1}(0)$ é exatamente o conjunto P . Agora, como P é a união disjunta de P_k , $k = 0, \dots, n$, sendo assim temos que P_k é subvariedade de $S(n)$ para cada k (para a prova, veja [4]).

Para provar que P_k é difeomorfo a $\text{Gr}_k(n)$. Fazemos o seguinte: Seja $E \in \text{Gr}_k(n)$ fixo. Definimos

$$\begin{aligned} \psi = \varphi^{-1} : L(E, E^\perp) &\longrightarrow \text{Gr}_k(n) \\ T &\longmapsto \text{graf}(T) \end{aligned}$$

a inversa da carta local associada a E tomando $U = L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ e pondo $E = Q\mathbb{R}^k$ com $Q \in O(n)$ (ver [9]). Definimos $T_Q = Q \circ T \circ Q^{-1}$ assim $T_Q \in L(E, E^\perp)$ e portanto

$$\begin{aligned} G : U &\longrightarrow L(E, E^\perp) \\ T &\longmapsto T_Q \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear.

Definamos

$$\begin{aligned} F : \text{Gr}_k(n) &\longrightarrow S(n) \\ E &\longmapsto [P_E] \end{aligned}$$

onde $[P_E]$ é a matriz de projecção ortogonal no subespaço E . Agora temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \xrightarrow{G} & L(E, E^\perp) & \xrightarrow{\psi} & \text{Gr}_k(n) & \xrightarrow{F} & S(n) \\
T & \longmapsto & T_Q & \longmapsto & \text{graf}(T_Q) & \longmapsto & [P_{\text{graf}(T_Q)}] \\
& & & & \tilde{F} & &
\end{array}$$

Observação 3.3. $[P_{\text{graf}(T_Q)}] = Q[P_{\text{graf}(T)}]Q^{-1}$

Assim \tilde{F} é um isomorfismo linear. Segue que $F'(E)$ existe e é injetora se, somente se, $\tilde{F}'(0)$ existe e é injetora. Para mostrar isso vamos a ver o seguinte:

1. Seja A uma matriz $n \times k$, $k < n$ de posto k . A matriz associada a projeção ortogonal no espaço gerado pelas colunas de A é dado por (veja [14])

$$P(A) = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Seja V uma matriz $n \times k$. Aplicando a regra do produto, regra da cadeia e a regra da derivada de inversa de matrizes, temos que

$$\begin{aligned}
P'(A)V &= V(A^T A)A^T + A[(A^T A)^{-1}]'A^T + A(A^T A)^{-1}V^T \\
&= V(A^T A)A^T - A(A^T A)^{-1}(V^T A + A^T V)(A^T A)^{-1}A^T + A(A^T A)^{-1}V^T.
\end{aligned}$$

Tome $A_0 = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$ matrizes por blocos onde I_k é a identidade $k \times k$ e v é uma matriz arbitrária $(n - k) \times k$.

Segue que

$$P(A_0)'V = VA_0^T + A_0V^T = \begin{bmatrix} 0 & V^T \\ V & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Definamos

$$\begin{aligned}
g : L(E, E^\perp) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times k} \\
T &\longmapsto g(T) = \begin{bmatrix} I_k \\ T \end{bmatrix} = A_T.
\end{aligned}$$

Temos que $g'(T)V = \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix}$.

Como o espaço gerado pelas colunas de $A_T = \text{graf}(T)$ então

$$\tilde{F}(T) = [P_{\text{graf}(T)}] = P(A_T) = P \circ g(T).$$

Segue que

$$\tilde{F}'(0)V = P'(g(0))g'(0)V = P'(A_0)V = \begin{bmatrix} 0 & V^T \\ V & 0 \end{bmatrix}$$

de onde concluímos que $\tilde{F}'(0)$ é injetora. Portanto $F : \text{Gr}_k(n) \rightarrow S(n)$ é um difeomorfismo local sobre sua imagem. \square

Esta forma de representar as Grassmannianas é chamado modelo-projeção.

Observação 3.4. *As projeções são equivariantes no sentido de que*

$$g[p_E]g^T = [p_gE] \quad (3.5)$$

para toda $g \in O(n)$ onde $O(n) = \{g \in M(n) : g^T = g^{-1}\}$ é o grupo das matrizes ortogonais.

Proposição 3.3. *Seja $p = p_E \in \text{Gr}_k(n)$. Então*

$$T_p\text{Gr}_k(n) = \{u \in S(n) : up = (1 - p)u\}.$$

Demonstração. Considere H definida por 3.4. O mapa tangente de H no ponto $p \in S(n)$ é

$$dH_p(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(p + tu) - H(p)}{t} = up - (1 - p)u.$$

Como $\text{Gr}_k(n) \subseteq H^{-1}(0)$ então

$$T_p\text{Gr}_k(n) \subseteq \ker dH_p = \{u \in S(n) : up = (1 - p)u\}.$$

Afirmamos que $\ker dH_p = \{u \in S(n) \mid up = (1 - p)u\}$ é isomorfo a $L(E; E^\perp)$, isto é, a função

$$\begin{aligned} \varphi : \{u \in S(n) \mid up = (1 - p)u\} &\longrightarrow L(E; E^\perp) \\ u &\longmapsto \varphi_u : E \longrightarrow E^\perp \\ v &\longmapsto \varphi_u(v) = uv \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, seja $u \in \ker dH_p$. Então

$$up = (1 - p)u = p^\perp u,$$

onde $p^\perp = p_{E^\perp}$ é a projeção ortogonal sobre o complementar ortogonal de E . Como $v = pv$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, temos que $uv = upv = p^\perp uv$, isto é, $uv \in E^\perp$.

Como $\dim L(E, E^\perp) = k(n - k)$, temos que $T_p\text{Gr}_k(n) = \ker dH_p = \{u \in S(n) : up = (1 - p)u\}$. \square

Observação 3.5. *Observe que se $p = p_E$ é a projeção ortogonal sobre E e p^\perp é a projeção ortogonal sobre E^\perp então $p + p^\perp = 1$. Logo $p^\perp = 1 - p$ e $p^\perp p = 0 = p^\perp p$.*

Proposição 3.4. *Sejam $x \in S(n)$ e $p = p_E \in \text{Gr}_k(n)$. A projeção ortogonal de x sobre $T_p\text{Gr}_k(n)$ é dada por*

$$x \mapsto pxp^\perp + p^\perp xp. \quad (3.6)$$

Demonstração. Afirmamos que $S(n)$ admite uma decomposição ortogonal

$$S(n) = \{u : up = p^\perp u\} \oplus \{u : pup^\perp = 0 = p^\perp up\}. \quad (3.7)$$

Com efeito, sejam $A = \{u : up = p^\perp u\}$ e $B = \{u : pup^\perp = 0 = p^\perp up\}$. Então

1. $A \cap B = \{0\}$. Seja $u \in A \cap B$.

$$\begin{aligned} (p^\perp u)p &= 0 \Rightarrow (up)p = up^2 = up = 0; \\ pup^\perp &= 0 \Rightarrow pu(1-p) = pu - pup = 0 \Rightarrow pu = 0; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$p^\perp(up) = 0 \Rightarrow (p^\perp)^2 u = 0 \Rightarrow p^\perp u = 0. \quad (3.9)$$

Logo $u = (p + p^\perp)u = pu + p^\perp u = 0$ pelas Equações 3.8 e 3.9.

2. $S(n) = A + B$. Seja $u \in S(n)$. Podemos decompor

$$u = (pup^\perp + p^\perp up) + [u - (pup^\perp + p^\perp up)].$$

É fácil verificar que $pup^\perp + p^\perp up \in A$ e $u - (pup^\perp + p^\perp up) = p^\perp u + up \in B$.

3. A e B são ortogonais. Seja $x \in A$ e $y \in B$. Então $xp = p^\perp x$ e $pyp^\perp = 0 = p^\perp yp$. Como $1 = p + p^\perp$ e pela comutatividade do traço, temos que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \text{tr}(xy) \\ &= \text{tr}(x(p + p^\perp)y(p + p^\perp)) \\ &= \text{tr}(xpy + xpy^\perp + xp^\perp y + xp^\perp y^\perp) \\ &= \text{tr}(p^\perp xpy + p^\perp y^\perp x) \\ &= \text{tr}(xypp^\perp + p^\perp yp^\perp x) \\ &= \text{tr}(p^\perp yxp) = \text{tr}(pp^\perp yx) = 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $pp^\perp = 0$. □

3.2.2 Modelo Reflexão

Uma maneira alternativa de se representar as Grassmannianas é associando a cada subespaço $E \in \text{Gr}_k(n)$ a respectiva matriz da reflexão por E . As demonstrações seguem os mesmos argumentos feitos na seção acima e serão apenas indicadas.

Definição 3.3. *Seja $R = \{x \in S(n) : x^2 = 1\}$ o conjunto das reflexões e onde 1 é a matriz identidade. Seja $R_k = \{x \in S(n) : x^2 = 1, I(x) = k\}$ onde $I(x)$ é o índice do ponto x que é dado pelo número de autovalores negativos da matriz x .*

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos mostrar que

Proposição 3.5. R_k é uma variedade que é difeomorfo a $\text{Gr}_k(n)$.

De maneira análoga, para provar que R_k é uma variedade, definimos a função

$$\begin{aligned} H : S(n) &\longrightarrow S(n) \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Temos que $R = H^{-1}(1)$ e que $R = \cup R_k$. Além disto, o difeomorfismo é dado por

$$\begin{aligned} G : \text{Gr}_k(n) &\longrightarrow R_k \\ E &\longmapsto [r_E] \end{aligned}$$

onde $r_E : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ denota a reflexão através do subespaço $E \leq \mathbb{R}^n$.

Este jeito de representar as Grassmanniana é chamado modelo-reflexão.

Proposição 3.6. Seja $r = r_E \in \text{Gr}_k(n)$. Então

$$T_r \text{Gr}_k(n) = \{u \in E : ru = -ur\}$$

Seja H definida por 3.10. O mapa tangente de H no ponto $r \in S(n)$ é

$$dH_r(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(r + tu) - h(r)}{t} = ur + ru$$

de onde temos que

$$\ker dH_r = \{u \in S(n) : ur + ru = 0\}.$$

Como $R_k = \text{Gr}_k(n) \subset H^{-1}(1)$, segue-se que

$$T_r \text{Gr}_k(n) \subseteq \ker dH_r = \{u \in S(n) : ur + ru = 0\}.$$

A igualdade é obtida comparando-se as dimensões.

Proposição 3.7. Sejam $x \in S(n)$ e $r = r_E \in \text{Gr}_k(n)$. A projeção ortogonal de x sobre $T_r \text{Gr}_k(n)$ é dada por

$$x \mapsto \frac{u - rur}{2} \quad (3.11)$$

Afirmamos que $S(n)$ admite uma decomposição ortogonal

$$S(n) = \{u : ru = -ur\} \oplus \{u : ru = ur\}.$$

Com efeito, sejam $A = \{u : ru = -ur\}$ e $B = \{u : ru = ur\}$. Vejamos que

1. $A \cap B = \{0\}$. Seja $u \in A \cap B$ então $ru = -ur$ e $ru = ur$. Logo $2ur = 0$ mas como $r \in R_k$, $r^2 = 1$. Temos que r é invertível e, portanto, $2ur = 0$ implica que $u = 0$.

2. $A + B = S(n)$. Seja um $u \in S(n)$ então podemos decompor

$$u = \frac{u - rur}{2} + \frac{u + rur}{2}.$$

É fácil ver que $\frac{u - rur}{2} \in A$ e $\frac{u + rur}{2} \in B$. Logo $A + B = S(n)$.

3. $B = A^\perp$. Seja $u \in A$ e $v \in B$. Vamos ver que $\langle u, v \rangle = 0$.

Como $u \in A$ então $ru = -ur$ e daí que $u = -rur$.

Como $u \in B$ então $rv = vr$ então $v = rvr$.

Agora $uv = -rurv = -rurrrvr = -ruvr$. Assim

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \text{tr}(uv) \\ &= \text{tr}(-ruvr) \\ &= \text{tr}(-uvr^2) \\ &= -\text{tr}(uv). \end{aligned}$$

Portanto $\text{tr}(uv) = 0$ e daí que $\langle u, v \rangle = 0$.

4 Funções de Morse em Grassmannianas

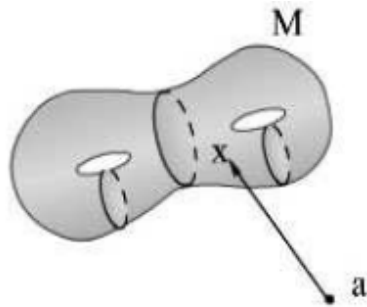
Neste capítulo vamos explorar duas funções de Morse sobre as variedades Grassmannianas, a saber, uma função do tipo distância e uma função do tipo altura. Veremos que tais funções estão associadas a cada uma das representações matriciais vistas no capítulo 3: a função distância ao modelo reflexão e a função altura ao modelo projeção. Para cada uma das funções, vamos estudar os pontos críticos e os índices dos mesmos. Veremos que no primeiro caso, os índices são obtidos de maneira explícita a partir do cálculo da matriz Hessiana. Já no segundo caso, os índices são obtidos a partir da descrição explícita das órbitas do fluxo do campo gradiente. A referência para o estudo das funções do tipo distância é o survey [3] enquanto as funções altura encontram-se no survey [5].

4.1 Função distância

Vamos assumir inicialmente que M é uma subvariedade em um espaço Euclidiano \mathbb{E} . Dado um ponto $a \in \mathbb{E}$ definimos a função

$$\begin{aligned} f_a : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - a\|^2 \end{aligned}$$

Figura 9 – Representação da função distância



Fonte: extraída de [3]

Esta é chamada de função distância sobre uma subvariedade Euclidiana M . Seja $\mathcal{C}(f_a)$ o conjunto dos pontos críticos de f_a .

Para um ponto $x \in M$, definimos o complemento ortogonal do plano tangente de M em x , $T_x M$, por

$$\gamma_x = \{v \in E : v \perp T_x M\}$$

o qual é chamado de plano normal a M em x . A Proposição abaixo caracteriza o conjunto $\mathcal{C}(f_a)$.

Proposição 4.1. *Seja $f_a : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida acima. Então*

$$\mathcal{C}(f_a) = \{x \in M : (x - a) \text{ é normal a } M \text{ em } x\}.$$

Demonstração. Considere a função

$$\begin{aligned} g_a : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - a\|^2 \end{aligned}$$

definida no espaço Euclidiano E . O campo gradiente de g_a é $(\nabla g_a)_x = 2(x - a)$. Desde que $f_a = g_a|_M$ para todo $x \in M$, segue que $(\nabla f_a)_x$ é a projeção ortogonal de $2(x - a)$ sobre $T_x M$. Assim se $x \in \mathcal{C}(f_a)$, isto é, $(\nabla f_a)_x = 0$ e isso é equivalente a $2(x - a) \perp T_x M$. Isto é o mesmo que $a - x \in \gamma_x$. \square

Observação 4.1. *Para quase todo $a \in E$, temos que f_a é uma função Morse. Para mais detalhes, ver [3], Lemma 3.1.*

Vamos agora considerar $M = \text{Gr}_k(n)$ e sua representação mediante o modelo-reflexão. Neste caso, M é uma subvariedade do espaço Euclidiano $S(n) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e, como já vimos no capítulo anterior, $\text{Gr}_k(n)$ pode ser identificado com $R_k = \{r \in S(n) : r^2 = 1, \text{índice}(r) = k\}$.

Sejam $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ uma sequência de números reais e fixe

$$a = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Para uma subsequência $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, denotamos por

$$\sigma_I = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

onde $\varepsilon_k = -1$ se $k \in I$ e $\varepsilon_k = 1$, caso contrário.

Vamos mostrar um teorema importante que nos fornece o índice dos pontos críticos e o conjunto de pontos críticos de forma explícita.

Teorema 4.2. *A função $f_a : \text{Gr}_k(n) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Morse. Além disso temos*

1. $\mathcal{C}(f_a) = \{\sigma_I \in \text{Gr}_k(n) : |I| \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ com } |I| = k\}$;
2. $\text{ind}_{f_a}(\sigma_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{1 \leq s \leq k} (i_s - s) = (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_k - k)$.

Para mostrar o teorema, vamos precisar do seguinte lema.

Lema 4.1. *Seja $r \in \text{Gr}_k(n)$. O plano normal a $\text{Gr}_k(n)$ em r é dado por*

$$\gamma_r \text{Gr}_k(n) = \{u \in S(n) : ru = ur\}.$$

Lembre, pela Proposição 3.6, que $T_r \text{Gr}_k(n) = \{u \in S(n) : ru = -ur\}$. O resultado segue como consequência da decomposição de $S(n)$ em soma direta de subespaços ortogonais como

$$S(n) = \{u : ru = -ur\} \oplus \{u : ru = ur\}.$$

Agora vamos provar a primeira parte do teorema. Seja $r \in \mathcal{C}(f_a)$ com índice k .

$$\begin{aligned} r \in \mathcal{C}(f_a) &\Leftrightarrow r - a \in \gamma_r \text{Gr}_k(n) \\ r - a \in \gamma_r \text{Gr}_k(n) &\Leftrightarrow (r - a)r = r(r - a) \quad \text{pelo Lema 4.1} \\ (r - a)r = r(r - a) &\Leftrightarrow ra = ar. \end{aligned}$$

Desde que a é uma matriz diagonal com seus valores na diagonal $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ e r comuta com a , temos que r é também uma matriz diagonal. Como $r^2 = I$ com $\text{ind}_{f_a}(x) = k$, temos que $r = \sigma_{i_1, \dots, i_k}$, para algum conjunto de índices $I = [i_1, \dots, i_k] \subseteq [1, \dots, n]$, com $|I| = k$. Isso mostra a inclusão a outra é imediata.

Para mostrar a segunda parte do teorema é necessário determinar a matriz hessiana.

Lema 4.2. *A matriz hessiana do operador f_a no ponto crítico r é dada por*

$$H_r(f_a)(u) = (ua - au)r.$$

Demonstração. Vista como uma função sobre o espaço Euclidiano $S(n)$, f_a tem campo gradiente $2(r - a)$. Portanto o campo gradiente da restrição $f_a|_{\text{Gr}_k}$ é a projeção ortogonal de $2(r - a)$ sobre $T_r \text{Gr}_k(n)$. Pela decomposição de $S(n)$ em soma direta, temos que qualquer $u \in S(n)$ se escreve como

$$u = \frac{u - rur}{2} + \frac{u + rur}{2}$$

com a primeira componente em $T_r \text{Gr}_k(n)$ e a segunda em $\gamma_r \text{Gr}_k(n)$. Aplicando isso no caso em que $u = 2(r - a)$ (que é o gradiente de f_a no ponto r), obtemos que

$$(\nabla f_a)_r = rar - a.$$

Finalmente o operador hessiano pode ser calculado mediante o limite do gradiente

$$H_r(f_a)(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\nabla f_a)_{r+tu} - (\nabla f_a)_r}{t}$$

com $u \in T_r \text{Gr}_k(n)$. Assim vamos obter que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\nabla f_a)_{r+tu} - (\nabla f_a)_r}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(r + tu)a(r + tu) - a - (rar - a)}{t} \\ &= uar + rau \\ &= uar + aru \quad (a \text{ é diagonal e } r \text{ é diagonal pois é ponto crítico}) \\ &= (ua - au)r \quad (u \text{ e } r \text{ anti-comutam em } T_r \text{Gr}_k(n)) \end{aligned}$$

Portanto obtemos que

$$H_r(f_a)(u) = (ua - au)r.$$

□

Vamos mostrar a segunda parte do teorema da acima. Uma base para o espaço vetorial das matrizes simétricas $S(n)$ é

$$\{b_{s,t} : 1 \leq s, t \leq n\}$$

onde $b_{s,t}$ é a matriz que tem como entrada 1 nas posições (s, t) e (t, s) e 0 em outros casos.

Por exemplo, no caso $n = 2$, temos que a base para $S(2)$ é:

$$\{b_{1,1}, b_{1,2} = b_{2,1}, b_{2,2}\}$$

$$\text{onde } b_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = b_{2,1}, \text{ e } b_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $r_0 = \sigma_I \in \mathcal{C}(f_a)$, a Proposição 3.6 afirma que os $b_{s,t}$ que anti-comutam com r_0 pertencem a $T_{r_0} \text{Gr}_k(n)$. Neste caso, afirmamos que

$$T_{r_0} \text{Gr}_k(n) = \text{ger } \{b_{s,t} : (s, t) \in I \times J\}$$

onde J é o complemento do I em $[1, \dots, n]$. De fato, seja:

$$e_{s,t} : e_t \rightarrow e_s \text{ e outros vetores } \rightarrow 0$$

a aplicação que leva o vetor e_t (t -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n) em e_s (s -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n) e zero a outros vetores. Então

$$r_0 e_{s,t} : e_t \rightarrow \varepsilon_s e_s \Rightarrow r_0 e_{s,t} = \varepsilon_s e_{s,t}$$

$$e_{s,t} r_0 : e_t \rightarrow \varepsilon_t e_t \Rightarrow e_{s,t} r_0 = \varepsilon_t e_{s,t}.$$

Como $b_{s,t} = e_{s,t} + e_{t,s}$, temos que

$$r_0 b_{s,t} = \varepsilon_s e_{s,t} + \varepsilon_t e_{t,s}$$

$$b_{s,t} r_0 = \varepsilon_t e_{s,t} + \varepsilon_s e_{t,s}.$$

Logo

$$r_0 b_{s,t} + b_{s,t} r_0 = (\varepsilon_s + \varepsilon_t) b_{s,t}.$$

Seja $v \in T_{r_0} \text{Gr}_k(n)$ então $r_0 v + v r_0 = 0$ e sendo $v = \sum v_{s,t} b_{s,t}$ segue que

$$r_0 v + v r_0 = \sum v_{s,t} (\varepsilon_s + \varepsilon_t) b_{s,t} = 0.$$

Como $b_{s,t} \neq 0$ concluímos que $\varepsilon_s + \varepsilon_t = 0$ pois é base. Portanto v é combinação linear de $b_{s,t}$ que anti-comutam com r_0 . Além disso $\varepsilon_s + \varepsilon_t = 0$ e $b_{s,t} = b_{t,s}$ então podemos escolher $i \in I$ e $t \in J$.

Aplicando o operador Hessiano na base $b_{s,t}$ obtemos que

$$H_{r_0}(f_a)(b_{s,t}) = (\lambda_t - \lambda_s) b_{s,t}.$$

Assim os $b_{s,t} \in T_{r_0} \text{Gr}_k(n)$ são precisamente os autovetores para operador $H_{r_0}(f_a)$. Em particular, vemos que f_a é não-degenerada em $r_0 \in \mathcal{C}(f_a)$ e, portanto, f_a é de fato uma função de Morse.

Segue-se que os autovalores negativos serão aqueles tais que $t < s$. Então o espaço negativo associado a $H_{r_0}(f_a)$ é gerado pelo $\{b_{s,t} : (s,t) \in I \times J, t < s\}$. Consequentemente

$$\text{ind}_{f_a}(\sigma_I) = \#\{(s,t) \in I \times J, t < s\} = \sum_{1 \leq s \leq k} (i_s - s).$$

Exemplo 4.3. Vamos fazer a decomposição celular de $\mathbb{R}P^2 = \text{Gr}_1(3)$. Pelo Teorema 3.1 $\mathbb{R}P^2$ é compacta e, pela observação 4.1,

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - a\|^2 \end{aligned}$$

é uma função Morse. Além disso, pelo Teorema 4.2 o conjunto dos pontos críticos é dado por

$$\mathcal{C}(f_a) = \{\sigma_I \in \mathbb{R}P^2 : |I| \subseteq \{1, 2, 3\} \text{ com } |I| = 1\}.$$

Então temos

$$\mathcal{C}(f_a) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

Usando a fórmula para calcular os índices pelo Teorema 4.2 obtemos

$$(a) \text{ ind}_{f_a}(\sigma_1) = 0; \quad i_1 = 1 : \quad i_1 - 1 = 0$$

$$(b) \text{ ind}_{f_a}(\sigma_2) = 1; \quad i_1 = 2 : \quad i_1 - 1 = 1$$

$$(c) \text{ ind}_{f_a}(\sigma_3) = 2; \quad i_1 = 3 : \quad i_1 - 1 = 2$$

Logo pelo teorema 2.11, $\mathbb{R}P^2$ tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo cujas células tem a dimensão dos pontos críticos. Portanto

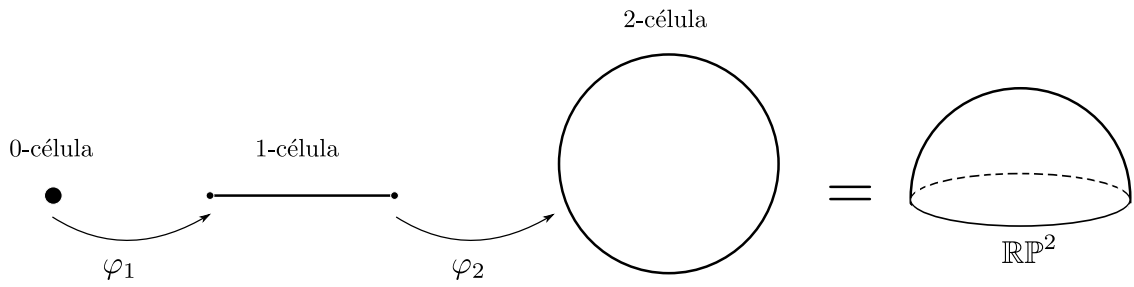
$$\mathbb{R}P^2 \simeq e^0 \amalg_{\varphi_1} e^1 \amalg_{\varphi_2} e^2$$

como se vê no seguinte desenho

4.2 Função Altura

Vamos assumir inicialmente que M é uma subvariedade em um espaço euclidiano \mathbb{E} . Dado um ponto $a \in \mathbb{E}$ definimos um funcional linear

$$\begin{aligned} h_a : \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, a \rangle \end{aligned}$$

Figura 10 – Decomposição de \mathbb{RP}^2 

Esta é chamada de função altura relativa ao ponto a . Daqui em diante, vamos considerar $\mathbb{E} = S(n)$ o espaço das matrizes reais simétricas.

Podemos obter uma função de Morse do tipo altura sobre a variedade Grassmanniana $M = \text{Gr}_k(n)$ considerando-se a restrição $g = h_a|_{\text{Gr}_k(n)}$ de h_a à Grassmanniana. Neste contexto, vamos identificar $\text{Gr}_k(n)$ via modelo-projeção, isto é, através da função

$$\begin{aligned} F : \text{Gr}_k(n) &\longrightarrow S(n) \\ E &\longmapsto [pE] \end{aligned}$$

que é um difeomorfismo sobre a imagem $P_k = \{p \in S(n) : p^2 = p, \text{ posto}(p) = k\}$ vista no capítulo 3.

Seja $x \in M$. O gradiente de h_a em x é constante igual a a , isto é,

$$\nabla(h_a)_x = a.$$

Com efeito, sabemos que $d(h_a)_x(u) = \langle \nabla(h_a)_x, u \rangle$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(h_a)_x(u) &= \frac{d}{dt} h_a(x + tu)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle x + tu, a \rangle|_{t=0} \\ &= \langle u, a \rangle. \end{aligned}$$

Logo $\langle \nabla(h_a)_x, u \rangle = \langle a, u \rangle$, para todo $u \in T_x M$. Assim concluímos que $\nabla(h_a)_x = a$.

Agora, seja $p \in \text{Gr}_k(n)$. Queremos encontrar o gradiente de g em p . Como g é a restrição do funcional linear h_a sobre a Grassmanniana, para calcular ∇g_p temos que projetar $\nabla(h_a)_p = a$ sobre o espaço tangente $T_p \text{Gr}_k(n)$. Aqui, aplicamos a Proposição 3.4 que fornece a fórmula da projeção ortogonal sobre $T_p \text{Gr}_k(n)$ para obter a seguinte proposição.

Proposição 4.2. *Seja $p \in \text{Gr}_k(n)$. O gradiente de g em p é dado por*

$$\nabla g_p = pap^\perp + p^\perp ap. \quad (4.1)$$

Sejam $0 < \lambda_n < \dots < \lambda_1$ uma seqüência de números reais e fixe

$$a = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{E}.$$

Para uma subsequência $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, denotamos por $\tau_I \in \mathbb{E}$ ao ponto

$$\tau_I = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

onde $\varepsilon_k = 1$ se $k \in I$ e $\varepsilon_k = 0$, caso contrário.

Vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 4.4. *Seja $g : \text{Gr}_k(n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida acima. Então g é uma função Morse e o conjunto dos pontos críticos de g é $\mathcal{C}(g) = \{\tau_I \in M : |I| \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ com } |I| = k\}$.*

Um ponto $p \in \text{Gr}_k(n)$ é crítico se e somente se $\nabla g_p = 0$. Pela Equação 4.1, isto acontece, se e somente se $pap^\perp + p^\perp ap = 0$, o que é equivalente, pela decomposição 3.7, a $pap^\perp = 0$ e $p^\perp ap = 0$. Estas duas equações determinam o conjunto $\mathcal{C}(g)$.

Observação 4.5. *Vamos chamar $E_i = \mathbb{R}e_i$ ao subespaço linear gerado pelo i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n .*

Observação 4.6. *Lembrando que $p = p_E$ para algum subespaço E , $p = p_E$ é um ponto crítico se e somente se E é da forma $E_I = E_{i_1} \oplus \dots \oplus E_{i_k}$. De fato, temos as seguintes equivalências:*

$$p_E^\perp ap_E = 0 \Leftrightarrow aE = E \Leftrightarrow E = E_I \text{ pois é soma de autoespaços de } a$$

Portanto:

$$p_E^\perp ap_E = 0 \Leftrightarrow p_E = p_{E_I} = \tau_I.$$

Como a é simétrica, temos que a condição

$$pap^\perp = 0 \Leftrightarrow aE^\perp = E^\perp$$

segue imediatamente pois para a simétrica, $aE = E \Rightarrow aE^\perp = E^\perp$.

Vamos determinar as curvas integrais do campo gradiente $-\nabla g$ em $\text{Gr}_k(n)$.

Teorema 4.7. *A curva integral γ de $-\nabla g$ por $E \in \text{Gr}_k(n)$ é dada por*

$$\gamma(t) = \text{diag}(e^{-\lambda_1 t}, \dots, e^{-\lambda_n t})E = e^{-tA}E.$$

Observação 4.8. *Na demonstração abaixo, vamos adotar a seguinte notação:*

- A denota a matriz diagonal a ;

- P e P^\perp denotam a projeção $p = p_E$ e $p^\perp = p_{E^\perp}$ com relação aos subespaços E e E^\perp ;
- a notação $[p_F]$ será mantida para indicar a matriz da projeção com relação a um subespaço F qualquer.

Demonstração. A ideia para encontrar as curvas integrais $\gamma(t)$ é a seguinte. Lembre-se que

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= -A\phi(t) \\ \phi(0) &= E\end{aligned}$$

é um sistema de EDO que tem como solução $\phi(t) = e^{-tA}E$. Vamos mostrar que $\phi(t)$ é solução do seguinte sistema de EDO

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= -\nabla g(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= E\end{aligned}$$

e, portanto, pelo teorema de existência e unicidade vamos obter que $\gamma(t) = \phi(t) = e^{-tA}E$.

Agora escreveremos $e^{-tA} = Q_t R_t$ onde Q_t é uma matriz ortogonal e R_t é matriz invertível tal que $R_t E = E$ (esta decomposição, chamada de decomposição QR , está associada ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt). A estratégia aqui consiste em, através da identificação de $e^{-tA}E$ com sua respectiva matriz de projeção $[p_{e^{-tA}E}]$, fazer o cálculo da derivada via derivada de aplicações. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{d}{dt}([p_{e^{-tA}E}]) \\ &= \frac{d}{dt}([p_{Q_t E}]) \\ &= \frac{d}{dt}Q_t [p_E] Q_t^{-1} \quad (\text{pela equivariância, Equação (3.5)}) \\ &= \frac{d}{dt}Q_t P Q_t^{-1}\end{aligned}$$

Lembre-se que $Q_t^{-1}Q_t = I$ então:

$$\left[\frac{d}{dt}Q_t^{-1} \right] Q_t = -Q_t^{-1} \left[\frac{d}{dt}Q_t \right]$$

Portanto $\frac{d}{dt}Q_t^{-1} = -Q_t^{-1}Q_t'Q_t^{-1}$ (escrevemos Q_t' em lugar de $\frac{d}{dt}Q_t$ para facilitar as contas). Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q_t P Q_t^{-1} &= Q_t' P Q_t^{-1} - Q_t P Q_t^{-1} Q_t' Q_t^{-1} \\ &= Q_t (Q_t^{-1} Q_t' P - P Q_t^{-1} Q_t') Q_t^{-1} \\ &= Q_t [(P + P^\perp) Q_t^{-1} Q_t' P - P Q_t^{-1} Q_t' (P + P^\perp)] Q_t^{-1} \\ &= Q_t (P^\perp Q_t^{-1} Q_t' P - P Q_t^{-1} Q_t' P^\perp) Q_t^{-1}\end{aligned} \tag{4.2}$$

Agora, pela identidade

$$-A = \left[\frac{d}{dt}(e^{-tA}) \right] (e^{-tA})^{-1} = \left[\frac{d}{dt}(Q_t R_t) \right] (Q_t R_t)^{-1}$$

obtemos o seguinte usando a regra da cadeia

$$\begin{aligned} (Q_t' R_t + Q_t R_t')(R_t^{-1} Q_t^{-1}) &= -A \\ Q_t' Q_t^{-1} + Q_t R_t' R_t^{-1} Q_t^{-1} &= -A \\ Q_t' + Q_t R_t' R_t^{-1} &= -A Q_t \\ Q_t^{-1} Q_t' + R_t' R_t^{-1} &= -Q_t^{-1} A Q_t \\ Q_t^{-1} Q_t' &= -Q_t^{-1} A Q_t - R_t' R_t^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como R_t é triangular superior então R_t^{-1} e R_t' são triangulares superior então $R_t' R_t^{-1}$ é triangular superior. Portanto $R_t' R_t^{-1} E = E \Rightarrow P^\perp R_t' R_t^{-1} P = 0$

Usando isto na Equação 4.3, obtemos

$$P^\perp Q_t^{-1} Q_t' P = -P^\perp Q_t^{-1} A Q_t P$$

e assim o primeiro termo de 4.2 é igual a

$$\begin{aligned} Q_t(P^\perp Q_t^{-1} Q_t' P) Q_t^{-1} &= Q_t(-P^\perp Q_t^{-1} A Q_t P) Q_t^{-1} \\ &= Q_t(-[p_{E^\perp}] Q_t^{-1} A Q_t [p_E]) Q_t^{-1} \\ &= -[p_{Q_t E^\perp}] A [p_{Q_t E}] \quad (\text{pela equivariância, Equação (3.5)}) \end{aligned}$$

Analogamente para encontrar o segundo termo de 4.2, usaremos

$$e^{-tA} = (e^{-tA})^T = R_t^T Q_t^T = U_t Q_t^{-1}$$

onde $U_t = R_t^T$ e pela identidade

$$-A = (e^{-tA})^{-1} \left[\frac{d}{dt}(e^{-tA}) \right] = U_t Q_t^{-1} \left[\frac{d}{dt}(U_t Q_t^{-1}) \right]$$

obtemos o seguinte usando a regra da cadeia:

$$Q_t^{-1} Q_t' = Q_t^{-1} A Q_t + U_t^{-1} U_t' \quad (4.4)$$

Como U_t é triangular inferior então U_t^{-1} e U_t' são triangulares inferior então $U_t' U_t^{-1}$ é triangular inferior. Portanto $U_t' U_t^{-1} E^\perp = E^\perp \Rightarrow P U_t^{-1} U_t' P^\perp = 0$ Usando isso na equação 4.4 obtemos

$$P Q_t^{-1} Q_t' P^\perp = P Q_t^{-1} A Q_t P^\perp$$

Portanto o segundo termo da Equação 4.2 é

$$\begin{aligned} -Q_t(P Q_t^{-1} A Q_t P^\perp) Q_t^{-1} &= Q_t([p_E] Q_t^{-1} A U_t [p_{E^\perp}]) Q_t^{-1} \\ &= [p_{Q_t E}] A [p_{Q_t E^\perp}] \quad (\text{pela equivariância, Equação (3.5)}) \end{aligned}$$

e obtemos que

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= (-[p_{Q_t E}]A[p_{Q_t E}] - [p_{Q_t E}]A[p_{Q_t E^\perp}]) \\ &= -\nabla g(e^{-tA}E) \quad (\text{pela Proposição 4.2}) \\ &= -\nabla g(\phi(t)).\end{aligned}$$

Assim $\phi(t)$ satisfaz o sistema e pela unicidade da solução temos que

$$\phi(t) = \gamma(t) = e^{-tA}E.$$

□

Resta-nos ainda provar que g é uma função de Morse. Isto será feito através da descrição explícita das variedades estáveis e instáveis dos pontos críticos. O Teorema 4.7 permite que se obtenham tais variedades estáveis e instáveis associadas ao fluxo do campo gradiente. Lembramos que se p é um ponto crítico então

- $S(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_t(x) = p\}$ é a variedade estável.
- $U(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_t(x) = p\}$ é a variedade instável.

Vamos agora analisar dois casos.

- Considere o caso em que $k = 1$. A Grassmanniana de espaços unidimensionais é o espaço projetivo: $\text{Gr}_k(n) = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$.

Tome

$$E = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = [x] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$$

Segue que

$$[p_E] = \frac{xx^T}{\|x\|^2}$$

Com efeito:

$$\frac{xx^T}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\|x\|^2} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdot & \cdot & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdot & \cdot & x_2x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdot & \cdot & x_n^2 \end{bmatrix}$$

segue que $x_n = \cdots = x_{i+1} = 0$ (pois $(\lambda_i - \lambda_{i+1}), \dots, (\lambda_i - \lambda_n) > 0$). Além disso vemos que $x_i \neq 0$. Portanto

$$[x] \in \left\{ \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ com } * \in \mathbb{R} \right\}.$$

Além disso temos que $\dim S(L_i) = i - 1$.

Similarmente, temos

$$U(L_i) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \text{ com } * \in \mathbb{R} \right\}.$$

com $\dim U(L_i) = n - i$.

Exemplo 4.9. No caso $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ temos que os pontos críticos são $L_1 = [(1, 0)]$ e $L_2 = [(0, 1)]$ e suas respectivas variedades estáveis e instáveis são

$$S(L_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U(L_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ * \end{pmatrix}, \text{ com } * \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S(L_2) = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } * \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U(L_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

como vemos no seguinte desenho.

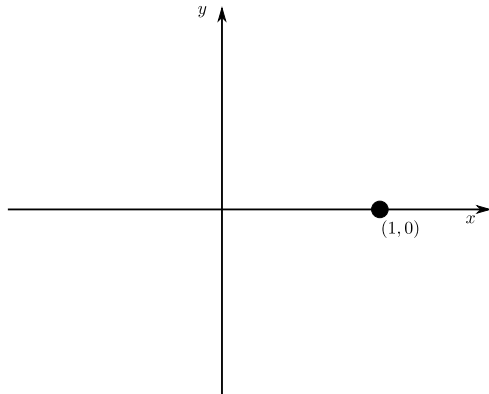
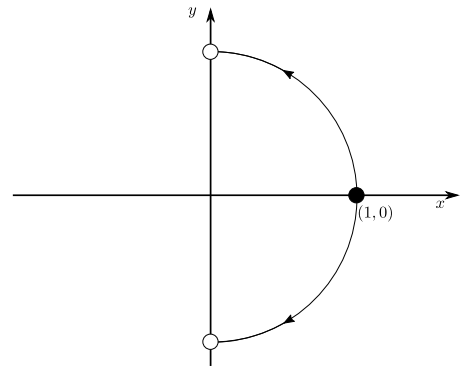
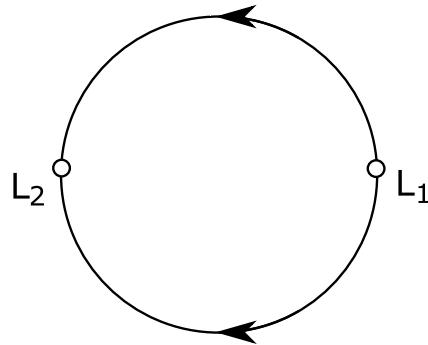
Figura 11 – Variedade estável $S(L_1)$ Figura 12 – Variedade instável $U(L_1)$ 

Figura 13 – Representação do fluxo



- Caso geral. Usaremos uma notação similar para o caso geral $\text{Gr}_k(n)$.

Primeiro representaremos os pontos críticos $E_I = E_{i_1} \oplus \cdots \oplus E_{i_k}$ (como já vimos no teorema 4.4) pela matriz $n \times k$:

$$\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ E_{i_1} & \cdots & E_{i_k} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Isso quer dizer que é o espaço gerado pelas colunas dessa matriz. Por exemplo, no caso $n = 4, k = 2$, isto é, $\text{Gr}_2(4)$. O subespaço $E_I = E_{i_1} \oplus E_{i_2}$ é um ponto crítico para quaisquer $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$. Assim tomemos $i_1 = 2$ e $i_2 = 4$ e lembre-se que

$E_{i_1} = \mathbb{R} \cdot e_2$ e $E_{i_2} = \mathbb{R} \cdot e_4$. Portanto

$$E_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} \cdot e_2 \oplus \mathbb{R} \cdot e_4 = \{(0, x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Agora vamos calcular as variedades estáveis e instáveis no caso geral. Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ \vdots & \vdots \\ * & \vdots \\ 1 & \vdots \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Mas qualquer matriz $n \times k$ de posto k pode ser vista em sua forma escalonada ver [9]

$$\begin{bmatrix} * & * \\ \vdots & \vdots \\ * & \vdots \\ 1 & \vdots \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante operações elementares de linhas e colunas obtemos a variedade estável $S(E_I)$ de E_I . Agora, um elemento de $S(E_I)$ pode ser representado por mais de uma matriz em forma escalonada. Para obter uma única representação, devemos trazer a matriz para forma escalonada reduzida, para que ela fique assim

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & * \\ & & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \dim S_{E_I} &= (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + (i_3 - 3) + \cdots + (i_k - k) \\ &= \sum i_t - \frac{1}{2}k(k+1). \end{aligned}$$

A variedade $S(E_I)$ pode ser identificada com um espaço vetorial real ou célula desta dimensão. Há uma descrição semelhante da variedade instável $U(E_I)$. Temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^{-a_1 t} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{-a_n t} & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ * & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 & \\ \vdots & & & * & \\ \vdots & & & \vdots & \\ * & & & * & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Disto obtemos uma descrição reduzida de $U(E_I)$, por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ * & * & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ * & * & * & & \\ * & * & * & & \end{pmatrix}$$

Esta variedade é difeomorfa ao espaço vetorial real cuja dimensão é

$$\begin{aligned} \dim U(E_I) &= (n - (i_1 - 1) - k) + (n - (i_2 - 1) - (k - 1)) + \dots + (n - (i_k - 1) - 1) \\ &= k(n - k) - \dim S(E_I) \\ &= \dim \text{Gr}_k(n) - \dim S(E_I). \end{aligned}$$

Essa identificação da variedade estável e instável leva a uma prova do teorema para o caso geral k , como no caso $k = 1$, pois vemos que a soma das dimensões das variedades estável e instável de um determinado ponto crítico coincide com a dimensão da Grassmanniana e, portanto, pelo Lema C.4 temos que todos os pontos críticos são não degenerados. Logo g é uma função de Morse. Note que o índice dos pontos críticos coincide com a dimensão da variedade instável.

4.3 Variedades de Schubert

Nesta seção vamos descrever explicitamente a variedade estável $S(E_I)$ de um ponto crítico $E_I = E_{i_1} \oplus \cdots \oplus E_{i_k}$ da função $g : \text{Gr}_k(n) \rightarrow \mathbb{R}$ que é da forma, por exemplo

$$S(E_I) = \left\{ E = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & * \\ & & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gr}_k(n) : * \in \mathbb{R} \right\}$$

Note que os subespaços E_I são caracterizados geometricamente pelas seguintes condições

$$\dim E_I \cap \mathbb{R}^i = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq i \leq i_1 - 1; \\ 1, & \text{se } i_1 \leq i \leq i_2 - 1; \\ \dots & \\ k, & \text{se } i_k \leq i \leq n, \end{cases}$$

onde $\mathbb{R}^i = \text{ger} \{e_1, \dots, e_i\}$ é o subespaço vetorial gerado pelos primeiros i vetores canônicos de \mathbb{R}^n .

Exemplo 4.10. No caso $\text{Gr}_2(4)$, seja $E_I = E_{i_1} \oplus E_{i_2}$ com $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$ um ponto crítico, de acordo com o Teorema 4.4. Em particular, tome $i_1 = 2$ e $i_2 = 4$. Então

$$E_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 \oplus E_4 = \mathbb{R} \cdot e_2 \oplus \mathbb{R} \cdot e_4 = \{(0, x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Assim temos

1. $E_I \cap \mathbb{R}^1 = \{(0, x, 0, y)\} \cap \{(z, 0, 0, 0) : z \in \mathbb{R}\} = \{0\} \Rightarrow \dim E_I \cap \mathbb{R}^1 = 0.$
2. $E_I \cap \mathbb{R}^2 = \{(0, x, 0, y)\} \cap \{(z_1, z_2, 0, 0)\} = \text{ger} \{e_2\} \Rightarrow \dim E_I \cap \mathbb{R}^2 = 1.$
3. $E_I \cap \mathbb{R}^3 = \{(0, x, 0, y)\} \cap \{(z_1, z_2, z_3, 0)\} = \text{ger} \{e_2\} \Rightarrow \dim E_I \cap \mathbb{R}^3 = 1.$
4. $E_I \cap \mathbb{R}^4 = \text{ger} \{e_2, e_4\} \Rightarrow \dim E_I \cap \mathbb{R}^4 = 2.$

Assim temos que

$$\dim E_I \cap \mathbb{R}^i = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq i \leq i_1 - 1; \\ 1, & \text{se } i_1 \leq i \leq i_2 - 1; \\ 2, & \text{se } i_2 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

Em outras palavras temos

$$S(E_I) = \{E \in \text{Gr}_k(n) : \dim E \cap \mathbb{R}^i = \dim E_I \cap \mathbb{R}^i \text{ para todo } i\}.$$

A condição $\dim E_I \cap \mathbb{R}^i$ é chamada condição de Schubert. Ela pode ser especificada pela lista $v_i = \dim E_I \cap \mathbb{R}^i$, isto é:

$$v_1 = \dots = v_{i_1-1} = 0, \quad v_{i_1} = \dots = v_{i_2-1} = 1, \dots, v_{i_k} = \dots = v_n = k.$$

Ou ainda, listando aqueles i tais que $\dim E_I \cap \mathbb{R}^i = \dim E_I \cap \mathbb{R}^{i-1} + 1$, isto é:

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

A k -tupla $\mathbf{I} = (i_1, \dots, i_k)$ é referida como símbolo de Schubert e o conjunto $S(E_I)$ é chamado célula de Schubert associada a \mathbf{I} . Usaremos a seguinte notação $S_{\mathbf{I}} = S(E_I)$.

Exemplo 4.11. Para a função Morse $f : \text{Gr}_2(4) \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre $\text{Gr}_2(4)$, existem 6 células de Schubert. Fornecemos a representação matricial abaixo seguida da sequência $\dim E_I \cap \mathbb{R}, \dots, \dim E_I \cap \mathbb{R}^4$, o símbolo de Schubert e a dimensão da célula.

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0, 0, 1, 2 \quad (3, 4) \quad \dim_{\mathbb{R}} = 4$$

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0, 1, 1, 2 \quad (2, 4) \quad \dim_{\mathbb{R}} = 3$$

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0, 1, 2, 2 \quad (2, 3) \quad \dim_{\mathbb{R}} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1, 1, 1, 2 \quad (1, 4) \quad \dim_{\mathbb{R}} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1, 1, 2, 2 \quad (1, 3) \quad \dim_{\mathbb{R}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1, 2, 2, 2 \quad (1, 2) \quad \dim_{\mathbb{R}} = 0$$

Definição 4.1. A célula de Schubert $X_{\mathbf{I}}$ associada ao símbolo Schubert \mathbf{I} é o fecho de $S_{\mathbf{I}}$ (com respeito à topologia usual de $\text{Gr}_k(n)$), isto é:

$$X_{\mathbf{I}} = \overline{S_{\mathbf{I}}} = \{E \in \text{Gr}_k(n) : \dim E \cap \mathbb{R}^i \geq v_i \text{ para todo } i\}.$$

Por exemplo, no caso $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$, temos que

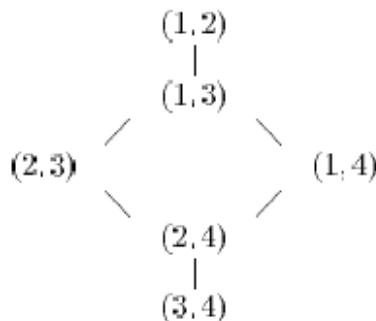
$$X_{(2,4)} = \{E \in \text{Gr}_2(4) : \dim E \cap \mathbb{R}^2 \geq 1\}$$

(pois v_i s são dados por $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 1, 1, 2)$ mas as condições $\dim E \cap \mathbb{R} \geq 0$, $\dim E \cap \mathbb{R}^3 \geq 1$, $\dim E \cap \mathbb{R}^4 \geq 2$ são automaticamente satisfeitas). Observe que

$$X_{(2,4)} = S_{(2,4)} \cup S_{(2,3)} \cup S_{(1,4)} \cup S_{(1,3)} \cup S_{(1,2)}.$$

Fica claro a partir da definição que, em geral, $X_{\mathbf{I}}$ é a união disjunta de células Schubert. Isso dá origem a uma ordem parcial no conjunto dos símbolos de Schubert: definimos $\mathbf{I}_1 \leq \mathbf{I}_2$ se e somente se $\overline{S_{\mathbf{I}_1}} \supseteq \overline{S_{\mathbf{I}_2}}$.

No caso de $\text{Gr}_2(4)$ a ordem parcial é representada pelo seguinte diagrama.



REFERÊNCIAS

- [1] BOTT, R., *Morse theory indomitable*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 68, p. 99-114, 1988.
- [2] CAICEDO, J. P.. *Morse homology*. Trabajo de Tesis. Uniandes, Bogotá, 2007.
- [3] DUAN, H. Morse functions and cohomology of homogeneous spaces. En *Topics in cohomological studies of algebraic varieties*. Birkhäuser Basel, p. 105-133, 2005.
- [4] ESCHENBURG, J.-H., *Lecture Notes on Symmetric Spaces*: <http://myweb.rz.uni-augsburg.de/eschenbu/symspace.pdf>
- [5] GUEST, M. Morse theory in the 1990's. *arXiv preprint math/0104155*, 2001.
- [6] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University , 2002.
- [7] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York Springer , 2003.
- [8] LIMA, E.L. *Introdução à topologia diferencial*. Rio de Janeiro: Instituto de matemática pura e aplicada, 1999.
- [9] LIMA, E.L. *Geometria analítica y álgebra lineal*. Lima: IMCA, 2004.
- [10] LIMA, E .L. *Introdução às variedades diferenciáveis*. Rio de Janeiro: Editôra Meridional Emma, 1960.
- [11] MILNOR, J. *Morse Theory* New Jersey: Princeton University Press, 1963.
- [12] MINIAN, E.G. *Notas de Topologia Algebraica*. Universidad Nacional de Córdoba, Fa. MAF, 2004.
- [13] MUNKRES, J. R. *Elementary differential topology*. Princeton University Press, 1966.
- [14] SEBER, G. A.F.; LEE, A. J. *Linear regression analysis*. John Wiley & Sons, 2012.
- [15] SOTOMAYOR, J.L., *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

APÊNDICE A – Variedades Diferenciáveis

A noção de variedade como um espaço que é uma colagem de a um aberto de um espaço vetorial e onde podemos estender as noções do cálculo diferenciável já aparecia nos trabalhos de Carl Friedrich Gauss e Bernhard Riemann. A definição que utilizaremos é devida a Whitney. As principais referências são os livros do Lee [7] e [10].

A.1 Variedades Diferenciáveis

Definição A.1. *Seja M um espaço topológico, se diz que M é uma variedade topológica de dimensão m quando para todo $p \in M$, existem abertos $U \subset M$, com $p \in U$ e $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e um homeomorfismo*

$$\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$$

chamado sistema de coordenada ou carta coordenada.

Definição A.2. *Uma variedade topológica M é chamada de Hausdorff se para todo p e $q \in M$ com $p \neq q$ existem U e V abertos com $p \in U$ e $q \in V$ tais que $U \cap V = \emptyset$.*

Teorema A.1. *Seja M uma variedade topológica Hausdorff. Então são equivalentes:*

1. M é paracompacto.
2. M tem base enumerável.

Definição A.3. *Um atlas em M é uma coleção $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i\}_{i \in I}$ de homeomorfismos, chamados cartas locais de M onde $U_i \subset M$ é aberto e $\cup_{i \in I} U_i = M$. Os homeomorfismos*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_i \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_j$$

são chamadas mudanças de coordenadas. Um atlas é de classe C^r com $0 \leq r \leq \infty$ se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe C^r .

Na coleção de todos os atlas de classe C^r em M temos uma relação de ordem parcial dado pela inclusão, $A \subset B$ se toda carta local do atlas A for também uma carta local de B . Um atlas A é maximal se para todo atlas B de classe C^r com $A \subset B$ vale $B = A$.

Definição A.4. *Uma estrutura diferenciável de classe C^r em M é um atlas C^r maximal.*

Definição A.5. *Uma variedade diferenciável de classe C^r é um par (M, D) onde*

1. M é variedade topológica de Hausdorff e paracompacto; e
2. D é uma estrutura diferenciável de classe C^r em M .

Teorema A.2. *Seja M uma variedade topológica de Hausdorff e seja A um atlas C^r em M , então existe uma única estrutura diferenciável D de classe C^r em M tal que $A \subset D$.*

Proposição A.1. *Seja X um conjunto e $A = \{\varphi : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi \text{ injetora}\}$ com as seguintes propriedades :*

- 1 Para todo (U, φ) , $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.
- 2 Os domínios U cobrem X .
- 3 Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in A$ e $U \cap V \neq \emptyset$ então $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos e $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é um difeomorfismo de classe C^r .

Então existe uma única topologia em X tal que A é um atlas C^r em X .

Corolário A.1. *Uma topologia τ gerada pelo atlas da proposição A.1 tem base enumerável se, e somente se, a cobertura pelos domínios U tem subcobertura enumerável.*

Corolário A.2. *A topologia τ gerada pelo atlas da proposição A.1 é Hausdorff se, e somente se, para todo $p, q \in X$ com $p \neq q$ existe $(U, \varphi) \in A$ tal que $p, q \in U$ ou existem $(U, \varphi), (V, \psi)$ com $U \cap V = \emptyset$ tal que $p \in U$ e $q \in V$.*

A.2 Aplicações diferenciáveis entre variedades

Sejam $\phi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfismos de classe C^r entre abertos Euclidianos. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é diferenciável em um ponto x_0 se, e somente se, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ é diferenciável em $\phi(x_0)$ e, para $s \leq r$, f é de classe C^s se, e somente se, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ é de classe C^s . Como essas duas noções são invariantes por mudança de coordenadas, elas se estendem naturalmente para variedades.

Definição A.6. *Sejam M uma variedade de dimensão m e classe C^r e N uma variedade de dimensão n e classe C^r . Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é de classe C^s , $s \leq r$, se para todo $p \in M$, existem cartas locais $\varphi : U \subset M \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset N \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

- 1 $p \in U, f(p) \in V$;
- 2 $f(U) \subset V$;
- 3 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^s .

Para definir a derivada de uma aplicação diferenciável vamos associar a cada ponto $x \in M$ um espaço vetorial $T_x M$, chamado o espaço tangente a M no ponto x , e mostrar que se $f : M \rightarrow N$ é uma função diferenciável, então existe uma aplicação linear natural

$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ chamada derivada de f no ponto x . Os elementos de $T_x M$ são os vetores tangentes as curvas diferenciáveis passando pelo ponto x .

Dizemos que duas curvas $\alpha, \beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ que passam por x em $t = 0$ tem o mesmo vetor tangente em x se para alguma carta local $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$ em torno de x vale $(\varphi_i \circ \alpha)'(0) = (\varphi_i \circ \beta)'(0)$. Essa propriedade não depende da escolha da carta pois se $\varphi_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$ é outra carta então

$$\begin{aligned}(\varphi_j \circ \alpha)'(0) &= d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))(\varphi_i \circ \alpha)'(0) \\(\varphi_j \circ \beta)'(0) &= d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))(\varphi_i \circ \beta)'(0).\end{aligned}$$

Nesse caso duas curvas são ditas equivalentes. Esta relação é de equivalência no conjunto das curvas diferenciáveis que passam por x e a classe de equivalência de α , denotada por $[\alpha]$ é chamada o vetor tangente a α em x , também denotado por $\alpha'(0)$. O espaço tangente a M no ponto x denotado por $T_x M$ é o conjunto de tais vetores tangentes.

Seja agora $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^s entre duas variedades. Se $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = x$ então $f \circ \alpha$ é uma curva diferenciável em N , passando por $f(x)$. Definimos então

$$\begin{aligned}df_x : T_x M &\rightarrow T_{f(x)} N \\[\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha].\end{aligned}$$

É fácil verificar que a definição não depende da escolha de α na classe de equivalência.

Definição A.7. *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in M$. Se diz que x é um ponto crítico de f se, e somente se, $df_x = 0$.*

Definição A.8. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre duas variedades. Se diz que $c \in N$ é valor regular quando para todo $p \in f^{-1}(c)$ se cumpre que df_p é sobrejetora.*

Definição A.9. *Sejam M e N variedades de classe C^r diz-se que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um mergulho se:*

1. f é uma imersão.
2. f é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Definição A.10. *Uma subvariedade N de classe C^k de uma variedade M de classe C^r com $k \leq r$ é um subconjunto $N \subset M$ com a topologia induzida pela de M e dotado de uma estrutura de variedade C^k tal que a aplicação de inclusão $i : N \rightarrow M$ é um mergulho de classe C^k .*

Teorema A.3. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^s entre duas variedades. Se c é um valor regular então $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M .*

Teorema A.4. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^s entre duas variedades e c um valor regular tal que $S = f^{-1}(c)$ então*

$$T_p S = \ker df_p$$

para todo $p \in M$.

APÊNDICE B – Noções de Homotopia

Em Topologia e, mais precisamente em Topologia Algébrica, duas aplicações contínuas de um espaço em outro se dizem homotópicas se uma de elas pode ser continuamente deformada para a outra. Neste capítulo vamos ver os principais resultados da homotopia. As principais referências são [10], Hatcher [6].

Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas.

Definição B.1. *Diremos que f e g são homotópicas, e escrevemos $f \simeq g$, se e somente se, existe uma aplicação contínua $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ tal que $h(0, x) = f(x)$ e $h(1, x) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação h diz-se uma homotopia entre f e g .*

Definição B.2. *Dados $X \subseteq Y$, onde X é um espaço topológico, diremos que X é um retrato por deformação de Y se existem funções contínuas $r_t : Y \rightarrow Y$ com $0 \leq t \leq 1$ tais que*

- (a) $r_0(Y) = Y$;
- (b) $r_t|_X = Id$;
- (c) $r_1(Y) = X$;
- (d) A aplicação

$$\begin{aligned} Y \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (y, t) &\longmapsto r_t(y) \end{aligned}$$

é contínua.

Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ diz-se uma equivalência se, e somente se, existe uma outra aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que

$$f \circ g \simeq Id|_Y \quad \text{e} \quad g \circ f \simeq Id|_X.$$

A aplicação $g : Y \rightarrow X$ diz-se uma inversa homotópica de $f : X \rightarrow Y$. Neste caso, vamos dizer que X e Y são homotopicamente equivalentes.

Proposição B.1. *Se X é um retrato por deformação de Y então X e Y são homotopicamente equivalentes.*

Observação B.1. *Um retrato por deformação é um caso particular de equivalência homotópica.*

APÊNDICE C – Noções de Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo vamos ver como se comportam as curvas integrais associadas ao campo gradiente de uma função f , definiremos as variedades estáveis e instáveis e estabeleceremos algumas propriedades entre elas e os pontos críticos associados. As principais referências são [2], Sotomayor [15].

Inicialmente vamos recordar alguns fatos sobre equações diferenciais. Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r , considerada como um campo de vetores sobre W . Então F satisfaz localmente a condição de Lipschitz, assim os teoremas básicos sobre existência e unicidade e diferenciabilidade das soluções das equações diferenciais ordinárias aplicam-se ao problema de valor inicial

$$\varphi'(t) = F(\varphi(t)) \quad \text{com} \quad \varphi(0) = x, \quad (\text{C.1})$$

para cada $x \in W$. Portanto existe um intervalo $J_0 \subset \mathbb{R}$ ao redor de 0 tal que a aplicação $\varphi : J_0 \rightarrow W$ satisfaz a condição inicial de C.1. Se $\varphi_1 : J_1 \rightarrow W$ é outra solução para o problema do valor inicial (C.1) então $\varphi = \varphi_1$ em $J_0 \cap J_1$. Assim φ e φ_1 podem ser ajustadas para fornecer uma solução do problema em $J_1 \cup J_0$. Segue-se que J_0 e φ são únicas uma vez que o intervalo J_0 seja maximal. Denotaremos este intervalo maximal por $J(x)$ (note que ele depende de $x \in W$) e a solução correspondente será denotada por

$$\begin{aligned} \varphi^x : J(x) &\rightarrow W \\ t &\mapsto \varphi^x(t) = \varphi_t(x). \end{aligned}$$

O conjunto $\varphi^x(J(x))$ será chamado curva solução ou curva integral do campo de vetores F por x . Seja $\omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}$ um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times W$. O fluxo por F é a aplicação de classe C^r

$$\begin{aligned} \varphi : \omega &\rightarrow W \\ (t, x) &\mapsto \varphi_t(x). \end{aligned}$$

Seja X um campo de vetores de classe C^r sobre uma variedade n -dimensional M (ver [10]). A curva integral ou curva solução de X é uma aplicação diferenciável $\eta : J \rightarrow M$ onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\eta'(t) = X(\eta(t))$ para cada $t \in J$. Se (ψ, U) é uma carta sobre M contendo $\eta(J)$ e $W = \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$ então a composição de aplicações

$$f : W \xrightarrow{\psi^{-1}} U \xrightarrow{X} TU \xrightarrow{d\psi} \mathbb{R}^n$$

pode ser vista como um campo de vetores de classe C^r sobre W . A aplicação $\varphi = \psi \circ \eta : J \rightarrow W$ satisfaz a equação diferencial

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad (\text{C.2})$$

Visto que

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= d\psi(\eta'(t)) \\
 &= d\psi(X(\eta(t))) \\
 &= (d\psi \circ X \circ \psi^{-1})(\psi(\eta(t))) \\
 &= f(\varphi(t))
 \end{aligned}$$

Assim ψ transporta a curva integral de X dentro da solução (C.2).

Como consequência, todos os resultados sobre campo de vetores em conjuntos abertos de \mathbb{R}^n valem para campos de vetores sobre uma variedade M . Para cada $x \in M$ existe um intervalo maximal $J(x)$ ao redor de 0 e uma curva integral de X de classe C^r

$$\begin{aligned}
 \eta^x : J(x) &\rightarrow M \\
 t &\longmapsto \eta^x(t) = \eta(t, x) = \eta_t(x).
 \end{aligned}$$

O conjunto $\omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(x)\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times M$. O fluxo de X é a aplicação de classe C^r tal que

$$\begin{aligned}
 \eta : \omega &\rightarrow M \\
 (t, x) &\longmapsto \eta_t(x).
 \end{aligned}$$

C.1 Campo Gradiente

Para obter informação geométrica da uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é útil considerar o campo vetorial gradiente ∇f do f . Daqui em diante, dotaremos a variedade M de uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição C.1. *Seja $x \in M$. Definimos $\nabla f(x) : M \rightarrow TM$ por:*

$$\langle \nabla f(x), v \rangle = df_x(v).$$

para todo $v \in T_x M$.

Pelo Teorema da existência de soluções de equações diferenciais de primeira ordem, existem curvas integrais “ φ ” do campo vetorial $-\nabla f$ através de qualquer ponto de M . Introduzimos o sinal de menos porque queremos considerar φ fluindo para baixo.

Lema C.1. *Seja φ a curva integral. Então a função $f \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é decrescente, sua imagem é um conjunto limitado e*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d(f \circ \varphi)(t)}{dt} = 0.$$

Lema C.2. *As curvas integrais do campo gradiente começam e terminam em pontos críticos.*

C.2 Variedades estável e instável

Nesta seção vamos considerar $X = -\nabla f$ o campo vetorial gradiente para uma função fixa arbitrária.

Definição C.2. *Seja p um ponto crítico de f e φ a curva integral associada a $-\nabla f$. Então*

1. *A variedade estável de p é o conjunto*

$$S(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = p\}.$$

2. *A variedade instável de p é o conjunto*

$$U(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = p\}.$$

Em outras palavras, a variedade estável é o conjunto de todos os pontos em uma linha do fluxo que terminam em p enquanto que a variedade instável é o conjunto de todos os pontos em uma linha do fluxo que começam em p .

Lema C.3. *Se p é um ponto crítico não degenerado de índice k , então $\dim U(p) = k$ e $\dim S(p) = n - k$.*

Lema C.4. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in M$ um ponto crítico onde M é uma variedade de dimensão n . Se $\dim S(p) + \dim U(p) = n = \dim M$ então p é um ponto crítico não degenerado de f .*

APÊNDICE D – Células e colagem de células

Neste capítulo vamos definir o conceito de n -célula e a colagem de tais células sobre um espaço topológico X que vai ser, em outras palavras, unir uma cópia do disco D^n colando o bordo S^{n-1} a X de alguma maneira. As principais referências são [11], [12], [3].

D.1 Células e colagem de células

Definição D.1. *O disco n -dimensional é o subconjunto de \mathbb{R}^n definido por $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Assim o n -disco é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n e o n -disco aberto vai ser denotado por $\text{int}(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. A fronteira de D^n em \mathbb{R}^n é a $(n-1)$ -esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.*

Denotemos por 0-disco D^0 que é igual a $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Definição D.2. *Uma n -célula é um espaço homeomorfo ao n -disco aberto $\text{int}(D^n)$. Uma célula é uma n -célula para algum $0 \leq n$.*

Observação D.1. *Podemos dizer que uma n -célula tem dimensão n .*

Definição D.3. *Consideremos uma família $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de espaços topológicos.*

O conjunto soma $X := \amalg_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\{\lambda\} \times X_\lambda)$ onde, para todo $\lambda \in \Lambda$, identificamos $\{\lambda\} \times X_\lambda$ com X_λ .

Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} j_\lambda : X_\lambda &\longrightarrow \amalg_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \\ x_\lambda &\longmapsto (\lambda; x_\lambda) \end{aligned}$$

A topologia soma se define como

$$\tau = \{U \subset X : j_\lambda^{-1}(U) \text{ é aberto para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Seja X um conjunto e \sim uma relação de equivalência. Lembre-se que as classes de equivalência são subconjuntos disjuntos dois a dois de X e que X é a união disjunta destas classes de equivalência. Reciprocamente se temos uma família disjunta $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X que cobrem X , isto é, $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, podemos definir uma relação de equivalência em X por: $x \sim y$ se e somente se existe $i \in I$ tal que $x, y \in A_i$. As classes de equivalência para esta relação \sim não são outros que os mesmos subconjuntos A_i . Agora vejamos como colar um espaço a outro mediante uma função.

Definição D.4. *Sejam X e Y dois espaços topológicos, A um subespaço de X e $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua. Definimos*

$$Z = X \amalg_f Y = X \amalg Y / \sim$$

onde $X \amalg Y$ é a soma topológica e a relação de equivalência é aquela obtida a partir dos seguintes subconjuntos:

1. $\{p\}, p \in X \setminus A;$
2. $\{p\}, p \in Y \setminus f(A);$
3. $\{y\} \cup f^{-1}(y), y \in f(A).$

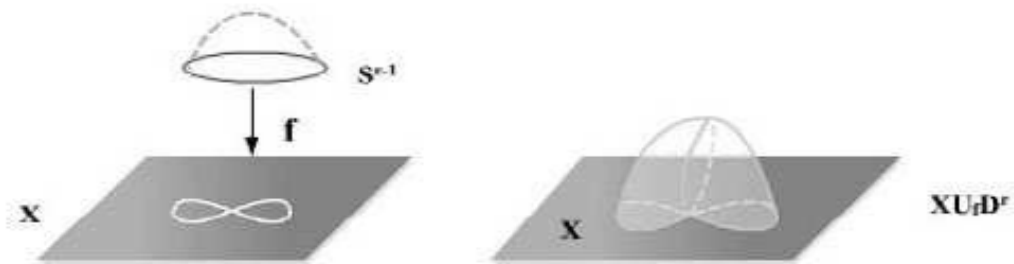
Assim dizemos que Z é obtido de Y colando A através de f .

Agora sejam X, D^r um r -disco e $f : S^{r-1} \rightarrow X$ uma função contínua. Definamos

$$Y := X \amalg_f D^r$$

Dizemos que Y é obtida de X colando uma r -célula através da aplicação f .

Figura 14 – Colagem de uma r -célula através de f



Fonte: extraída de [11]