Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Lívia Durães Reis

Representações induzidas de álgebras de Lie semissimples

Juiz de Fora

2016

Lívia Durães Reis

Representações induzidas de álgebras de Lie semissimples

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Laércio José dos Santos

Coorientador: Lonardo Rabelo

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Reis, Lívia D..
Representações induzidas de álgebras de Lie semissimples / Lívia Durães Reis. – 2016.
89 f.

Orientador: Laércio José dos Santos
Coorientador: Lonardo Rabelo
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Álgebra de Lie semissimples. 2. Álgebra Universal Envelopante. 3. Módulo de Verma. 4. Representação com peso máximo. 5. Representação induzida. I. Santos, Laércio José dos, orient. II. Rabelo, Lonardo, coorient. III. Título.

Lívia Durães Reis

Representações induzidas de álgebras de Lie semissimples

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Laércio José dos Santos - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Lonardo Rabelo - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Willian Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Rogerio Carvalho Picanço
Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos à todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, em especial: À Deus, por me conceder o dom da vida me permitindo estar aqui hoje.

Aos meus pais, Elia e Messias, que sempre incentivaram os meus estudos. Minhas irmãs, Mércia, Eliene e Cristina,e ao meu cunhado Daniel e meus sobrinhos Natalia e Davi Miguel, pelo apoio e orações.

Ao meu marido, Alan Gustavo e à sua família, pelo companherismo e amor, encorajando-me a vencer cada etapa. À Erasmo, Beatriz, Taís e Sarah, pela amizade e por transformar nossa república em um verdadeiro lar. À Letícia, Sulamita, Camila, Bruno e demais irmãos em Cristo que me sustentaram em oração.

Aos Professor Laércio José dos Santos e Lonardo Rabelo, pela orientação, paciência e incentivos.

Aos colegas de mestrado, pelas amizades e trocas de conhecimentos.

Aos Professores Rogério Carvalho Picanço e Willian Versolati França, que aceitaram fazer parte da banca contribuíndo na elaboração deste trabalho.

À CAPES e UFJF, pelo importante apoio financeiro concedido ao longo de todo o curso.

“A mente avança até o ponto onde pode chegar; mas depois passa para uma dimensão superior, sem saber como lá chegou. Todas as grandes descobertas realizaram esse salto.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho estudamos representações com peso máximo de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita. A ideia é construir um espaço de representação com peso máximo, universal no sentido em que qualquer outro espaço com peso máximo é um quociente deste. Esses espaços são definidos como uma representação torcida induzida por uma representação unidimensional de uma subálgebra de Borel e são chamados módulos de Verma. Os módulos de Verma $M(\lambda)$, onde λ é um elemento do dual de uma subálgebra de Cartan, foram construídos a partir dos trabalhos de Verma [15] e alguns resultados foram obtidos por Bernstein-Gelfand-Gelfand [1]. A partir dessa construção, fizemos um estudo das propriedades gerais de módulos de Verma e uma caracterização das representações de dimensão finita com peso máximo. O resultado principal, nesse sentido, garante que as classes de equivalências das representações irredutíveis de dimensão finita são parametrizadas por l-uplas de inteiros não negativos, onde l é o posto da álgebra. Finalmente, fizemos um estudo da classe de submódulos que são isomorfos a algum módulo de Verma. Existe uma caracterização completa desta classe de submódulos. O resultado principal, nesta caracterização, garante que um submódulo de $M(\lambda)$ é isomorfo a $M(\mu)$ se, e somente se, existe uma sequência finita de raízes positivas ligando λ com μ. Como consequência desse resultado temos que $M(\lambda)$ é simples se, e somente se, os valores assumidos por λ em cada dual de raiz normalizada não é inteiro positivo.

Palavras-chave: Álgebra de Lie semissimples. Álgebra universal envelopante. Módulo de Verma. Representação com peso máximo. Representação induzida.

ABSTRACT

In this work we study the highest weight representations of finite dimensional semisimple Lie algebras. The idea is to build a universal highest weight representation space in the sense that any other highest weight space is a quotient of this. These spaces are defined as a twisted representation induced by a one-dimensional representation of a Borel subalgebra and are called Verma modules. The Verma modules $M(\lambda)$, where λ is an element of the dual of a Cartan subalgebra, were built from Verma works [15] and some results were obtained by Bernstein-Gelfand-Gelfand [1]. From this construction, we made a study of the general properties of Verma modules and a characterization of finite dimensional representations with highest weight. The main result in this sense, ensures that the equivalence classes of finite dimensional irreducible representations are parameterized by l-tuples of non-negative integers, where l is the rank of the algebra. Finally, we made a study of the class of submodules that are isomorphic to some Verma module. A full characterization of this class of submodules already exists. The main result of this characterization, ensures that a submodule of $M(\lambda)$ is isomorphic to $M(\mu)$ if and only if there is a finite sequence of positive roots linking λ with μ. As a consequence we have that $M(\lambda)$ is simple if and only if the values assumed by λ in each normalized dual root is not a positive integer.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie
$\mathfrak{g}'$	Álgebra derivada
$\mathfrak{h}$	Subálgebra de Lie
$\mathfrak{h}^*$	Dual de $\mathfrak{h}$
$\mathfrak{b}$	Álgebra de Borel
$\mathfrak{n}$	Álgebra Nilpotente
$\mathfrak{n}^+$	Álgebra Nilpotente Positiva
$\mathfrak{n}^-$	Álgebra Nilpotente Negativa
Σ	Sistema Simples de Raízes
Π	Sistema de Raízes
Π^+	Conjunto das Raízes Positivas
Π^-	Conjunto das Raízes Negativas
$\mathcal{P}$	Conjunto dos Pesos de Π
$\mathcal{P}_{++}$	Conjunto dos Pesos Dominantes
Q	Conjunto das combinações lineares, com coeficientes inteiros, de elementos de Σ
Q_+	Conjunto das combinações lineares, com coeficientes inteiros não negativos, de elementos de Σ
V_λ	Espaço de Peso associado a λ
$\mathcal{W}$	Grupo de Weyl
C	Câmara de Weyl
$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	Álgebra Universal Envelopante de $\mathfrak{g}$
$Z(\mathfrak{g})$	Centro de $\mathfrak{g}$
$\mathcal{T}(\mathfrak{g})$	Álgebra Tensorial de $\mathfrak{g}$
$M(\lambda)$	Módulo de Verma

$L(\lambda)$	Módulo Quociente $\dfrac{M(\lambda)}{K}$, onde K é o maior submódulo de $M(\lambda)$ distinto de $M(\lambda)$
$JH(M(\lambda))$	Classe de quocientes simples de $M(\lambda)$
$\Re\lambda$	Compenente de λ em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, em relação a decomposição de $\mathfrak{h}^*$
$\Im\lambda$	Compenente de λ em $\mathbb{K}'\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, em relação a decomposição de $\mathfrak{h}^*$
$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$	Subespaço Racional de $\mathfrak{h}$
$\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$	Normalizador de $\mathfrak{h}$
ρ	Representação de $\mathfrak{g}$ em V
ad	Representação Adjunta
$\mathfrak{sl}(2)$	Álgebra dos Operadores Lineares de um Espaço Vetorial de Dimensão 2 sobre o Corpo $\mathbb{K}$ (espaço de matrizes 2x2 com coeficientes em $\mathbb{K}$)
$\mathfrak{g}_\alpha$	Espaço de Raízes
tr	Traço
$\mathfrak{gl}(V)$	Álgebra dos Operadores Lineares do Espaço Vetorial V

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O termo álgebra de Lie é uma referência ao matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899). As álgebras de Lie surgiram na década de 1870, nas pesquisas desenvolvidas por Sophus Lie na tentativa de obter uma teoria para o estudo das equações diferenciais. Utilizando as transformações de contato, Lie examinou um processo, criado por Jacobi, de obtenção de novas soluções de equações diferenciais a partir de uma dada solução. Esse estudo levou Lie a tratar seus grupos de transformações através do que conhecemos como "álgebra de Lie". Com essa descoberta, Lie abandona seu objetivo inicial relacionado com as equações diferenciais e passa a pesquisar as àlgebras de Lie.

Nosso principal objetivo, neste trabalho, é estudar representações com peso máximo de álgebras de Lie semissimples. Nesse caso, a ideia é construir um espaço de representação com essa propriedade, os chamados módulos de Verma. A partir dessa construção, estudamos a estrutura de submódulos dos módulos de Verma, obtendo uma caracterização da classe de submódulos que são isomorfos a algum módulo de Verma.

A seguir descrevemos cada capítulo da dissertação.

No Capítulo 2, introduzimos os principais conceitos e resultados que são utilizados neste trabalho. Introduzimos os conceitos de álgebras de Lie e de álgebras associativas. Estudamos alguns conceitos gerais sobre representações de álgebras de Lie, de módulos sobre álgebras de Lie e estabelecemos uma relação entre esses dois conceitos. Por fim, fizemos um estudo das álgebras de Lie semissimples, obtendo um sistema de raízes e uma decomposição da álgebra em espaços de raízes. A partir daí, podemos definir pesos associados ao sistema de raízes.

No Capítulo 3, estudamos o conceito de representação induzida de álgebras de Lie e estudamos algumas de suas propriedades. Um dos conceitos centrais nessa definição é o de álgebra universal envelopante, que é uma álgebra associativa gerada pela álgebra de Lie e que tem uma propriedade universal, no sentido em que toda representação da álgebra de Lie se estende a uma representação da álgebra envelopante. Um resultado central sobre álgebras universais envelopantes é o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que fornece base da álgebra envelopante a partir de uma base da álgebra de Lie.

No Capítulo 4, estudamos as representações com peso máximo de álgebras de Lie semissimples. O principal objetivo, nesse contexto, é construir um espaço de representação, com peso máximo, universal no sentido em que qualquer outro espaço com peso máximo é um quociente deste. Esses espaços são definidos como uma representação torcida induzida por uma representação unidimensional de uma subálgebra de Borel e são chamados módulos de Verma. Os módulos de Verma foram construídos a partir dos trabalhos de Verma [15] e diversos resultados foram obtidos por Bernstein-Gelfand-Gelfand [1].

No Capítulo 5, estudamos as representações de dimensão finita de álgebras de Lie semissimples. O resultado principal, nesse sentido, garante que as classes de equivalências das representações irredutíveis e de dimensão finita são parametrizadas por l-uplas de inteiros não negativos, onde l é o posto da álgebra. Isso significa que as representações de dimensão finita de álgebras de Lie semissimples são caracterizadas da mesma forma que as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Finalmente, no Capítulo 6, estudamos uma classe de submódulos de módulos de Verma. O objetivo é caracterizar os submódulos de $M(\lambda)$, sendo λ um elemento do dual da subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, que são isomorfos à $M(\mu)$, para algum μ pertencente ao dual de $\mathfrak{h}$. Nesse sentido, existe uma caracterização completa desses submódulos, a partir dos trabalhos de Verma [15] e Bernstein-Gelfand-Gelfand [1]. O resultado principal, deste capítulo, garante que um submódulo de $M(\lambda)$ é isomorfo a $M(\mu)$ se, e somente se, existe uma sequência finita de raízes positivas ligando λ com μ (veja a definição na página 73). Esse resultado é demonstrado primeiro quando λ é um peso dominante (veja o Teorema 6.1.1) e depois o caso geral quando λ é qualquer (veja o Teorema 6.1.2). Uma consequência desses resultados é que $M(\lambda)$ é simples, isto é, não tem submódulo próprio e não trivial se, e somente se, os valores assumidos por λ em cada corraiz normalizada não é inteiro positivo (veja o Teorema 6.1.3).

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, introduzimos os principais conceitos e resultados que são utilizados nos demais capítulos deste trabalho. Introduzimos os conceitos de álgebras de Lie e de álgebras associativas. Fizemos um estudo sobre representações de álgebras de Lie, de módulos sobre álgebras de Lie e estabelecemos uma relação entre esses dois conceitos. Por fim, fizemos um estudo das álgebras de Lie semissimples, obtendo um sistema de raízes e uma decomposição da álgebra em espaços de raízes. A partir daí, podemos definir pesos associados ao sistema de raízes.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram [13] e [2]. Outras referências que podem ser consultado esse assunto são: [7], [9], [10] e [14].

2.1 ÁLGEBRAS ASSOCIATIVAS E DE LIE

Os espaços vetoriais considerados aqui são todos sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero.

Uma **álgebra** sobre $\mathbb{K}$ é um par $(\mathfrak{g}, \varphi)$ onde $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma aplicação bilinear. A aplicação φ é chamada **produto**. Usualmente, denotamos o par $(\mathfrak{g}, \varphi)$ simplesmente por $\mathfrak{g}$. A **dimensão** de uma álgebra é a dimensão como espaço vetorial. Uma álgebra é dita **abeliana** se $\varphi(X, Y) = \varphi(Y, X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Uma **subálgebra** de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado para o produto, isto é, $\varphi(X, Y) \in \mathfrak{h}$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Dizemos que uma subálgebra $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ é um **ideal à esquerda** se $\varphi(X, Y) \in \mathfrak{i}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e todo $Y \in \mathfrak{i}$. De modo análogo definimos **ideal à direita** e **ideal bilateral**.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra, $\mathfrak{i}$ um ideal bilateral em $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ o espaço vetorial quociente. O espaço $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ admite uma estrutura de álgebra onde o produto é dado pela aplicação $\overline{\varphi}$ definida por $\overline{\varphi}(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{\varphi(X, Y)}$.

Um **homomorfismo** de $\mathfrak{g}_1$ em $\mathfrak{g}_2$, onde $(\mathfrak{g}_1, \varphi_1)$ e $(\mathfrak{g}_2, \varphi_2)$ são álgebras, é uma transformação linear $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ que preserva o produto, isto é,

$$\rho(\varphi_1(X, Y)) = \varphi_2(\rho(X), \rho(Y)), \text{ para } \quad \text{todos } X, Y \in \mathfrak{g}_1.$$

Os homomorfismos inversíveis são chamados **isomorfismos** e quando existe um isomorfismo entre duas álgebras elas são ditas **isomorfas**.

O **núcleo** $\ker(\rho)$ de um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ é, por definição, o núcleo de ρ como transformação linear. Se ρ é um homomorfismo então $\ker(\rho)$ é um ideal bilateral em $\mathfrak{g}_1$ e a imagem $\mathrm{Im}(\rho)$ de ρ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}_2$.

Teorema 2.1.1 (de Isomorfismo)**.** *Se $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ é um homomorfismo de álgebras então $\mathfrak{g}_1/\ker(\rho)$ e Im(ρ) são álgebras isomorfas.*

Uma álgebra $(\mathfrak{g}, \varphi)$ é chamada:

- **álgebra associativa** quando φ tem a propriedade

$$\varphi(X, \varphi(Y, Z)) = \varphi(\varphi(X, Y), Z) \quad \text{para todos} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

- **álgebra de Lie** quando φ tem as propriedades
  - $\varphi(X, X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
  - $\varphi(X, \varphi(Y, Z)) + \varphi(Z, \varphi(X, Y)) + \varphi(Y, \varphi(Z, X)) = 0$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

No caso de álgebra associativa o produto $\varphi(X, Y)$, em geral, é denotado por $\varphi(X, Y) = X \cdot Y$ ou $\varphi(X, Y) = XY$. Dizemos que uma álgebra associativa $\mathfrak{g}$ é uma **álgebra com unidade** se existe $1 \in \mathfrak{g}$ tal que $X1 = X = 1X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Nesse caso, na definição de homomorfismo aparece a condição adicional de levar a unidade na unidade.

Nas álgebras de Lie o produto é chamado de **colchete** e denotado por $\varphi(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]$. A segunda condição que define uma álgebra de Lie é conhecida por **identidade de Jacobi** e pode ser reescrita na seguinte forma

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Observação 2.1.1. *Numa álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ o colchete é antissimétrico. Logo,*

- *As definições de ideal à esquerda, à direita e bilateral em $\mathfrak{g}$ coincidem e, nesse caso, eles são chamados simplesmente ideais.*
- *$\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, pois aqui o corpo tem característica diferente de 2.*

Exemplo 2.1.1.

1. *Toda álgebra associativa admite uma estrutura de álgebra de Lie. De fato, definindo a aplicação $[\cdot, \cdot]$ por $[X, Y] = XY - YX$ temos que $[\cdot, \cdot]$ é um colchete. O colchete definido dessa maneira é chamado **comutador**.*

2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares em V. Considerando o produto dado pela composição de operadores temos que $\mathfrak{gl}(V)$ é uma álgebra associativa. Portanto, $\mathfrak{gl}(V)$ tem uma estrutura de álgebra associativa (dada pela composição) e de álgebra de Lie (dada pelo comutador).*

3. *Consideremos o espaço* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *das matrizes* $n \times n$*, com entradas no corpo* $\mathbb{K}$*. O produto de matrizes define em* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *uma estrutura de álgebra associativa e, consequentemente, de álgebra de Lie.*

   Se V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*, de dimensão* n *então* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *é isomorfa a* $\mathfrak{gl}(V)$*, tanto como álgebra associativa quanto como álgebra de Lie.*

4. *Os espaços abaixo são exemplos de subálgebras de Lie de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$*. Esses exemplos mostram que, em geral, uma subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ *não é uma subálgebra associativa.*

   a) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : tr(X) = 0\}$.

   b) $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : X^t + X = 0\}$.

   c) $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{K}) : XJ + JX^t = 0\}$*, onde* $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, com 0 e 1 representando, respectivamente, a matriz nula e a matriz identidade de ordem* $n \times n$*.*

   d) O subespaço das matrizes triangulares superiores.

2.2 REPRESENTAÇÕES E MÓDULOS

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra associativa (ou de Lie) sobre $\mathbb{K}$ e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma **representação** de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}(V)$.

O espaço V se denomina **espaço da representação** e a sua dimensão é a **dimensão da representação**. Dizemos que uma representação ρ é **fiel** quando $\ker(\rho) = \{0\}$.

Exemplo 2.2.1. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. A aplicação ad:* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *definida por* $ad(X)Y = [X,Y]$ *é uma representação de* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{g}$*, denominada* ***representação adjunta*** *de* $\mathfrak{g}$*. O núcleo dessa representação é o conjunto*

$$\{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\},$$

e é chamado ***centro*** *de* $\mathfrak{g}$ *e denotado por* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$*.*

Notemos que se existe uma representação fiel de $\mathfrak{g}$ em V então, pelo Teorema de Isomorfismo, $\mathfrak{g}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$. O Teorema de Ado (veja [13], capítulo 10) garante que toda álgebra de Lie de dimensão finita é isomorfa a uma subálgebra da álgebra de Lie de matrizes.

Teorema 2.2.1 (de Ado)**.** *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie de dimensão finita então existe uma representação fiel* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *de dimensão finita.*

2.2.1 Construções com representações

Fixemos uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Soma direta de representações

Sejam $\rho_1, \ldots, \rho_n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, \ldots, V_n$, respectivamente, e $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ a soma direta. A aplicação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definida por

$$\rho(X)(v_1, \ldots, v_n) = (\rho_1(X)v_1, \ldots, \rho_n(X)v_n)$$

é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V chamada **soma direta** de $\rho_1, \ldots, \rho_n$ e denotada por $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$.

Produto tensorial de representações

Sejam $\rho_1, \ldots, \rho_n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, \ldots, V_n$, respectivamente, e $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ o produto tensorial. A aplicação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definida por

$$\rho(X)(v_1, \ldots, v_n) = \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n + \cdots + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes \rho_n(X)v_n$$

é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V chamada **produto tensorial** de $\rho_1, \ldots, \rho_n$ e denotada por $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n$.

Restrições de representações

Sejam $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Temos que ρ induz uma representação, de forma natural, de $\mathfrak{h}$ em V, $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ dada por $\rho_{\mathfrak{h}}(X) = \rho(X)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Essa representação é chamada **restrição** de ρ.

Subrepresentações

Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é **invariante** por ρ (ou por $\mathfrak{g}$) se $\rho(X)W \subset W$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. No caso em que W é um subespaço invariante, a aplicação $\rho_W : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ dada por $\rho_W(X) = \rho(X)_{|W}$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em W, denominada **subrepresentação** de ρ a W. Os subespaços invariantes da representação adjunta são ideais da álgebra.

Representações quocientes

Sejam ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V e W um subespaço invariante por ρ. A aplicação $\overline{\rho}_W : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/W)$ dada por $\overline{\rho}_W(X)\overline{v} = \overline{\rho(X)v}$ define uma representação de $\mathfrak{g}$

em V/W. Nessa definição, o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(X)"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/W \arrow[r, "\overline{\rho}_W(X)"'] & V/W \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $\pi : V \to V/W$ é a projeção canônica.

2.2.2 Representações equivalentes

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, ρ_1 e ρ_2 representações de $\mathfrak{g}$ em V_1 e em V_2, respectivamente. Uma **aplicação de** ρ_1 **a** ρ_2 é uma transformação linear $P : V_1 \to V_2$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\rho_1(X)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(X)"] \\ V_1 \arrow[r, "P"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

comuta para todo $X \in \mathfrak{g}$. Um **operador de intercâmbio** de ρ_1 a ρ_2 é uma aplicação de ρ_1 a ρ_2 que é um isomorfismo, e isso ocorre se e somente se P é um isomorfismo. Nesse caso, dizemos que ρ_1 é **equivalente** ou **isomorfa** a ρ_2. A relação

$$\rho_1 \approx \rho_2 \text{ se, e somente se, } \rho_1 \text{ é isomorfa a } \rho_2$$

é uma relação de equivalência no conjunto de todas as representações de $\mathfrak{g}$.

2.2.3 Decomposições de representações

Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Dizemos que ρ é

- **irredutível** quando os únicos subespaços invariantes são os triviais $\{0\}$ e V.
- **completamente redutível** quando existem subespaços $V_1, \dots, V_n$ invariantes por ρ tais que as restrições ρ_i de ρ a V_i são irredutíveis.

Na definição acima cada ρ_i é chamada **componente irredutível** de ρ. Notemos que se ρ é completamente redutível e ρ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ são suas componentes irredutíveis então ρ e $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ são isomorfas.

Portanto, uma representação completamente redutível fica bem determinada se são conhecidas cada uma de suas componentes irredutíveis. Isso reduz o estudo de representações completamente redutíveis ao estudo de representações irredutíveis.

2.2.4 Módulos

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que V é um **$\mathfrak{g}$-módulo à esquerda** se existe uma aplicação $\mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ tal que

1. $X(v_1 + v_2) = Xv_1 + Xv_2$, para todo $v_1, v_2 \in V$ e $X \in \mathfrak{g}$;
2. $(X_1 + X_2)v = X_1v + X_2v$, para todo $v \in V$ e $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$;
3. $X(kv) = k(Xv)$, para todo $v \in V$, $X \in \mathfrak{g}$ e $k \in \mathbb{K}$;
4. $[X, Y]v = X(Yv) - Y(Xv)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

Um **$\mathfrak{g}$-submódulo** de V é um subespaço W de V tal que $Xw \in W$ para todos $X \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Dizemos que V é **simples** quando os únicos $\mathfrak{g}$-submódulos de V são os triviais, isto é, $\{0\}$ e V.

Um **$\mathfrak{g}$-homomorfismo** de V_1 em V_2, onde V_1 e V_2 são dois $\mathfrak{g}$-módulos à esquerda é uma aplicação $\psi : V_1 \to V_2$ tal que $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$ e $\psi(Xv) = X\psi(v)$ para todos $u, v \in V_1$ e $X \in \mathfrak{g}$. Os $\mathfrak{g}$-homomorfismos inversíveis são chamados **$\mathfrak{g}$-isomorfismos** e quando existe um isomorfismo entre dois $\mathfrak{g}$-módulos eles são ditos **isomorfos**.

O **núcleo** $\ker(\psi)$ de um $\mathfrak{g}$-homomorfismo $\psi : V_1 \to V_2$ é, por definição, o conjunto

$$\ker \psi = \{v \in V_1 : \psi(v) = 0\}.$$

Temos que o núcleo $\ker(\psi)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo em V_1 e a imagem $\mathrm{Im}(\psi)$ de ψ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V_2.

Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo e W um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Dado $v \in V$, o subconjunto $v + W = \{v + w : w \in W\}$ é chamado **classe lateral** de v associada a W. Algumas vezes denotamos a classe lateral de v por $\overline{v}$. Denotemos por V/W o conjunto de todas as classes laterais de elementos de V dadas por W. Consideremos em V/W as seguintes operações

- $(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$;
- $X(v + W) = Xv + W, \forall X \in \mathfrak{g}$

Com essas operações V/W tem uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo à esquerda, chamado **módulo quociente** de V por W. A aplicação $\pi : V \to V/W$ dada por $\pi(v) = v + W$ é um $\mathfrak{g}$-homomorfismo sobrejetor com $\ker \pi = W$.

Teorema 2.2.2 (de Isomorfismo).
1. *Se $\psi : V \to U$ é um $\mathfrak{g}$-homomorfismo de módulos, então $V/\ker(\psi)$ e $Im(\psi)$ são isomorfos.*
2. *Se W_1 e W_2 são dois $\mathfrak{g}$-submódulos de V, então*

a) $\dfrac{W_1+W_2}{W_2}$ *e* $\dfrac{W_1}{W_1 \cap W_2}$ *são isomorfos.*

b) Se $W_1 \subset W_2 \subset V$ *então* $\dfrac{V/W_1}{W_2/W_1}$ *e* $\dfrac{V}{W_2}$ *são isomorfos.*

Dado um $\mathfrak{g}$-módulo à esquerda V, consideremos a aplicação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definida por

$$\rho(X)v = Xv$$

Pelas propriedades de $\mathfrak{g}$-módulo temos que ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V.

Reciprocamente, dada uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V, consideremos $\mathfrak{g} \times V \to V$ definida por

$$Xv = \rho(X)v.$$

Pelas propriedades de representação temos que esta aplicação define uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo à esquerda.

Portanto, os conceitos de representação de $\mathfrak{g}$ e de $\mathfrak{g}$-módulo à esquerda são equivalentes.

Observação 2.2.1. *Neste trabalho, utilizamos a linguagem de* $\mathfrak{g}$*-módulo à esquerda ou de representação de* $\mathfrak{g}$*, pensando na equivalência entre estes conceitos.*

Valem definições e resultados análogos para $\mathfrak{g}$-módulo à direita.

2.3 ÁLGEBRAS DE LIE SEMISSIMPLES

Dados dois subconjuntos A e B de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, denotemos por $[A, B]$ o subespaço gerado por

$$\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Consideremos os subespaços $\mathfrak{g}^{(k)}$ definidos, por indução, da seguinte maneira

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \ldots, \quad \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é

- **Solúvel** quando existe k tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$.
- **Semissimples** quando não contém ideal solúvel, além de $\{0\}$.
- **Simples** quando tem dimensão maior do que um e seus únicos ideais são os triviais.

Exemplo 2.3.1. *A álgebra das matrizes triangulares superiores (não necessariamente com zero na diagonal) é solúvel.*

Para as álgebras solúveis vale o seguinte resultado.

Teorema 2.3.1. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie solúvel e* ρ *uma representação de* $\mathfrak{g}$ *de dimensão finita. Se para todo* $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)$ *é triangularizável, então* ρ *é triangularizável.*

Proposição 2.3.1. *Se* $\mathfrak{g}$ *é simples, então* $\mathfrak{g}$ *é semissimples.*

Exemplo 2.3.2. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ *é simples e, portanto, semissimples.*

De fato, sejam X, H *e* Y *os elementos de* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ *dados por*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O conjunto $\{X, H, Y\}$ *é uma base de* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ *e os colchetes entre os elementos desta base são dados por*

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Se $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, *então*

$$\mathrm{ad}(X)Z = -2bX + cH \quad e \quad \mathrm{ad}(X)^2 Z = -2cX.$$

Logo, se $Z \neq 0$, *então* Z, $\mathrm{ad}(X)Z$ *ou* $\mathrm{ad}(X)^2 Z$ *é múltiplo não nulo de* X. *Assim, se* $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ *é um ideal, então* $X \in \mathfrak{h}$. *Como* $H = -[Y, X]$ *e* $Y = \dfrac{1}{2}[Y, H]$, *temos que,* $H, Y \in \mathfrak{h}$ *e* $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. *Portanto,* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ *possui apenas ideais triviais, isto é,* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ *é simples.*

Para as álgebras semissimples, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.3.2 (de Decomposição de Weyl)**.** *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre* $\mathbb{K}$. *Se* ρ *é uma representação de dimensão finita de* $\mathfrak{g}$ *então* ρ *é completamente redutível.*

O Teorema de Weyl reduz o estudo das representações de dimensão finita das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita ao estudo das representações irredutíveis.

A **forma de Cartan-Killing** de $\mathfrak{g}$ é a forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida por

$$\langle X, Y \rangle = tr\,(ad(X)ad(Y))$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, onde $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta de $\mathfrak{g}$.

Denotando por $\mathfrak{g}^{\perp}$ o ortogonal a $\mathfrak{g}$ em relação à forma de Cartan-Killing, isto é,

$$\mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : \langle X, Y \rangle = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\},$$

temos o seguinte critério, devido a Cartan.

Teorema 2.3.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Temos que*

1. *$\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}^{\perp}$.*
2. *$\mathfrak{g}$ é semissimples se, e somente se, a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada.*

Consideremos os subespaços $\mathfrak{g}^k$ definidos, por indução, da seguinte maneira

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \ldots, \quad \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **nilpotente** quando existe k tal que $\mathfrak{g}^k = \{0\}$. O **normalizador** $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ de uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é definido por

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} = [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é chamada **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{g}$ quando é nilpotente e $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Dizemos que o par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ é **decomponível** quando $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples e $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan tal que $\mathrm{ad}(H)$ é triangularizável para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Exemplos de pares decomponíveis são: (a) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onde o corpo é algebricamente fechado e $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan qualquer, e (b) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onde $\mathfrak{g}$ é uma forma real normal de uma álgebra de Lie semissimples complexa e $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan contida no espaço simétrico de uma decomposição de Cartan (veja [13]).

Seja $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ um par decomponível. Para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, denotemos por $\mathfrak{g}_\alpha$ o **autoespaço generalizado** de ad, isto é,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : (\mathrm{ad}(H) - \alpha(H))^n X = 0, \ \forall H \in \mathfrak{h}, \ \text{e algum } n \geq 0\}.$$

Dizemos que α é um peso de $\mathfrak{g}$ quando $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Os pesos não nulos de $\mathfrak{g}$ são chamados **raízes** de $\mathfrak{g}$, em relação à $\mathfrak{h}$, e denotado por $\Pi := \Pi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Os espaços $\mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Pi$, são denominados **espaços de raízes**.

Teorema 2.3.4. *Sejam $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ um par decomponível, sendo $\mathfrak{g}$ semissimples e $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ o conjunto de raízes de $\mathfrak{g}$, em relação à $\mathfrak{h}$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a forma de Cartan Killing de $\mathfrak{g}$, então*

1. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_n}$.*
2. *$\dim \mathfrak{g}_{\alpha_j} = 1$, para todo $1 \leq j \leq n$.*

3. $\mathfrak{h}$ *é uma álgebra de Lie abeliana.*

4. $ad(H)_{|\mathfrak{g}_{\alpha_j}} = \alpha_j(H)id$ *para todo* $H \in \mathfrak{h}$ *e* $1 \leq j \leq n$.

5. $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j}$ *e* $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] = \mathfrak{g}_{\alpha_i+\alpha_j}$, *se* $\alpha_i + \alpha_j \in \Pi$.

6. $[\mathfrak{g}_{\alpha_j}, \mathfrak{g}_{-\alpha_j}]$ *é unidimensional.*

7. $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ *e* $\mathfrak{g}_{\alpha_j}$ *são ortogonais, em relação à* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *se* $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$.

8. *A restrição de* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *a* $\mathfrak{g}_{\alpha_j} \times \mathfrak{g}_{-\alpha_j}$ *(em particular à* $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$*) é não degenerada.*

9. Π *é um conjunto gerador de* $\mathfrak{h}^*$.

É possivel considerar em $\mathfrak{g}$ subálgebras isomorfas a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Para isso, seja $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$, restrita a $\mathfrak{h}$ é não degenerada, a aplicação $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ dada por $H \mapsto \langle \cdot, H \rangle$ é um isomorfismo. Assim, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, existe um $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Usando esse isomorfismo, a forma de Cartan Killing induz uma forma não degenerada em $\mathfrak{h}^*$, que será denotada também por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha).$$

Como Π gera $\mathfrak{h}$, o conjunto $\{H_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ gera $\mathfrak{h}$.

Denotemos por H'_α o elemento de $\mathfrak{h}$, dado por $H'_\alpha = \dfrac{2H_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Notemos que H'_α tem a propriedade

$$\alpha(H'_\alpha) = 2.$$

Seja $\mathfrak{h}(\alpha)$ o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado por H'_α. Assim, o subespaço

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha$$

é uma subálgebra de Lie de dimensão três. Vale a seguinte proposição.

Proposição 2.3.2. $\mathfrak{g}(\alpha)$ *é isomorfa a* $\mathfrak{sl}(2)$.

Demonstração. A ideia da demonstração é começar considerando elementos $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que se $[X_\alpha, Y_{-\alpha}] = H'_\alpha$. Assim, $\{X_\alpha, H'_\alpha, Y_{-\alpha}\}$ é uma base de $\mathfrak{g}(\alpha)$ e valem as seguintes relações

$$[H'_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H'_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha \text{ e } [H'_\alpha, Y_{-\alpha}] = -\alpha(H'_\alpha)Y_{-\alpha} = -2Y_{-\alpha}.$$

A partir disso, consideramos a base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ definida no exemplo da página 20 e definimos a aplicação linear φ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ em $\mathfrak{g}(\alpha)$, tal que

$$\varphi(X) = X_\alpha,\ \varphi(H) = H'_\alpha \text{ e } \varphi(Y) = Y_{-\alpha}.$$

Devido as relações dos colchetes dos elementos das respectivas bases temos que φ é um isomorfismo. □

Como $\mathbb{K}$ tem característica zero, ele contém o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. O subespaço racional de $\mathfrak{h}$ gerado por H_α, $\alpha \in \Pi$ será denotado por $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$,

$$\mathfrak{h}_\mathbb{Q} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \cdots + a_k H_{\alpha_k} : a_i \in \mathbb{Q}, \alpha_i \in \Pi\}.$$

O conjunto das raízes é finito, daí o espaço vetorial $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ é de dimensão finita sobre os racionais.

Proposição 2.3.3. *1. Se $\alpha, \beta \in \Pi$, então $\dfrac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ é um número inteiro.*

2. A formula de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ é um produto interno.

Fixemos $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ uma base de $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$. Sejam $\mu, \nu \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ tal que

$$\mu = a_1\omega_1 + \cdots + a_l\omega_l \;\text{ e }\; \nu = b_1\omega_1 + \cdots + b_l\omega_l.$$

A **ordem lexicográfica** em $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$, em relação a essa base, é definida por $\mu \leq \nu$ quando $\mu = \nu$ ou quando $a_i < b_i$, onde i é o primeiro índice em que as coordenadas de μ e ν são diferentes. De fato essa relação define uma ordem compatível com a estrutura de espaço vetorial, isto é, se $\mu \leq \nu$, então $\mu + \gamma \leq \nu + \gamma$ e $x\mu \leq x\nu$, se $x > 0$.

A partir daqui, fixa-se uma ordem lexicográfica dada por uma base de $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$.

Dizemos que uma raiz $\alpha \in \Pi$ é **simples**, em relação à ordem fixada, quando $\alpha > 0$ e não existem raízes positivas β e γ tal que $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto das raízes simples será denotado por $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$.

Proposição 2.3.4. *Se Σ é o conjunto de raízes simples em Π, então:*

1. *Σ é uma base de $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$;*

2. *Se $\beta \in \Pi$ então existem inteiros $n_1, \ldots, n_l$, todos com o mesmo sinal, tal que $\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$.*

Um conjunto satisfazendo as condições na proposição é denominado **sistema simples de raízes**.

Fixado um sistema simples de raízes, definimos

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha > 0\}, \;\text{ e }\; \Pi^- = -\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha < 0\}.$$

Consideremos os subespaços

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \;\text{ e }\; \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

que, na verdade, são subálgebras nilpotentes e isomorfas. Temos a seguinte decomposição de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-.$$

A subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ normaliza tanto $\mathfrak{n}^+$ quanto $\mathfrak{n}^-$. Assim, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra e, como $\mathfrak{n}^+$ é um ideal de $\mathfrak{b}$, essa subálgebra é solúvel. A subálgebra $\mathfrak{b}$ é denominada **álgebra de Borel**.

Para cada $\alpha \in \Pi$, consideremos o operador linear $r_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ definido por

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H'_\alpha)\alpha = \lambda - 2\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha.$$

r_α é denominado **reflexão** em relação a α. Temos que se $\alpha \in \Pi$, então $r_\alpha^2 = 1$ e r_α preserva a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consequentemente, $r_\alpha(\Pi) = \Pi$.

Proposição 2.3.5. *Se $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ é um sistema simples e Π^+ é o conjunto das raízes positivas correspondente, então, para todo $i = 1, \ldots, l$ temos $r_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$ e $r_{\alpha_i}(\Pi^+ - \{\alpha_i\}) = \Pi^+ - \{\alpha_i\}$.*

O grupo de automorfismos de $\mathfrak{h}^*$ gerado por $\{r_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ é denominado **grupo de Weyl** do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e é denotado por $\mathcal{W}$. Como $w(\Pi) = \Pi$ para todo $w \in \mathcal{W}$ e Π é finito temos que $\mathcal{W}$ é finito.

O conjunto dos **elementos regulares** em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, denotado por

$$\overline{\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}} = \{\beta \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}; \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\}$$

é aberto e denso, pois seu complementar é a união dos núcleos de um número finito de funcionais lineares não nulos. As componentes conexas de $\overline{\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}}$ são cones conexos em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e são denominadas **câmara de Weyl**.

Proposição 2.3.6. *Seja C uma câmara de Weyl.*

1. *Se D é uma outra câmara de Weyl, então existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $wC = D$.*

2. *Se $w \in \mathcal{W}$, então $w(C) = C$ se e só se $w = 1$.*

3. *Se β é um elemento do fecho de C e $w \in \mathcal{W}$, então $w(\beta)$ pertence ao fecho de C se e só se $w(\beta) = \beta$.*

4. *Existe $\Sigma \subset \Pi$ tal que*

$$C = \{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} : \langle \mu, \alpha \rangle > 0, \quad \forall \alpha \in \Sigma\}.$$

O conjunto Σ na proposição é um sistema simples de raízes associado a câmara de Weyl.

Como os elementos do grupo de Weyl são isometrias em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ temos que se $\alpha \in \Pi$, $w \in \mathcal{W}$ e $\beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, então

$$r_{w\alpha}(\beta) = w r_\alpha w^{-1}(\beta)$$

e a partir disso é possível mostrar que as reflexões em relação às raízes simples são suficientes para gerar $\mathcal{W}$.

Uma decomposição de $w \in \mathcal{W}$ em produto de reflexões simples é **minimal** (ou **reduzida**) quando a quantidade de reflexões é a menor possível entre todas as decomposições existentes.

O número de raízes positivas que são levadas em negativas por w, $n(w)$, coincide com o número de raízes simples que aparecem numa decomposição minimal de w. Por isso, dizemos que $n(w)$ é o **comprimento** de w.

Proposição 2.3.7. *Se $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, $w \in \mathcal{W}$ e $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_{i+1}}$ é a decomposição reduzida de w, então $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_i} \alpha_{i+1} \in \Pi^+$.*

2.3.1 Pesos associados a sistemas de raízes

Fixemos um conjunto de raízes Π associado ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e um sistema simples de raízes

$$\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}.$$

O subgrupo aditivo de $\mathfrak{h}^*$, gerado por Π, é denotado por $\mathcal{Q}$. Um elemento de $\mathcal{Q}$ é denominado **peso radicial**. O subconjunto de $\mathcal{Q}$ que são combinações lineares de Σ com coeficiente inteiro não negativo é denotado por $\mathcal{Q}_+$.

Proposição 2.3.8. *Se $\alpha \in \Pi$, então $\mathcal{Q} \cap \mathbb{Q}\alpha = \mathbb{Z}\alpha$.*

Consideremos a seguinte relação $\leq$ em $\mathfrak{h}^*$. Dados μ e ν em $\mathfrak{h}^*$,

$$\mu \leq \nu, \quad \text{se, e somente se,} \quad \nu - \mu \in \mathcal{Q}_+.$$

Temos que $\leq$, assim definida, é uma relação de ordem parcial em $\mathfrak{h}^*$.

O conjunto $\mathcal{P}$ definido por

$$\{\mu \in \mathfrak{h}^* \ : \ \mu(H'_\alpha) \in \mathbb{Z}, \ \forall \alpha \in \Pi\}$$

é um subgrupo de $\mathfrak{h}^*$ e os elementos e $\mathcal{P}$ são denominados **pesos** de Π. Temos que

$$\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*.$$

Denotemos por

$$\Phi = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$$

a base de $\mathfrak{h}^*$, dual a base $\{H'_{\alpha_1}, \ldots, H'_{\alpha_l}\}$. Os elementos de Φ são denominados **pesos fundamentais** associados a Π e Φ é chamado **sistema fundamental de pesos**.

Proposição 2.3.9. *Φ é uma base para o grupo $\mathcal{P}$. Além disso, se Σ é o sistema simples de raízes associado a câmara de Weyl C, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\lambda(H'_\alpha) \in \mathbb{N}$, para todo $\alpha \in \Sigma$.*
2. *As coordenadas de λ, em relação a Φ, pertencem a $\mathbb{N}$.*
3. *$\lambda \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$.*
4. *Para cada $w \in \mathcal{W}$, as coordenadas de $\lambda - w\lambda$, em relação a Σ, pertencem a $\mathbb{N}$.*

Um elemento satisfazendo as condições *1.* a *4.* da proposição anterior é denominado **peso dominante** de Π. O conjunto dos pesos dominantes de Π é denotado por $\mathcal{P}_{++}$.

Denotemos por δ a semissoma das raízes positivas, isto é,

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha.$$

Temos que

$$\delta = \omega_1 + \cdots + \omega_l$$

e $\delta(H'_\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Sigma$.

3 REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS

Neste capítulo, introduzimos o conceito de representação induzida de álgebras de Lie e estudamos algumas de suas propriedades. Um dos conceitos centrais nessa definição é o de álgebra universal envelopante, que é uma álgebra associativa gerada pela álgebra de Lie e que tem uma propriedade universal, no sentido em que toda representação da álgebra de Lie se estende a uma representação da álgebra envelopante. Um resultado central sobre álgebras universais envelopantes é o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que fornece base da álgebra envelopante a partir de uma base da álgebra de Lie.

A Seção 3.1 é baseada principalmente em [13] e as Seções 3.2 e 3.3 são baseadas em [2].

3.1 ÁLGEBRA UNIVERSAL ENVELOPANTE

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma álgebra associativa com unidade $\mathcal{U}$ é chamada **álgebra universal envelopante** de $\mathfrak{g}$ se existe um homomorfismo (de álgebras de Lie) injetor $i : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}$ tal que

- A imagem $i(\mathfrak{g})$ gera $\mathcal{U}$ como álgebra associativa.
- Se ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V então existe uma representação (de álgebra associativa) $\tilde{\rho}$ de $\mathcal{U}$ em V tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[dr, "\tilde{\rho}"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathfrak{gl}(V) \end{tikzcd}$$

  comuta.

Proposição 3.1.1. *Duas álgebras universais envelopantes de $\mathfrak{g}$ são isomorfas.*

A ideia é construir uma álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ para cada $\mathfrak{g}$. Isso garante a existência de uma álgebra dessas e, além disso, a proposição afirma que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pode ser usada como álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$.

A construção de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é feita da seguinte maneira.

Consideremos a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \sum_{k \geq 0} \left(\otimes^k \mathfrak{g} \right),$$

onde $\otimes^0 \mathfrak{g} = \mathbb{K}$, $\otimes^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ e $\otimes^k \mathfrak{g}$ representa $\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$ (k fatores). Um elemento $X_1 \otimes \cdots \otimes X_k$ em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é denotado, simplesmente, por $X_1 \cdots X_k$. Assim, os elementos em

$\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ são combinações lineares finitas de elementos da forma $X_1 \cdots X_k$. Definimos o produto de dois elementos geradores $X_1 \cdots X_k$ e $Y_1 \cdots Y_s$ por justaposição $X_1 \cdots X_k Y_1 \cdots Y_s$. Isso define um produto associativo em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, já que o produto tensorial é associativo. Logo $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ tem uma estrutura de álgebra associativa e, além disso, $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é gerada por $\mathfrak{g}$. No entanto, a inclusão de $\mathfrak{g}$ em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ não é um homomorfismo, pois se $X, Y \in \mathfrak{g}$ então $[X, Y]$ e $XY - YX$ são diferentes em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, pois $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ e $XY - YX$ é um elemento de ordem dois.

Consideremos em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ o ideal bilateral $\mathcal{I}$, gerado por elementos da forma

$$XY - YX - [X, Y] \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \quad \text{com} \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Definimos $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ como a álgebra quociente $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$.

Denotemos por $i : \mathfrak{g} \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ a inclusão, por $\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a projeção canônica e por σ a composta $\sigma = \pi \circ i$ da inclusão com a projeção canônica:

$$\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Como σ é um homomorfismo, vale a igualdade

$$\sigma([X, Y]) = \sigma(X)\sigma(Y) - \sigma(Y)\sigma(X) \quad \text{para todos} \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Por abuso de notação, escrevemos em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, X no lugar de $\sigma(X)$, $X \in \mathfrak{g}$. Assim, a igualdade acima, em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, se escreve

$$[X, Y] = XY - YX \quad \text{para todos} \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Além disso, como $\mathcal{I}$ só contém elementos de ordem maior ou igual do que dois temos que $\mathfrak{g} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. Logo, σ é injetora.

Por fim, para ver que qualquer representação ρ de $\mathfrak{g}$ se estende a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ consideremos, inicialmente, $\rho_1 : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$ definida num gerador $X_1 \cdots X_k$ por

$$\rho_1(X_1 \cdots X_k) = \rho(X_1) \cdots \rho(X_k).$$

Isso define uma representação de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ em V. Como ρ é uma representação (de álgebra de Lie) segue que $\mathcal{I} \subset \ker(\rho_1)$. Logo,

$$\tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$$

dada por $\tilde{\rho}(\overline{a}) = \rho_1(a)$ é bem definida e, na verdade, é uma representação de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que estende ρ.

Portanto, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 3.1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra abeliana. Logo, $[X, Y] = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$ e, assim, o ideal bilateral $\mathcal{I}$ em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ para obter $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é gerado por*

$$XY - YX \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \quad \textit{tal que} \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Logo, em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ vale $XY = YX$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, isto é, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa e abeliana. Seja $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ são combinações lineares de monômios do tipo

$$X_{i_1} \cdots X_{i_k}$$

com $X_{i_j} \in \mathcal{B}$. Como, em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $XY = YX$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, podemos reescrever esses monômios na forma

$$X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n}.$$

Portanto, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de polinômios.

O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt fornece bases para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ em termos de base de $\mathfrak{g}$. Nesse teorema não se faz restrição sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$. No entanto, enunciamos abaixo uma versão para dimensão finita.

Teorema 3.1.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $(X_1, \ldots, X_k)$ é uma base ordenada de $\mathfrak{g}$, como espaço vetorial, então os elementos da forma*

$$X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k}, \quad \textit{com} \quad m_i \in \mathbb{N}$$

formam uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Seja $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

A álgebra universal envolopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tem uma estrutura de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo tanto à esquerda quanto à direita. De fato, considerando a operação

$$\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}),$$

dada por

$$(h, u) \mapsto hu.$$

vemos que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tem uma estrutura de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo à esquerda.

De modo análogo, definimos uma estrutura de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo à direita.

Proposição 3.1.2. *Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, então $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, visto como $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo tanto à esquerda quanto à direita, é livre.*

Demonstração. Seja U um subespaço vetorial complementar a $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, isto é,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus U.$$

Fixemos bases ordenadas $(H_1, \ldots, H_r)$ e $(X_1, \ldots, X_s)$ de $\mathfrak{h}$ e de U, respectivamente. Assim, as sequências

$$(H_1, \ldots, H_r, X_1, \ldots, X_s) \ \text{ e } \ (X_1, \ldots, X_s, H_1, \ldots, H_r)$$

são bases ordenadas de $\mathfrak{g}$.

Dados $\mu = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ e $\nu = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ denotemos por H^μ e X^ν os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ definidos por $H^\nu = H_1^{m_1} \cdots H_r^{m_r}$ e $X^\nu = X_1^{n_1} \cdots X_s^{n_s}$.

Pelo Teorema 3.1.1, os conjuntos

$$\{H^\mu X^\nu : \mu \in \mathbb{N}^r \text{ e } \nu \in \mathbb{N}^s\} \ \text{ e } \ \{X^\nu H^\mu : \mu \in \mathbb{N}^r \text{ e } \nu \in \mathbb{N}^s\}$$

são bases de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Logo, o conjunto

$$\{X^\nu : \nu \in \mathbb{N}^s\}$$

é uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ visto como $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo à esquerda ou à direita.

Portanto, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, visto como $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo tanto à esquerda quanto à direita, é livre. $\square$

O centro de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é denotado por $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Se ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ num espaço vetorial V, então existe uma extensão $\tilde{\rho}$ de ρ a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Assim, cada $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pode ser visto como um $\mathfrak{g}$-endomorfismo de V, $u : V \to V$. Usamos a notação u_V para indicar que estamos pensando no elemento $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ como um endomorfismo de V.

Definição 3.1.1. *Dizemos que um $\mathfrak{g}$-módulo V tem **caracter central** quando existe um $\mathfrak{g}$-homomorfismo $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{K}$ tal que para todo $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $z_V = \chi(z) I_V$, onde I_V denota a identidade de V. Nesse caso, χ é chamado **caracter central** de V.*

3.2 REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ e W um $\mathfrak{h}$-módulo. Consideremos a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, como um $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo à direita. Assim, podemos definir um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda V, através do produto tensorial

$$V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} W.$$

Definição 3.2.1. *O $\mathfrak{g}$-módulo $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} W$ é denominado **$\mathfrak{g}$-módulo induzido por** W e denotado por $V = ind(W, \mathfrak{g})$.*

Denotemos por η a representação de $\mathfrak{h}$ associada a estrutura de $\mathfrak{h}$-módulo de W e por ρ a representação de $\mathfrak{g}$ associada a estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo de V, isto é, se $v = u_0 \otimes w_0$, com $u_0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $w_0 \in W$, é um elemento básico de V, então para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$\rho(u)(v) = \rho(u)(u_0 \otimes w_0) = (uu_0) \otimes w_0.$$

Definição 3.2.2. *A representação ρ de $\mathfrak{g}$ é denominada **representação induzida** por η e denotada por $\rho = ind(\eta, \mathfrak{g})$.*

Observação 3.2.1. *Como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo à direita livre temos que a aplicação*

$$w \mapsto 1 \otimes w$$

de W em V é um $\mathfrak{h}$-homomorfismo injetor, isto é, W é imerso em V por este homomorfismo e assim identificado com um $\mathfrak{h}$-submódulo de V.

Através desta imersão, um elemento $w \in W$ se identifica com $1 \otimes w \in V$ e, às vezes, usamos a notação $w = 1 \otimes w$, representando a identificação por esta imersão. O $\mathfrak{g}$-módulo V é gerado por W, pois se $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $w \in W$, então

$$u \otimes w = u(1 \otimes w) = uw,$$

isto é, os elementos básicos de V são múltiplos de elementos de W, por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

A imersão de W em V, na Observação 3.2.1, é universal, no sentido da seguinte proposição, que é uma consequência das propriedades do produto tensorial.

Proposição 3.2.1. *Sejam $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, W um $\mathfrak{h}$-módulo e V o $\mathfrak{g}$-módulo induzido por W. Se V' é um $\mathfrak{g}$-módulo, e $\psi : W \to V'$ é um $\mathfrak{h}$-homomorfismo, então ψ pode ser estendido unicamente a um $\mathfrak{g}$-homomorfismo $\varphi : V \to V'$. Além disso, $\psi \mapsto \varphi$ é uma aplicação bijetora de $Hom_{\mathfrak{h}}(W, V')$ em $Hom_{\mathfrak{g}}(V, V')$.*

Lema 3.2.1. *Sejam $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ uma representação unidimensional de $\mathfrak{g}$ e $\mathcal{N}$ o núcleo de f, em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Se $\mathcal{L}$ é o ideal à esquerda e $\mathcal{R}$ o ideal à direita de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ gerados por $X - f(X)$, com $X \in \mathfrak{g}$, então $\mathcal{N} = \mathcal{L} = \mathcal{R}$.*

Demonstração. Temos que $X - f(X) \in \mathcal{N}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, pois

$$f\,(X - f(X) \cdot 1) = f(X) - f(X) = 0.$$

Como $\mathcal{N}$ é um ideal bilateral temos que $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$.

Por outro lado, seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathfrak{g}$ tal que $f(X_2) = \cdots = f(X_n) = 0$, ou seja, $X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}$. Temos que $X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{L}$ pois,

$$X_i - f(X_i) = X_i - 0 = X_i$$

para todo $i = 2, \ldots, n$. Cada elemento $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$ tal que $k_2 + \cdots + k_n > 0$ pertence a $\mathcal{L}$. De fato, nesse caso, existe j tal que $k_j > 0$ e como $\mathcal{L}$ é ideal à esquerda segue que $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in \mathcal{L}$. Daí, $\mathcal{L}$ tem codimensão ≤ 1 em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e, portanto, $\mathcal{L} = \mathcal{N}$. De modo análogo, temos $\mathcal{R} = \mathcal{N}$. $\square$

Observação 3.2.2. *Sejam $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, W um $\mathfrak{h}$-módulo e $(X_1, \ldots, X_s)$ uma base de um subespaço complementar a $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. O conjunto $\{X^\nu : \nu \in \mathbb{N}^s\}$ é uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, visto como $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-módulo à direita (veja a demonstração da Proposição 3.1.2).*

Definindo $V = ind(W, \mathfrak{g})$, temos

$$V = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^s} (X^\nu \otimes W).$$

De fato, dado um elemento básico $v = u \otimes w \in V$ e escrevendo $u = k_1 X^{\nu_1} + \cdots + k_r X^{\nu_r}$ com $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{K}$ e $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}^s$ temos que

$$v = u \otimes w = \left(\sum_j k_j X^{\nu_j} \right) \otimes w = \sum_j k_j \left(X^{\nu_j} \otimes w \right) = \sum_j \left(X^{\nu_j} \otimes (k_j w) \right),$$

o que mostra que $V \subset \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^s} (X^\nu \otimes W)$, concluindo a afirmação.

Seja ρ a representação de $\mathfrak{g}$ associada ao módulo V. Se $w \in W$, então

$$X^\nu \otimes w = X^\nu (1 \otimes w) = \rho(X^\nu)(1 \otimes w) = \rho(X^\nu) w.$$

Consequentemente, a restrição de $\rho(X^\nu)$ a W, $\rho(X^\nu)_{|W}$, é um isomorfismo do espaço vetorial W no espaço vetorial $\rho(X^\nu)(W)$, e V é a soma direta dos espaços $\rho(X^\nu)(W)$

$$V = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^s} \rho(X^\nu)(W).$$

Se $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, então $\rho(u)$ pode ser calculado da seguinte maneira. Para cada $\nu \in \mathbb{N}^s$, escrevemos

$$uX^\nu = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^s} X^\mu u_{\mu\nu},$$

onde $u_{\mu\nu} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Assim, se $w \in W$, então pelo que foi feito acima, temos

$$\begin{aligned}
\rho(u) \left(\rho(X^\nu) w \right) &= \rho(u) \left(X^\nu \otimes w \right) = (uX^\nu) \otimes w = uX^\nu (1 \otimes w) \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{N}^s} X^\mu u_{\mu\nu} \left(1 \otimes w \right) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^s} X^\mu \left(u_{\mu\nu} \otimes w \right) \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{N}^s} X^\mu \left(1 \otimes u_{\mu\nu} w \right) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^s} X^\mu u_{\mu\nu} w \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{N}^s} \rho(X^\mu) \left(u_{\mu\nu} w \right).
\end{aligned}$$

Proposição 3.2.2. *Sejam $\mathfrak{h}, \eta, W, \rho$ e V como nas definições 3.2.1 e 3.2.2, com $W \subset V$. Se w é um gerador do $\mathfrak{h}$-módulo W e $\mathcal{L}$ é o anulador de w em $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, então:*

1. *A aplicação* $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow V$ *definida por* $\varphi(u) = uw$*, para todo* $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *é sobrejetora e tem núcleo* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{L}$*.*

2. *Se* $\psi : \dfrac{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{L}} \longrightarrow V$ *é a aplicação obtida de* φ *por passagem ao quociente, então* ψ *é um isomorfismo de* $\mathfrak{g}$*-módulos.*

3. *Se* η *é unidimensional e pode, portanto, ser identificada com uma forma linear em* $\mathfrak{h}$*, então* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{L}$ *é um ideal de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *à esquerda gerado por* $X - \eta(X)$*, para todo* $X \in \mathfrak{h}$*.*

Demonstração. Temos, por hipótese, que $\mathcal{U}(\mathfrak{h})w = W$. Daí,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})w \supset \mathcal{U}(\mathfrak{g})W = V,$$

isto é, $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})w$ e, assim, φ é sobrejetora.

Utilizando a notação da Observação 3.2.2 e, para cada $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, escrevendo $u = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^s} X^\nu u_\nu$, com $u_\nu \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, obtemos

$$uw = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^s} X^\nu \otimes u_\nu w$$

Logo,

$$\begin{aligned} uw = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum X^\nu \otimes u_\nu w = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_\nu w = 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^s \\ &\Leftrightarrow \quad u_\nu \in \mathcal{L}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^s \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{L}, \end{aligned}$$

e, assim, $\ker \varphi = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{L}$, mostrando a afirmação (1).

Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, temos

$$\varphi(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2)w = u_1 w + u_2 w = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

e

$$\varphi(u_1 u_2) = (u_1 u_2)w = u_1(u_2 w) = u_1 \varphi(u_2),$$

de onde vemos que φ é um $\mathfrak{g}$-homomorfismo, concluindo a afirmação (2).

A afirmação (3) segue diretamente do Lema 3.2.1. □

3.3 REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS TORCIDAS

Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita, $u : E \to E$ um operador linear e F um subespaço de E que é invariante por u, isto é, $u(F) \subset F$. Denotamos o traço de um operador u por tru e o escalar $tru - tr(u_{|F})$ por $tr_{E|F}u$, isto é,

$$tr_{E|F}u = tru - tr(u_{|F}).$$

Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Para cada $H \in \mathfrak{h}$, denotemos por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ o operador linear $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, dado por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)(X) = [H, X]$. O fato de $\mathfrak{h}$ ser subálgebra significa que $\mathfrak{h}$ é invariante pelo operador $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$. Além disso, dados $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ temos

$$tr(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}[H_1, H_2]) = tr\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_1)\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_2) - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_2)\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_1)\right) = 0$$

e

$$tr(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}[H_1, H_2]_{|\mathfrak{h}}) = tr\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_1)_{|\mathfrak{h}}\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_2)_{|\mathfrak{h}} - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_2)_{|\mathfrak{h}}\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H_1)_{|\mathfrak{h}}\right) = 0,$$

assim, a aplicação $\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(H) = \frac{1}{2} tr_{\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}}} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$$

é uma forma linear que se anula em $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Logo, $\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ é uma representação unidimensional de $\mathfrak{h}$.

Seja η uma representação de $\mathfrak{h}$ em W. Para cada $H \in \mathfrak{h}$, escrevemos

$$\tilde{\eta}(H) = \eta(H) + \theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(H) \cdot 1.$$

Como soma de representações é uma representação, temos que $\tilde{\eta}$ é uma representação de $\mathfrak{h}$ em W.

A representação $ind(\tilde{\eta}, \mathfrak{g})$ é chamada **representação torcida de $\mathfrak{g}$ induzida por** η e é denotada por $ind^{\sim}(\eta, \mathfrak{g})$.

O $\mathfrak{g}$-módulo associado a essa representação é chamado **$\mathfrak{g}$-módulo torcido induzido** pelo $\mathfrak{h}$-módulo W e é denotado por $ind^{\sim}(W, \mathfrak{g})$.

4 REPRESENTAÇÕES COM PESO MÁXIMO

Neste capítulo, estudamos as representações com peso máximo de álgebras de Lie semissimples. O principal objetivo aqui é construir um espaço de representação, com peso máximo, universal no sentido em que qualquer outro espaço com peso máximo é um quociente deste. Esses espaços são definidos como uma representação torcida induzida por uma representação unidimensional de uma subálgebra de Borel e são chamados módulos de Verma. Os módulos de Verma foram construídos a partir dos trabalhos de Verma [15] e diversos resultados foram obtidos por Bernstein-Gelfand-Gelfand [1]. Este capítulo é baseado em [2]. O assunto estudado aqui pode ser consultado também, por exemplo, nas referências: [13], [10] e [7]

4.1 REPRESENTAÇÕES DE $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$

4.1.1 **Extensão do corpo**

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão finita. Denotemos por $\overline{\mathbb{K}}$ o fecho algébrico de $\mathbb{K}$ e por $V_{\overline{\mathbb{K}}}$ a extensão de V dada por $V_{\overline{\mathbb{K}}} = V \otimes \overline{\mathbb{K}}$.

Para cada $v \in V$, denotemos por $\overline{v}$ o elemento $\overline{v} = v \otimes 1 \in V_{\overline{\mathbb{K}}}$. Com essa notação, se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$ é uma base de V então, $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{v}_1, \dots \overline{v}_n\}$ é uma base de $V_{\overline{\mathbb{K}}}$, visto como espaço vetorial sobre $\overline{\mathbb{K}}$ (veja [5], Seção 1.13). Além disso, a aplicação

$$v \in V \mapsto v \otimes 1 \in V_{\overline{\mathbb{K}}}$$

é linear e injetora, quando os espaços são considerados sobre $\mathbb{K}$. Assim, V se identifica ao subespaço $V \otimes 1$ de $V_{\overline{\mathbb{K}}}$.

Seja $\mathcal{C} = \{z_k : k \in I\}$ uma base de $\overline{\mathbb{K}}$, visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $w \in V_{\overline{\mathbb{K}}}$ então existem $k_1, \dots, k_s \in I$ e $u_1, \dots, u_s \in V$ tal que

$$w = z_{k_1}\overline{u}_1 + \cdots + z_{k_s}\overline{u}_s = u_1 \otimes z_{k_1} + \cdots + u_s \otimes z_{k_s}. \tag{4.1}$$

De fato, existem $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que

$$w = x_1\overline{v}_1 + \cdots + x_n\overline{v}_n.$$

Como $\mathcal{C}$ é base, para cada j, existem $a_{1j}, \dots, a_{sj} \in \mathbb{K}$ tal que $x_j = a_{1j}z_{k_1} + \cdots + a_{sj}z_{k_s}$. Para cada i, consideremos $u_i \in V$ definido por $\overline{u}_i = a_{i1}\overline{v}_1 + \cdots + a_{in}\overline{v}_n \in V$. Temos que

$$\begin{aligned} w &= (a_{11}z_{k_1} + \cdots + a_{s1}z_{k_s})\overline{v}_1 + \cdots + (a_{1n}z_{k_1} + \cdots + a_{sn}z_{k_s})\overline{v}_n \\ &= (a_{11}\overline{v}_1 + \cdots + a_{1n}\overline{v}_n)z_{k_1} + \cdots + (a_{s1}\overline{v}_1 + \cdots + a_{sn}\overline{v}_n)z_{k_s} \\ &= z_{k_1}\overline{u}_1 + \cdots + z_{k_s}\overline{u}_s, \end{aligned}$$

demonstrando a afirmação.

Consideremos, agora, uma transformação linear $T : V \to V$. Denotemos por $\overline{T}$ a extensão de T a $V_{\overline{\mathbb{K}}}$, isto é, $\overline{T}$ é definida na base $\overline{\mathcal{B}}$, por

$$\overline{T}(\overline{v}_j) = \overline{T(v_j)} = T(v_j) \otimes 1.$$

Para cada autovalor $\mu \in \overline{\mathbb{K}}$ de $\overline{T}$ denotamos por $(V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu$ o autoespaço de $\overline{T}$ associado a μ.

Lema 4.1.1. *Utilizando a notação acima, temos:*

1. *se* $u_1, \ldots, u_s \in V$ *e* $k_1, \ldots, k_s \in I$ *são tais que* $z_{k_1}\overline{u}_1 + \cdots + z_{k_s}\overline{u}_s = 0$, *então* $u_1 = \cdots = u_s = 0$*;*

2. *se* $\mu \in \mathbb{K}$ *é um autovalor de* $\overline{T}$*, então existe um subespaço* $W \subset V$ *tal que* $(V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu = W \otimes \overline{\mathbb{K}}$*. Em particular,* μ *é autovalor de* T *e* $V_\mu = W$*.*

Demonstração. Para cada j, sejam $a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in \mathbb{K}$ tal que $u_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= z_{k_1}\overline{u}_1 + \cdots + z_{k_s}\overline{u}_s \\ &= z_{k_1}(a_{11}\overline{v}_1 + \cdots + a_{n1}\overline{v}_n) + \cdots + z_{k_s}(a_{1s}\overline{v}_1 + \cdots + a_{ns}\overline{v}_n) \\ &= (a_{11}z_{k_1} + \cdots + a_{1s}z_{k_s})\overline{v}_1 + \cdots + (a_{n1}z_{k_1} + \cdots + a_{ns}z_{k_s})\overline{v}_n. \end{aligned}$$

Como $\overline{\mathcal{B}}$ é linearmente independente temos que para todo i, $a_{i1}z_{k_1} + \cdots + a_{is}z_{k_s} = 0$ e, como $\mathcal{C}$ é linearmente independente temos que para todo j, $a_{ij} = 0$, mostrando que $u_j = 0$ para todo j.

Para mostrarmos a segunda parte, seja w um autovetor de $\overline{T}$ associado a μ. Por (4.1), existem $k_1, \ldots, k_s \in I$ e $u_1, \ldots, u_s \in V$ tal que

$$w = z_{k_1}\overline{u}_1 + \cdots + z_{k_s}\overline{u}_s.$$

Como $\overline{T}w = \mu w$, temos

$$z_{k_1}\overline{Tu_1} + \cdots + z_{k_s}\overline{Tu_s} = z_{k_1}(\mu\overline{u}_1) + \cdots + z_{k_s}(\mu\overline{u}_s),$$

isto é,

$$z_{k_1}(\overline{T}\overline{u}_1 - \mu\overline{u}_1) + \cdots + z_{k_s}(\overline{T}\overline{u}_s - \mu\overline{u}_s) = 0.$$

Por *1.*, $\overline{T}\overline{u}_j = \mu\overline{u}_j$ para todo j, isto é, $\overline{u}_j \in (V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu$, para todo j. Como $w \neq 0$, existe j tal que $u_j \neq 0$ e, assim, existe $W \subset V$ tal que $W \otimes 1 = (V \otimes 1) \cap (V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu \neq \{0\}$.

Por definição de W, temos $(V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu \supset W \otimes \overline{\mathbb{K}}$. Além disso, pelo que foi feito acima, juntamente com (4.1) concluímos que $(V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu \subset W \otimes \overline{\mathbb{K}}$, terminando a demonstração. □

Utilizando a notação acima, se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V então ρ se estende a uma representação $\overline{\rho}$ de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ em $V_{\overline{\mathbb{K}}}$, chamada **extensão** de ρ.

4.1.2 Representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$

Sejam X, H e Y os elementos de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ dados por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O conjunto $\{X, H, Y\}$ é uma base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ e os colchetes entre os elementos desta base são dados por

$$[H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [X,Y] = H.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^{n+1}$, $e_0 = 0$ e consideremos a aplicação linear $\rho_n : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^{n+1})$ definida na base $\{X, H, Y\}$ por

$$\begin{aligned} \rho_n(X)e_i &= \mu_i e_{i-1} \\ \rho_n(H)e_i &= (n-2i)e_i \\ \rho_n(Y)e_i &= e_{i+1}, \end{aligned}$$

sendo $\mu_i = i(n-i+1)e_{i-1}$, para todo i, tal que $0 \leq i \leq n$.

Observação 4.1.1. *Em relação à base canônica, a matriz de $\rho_n(X)$ é triangular superior, a matriz de $\rho_n(Y)$ é triangular inferior e a matriz de $\rho_n(H)$ é diagonal, sendo autovalores os números inteiros na forma $n-2i$. Notemos ainda que o maior autovalor de $\rho_n(H)$ é n.*

Teorema 4.1.1. *ρ_n é uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ em $\mathbb{K}^{n+1}$.*

Demonstração. Notemos que para todo $0 \leq i \leq n$, valem

$$\begin{aligned} [\rho_n(H), \rho_n(X)]e_i &= \rho_n(H)\rho_n(X)e_i - \rho_n(X)\rho_n(H)e_i \\ &= \mu_i \rho_n(H)e_{i-1} - (n-2i)\rho_n(X)e_i \\ &= \mu_i(n-2(i-1))e_{i-1} - \mu_i(n-2i)e_{i-1} \\ &= 2\mu_i e_{i-1} = 2\rho_n(X)e_i \\ &= \rho_n([H,X])e_i. \end{aligned}$$

Logo, $\rho_n([H,X]) = [\rho_n(H), \rho_n(X)]$. De modo análogo,

$$\begin{aligned} [\rho_n(H), \rho_n(Y)]e_i &= \rho_n(H)\rho_n(Y)e_i - \rho_n(Y)\rho_n(H)e_i \\ &= \rho_n(H)e_{i+1} - (n-2i)\rho_n(Y)e_i \\ &= (n-2(i+1))e_{i+1} - (n-2i)e_{i+1} \\ &= -2e_{i+1} = -2\rho_n(Y)e_i \\ &= \rho_n([H,X])e_i, \end{aligned}$$

isto é, $\rho_n([H,Y]) = [\rho_n(H), \rho_n(Y)]$. Além disso,

$$\begin{aligned}
[\rho_n(X), \rho_n(Y)]e_i &= \rho_n(X)\rho_n(Y)e_i - \rho_n(Y)\rho_n(X)e_i \\
&= \rho_n(X)e_{i+1} - \mu_i\rho_n(Y)e_{i-1} \\
&= \mu_{i+1}e_i - \mu_i e_i \\
&= (n-2i)e_i = \rho_n(H)e_i \\
&= \rho_n([X,Y])e_i,
\end{aligned}$$

e, assim, $\rho_n([X,Y]) = [\rho_n(X), \rho_n(Y)]$. A partir daí, concluímos, pela linearidade de ρ_n que ρ_n é um homomorfismo e, consequentemente, uma representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$.

Seja $W \subset \mathbb{K}^{n+1}$ um subespaço não nulo e invariante por ρ_n. Seja $w \in W - \{0\}$ e escrevamos

$$w = a_1e_1 + \cdots + a_{n+1}e_{n+1}.$$

Seja i o menor índice tal que $a_i \neq 0$. Temos que $\rho_n(Y)^{n+1-i}w = a_ie_{n+1}$. Como W é invariante por $\rho_n(Y)$ e $a_i \neq 0$ temos que $e_{n+1} \in W$. Além disso, $\rho(X)e_{n+1} = \mu_{n+1}e_n$ e como W é invariante por $\rho_n(X)$ e $\mu_{n+1} \neq 0$ temos que $e_n \in W$. Continuando aplicando $\rho_n(X)$ concluímos que $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} \in W$ e, assim, $W = \mathbb{K}^{n+1}$. Portanto, ρ_n é irredutível. □

Proposição 4.1.1. *Seja ρ uma representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ em V. Se existem $\mu \in \mathbb{K}$ e $v_0 \in V$ tal que $\rho(H)v_0 = \mu v_0$, então:*

1. $\rho(H)\rho(X)v_0 = (\mu+2)\rho(X)v_0$.
2. $\rho(H)\rho(Y)v_0 = (\mu-2)\rho(Y)v_0$.
3. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $v_i = \rho(Y)^i v_0$ e denotemos $v_{-1} = 0$. Se $\rho(X)v_0 = 0$, então*
   a) $\rho(H)v_i = (\mu - 2i)v_i$.
   b) $\rho(X)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$.
   c) *O subespaço W, de V, gerado por $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ é invariante por ρ.*

Demonstração. Como ρ é representação, temos para todos $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$,

$$\rho[Z_1, Z_2] = \rho(Z_1)\rho(Z_2) - \rho(Z_2)\rho(Z_1),$$

isto é,

$$\rho(Z_1)\rho(Z_2) = \rho(Z_2)\rho(Z_1) + \rho[Z_1, Z_2],$$

assim, utilizando a relação entre os colchetes dos elementos da base, obtemos

$$\rho(H)\rho(X)v_0 = \rho(X)\rho(H)v_0 + 2\rho(X)v_0 = (\mu+2)\rho(X)v_0$$

e

$$\rho(H)\rho(Y)v_0 = \rho(Y)\rho(H)v_0 - 2\rho(Y)v_0 = (\mu-2)\rho(Y)v_0,$$

o que mostra as afirmações (1) e (2).

Mostremos a afirmação (3). Notemos que, por hipótese, *(a)* é verdadeiro para $i = 0$. Suponhamos, por indução, que $\rho(H)v_i = (\mu - 2i)v_i$. Assim,

$$\begin{aligned}\rho(H)v_{i+1} &= \rho(H)\rho(Y)v_i = \rho(Y)\rho(H)v_i - 2\rho(Y)v_i \\ &= (\mu - 2i)\rho(Y)v_i - 2\rho(Y)v_i = (\mu - 2(i+1))\rho(Y)v_i \\ &= (\mu - 2(i+1))\, v_{i+1}.\end{aligned}$$

Logo, $\rho(H)v_i = (\mu - 2i)v_i$ para todo i.

De modo análogo, por hipótese, *(b)* é verdadeiro para $i = 0$. Suponhamos, por indução, que $\rho(X)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}\rho(X)v_{i+1} &= \rho(X)\rho(Y)v_i = \rho(Y)\rho(X)v_i + \rho(H)v_i \\ &= i(\mu - i + 1)\rho(Y)v_{i-1} + (\mu - 2i)v_i = i(\mu - i + 1)v_i + (\mu - 2i)v_i \\ &= (i+1)(\mu - i)v_i.\end{aligned}$$

Logo, $\rho(X)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$ para todo i, concluindo os ítens *(a)* e *(b)*.

Finalmente, por *(a)*, W é invariante por $\rho(H)$, por *(b)*, W é invariante por $\rho(X)$ e por definição de v_i e de W temos que W é invariante por $\rho(Y)$. Portanto, pela linearidade de ρ segue que W é invariante por ρ, concluindo a demonstração. □

Teorema 4.1.2. *Seja ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ em V. Se $\dim V = n+1$, então ρ é equivalente a ρ_n.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $\mathbb{K}$ é fechado algebricamente.

Como V tem dimensão finita, $\rho(H)$ tem um autovalor, que denotamos por λ. Seja $v \in V$ um autovetor associado a λ. Pela Proposição 4.1.1, $\rho(H)\rho(X)v = (\lambda + 2)\rho(X)v$. Suponhamos, $\rho(H)\rho(X)^i v = (\lambda + 2i)\rho(X)v$. Assim,

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(X)^{i+1}v &= \rho(H)\rho(X)\left(\rho(X)^i v\right) \\ &= \rho(X)\rho(H)\left(\rho(X)^i v\right) + \rho[H, X]\left(\rho(X)^i v\right) \\ &= (\lambda + 2i)\rho(X)^{i+1}v + 2\rho(X)^{i+1}v \\ &= (\lambda + 2(i+1))\rho(X)^{i+1}v.\end{aligned}$$

Logo, por indução, se i é tal que $\rho(X)^i v \neq 0$, então $\rho(X)^i v$ é um autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda + 2i$.

Como autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes e V tem dimensão finita, existe $i_0 \geq 1$ tal que $\rho(X)^{i_0}v = 0$ e $\rho(X)^{i_0 - 1}v \neq 0$.

Sejam $v_0 = \rho(X)^{i_0 - 1}v$ e $\mu = \lambda + 2i_0$. Assim,

$$\rho(H)v_0 = \mu v_0, \quad \text{e} \quad \rho(X)v_0 = 0.$$

Para cada i, seja
$$v_i = \rho(H)(Y)^i v_0.$$
Pela Proposição 4.1.1, cada $v_i \neq 0$ é um autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\mu - 2i$. Como autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes temos que existe um k tal que $v_k = 0$. Seja s o primeiro inteiro tal que $v_{s+1} = 0$. Pelo que foi feito acima e por definição de v_i, a ação de ρ nos vetores $v_0, v_1, \ldots, v_s$ é dada por

$$\rho(H)v_0 = \mu v_0,\ \rho(H)v_1 = (\mu - 2)v_1, \ldots,\ \rho(H)v_s = (\mu - 2s)v_s$$

e
$$\rho(Y)v_0 = v_1,\ \rho(Y)v_1 = v_2, \ldots,\ \rho(Y)v_{s-1} = v_s,\ \rho(Y)v_s = 0.$$
Pela Proposição 4.1.1, para todo i

$$\rho(X)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}.$$

Utilizando novamente a Proposição 4.1.1, temos que o subespaço gerado por $\{v_0, v_1, \ldots, v_s\}$ é invariante por ρ e como ρ é irredutível temos que $\{v_0, v_1, \ldots, v_s\}$ é uma base V e, assim, $s = n$.

Agora, como
$$[X, Y] = H \quad \text{e} \quad \rho(H)v_n = (\mu - 2n)v_n$$
temos

$$\begin{aligned}
(\mu - 2n)v_n &= \rho(H)v_n = \rho([X, Y])v_n \\
&= \rho(X)\rho(Y)v_n - \rho(Y)\rho(X)v_n \\
&= 0 - n(\mu - n + 1)\rho(Y)v_{n-1} \\
&= -n(\mu - n + 1)v_n.
\end{aligned}$$

Logo, $\mu - 2n = -n(\mu - n + 1)$ e, consequentemente, $\mu = n$. Portanto, ρ é equivalente a ρ_n.

Finalmente, no caso geral, considerando o fecho algébrico $\overline{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$, $V_{\overline{\mathbb{K}}} = V \otimes \overline{\mathbb{K}}$ e $\overline{\rho}(H)$ a extensão de $\rho(H)$ a $V_{\overline{\mathbb{K}}}$, obtemos um autovalor μ de $\overline{\rho}(H)$. Utilizando o que foi feito acima, temos que μ é inteiro e como $\mathbb{K}$ é de característica zero temos que $\mu \in \mathbb{K}$. Pelo Lema 4.1.1, μ é um autovalor de $\rho(H)$ e repetindo o processo acima, mostramos que ρ é equivalente a ρ_n, concluindo a demonstração. □

Corolário 4.1.2.1. *Se ρ é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ de dimensão finita, então existem $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$ tal que ρ é equivalente $\rho_{n_1} \oplus \rho_{n_2} \oplus \cdots \oplus \rho_{n_p}$.*

Demonstração. Seja V o espaço da representação ρ. Como $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ é semissimples temos, pelo Teorema de decomposição de Weyl, que ρ é completamente redutível, isto é, existem subespaços $V_1, \ldots, V_p$ invariantes por ρ tal que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$$

e $\rho_{|V_i}$ é irredutível. Se $n_i = \dim V_i - 1$, então pelo Teorema 4.1.2, $\rho_{|V_i}$ é equivalente a ρ_{n_i}. Portanto, ρ é equivalente a $\rho_{n_1} \oplus \rho_{n_2} \oplus \cdots \oplus \rho_{n_p}$. $\square$

Corolário 4.1.2.2. *Sejam ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ em V e $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ a base de V, como no Teorema 4.1.2. Se $\lambda = n - 2i$ é autovalor de $\rho(H)$, associado a v_i então*

1. *Se $\lambda > 0$, então $\rho(Y)^{n-2i}v_i = v_{n-i} \neq 0$.*
2. *Se $\lambda < 0$, então $\rho(X)^{2i-n}v_i = \mu_i v_{n-i} \neq 0$, onde $\mu_i = (i(i-1)\cdots(n-i+1))^2$.*

Demonstração. Temos que

$$\rho(Y)^{n-2i}v_i = \rho(Y)^{n-2i}\rho(Y)^i v_0 = \rho(Y)^{n-i}v_0 = v_{n-i}$$

Como, neste caso, $0 \leq n-i \leq n$ temos que v_{n-i} é um dos vetores da base de V e, portanto, $v_{n-i} \neq 0$, mostrando a afirmação (1).

A afirmação (2) segue por indução notando que $\rho(X)v_i = i(n-i+1)v_{i-1}$. $\square$

4.2 ESPAÇOS DE PESOS

Seja $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ um par decomponível (veja as notações na Seção 2.3), sendo $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, sobre um corpo de característica zero $\mathbb{K}$.

A ideia é estudar as representações de $\mathfrak{g}$ a partir dos pesos da restrição da representação a subálgebra $\mathfrak{h}$.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Consideremos a representação de $\mathfrak{h}$ em V, $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$, obtida por restrição de ρ a $\mathfrak{h}$. A seguir denotamos a representação $\rho_{\mathfrak{h}}$, também, por ρ.

Para cada $\mu \in \mathfrak{h}^*$ consideremos o subespaço

$$V_\mu = \{v \in V : \rho(H)v = \mu(H)v, \quad \text{para} \quad \text{todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Dizemos que $\mu \in \mathfrak{h}^*$ é **peso** da representação ρ (ou do módulo V) se $V_\mu \neq \{0\}$. Nesse caso, V_μ é chamado **espaço de pesos** associado a μ e a sua dimensão é chamada **multiplicidade** de μ. O conjunto de todos os pesos de V (ou de ρ) é denotado por $\mathcal{P}(V)$.

Proposição 4.2.1. *Sejam V e W dois $\mathfrak{g}$-módulos, $\varphi : V \to W$ um $\mathfrak{g}$-homomorfismo sobrejetor e $U \subset V$ um $\mathfrak{g}$-submódulo. Se $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ então:*

1. *$U = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} U_\mu$ e $W = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} W_\mu$. Em particular, cada peso de U é um peso de V;*
2. *para cada μ, $\varphi(V_\mu) = W_\mu$. Em particular, os pesos de W são pesos de V e se μ é peso de V e $\varphi(V_\mu) \neq \{0\}$ então μ é peso de W.*

Demonstração. Como U é submódulo de V e $V = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V_\mu$, temos que

$$U = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} (U \cap V_\mu) = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} U_\mu,$$

onde $U_\mu = U \cap V_\mu \subset V_\mu$. Assim, se μ é peso de U, isto é, $U_\mu \neq \{0\}$, então $V_\mu \neq \{0\}$ e, portanto, μ é peso de V.

Seja μ dado. Se $v \in V_\mu$, então para todo H,

$$H\varphi(v) = \varphi(Hv) = \mu(H)\varphi(v).$$

Logo, $\varphi(V_\mu) \subset W_\mu$. Assim, se $w \in W$ então existem $v \in V$ e $v_j \in V_{\mu_j}$ tal que $w = \varphi(v)$ e $v = v_1 + \cdots + v_n$. Daí, $w = \varphi(v) = \varphi(v_1) + \cdots + \varphi(v_n)$. Pelo que foi feito acima, $\varphi(v_j) \in W_{\mu_j}$ e assim $W = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} W_\mu$, concluindo a demonstração de (1).

Para terminar a demonstração da proposição basta mostrar que $\varphi(V_\mu) \supset W_\mu$. Para isso, notemos que se $W_\mu = \{0\}$ então vale a inclusão.

Seja $w \in W_\mu - \{0\}$. Como φ é sobrejetor, existe $v \in V$ tal que $w = \varphi(v)$. Escrevendo a decomposição de v, $v = v_1 + \cdots + v_n$, com $v_j \in V_{\mu_j}$, obtemos

$$\mu(H)w = Hw = H\varphi(v_1) + \cdots + H\varphi(v_n) = \mu_1(H)\varphi(v_1) + \cdots + \mu_n(H)\varphi(v_n) \in W_\mu.$$

Tomando H tal que $\mu(H) \neq 0$ e $\mu_k(H) \neq 0$, para todo $1 \leq k \leq n$, vemos que existe j tal que $\mu_j = \mu$ e $\varphi(v_k) = 0$ para todo $k \neq j$. Portanto, $\varphi(v_j) = \varphi(v) = w \neq 0$ e isto conclui a demonstração. □

Proposição 4.2.2. *Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V.*

1. *Se $\alpha \in \Pi$ e $\mu \in \mathfrak{h}^*$ então $\rho(\mathfrak{g}_\alpha)V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$.*
2. *A soma dos espaços de pesos $\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V_\mu$ é invariante por ρ.*

Demonstração. Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $v \in V_\mu$, então para todo $H \in \mathfrak{h}$, temos

$$\begin{aligned} HXv &= XHv + [H, X]v = X\mu(H)v + \alpha(H)Xv \\ &= (\mu + \alpha)(H)Xv. \end{aligned}$$

Isso mostra que $Xv \in V_{\mu+\alpha}$. Consequentemente, $\rho(\mathfrak{g}_\alpha)V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$ e, assim, vale (1).

Escrevendo $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ e $W = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V_\mu$ temos que se $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in W$ então

$$X = X_0 + X_1 + \cdots + X_n \quad \text{e} \quad v = v_0 + v_1 + \cdots + v_r,$$

com $X_0 \in \mathfrak{h}$, $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $\mu_j \in \mathfrak{h}$ e $v_j \in V_{\mu_j}$. Assim, denotando $\alpha_0 = 0$ e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, temos por (1),

$$Xv = \sum_{i,j} X_i v_j \in \bigoplus_{i,j} V_{\alpha_i+\mu_j} \subset W,$$

concluindo a demonstração. □

4.3 MÓDULOS DE VERMA

Fixemos um sistema de raízes Π e um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$. Denotemos por δ a semissoma das raízes positivas e por $\mathfrak{b}$ a subálgebra de Borel associada a Σ. Consideremos, ainda, a relação de ordem, em $\mathfrak{h}^*$, dada por $\mathcal{Q}_+$ (veja as definições e notações na Seção 2.3).

Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Consideremos a aplicação linear $\tau_\lambda : \mathfrak{b} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\tau_\lambda(H + X) = \lambda(H),$$

onde $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, $H \in \mathfrak{h}$ e $X \in \mathfrak{n}^+$. Como $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}^+$ temos, por definição, que τ_λ se anula em $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ e assim τ_λ é uma representação unidimensional de $\mathfrak{b}$.

Usamos a notação $\mathbb{K}_\lambda$ para indicar que estamos pensando em $\mathbb{K}$ como espaço da representação τ_λ ou, equivalentemente, com a estrutura de $\mathfrak{b}$-módulo definida por λ.

Consideremos a representação unidimensional $\tilde{\tau}_\lambda$ de $\mathfrak{b}$, definida por

$$\tilde{\tau}_\lambda(Z) = \tau_\lambda(Z) + \theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(Z)$$

e a representação torcida $\sigma = ind^{\sim}(\tau_\lambda, \mathfrak{g}) = ind(\tilde{\tau}_\lambda, \mathfrak{g})$, de $\mathfrak{g}$, induzida por τ_λ (veja as definições na Seção 3.3).

Definição 4.3.1. *O espaço da representação σ, isto é, o $\mathfrak{g}$-módulo induzido por $\mathbb{K}_\lambda$, é denominado* ***módulo de Verma*** *e denotado por $M(\lambda)$.*

Notemos que apesar da notação $M(\lambda)$, para o módulo de Verma definido por λ, $M(\lambda)$ depende também de $\mathfrak{h}$ e de Σ.

Para explicitarmos o módulo de Verma, desenvolvemos a expressão de $\tilde{\tau}_\lambda$.

Seja $Z \in \mathfrak{b}$ e escrevemos a decomposição $Z = H + X$, com $H \in \mathfrak{h}$ e $X \in \mathfrak{n}^+$. Assim, $ad_{\mathfrak{g}}(X)$ é nilpotente, $ad_{\mathfrak{g}}(H)_{|\mathfrak{h}} = 0$ e $\mathfrak{n}^-$ é invariante por $ad_{\mathfrak{g}}(H)$. Como $\mathfrak{g}$ se decompõe na forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, temos que

$$\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(Z) = \frac{1}{2} tr(ad_{\mathfrak{g}}(H)_{|\mathfrak{n}^-}).$$

Agora, se $\alpha \in \Pi^+$ então $ad_{\mathfrak{g}}(H)_{|\mathfrak{g}_{-\alpha}} = -\alpha(H) id$ e da decomposição $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, obtemos

$$\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(Z) = \frac{1}{2} tr(ad_{\mathfrak{g}}(H)_{|\mathfrak{n}^-}) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha(H) = -\delta(H).$$

Logo,

$$\tilde{\tau}_\lambda(Z) = \lambda(H) - \delta(H) = (\lambda - \delta)(H) = \tau_{\lambda - \delta}(Z),$$

isto é, $\tilde{\tau}_\lambda = \tau_{\lambda-\delta}$ e, assim, $\sigma = ind(\tilde{\tau}_\lambda, \mathfrak{g}) = ind(\tau_{\lambda-\delta}, \mathfrak{g})$. Portanto, o módulo de Verma $M(\lambda)$ é dado por

$$M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{K}_{\lambda-\delta}$$

(veja a Seção 3.2).

Proposição 4.3.1. *Se $M(\lambda)$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ são considerados como $\mathfrak{n}^-$-módulos à esquerda, então $M(\lambda)$ e $U(\mathfrak{n}^-)$ são isomorfos.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \to M(\lambda)$ definida por $\varphi(u) = u \otimes 1$. Por definição, e pelas propriedades de produto tensorial, temos que φ é um $\mathfrak{n}^-$-homomorfismo injetor. Pelo Teorema 3.1.1, de Poincaré-Birkhoff-Witt, se $(X_1, \ldots, X_s)$ é uma base ordenada de $\mathfrak{n}^-$ então $\{X^\nu : \nu \in \mathbb{N}^s\}$ é uma base de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Além disso, pela Observação 3.2.2,

$$M(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^s} (X^\nu \otimes \mathbb{K}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes 1,$$

onde a segunda igualdade segue do fato que se $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ e $k \in \mathbb{K}$ então $u \otimes k = (ku) \otimes 1$. Logo, φ é sobrejetora e, portanto, é um $\mathfrak{n}^-$-isomorfismo. □

Para cada raiz α, denotemos por X_α um elemento não nulo do espaço $\mathfrak{g}_\alpha$.

Lema 4.3.1. *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Pi$ e $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$, então para todo $H \in \mathfrak{h}$ vale*

$$[H, X_{\alpha_1}^{p_1} \cdots X_{\alpha_n}^{p_n}] = (p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\alpha_n)(H) X_{\alpha_1}^{p_1} \cdots X_{\alpha_n}^{p_n}.$$

Demonstração. A demonstração é por indução, aplicada duas vezes. Primeiro em relação ao expoente p e depois na quantidade de termos n.

Se $\alpha \in \Pi$ e $H \in \mathfrak{h}$, então

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha,$$

e assim o resultado vale para $p = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que para $p > 1$, $[H, X_\alpha^p] = \alpha(H) X_\alpha^p$. Assim,

$$\begin{aligned} [H, X_\alpha^{p+1}] &= H X_\alpha^{p+1} - X_\alpha^{p+1} H = (H X_\alpha^p) X_\alpha - (X_\alpha^p H) X_\alpha + X_\alpha^p (H X_\alpha) - X_\alpha^p (X_\alpha H) \\ &= [H, X_\alpha^p] X_\alpha + X_\alpha^p [H, X_\alpha] = p\alpha X_\alpha^{p+1} + \alpha(H) X_\alpha^{p+1} \\ &= (p+1)\alpha(H) X_\alpha^{p+1}. \end{aligned}$$

Logo, $[H, X_\alpha^p] = \alpha(H) X_\alpha^p$ para todo p.

Suponhamos o resultado verdadeiro com n fatores. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \Pi$ e $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{N}$. Denotando $m = n+1$ e $u = X_{\alpha_1}^{p_1} \cdots X_{\alpha_n}^{p_n}$, temos que se $H \in \mathfrak{h}$, então

$$\begin{aligned}
[H, uX_{\alpha_m}^{p_m}] &= HuX_{\alpha_m}^{p_m} - uX_{\alpha_m}^{p_m}H \\
&= (Hu)X_{\alpha_m}^{p_m} - (uH)X_{\alpha_m}^{p_m} + u(HX_{\alpha_m}^{p_m}) - u(X_{\alpha_m}^{p_m}H) \\
&= [H,u]X_{\alpha_m}^{p_m} + u[H, X_{\alpha_m}^{p_m}] \\
&= (p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\alpha_n)(H)uX_{\alpha_m}^{p_m} + p_m\alpha_m(H)uX_{\alpha_m}^{p_m} \\
&= (p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m)(H)X_{\alpha_1}^{p_1} \cdots X_{\alpha_m}^{p_m},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Teorema 4.3.1. *Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Se $\Pi^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, então:*

1. *para todo $\mu \in \mathfrak{h}^*$,*
$$M(\lambda)_\mu = \sum_{p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{N}} X_{-\alpha_1}^{p_1} \cdots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes \mathbb{K}$$
com $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ tais que $\lambda - \delta - p_1\alpha_1 - \cdots - p_n\alpha_n = \mu$;

2. *os pesos de $M(\lambda)$ tem a forma*
$$\lambda - \delta - \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha$$
onde n_α são inteiros não negativos;

3. *para todo $\mu \in \mathfrak{h}^*$,*
$$\dim M(\lambda)_\mu = \#\{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n : \lambda - \delta - \mu = p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\} \ < \ \infty;$$

4. *$M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M(\lambda)_\mu$;*

5. *$M(\lambda)_{\lambda-\delta} = 1 \otimes \mathbb{K}$, $\quad M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)M(\lambda)_{\lambda-\delta}$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)M(\lambda)_{\lambda-\delta} = \{0\}$.*

Demonstração. Se $H \in \mathfrak{h}$ e $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, então

$$\begin{aligned}
H(u \otimes 1) &= (Hu) \otimes 1 = ([H,u] + uH) \otimes 1 \\
&= [H,u] \otimes 1 + (uH) \otimes 1 \\
&= [H,u] \otimes 1 + u \otimes (H \cdot 1) \\
&= [H,u] \otimes 1 + (\lambda - \delta)(H)u \otimes 1. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Assim, se u é um monômio da forma $u = X_{-\alpha_1}^{p_1} \cdots X_{-\alpha_n}^{p_n}$ então, pelo Lema 4.3.1,

$$[H,u] = -(p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\alpha_n)(H)u.$$

Substituindo essa última igualdade em (4.2), obtemos

$$H(u \otimes 1) = (\lambda - \delta - p_1\alpha_1 - \cdots - p_n\alpha_n)(H)(u \otimes 1).$$

Pelo Teorema 3.1.1, de Poincaré-Birkhoff-Witt, os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ são combinações lineares de monômios do tipo $X_{-\alpha_1}^{p_1}\cdots X_{-\alpha_n}^{p_n}$. Pela Proposição 4.3.1, os elementos de $M(\lambda)$ são da forma $u\otimes 1$, com $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$. Portanto, $u\otimes 1\in M(\lambda)_\mu$ se, e somente se, u é combinação linear de monômios do tipo $X_{-\alpha_1}^{p_1}\cdots X_{-\alpha_n}^{p_n}$ satisfazendo $\mu=\lambda-\delta-p_1\alpha_1-\cdots-p_n\alpha_n$, o que mostra (1) e (2).

As demais afirmações são consequências do que foi feito acima: por exemplo, os elementos na forma $X_{-\alpha_1}^{p_1}\cdots X_{-\alpha_n}^{p_n}$ com $\mu=\lambda-\delta-p_1\alpha_1-\cdots-p_n\alpha_n$ geram o espaço $M(\lambda)_\mu$. Daí: (a) pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, obtemos (4); e (b) para concluir a afirmação (3), falta mostrar que a dimensão é finita. Mas, fixando $\mu=\lambda-\delta-p_1\alpha_1-\cdots-p_n\alpha_n$, temos $X_{-\alpha_1}^{m_1}\cdots X_{-\alpha_n}^{m_n}\in M(\lambda)_\mu$ se, somente se,

$$m_1\alpha_1+\cdots+m_n\alpha_n=p_1\alpha_1+\cdots+p_n\alpha_n.$$

Como as raízes positivas são combinações lineares das raízes simples com coeficientes inteiros não negativos, temos que a igualdade acima define um sistema linear nas variáveis $(m_1,\ldots,m_n)$ e com coeficientes inteiros não negativos. Mas um sistema linear deste tipo tem uma quantidade finita de soluções e, portanto, $M(\lambda)_\mu$ tem dimensão finita, para todo $\mu\in\mathfrak{h}^*$.

A afirmação (5) é consequência direta de (1), (2) e (3). □

Um peso λ é chamado **peso máximo** quando $\mathfrak{n}^+V_\lambda=\{0\}$. Nesse caso, um elemento não nulo $v\in V_\lambda$ é chamado **elemento primitivo**. Um elemento primitivo associado a um peso máximo λ é denotado, em geral, por v_λ.

Pelo Teorema 4.3.1, $\lambda-\delta$ é um peso máximo de $M(\lambda)$ e $1\otimes 1$ é um elemento primitivo associado a $\lambda-\delta$, isto é, $1\otimes 1\in M(\lambda)_{\lambda-\delta}$. O elemento $1\otimes 1$ é denominado **gerador canônico** ou **elemento primitivo canônico** de $M(\lambda)$.

Notemos, ainda pelo Teorema 4.3.1, que $\lambda-\delta$ é um peso máximo de $M(\lambda)$, em relação a ordem dada por $\mathcal{Q}_+$.

O próximo resultado, juntamente com o Teorema de Isomorfismo, assegura em particular que se V é um módulo com peso máximo λ então V é isomorfo a um quociente de $M(\lambda+\delta)$.

Teorema 4.3.2. *Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo, $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ e v um elemento de V_λ anulado por $\mathfrak{n}^+$. Se V é gerado por v como $\mathfrak{g}$-módulo, então:*

1. *existe exatamente um $\mathfrak{g}$-homomorfismo φ de $M(\lambda+\delta)$ em V tal que $\varphi(1\otimes 1)=v$. Este homomorfismo é sobrejetor.*

2. $V=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*}V_\mu$.

3. *Cada peso de V pertence a $\lambda - \mathcal{Q}_+$. Cada V_μ tem dimensão finita e $dim V_\lambda = 1$ se $V \neq \{0\}$.*

4. $V = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)v$.

5. *Cada endomorfismo do $\mathfrak{g}$-módulo V é escalar.*

6. *O módulo V tem caracter central.*

7. *O homomorfismo φ de 1) é bijetor se, e somente se, $V \neq \{0\}$ e u_V é injetivo para todo $u \in U(\mathfrak{n}^-) - \{0\}$.*

Demonstração. Consideremos o $\mathfrak{b}$-homomorfismo $\psi : \mathbb{K}_\lambda \to V$ tal que $\psi(1) = v$. Pela Proposição 3.2.1, ψ se estende a um único $\mathfrak{g}$-homomorfismo $\varphi : M(\lambda + \delta) \to V$. Pela Observação 3.2.1, temos que $1 \in \mathbb{K}_\lambda$ se identifica com $1 \otimes 1 \in M(\lambda + \delta)$ e assim, $\varphi(1 \otimes 1) = v$. Como v gera V como $\mathfrak{g}$-módulo temos que φ é sobrejetora, mostrando que a afirmação (1) é verdadeira.

Combinando a Proposição 4.2.1 com o Teorema 4.3.1, obtemos as afirmações (2) e (3).

Seja $w \in V$. Pela Proposição 4.3.1 e pelo item (1) deste teorema, existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ tal que

$$w = \varphi(u \otimes 1) = u\varphi(1 \otimes 1) = uv,$$

mostrando a afirmação (4).

Seja ψ um $\mathfrak{g}$-endomorfismo de V. Para todo $H \in \mathfrak{h}$, temos

$$H\psi(v) = \psi(Hv) = \lambda(H)\psi(v).$$

Logo, $\psi(v) \in V_\lambda$. Assim, existe $\xi \in \mathbb{K}$ tal que $\psi(v) = \xi v$.

Para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, temos

$$\psi(uv) = u\psi(v) = \xi(uv),$$

isto é, $\psi = \xi \cdot 1$. Isso prova (5).

A afirmação (6) segue direto de (5) e da Definição 3.1.1, de caracter central, na página 30.

Para cada $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, temos

$$u_V(v) = u_V\varphi(1 \otimes 1) = \varphi(u_V \cdot 1 \otimes 1) = \varphi(u \otimes 1).$$

Assim, se φ não é injetora, então existe $u \neq 0$ tal que

$$u_V(v) = \varphi(u \otimes 1) = 0,$$

mostrando que u_V não é injetor.

Por outro lado, se para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) - \{0\}$, tem-se u_V injetor, então para todo $u \neq 0$,

$$\varphi(u \otimes 1) = u_V(v) \neq 0.$$

Pela Proposição 4.3.1, os elementos de $M(\lambda + \delta)$ são da forma $u \otimes 1$, com $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$. Logo, φ é injetora e, portanto, um isomorfismo. $\square$

O caracter central de $M(\lambda)$ é denotado por χ_λ.

Proposição 4.3.2. *Seja* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. *Se*

$$M(\lambda)_+ = \sum_{\mu \neq \lambda - \delta} M(\lambda)_\mu,$$

então:

1. *cada* $\mathfrak{g}$*-submódulo de* $M(\lambda)$ *distinto de* $M(\lambda)$ *está contido em* $M(\lambda)_+$.
2. *existe um maior* $\mathfrak{g}$*-submódulo* K *de* $M(\lambda)$, *distinto de* $M(\lambda)$. *Além disso, o* $\mathfrak{g}$*-módulo* $\dfrac{M(\lambda)}{K}$ *é simples.*

Demonstração. Seja W um $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$. Em particular, W é um $\mathfrak{h}$-submódulo de $M(\lambda)$ e, assim,

$$W = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} W \cap M(\lambda)_\mu.$$

Se $W \neq M(\lambda)$, então

$$W \cap M(\lambda)_{\lambda - \delta} = \{0\},$$

pois $M(\lambda)_{\lambda-\delta}$ tem dimensão um e gera $M(\lambda)$ como $\mathfrak{g}$-módulo. Daí, $W \subset M(\lambda)_+$, provando a afirmação (1).

A soma K de todos os $\mathfrak{g}$-submódulos de $M(\lambda)$, distinto de $M(\lambda)$, é um $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$ e está contido em $M(\lambda)_+$. Consequentemente K é distinto de $M(\lambda)$.

Temos que o $\mathfrak{g}$-módulo $\dfrac{M(\lambda)}{K}$ é simples, já que K é o maior $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$. $\square$

Denotamos o $\mathfrak{g}$-módulo $\dfrac{M(\lambda)}{K}$ por $L(\lambda)$. A imagem, em $L(\lambda)$, do gerador canônico de $M(\lambda)$ é denominado **gerador canônico** de $L(\lambda)$.

Proposição 4.3.3. *Sejam* V *um* $\mathfrak{g}$*-módulo simples e* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. *Se existe um elemento de* $V_{\lambda-\delta}$, *diferente de zero, anulado por* $\mathfrak{n}^+$, *então* V *é isomorfo a* $L(\lambda)$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.2 (1), existe um $\mathfrak{g}$-homomorfismo sobrejetor φ de $M(\lambda)$ em V e pelo Teorema 2.1.1, do Isomorfismo,

$$V \approx \frac{M(\lambda)}{\ker\varphi}.$$

Como V é simples, temos que, para qualquer $\mathfrak{g}$-submódulo W de $M(\lambda)$, $W \subset \ker\varphi$. Em particular considerando K o maior submódulo de $M(\lambda)$, dado na Proposição 4.3.2, temos que $K = \ker\varphi$. Portanto,

$$V \approx \frac{M(\lambda)}{K} = L(\lambda),$$

de onde segue a proposição. $\square$

Lema 4.3.2. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa, X, H e Y elementos de $\mathcal{A}$ e $m \in \mathbb{N}$.*

1. *Se $[X,Y]=0$, então $[X,Y^m]=0$.*
2. *Se $[H,Y]=-2Y$ e $[X,Y]=H$, então*

$$[X,Y^m] = mY^{m-1}(H-m+1).$$

Demonstração. Para cada $k>1$, temos

$$\begin{aligned}[X,Y^{k+1}] &= XY^{k+1}-Y^{k+1}X\\ &= (XY^k)Y-(Y^kX)Y+Y^k(XY)-Y^k(YX)\\ &= [X,Y^k]Y+Y^k[X,Y]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

1. Suponhamos, por indução, que $[X,Y^k]=0$. Assim, por (4.3) temos que $[X,Y^{k+1}]=0$ e, portanto, por indução, qualquer que seja $k\in\mathbb{N}$, $[X,Y^k]=0$.

2. Suponhamos, por indução, que $[X,Y^k]=kY^{k-1}(H-k+1)$. Por hipótese,

$$-2Y=[H,Y]=HY-YH,$$

isto é, $HY=YH-2Y$. Daí, e por (4.3), temos que

$$\begin{aligned}[X,Y^{k+1}] &= kY^{k-1}(H-k+1)Y+Y^kH\\ &= Y^{k-1}(k(H-k+1)Y+YH)\\ &= Y^{k-1}\Big(kHY-k^2Y+kY+YH\Big)\\ &= Y^{k-1}\Big(kYH-2kY-k^2Y+kY+YH\Big)\\ &= Y^k\Big(kH-k^2-k+H\Big)\\ &= Y^k((k+1)H-(k+1)k)\\ &= (k+1)Y^k(H-k)\end{aligned}$$

e, portanto, por indução, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, vale a igualdade

$$[X, Y^k] = kY^{k-1}(H - k + 1),$$

concluindo o Lema.

□

Proposição 4.3.4. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in \Sigma$ e $m = \lambda(H'_\alpha)$. Suponhamos que $m \in \mathbb{N}$. Sejam v o gerador canônico de $M(\lambda)$, $X_{-\alpha}$ um elemento de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, diferente de zero e $v' = X_{-\alpha}^m v$. Se V é o $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$ gerado por v', então V é isomorfo a $M(r_\alpha \lambda)$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \to M(\lambda)$ o isomorfismo, dado na Proposição 4.3.1. Como $X_{-\alpha}^m \neq 0$, temos que

$$v' = X_{-\alpha}^m v = X_{-\alpha}^m (1 \otimes 1) = X_{-\alpha}^m \otimes 1 = \varphi(X_{-\alpha}^m) \neq 0.$$

Pelo Lema 4.3.1, para todo $H \in \mathfrak{h}$,

$$[H, X_{-\alpha}^m] = -m\alpha(H) X_{-\alpha}^m,$$

e assim,

$$\begin{aligned} Hv' &= HX_{-\alpha}^m v = X_{-\alpha}^m Hv + [H, X_{-\alpha}^m]v = (\lambda - \delta)(H)v' - m\alpha(H)v' \\ &= (\lambda - m\alpha - \delta)(H)v' = (r_\alpha\lambda - \delta)(H)v'. \end{aligned}$$

Logo, $v' \in M(\lambda)_{r_\alpha\lambda - \delta}$. Se $\beta \in \Sigma$ e $\beta \neq \alpha$, então $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 0$, já que $\beta - \alpha$ não é raiz. Em particular, $[X_\beta, X_{-\alpha}] = 0$. Utilizando que v é um elemento primitivo em $M(\lambda)$ e o Lema 4.3.2, temos

$$X_\beta v' = X_{-\alpha}^m X_\beta v + [X_\beta, X_{-\alpha}^m]v = 0 + 0 = 0.$$

Se $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ é tal que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H'_\alpha$, então pelo Lema 4.3.2, temos

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}^m] = mX_{-\alpha}^{m-1}(H'_\alpha - m + 1),$$

e assim,

$$\begin{aligned} X_\alpha v' &= X_\alpha X_{-\alpha}^m v = X_{-\alpha}^m X_\alpha v + [X_\alpha, X_{-\alpha}^m]v \\ &= X_{-\alpha}^m X_\alpha v + mX_{-\alpha}^{m-1}(H'_\alpha - m + 1)v \\ &= X_{-\alpha}^m \cdot 0 + mX_{-\alpha}^{m-1}(\lambda(H_\alpha) - \delta(H'_\alpha) - m + 1)v \\ &= mX_{-\alpha}^{m-1}(-\delta(H_\alpha) + 1)v = 0 \end{aligned}$$

pois $\delta(H_\alpha) = 1$, ver Seção 2.3.1. Como $\mathfrak{n}^+$ é gerado por $\mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Sigma$, temos que $\mathfrak{n}^+ v' = 0$. Finalmente, para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) - \{0\}$, u_V é a restrição de $u_{M(\lambda)}$ a V. Logo, u_V é injetor.

Portanto, pelo Teorema 4.3.2 (7), V é isomorfo a $M(r_\alpha\lambda)$. □

5 REPRESENTAÇÕES DE DIMENSÃO FINITA

Neste capítulo, estudamos as representações de dimensão finita de álgebras de Lie semissimples. O resultado principal aqui garante que as classes de equivalências das representações irredutíveis e de dimensão finita são parametrizadas por l-uplas de inteiros não negativos, onde l é o posto da álgebra. Isso significa que as representações de dimensão finita de álgebras de Lie semissimples são caracterizadas da mesma forma que as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. As principais referências utilizadas aqui são [2] e [13]. Outras referências sobre esse assunto são: [7], [14] e [10].

5.1 REPRESENTAÇÕES DE DIMENSÃO FINITA

Fixemos, daqui por diante, um par decomponível $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (veja as notações na Seção 2.3), sendo $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, sobre um corpo de característica zero $\mathbb{K}$.

Proposição 5.1.1. *Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, então:*

1. *$V=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V_\mu$;*
2. *cada peso de V pertence a $\mathcal{P}$;*
3. *se μ é um peso de V e $w\in\mathcal{W}$, então $w\mu$ é um peso de V com a mesma multiplicidade de μ.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, tem dimensão finita e V é de dimensão finita temos, pelo Teorema 2.3.2, de decomposição de Weyl, que V é completamente redutível e, assim, para provar a afirmação (1) podemos supor que V é simples. Pela proposição 4.2.2 (2), a soma $\displaystyle\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V_\mu$ é invariante por ρ. Daí, é suficiente mostrar a existência de um peso.

Utilizando a notação do Lema 4.1.1, sejam $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}=\mathfrak{g}\otimes\overline{\mathbb{K}}$, $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{K}}}=\mathfrak{h}\otimes\overline{\mathbb{K}}$ e $\overline{\rho}$ a representação de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}$ em $V_{\overline{\mathbb{K}}}$ obtida por extensão de ρ.

Como $\overline{\mathbb{K}}$ é fechado algebricamente e $V_{\overline{\mathbb{K}}}$ tem dimensão finita, para cada $H\in\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{K}}}$ existe uma base de $V_{\overline{\mathbb{K}}}$ tal que, em relação a esta base, $\overline{\rho}(H)$ é triangular superior (veja [6], Seção 6.4, Teorema 5). Pelo Teorema 2.3.1, $\overline{\rho}$ é triangularizável. Assim, existe um peso $\mu\in\mathfrak{h}^*_{\overline{\mathbb{K}}}$ de $V_{\overline{\mathbb{K}}}$, em relação a $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{K}}}$.

Para cada $\alpha\in\Pi$, consideremos a subálgebra $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}(\alpha)$ definida por

$$\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}(\alpha)=(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})_{-\alpha}\oplus\overline{\mathbb{K}}(H'_\alpha\otimes 1)\oplus(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}})_{\alpha}\,.$$

Pela Proposição 2.3.2, $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}(\alpha)$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\overline{\mathbb{K}})$. Assim, denotando por ρ_α a representação de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{K}}}(\alpha)$, em $V_{\overline{\mathbb{K}}}$, obtida por restrição de $\overline{\rho}$ temos que μ é peso de ρ_α. Pelo Corolário 4.1.2.1, $\mu(H'_\alpha\otimes 1)\in\mathbb{Z}$.

Como o conjunto $\{H'_\alpha \otimes 1 : \alpha \in \Sigma\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$, temos que $\mu(\mathfrak{h} \otimes 1) \subset \mathbb{K}$. Pelo Lema 4.1.1, existe um subespaço $W \subset V$, $W \neq \{0\}$, tal que $(V_{\overline{\mathbb{K}}})_\mu = W \otimes \overline{\mathbb{K}}$.

Logo, se $\nu = \mu_{|\mathfrak{h}}$ então ν é peso de ρ e $V_\mu = W$, provando a afirmação (1).

A afirmação (2) segue do fato, mostrado acima, que se μ é peso de V então $\mu(H'_\alpha) \in \mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \Pi$.

Sejam ν um peso de V, sendo a multiplicidade denotada por m_ν, $\alpha \in \Pi$, e $n = \nu(H'_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Sejam $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H'_\alpha$ e seja também $v \in V_\nu - \{0\}$.

Se $n = 0$, então $r_\alpha \nu = \nu$ e, assim, $V_{r_\alpha \nu} = V_\nu$, mostrando que $r_\alpha \nu$ e ν tem a mesma multiplicidade.

Consideremos agora $n \neq 0$.

Se $n > 0$, então pelo Lema 4.3.1, $[H, X^n_{-\alpha}] = -n\alpha(H) X^n_{-\alpha}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} HX^n_{-\alpha}v &= X^n_{-\alpha}Hv + [H, X^n_{-\alpha}]v \\ &= \nu(H)X^n_{-\alpha}v - n\alpha(H)X^n_{-\alpha}v \\ &= r_\alpha\nu(H)X^n_{-\alpha}v, \end{aligned}$$

mostrando que $X^n_{-\alpha}(V_\nu) \subset V_{r_\alpha\nu}$. Além disso, usando a identificação de $\mathfrak{g}(\alpha)$ com $\mathfrak{sl}(2)$, dada na Proposição 2.3.2 juntamente com o Corolário 4.1.2.2, temos que $X^n_{-\alpha}v \neq 0$. Logo, a aplicação

$$v \in V_\nu \mapsto X^n_{-\alpha}v \in V_{r_\alpha\nu}$$

é injetora e, portanto, $\dim V_\nu \leq \dim V_{r_\alpha\nu}$.

De modo análogo, se $n < 0$, então pelo Lema 4.3.1, $[H, X^{-n}_\alpha] = -n\alpha(H)X^{-n}_\alpha$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} HX^{-n}_{\alpha}v &= X^{-n}_{\alpha}Hv + [H, X^{-n}_{\alpha}]v \\ &= \nu(H)X^{-n}_{\alpha}v - n\alpha(H)X^{-n}_{\alpha}v \\ &= r_\alpha\nu(H)X^{-n}_{\alpha}v, \end{aligned}$$

mostrando que $X^{-n}_\alpha(V_\nu) \subset V_{r_\alpha\nu}$. Além disso, usando a identificação de $\mathfrak{g}(\alpha)$ com $\mathfrak{sl}(2)$, dada na Proposição 2.3.2, juntamente com o Corolário 4.1.2.2, temos que $X^{-n}_\alpha v \neq 0$. Logo, a aplicação

$$v \in V_\nu \mapsto X^{-n}_\alpha v \in V_{r_\alpha\nu}$$

é injetora e, portanto, $\dim V_\nu \leq \dim V_{r_\alpha\nu}$.

Assim, se $n \neq 0$, então

$$\dim V_\nu \leq \dim V_{r_\alpha\nu} \leq \dim V_{r_\alpha r_\alpha\nu} = \dim V_\nu,$$

mostrando que $\dim V_{r_\alpha \nu} = \dim V_\nu$, isto é, $r_\alpha \nu$ e ν tem a mesma multiplicidade. Como cada elemento do grupo de Weyl $w \in \mathcal{W}$ é um produto finito de reflexões, segue que $w\nu$ e ν têm a mesma multiplicidade, concluindo a demonstração. $\square$

Lema 5.1.1. *Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, então existe um peso λ de V tal que, para todo $\alpha \in \Pi^+$, $\lambda + \alpha$ não é um peso de V.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}(V)$ o conjunto de pesos de V. Pela Proposição 5.1.1, $\mathcal{P}(V) \neq \emptyset$ e $\mathcal{P}(V)$ é finito. Denotemos por n a quantidade de elementos em $\mathcal{P}(V)$.

Suponhamos por absurdo que para todo $\lambda \in \mathcal{P}(V)$, existe $\alpha \in \Pi^+$ tal que $\lambda + \alpha \in \mathcal{P}(V)$.

Assim, fixando $\lambda \in \mathcal{P}(V)$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Pi^+$ tal que

$$\mathcal{P}_\lambda := \{\lambda,\ \lambda + \alpha_1,\ \lambda + \alpha_1 + \alpha_2, \ldots,\ \lambda + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\} \subset \mathcal{P}(V).$$

Como $\mathcal{P}_\lambda$ é um conjunto com $n+1$ pesos de V, existem r e s inteiros, com $0 \leq r < s \leq n$ tal que

$$\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = \lambda + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,$$

isto é, $\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_s = 0$, o que é uma contradição, e isto demonstra o lema. $\square$

Proposição 5.1.2. *Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo simples e de dimensão finita, então:*

1. *existe um e somente um $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que V é isomorfo a $L(\lambda + \delta)$.*
2. *$\lambda \in \mathcal{P}_{++}$ e λ é um peso com multiplicidade 1.*
3. *se μ é um peso de V, então $\mu \leq \lambda$ e $\langle \mu, \mu \rangle \leq \langle \lambda, \lambda \rangle$.*

Demonstração. Como V tem dimensão finita, existe, pelo Lema 5.1.1, um peso λ de V tal que, para todo $\alpha \in \Pi^+$, $\lambda + \alpha$ não é um peso de V. Pela Proposição 4.2.2 temos que $\mathfrak{n}^+ V_\lambda = \{0\}$, logo, a afirmação (1) segue da Proposição 4.3.3.

Sejam $\alpha \in \Pi^+$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H'_\alpha$. Se $v \in V_\lambda$, então $X_\alpha v = 0$, e assim, do Corolário 4.1.2.2, $\lambda(H'_\alpha) \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$.

Seja μ um peso de V. Existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w\mu \in \mathcal{P}_{++}$. Pelo Teorema 4.3.2, $w\mu \leq \lambda$. Assim, temos que $\lambda + w\mu \in \mathcal{P}_{++}$ e $\lambda - w\mu \in \mathcal{Q}_+$ o que implica

$$0 \leq \langle \lambda + w\mu, \lambda - w\mu \rangle = \langle \lambda, \lambda \rangle - \langle w\mu, w\mu \rangle.$$

Portanto, $\langle \mu, \mu \rangle = \langle w\mu, w\mu \rangle \leq \langle \lambda, \lambda \rangle$, concluindo a demonstração da proposição. $\square$

Seja w_0 a **involução principal** de $\mathcal{W}$, isto é, w_0 é o elemento de $\mathcal{W}$ tal que $w_0(\Sigma) = -\Sigma$. Se λ é o peso máximo de V, então, pela Proposição 5.1.1 (3), $w_0\lambda$ é um peso de V e $\dim V_{w_0\lambda} = \dim V_\lambda = 1$. Além disso, vale a seguinte proposição.

Proposição 5.1.3. *Com a notação acima, se μ é um peso qualquer de V, então $\mu \geq w_0\lambda$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe um peso μ tal que $\mu < w_0\lambda$. Assim, existem $n_\alpha \in \mathbb{N}$, não todos nulos, tais que $w_0\lambda - \mu = \sum_{\alpha\in\Sigma} n_\alpha \alpha$. Daí, aplicando w_0 nesta igualdade e usando que $w_0^2 = 1$ e que $w_0(\Sigma) = -\Sigma$, obtemos

$$\lambda - w_0\mu = \sum_{\alpha\in\Sigma} n_\alpha w_0 \alpha = \sum_{\alpha\in\Sigma} n_\alpha(-\alpha) = \sum_{\alpha\in\Sigma}(-n_\alpha)\alpha \in -\mathcal{Q}_+ - \{0\},$$

isto é, $\lambda < w_0\mu$, contrariando o fato de λ ser peso máximo. □

Lema 5.1.2. *Sejam V, λ e $v \in V$, satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.3.2. Denotemos por X_α um elemento não nulo de $\mathfrak{g}_\alpha$, para cada $\alpha \in \Pi$, e por $\mathcal{P}(V)$ o conjunto de pesos de V. Se para todo $\beta \in \Sigma$, $X_{-\beta}^m v$ é nulo, para algum inteiro m suficientemente grande, então:*

1. *$\mathcal{P}(V) \subset \mathcal{P}$.*
2. *$\mathcal{W}\mathcal{P}(V) \subset \mathcal{P}(V)$.*
3. *V tem dimensão finita.*
4. *V é simples.*

Demonstração. Sejam $\mu \in \mathcal{P}(V)$, $\beta \in \Sigma$ e $v_i = X_{-\beta}^i v$, com $i \in \mathbb{N}$, m o maior inteiro tal que $v_m \neq 0$ e $V(\beta)$ o subespaço vetorial gerado por $\{v_0, \ldots, v_m\}$. Pela Proposição 4.1.1 (3c) e Teorema 4.1.2, $V(\beta)$ é invariante por

$$\mathfrak{g}(\beta) = \mathfrak{g}_{-\beta} \oplus \mathbb{K}H'_\beta \oplus \mathfrak{g}_\beta.$$

A soma W de todos os $\mathfrak{g}(\beta)$-submódulos simples e de dimensão finita de V é invariante por $\mathfrak{g}$ (veja a Proposição 1.7.9 de [2]). Além disso, $W \supset V(\beta)$ e, consequentemente, $v = v_0 \in W$. Logo, existe uma família $(W_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{g}(\beta)$-submódulos simples e de dimensão finita de V tal que

$$V = \bigoplus_{i\in I} W_i.$$

Seja $w \in V_\mu - \{0\}$ e escrevamos $w = w_1 + \cdots + w_r$, com $w_j \in W_j$. Como

$$H'_\beta w_1 + \cdots + H'_\beta w_r = H'_\beta w = \mu(H'_\beta)w = \mu(H'_\beta)w_1 + \cdots + \mu(H'_\beta)w_r,$$

isto é,

$$(H'_\beta w_1 - \mu(H'_\beta)w_1) + \cdots + (H'_\beta w_r - \mu(H'_\beta)w_r) = 0,$$

cada W_j é invariante por H'_β e a soma é direta temos que $H'_\beta w_j = \mu(H'_\beta)w_j$ para todo j.

Seja $n = \mu(H'_\beta)$. Como $w \neq 0$, existe j tal que $w_j \neq 0$. Assim, pela forma das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ (veja Teorema 4.1.2), temos que $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathcal{P}(V) \subset \mathcal{P}$, mostrando (1).

Se $n \geq 0$, então, pelo Corolário 4.1.2.2, $X_{-\beta}^n w_i \neq 0$ para todo i tal que $w_i \neq 0$, daí $X_{-\beta}^n w \neq 0$. Como $w \in V_\mu$ temos, pela Proposição 4.2.2, que $X_{-\beta}^n w \in V_{\mu - n\beta}$, isto é, $V_{\mu-n\beta} \neq \{0\}$. Logo, $r_\beta \mu = \mu - n\beta \in \mathcal{P}(V)$. Se $n < 0$, então, pelo Corolário 4.1.2.2, $X_\beta^{-n} w_i \neq 0$ para todo i tal que $w_i \neq 0$, daí $X_\beta^{-n} w \neq 0$. Como $w \in V_\mu$ temos, pela Proposição 4.2.2, que $X_\beta^{-n} w \in V_{\mu-n\beta}$, isto é, $V_{\mu-n\beta} \neq \{0\}$. Logo, $r_\beta\mu = \mu - n\beta \in \mathcal{P}(V)$. Como os elementos do grupo de Weyl são produtos finitos de reflexões simples, temos que $\mathcal{W}\mathcal{P}(V) \subset \mathcal{P}(V)$, mostrando (2).

Considerando a involução principal $w_0 \in \mathcal{W}$ temos que $w_0^2 = 1$ e $w_0\lambda \leq \lambda$. Assim, escrevendo $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ temos que existem $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda - w_0\lambda = \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i. \tag{5.1}$$

Seja μ um peso qualquer de V.

Pelo Teorema 4.3.2 (3), existem $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ e $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i \tag{5.2}$$

e

$$w_0\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i,$$

pois $w_0\mu \in \mathcal{P}(V)$. Aplicando w_0 a esta última igualdade, obtemos

$$\mu = w_0\lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i w_0 \alpha_i.$$

Como para todo i, $w_0\alpha_i \in -\Sigma$ temos que

$$\mu = w_0\lambda + \sum_{i=1}^{l} p_i \alpha_i,$$

onde $(p_1, \ldots, p_l)$ é uma permutação de $(n_1, \ldots, n_l)$ dada da seguinte forma: $p_j = n_i$ se $w_0\alpha_i = -\alpha_j$. Combinando esta última expressão de μ com (5.2) obtemos

$$\lambda - w_0\lambda = \sum_{i=1}^{l} (p_i + m_i)\alpha_i.$$

Desta última igualdade, de (5.1) e da unicidade da expressão de $\lambda - w_0\lambda$ como combinação linear inteira dos elementos de Σ obtemos $p_i + m_i = a_i$ para todo i. Como $p_i \geq 0$ temos $m_i \leq a_i$. Logo, os pesos de V são dados por l-uplas de inteiros $(m_1, \ldots, m_l)$ satisfazendo $0 \leq m_i \leq a_i$. A quantidade de l-uplas com esta propriedade é finita e, portanto, $\mathcal{P}(V)$ é finito. Como V se decompõe como soma dos espaços de pesos (Teorema 4.3.2 (2)) e os espaços de pesos têm dimensão finita (Teorema 4.3.2 (3)) temos que V tem dimensão finita, mostrando (3).

Pelo Teorema de decomposição de Weyl, existem $\mathfrak{g}$-submódulos simples $V_1, \ldots, V_p$ tal que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p.$$

Escrevendo $v = v_1 + \cdots + v_p$, com $v_j \in V_j$, obtemos para todo $H \in \mathfrak{h}$,

$$Hv_1 + \cdots + Hv_p = Hv = \lambda(H)v = \lambda(H)v_1 + \cdots + \lambda(H)v_p,$$

isto é,

$$(Hv_1 - \lambda(H)v_1) + \cdots + (Hv_p - \lambda(H)v_p) = 0.$$

Como cada V_j é invariante por $\mathfrak{h}$ e a soma é direta temos que $Hv_j = \lambda(H)v_j$ para todo j, e todo $H \in \mathfrak{h}$, isto é, $v_j \in V_\lambda$ para todo j. Como $\dim V_\lambda = 1$ existe j tal que $v_k = 0$ para todo $k \neq j$ e, assim, $v = v_j \in V_j$. Portanto, $V_j = V$, isto é, V é simples, mostrando (4) e concluindo o lema. $\square$

Proposição 5.1.4. *Sejam $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$, K o maior $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda+\delta)$, v o gerador canônico de $M(\lambda+\delta)$ e $X_{-\beta}$ um elemento não nulo de $\mathfrak{g}_{-\beta}$, para cada $\beta \in \Sigma$. Se $m_\beta = \lambda(H'_\beta) + 1$, então*

$$K \;=\; \sum_{\beta\in\Sigma} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) X_{-\beta}^{m_\beta} v \;=\; \sum_{\beta\in\Sigma} \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) X_{-\beta}^{m_\beta} v$$

e, além disso, K tem codimensão finita em $M(\lambda+\delta)$.

Demonstração. Seja $\beta \in \Sigma$. Temos que $m_\beta = \lambda(H'_\beta) + 1 = (\lambda+\delta)(H'_\beta)$ é inteiro positivo. Assim, denotando por $W(\beta)$ o $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda+\delta)$ gerado por $X_{-\beta}^{m_\beta} v$ temos, pelo Lema 4.3.2, que

$$W(\beta) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) X_{-\beta}^{m_\beta} v$$

e $W(\beta) \neq M(\lambda+\delta)$.

Logo, a soma $W = \sum_{\beta\in\Sigma} W(\beta)$ está contida em K. Para cada $\beta \in \Sigma$, $X_{-\beta}^{m_\beta} \in W$ e assim representa o elemento nulo de $\dfrac{M(\lambda+\delta)}{W}$. Pelo Lema 5.1.2, temos que $\dfrac{M(\lambda+\delta)}{W}$ é simples e isto significa que $K \subset W$, mostrando que $K = \sum_{\beta\in\Sigma} W(\beta)$ Além disso, pelo Lema 5.1.2, $\dfrac{M(\lambda+\delta)}{W}$ tem dimensão finita e, portanto, K tem codimensão finita em $M(\lambda+\delta)$, concluindo a demonstração. $\square$

Teorema 5.1.1. *A aplicação $\varphi : \lambda \mapsto [L(\lambda+\delta)]$ é uma bijeção entre o conjunto de pesos dominantes $\mathcal{P}_{++}$ e o conjunto de classes de equivalência de $\mathfrak{g}$-módulos simples de dimensão finita.*

Demonstração. Se $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$, então, pela Proposição 5.1.4, $L(\lambda+\delta)$ é simples e de dimensão finita. Isto mostra que φ é bem definida.

Além disso, se V é um $\mathfrak{g}$-módulo simples e de dimensão finita, então, pela Proposição 5.1.2, existe exatamente um $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$ tal que V é isomorfo $L(\lambda+\delta)$, isto é, $[V] = [L(\lambda+\delta)]$. A existência de λ garante que φ é sobrejetora e a unicidade garante que φ é injetora, concluindo a demonstração. $\square$

Observação 5.1.1. *O Teorema 5.1.1 garante que as classes de equivalências das representações irredutíveis e de dimensão finita são parametrizadas por l-uplas de inteiros não negativos.*

De fato, se $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$ então $\lambda(H'_{\alpha_i})$ é inteiro não negativo para todo $1 \leq i \leq l$. Assim,

$$(\lambda(H'_{\alpha_1}), \ldots, \lambda(H'_{\alpha_l}))$$

é uma l-upla de inteiros não negativos.

Reciprocamente, se $(n_1, \ldots, n_l)$ é uma l-upla de inteiros não negativos, então considerando o elemento $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(H'_{\alpha_i}) = n_i$, temos que $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$.

Exemplo 5.1.1. *As representações irredutíveis e de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ são parametrizadas por um inteiro não negativo. De fato, dado n inteiro e não negativo, a representação ρ_n de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ em $\mathbb{K}^{n+1}$, definida na Seção 4.1, é irredutível, pelo Teorema 4.1.1 e além disso, pela Observação 4.1.1, n é o maior autovalor de $\rho_n(H)$.*

Reciprocamente, se ρ é uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ em V e se $\dim V = n + 1$ então pelo Teorema 4.1.2, temos que ρ é equivalente a ρ_n, isto é, o maior autovalor de $\rho(H)$ é n.

6 SUBMÓDULOS DE VERMA

Neste capítulo, estudamos uma classe de submódulos de módulos de Verma. O objetivo é caracterizar os submódulos de $M(\lambda)$, sendo λ um elemento do dual da subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, que são isomorfos à $M(\mu)$, para algum μ pertencente ao dual de $\mathfrak{h}$. Nesse sentido, existe uma caracterização completa desses submódulos, a partir dos trabalhos de Verma [15] e Bernstein-Gelfand-Gelfand [1]. O resultado principal, deste capítulo, garante que um submódulo de $M(\lambda)$ é isomormo a $M(\mu)$ se, e somente se, existe uma sequência finita de raízes positivas ligando λ com μ (veja a definição na página 73). Esse resultado é demonstrado primeiro quando λ é um peso dominante (veja o Teorema 6.1.1) e depois o caso geral quando λ é qualquer (veja o Teorema 6.1.2). Uma consequência desses resultados é que $M(\lambda)$ é simples, isto é, não tem submódulo próprio e não trivial se, e somente se, os valores assumidos por λ no dual de cada raiz normalizada não é inteiro positivo (veja o Teorema 6.1.3). Este capítulo é baseado em [2]. O assunto estudado aqui pode ser encontrado também em [8], [1] e [15].

6.1 SUBMÓDULOS DE VERMA

Neste capítulo, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ denota um par decomponível (veja as notações na Seção 2.3), sendo $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, sobre um corpo de característica zero $\mathbb{K}$.

Lembremos da Definição 3.1.1, de caracter central, na página 30.

Lema 6.1.1. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo que tem caracter central χ. Se $W \subset V$ é submódulo de V então W e V/W têm caracter central χ.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Como χ é caracter central de V temos, em particular, que

1. $u(w) = \chi(u)w$, para todo $w \in W$.

2. $u(v + W) = u(v) + W = \chi(u)v + W = \chi(u)(v + W)$, para todo $v \in V$.

Logo, χ é caracter central de W e de V/W. □

A demonstração do seguinte lema, que será usado mais adiante, pode ser encontrada em [2], p. 245.

Lema 6.1.2. *Se $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$.

2. $\lambda' \in \mathcal{W}\lambda$.

Definição 6.1.1. *Seja ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Uma série $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathfrak{g}$-submódulos de V tal que $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$ e os $\mathfrak{g}$-módulos $\dfrac{V_i}{V_{i+1}}$, com $0 \leq i < n$, são simples, é denominado **série de Jordan-Holder**.*

Proposição 6.1.1. *Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, então*

1. *Cada subquociente simples de $M(\lambda)$ é isomorfo a $L(\mu)$ para algum $\mu \in \mathcal{W}\lambda \cap (\lambda - \mathcal{Q}_+)$.*
2. *$M(\lambda)$ tem uma série de Jordan-Holder.*

Demonstração. a) Sejam N, N' $\mathfrak{g}$-submódulos de $M(\lambda)$ tal que $N' \subset N$ e $\dfrac{N}{N'}$ é simples. Pela Proposição 4.2.1, $N = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} N_\mu$. Considerando a projeção canônica $\pi : N \to N/N'$, que é um homomorfismo sobrejetor, e utilizando a Proposição 4.2.1 novamente obtemos $\dfrac{N}{N'} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \left(\dfrac{N}{N'}\right)_\mu$ e cada peso de $\dfrac{N}{N'}$ é um peso de $M(\lambda)$. Daí, os pesos de $\dfrac{N}{N'}$ pertencem a $\lambda - \delta - Q_+$. Logo, existe um peso μ de $\dfrac{N}{N'}$ tal que, para todo $\alpha \in \Sigma$, $\mu - \delta + \alpha$ não é um peso de $\dfrac{N}{N'}$. Isso significa que se $\overline{v}$ é um elemento não nulo de $\left(\dfrac{N}{N'}\right)_{\mu-\delta}$, então $\mathfrak{n}^+ \ \overline{v} = 0$. Daí, e da Proposição 4.3.3, $\dfrac{N}{N'}$ é isomorfo a $L(\mu)$. Pelo Lema 6.1.1, o caracter central de $\dfrac{N}{N'}$ e $M(\lambda)$ são iguais, ou seja, $\chi_\lambda = \chi_\mu$ e pelo Lema 6.1.2 temos que $\mu \in \mathcal{W}\lambda$. Isso prova a parte (1) do lema.

b) Como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é Noetheriano (veja o Corolário da Proposição 2.3.6 de [2]) e $M(\lambda)$ é gerado por um único elemento, temos que $M(\lambda)$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo Noetheriano (veja a Proposição 1.4 do capítulo 10 de [11] ou Lema 6.6 de [12]). Assim, cada $\mathfrak{g}$-submódulo N não nulo de $M(\lambda)$ contém um $\mathfrak{g}$-submódulo N' tal que $\dfrac{N}{N'}$ é simples.

Se $M(\lambda)$ não tem série de Jordan-Holder, então existe uma sequência decrescente infinita $(N_0, N_1, \ldots)$ de $\mathfrak{g}$-submódulos de $M(\lambda)$ tal que cada $\dfrac{N_i}{N_{i+1}}$ é simples. Por (a), para cada i, existe $\mu_i \in \mathcal{W}\lambda \cap (\lambda - \mathcal{Q}_+)$ tal que N_i/N_{i+1} é isomorfo a $L(\mu_i)$. Como $\mathcal{W}\lambda \cap (\lambda - \mathcal{Q}_+)$ é finito, pois o grupo de Weyl é finito, e como o conjunto $\left\{\frac{N_i}{N_{i+1}} : i \in \mathbb{N}\right\}$ é infinito, existe $\mu_0 \in \mathcal{W}\lambda \cap (\lambda - \mathcal{Q}_+)$ e infinitos índices $\{i_1, i_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ tal que N_{i_k}/N_{i_k+1} é isomorfo a $L(\mu_0)$ para todo k. Logo, $N_{i_r}/N_{i_r+1} \approx N_{i_s}/N_{i_s+1}$ para todos $r, s \in \mathbb{N}$. Assim,

$$N_{i_1} \supset N_{i_1+1} \supset N_{i_2} \supset N_{i_2+1} \supset \cdots \quad \text{e} \quad \frac{N_{i_1}}{N_{i_1+1}} \approx \frac{N_{i_2}}{N_{i_2+1}} \approx \frac{N_{i_3}}{N_{i_3+1}} \approx \cdots .$$

Seja μ peso de N_{i_1}/N_{i_1+1}. Temos que μ é peso de N_{i_k}/N_{i_k+1} para todo k, já que dois módulos isomorfos têm os mesmos pesos, e μ é peso de $M(\lambda)$, pela Proposição 4.2.1. Para cada k, seja $\overline{u}_k \in (N_{i_k}/N_{i_k+1})_\mu$, $\overline{u}_k \neq \overline{0}$. Pela Proposição 4.2.1 existe $v_k \in (N_{i_k})_\mu \subset M(\lambda)_\mu$ tal que $\overline{v}_k = \overline{u}_k$. Assim, o conjunto $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente (e portanto, infinito) e está contido em $M(\lambda)_\mu$, o que contraria o fato de $M(\lambda)_\mu$ ter dimensão finita (Teorema 4.3.2). $\square$

Proposição 6.1.2. *Sejam $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Se $M(\mu)$ é isomorfo a um submódulo de $M(\lambda)$, então $\mu \in \mathcal{W}\lambda$ e $\mu \leq \lambda$.*

Demonstração. Como $M(\mu)$ é isomorfo a um submódulo de $M(\lambda)$ e μ é peso de $M(\mu)$ temos pela Proposição 4.2.1 (1), que μ é peso de $M(\lambda)$. Assim, pelo Teorema 4.3.1 (2), $\mu \in \lambda - \delta - \mathcal{Q}_+$ e isto implica que $\mu \leq \lambda$. Por outro lado, $\chi_\lambda = \chi_\mu$ pois $M(\mu)$ é isomorfo a um submódulo de $M(\lambda)$ e daí temos pelo Lema 6.1.2 que $\mu \in W\lambda$. $\square$

Proposição 6.1.3. *Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, então*

1. *existe em $M(\lambda)$ um menor $\mathfrak{g}$-submódulo não nulo N.*

2. *o módulo N é isomorfo a $M(\mu)$ para algum $\mu \in \mathfrak{h}^*$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.1, $M(\lambda)$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, vistos como $\mathfrak{n}^-$-módulos são isomorfos. Além disso, dois ideais à esquerda, não nulos, em $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ tem interseção não nula. Assim, dois $\mathfrak{g}$-submódulos não nulos de $M(\lambda)$ tem interseção não nula. Pela Proposição 6.1.1 (1), temos que $M(\lambda)$ contém um submódulo minimal N. Logo, N é o menor submódulo não nulo de $M(\lambda)$.

Pela Proposição 6.1.1 (2), temos que N é isomorfo a $L(\mu)$ para algum $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Para cada $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) - \{0\}$, $u_V = u_{M(\lambda)_{|_V}}$ é injetivo (veja a definição de u_V na página 30). Pelo Teorema 4.3.2 (3) temos que N é isomorfo a $M(\mu)$. $\square$

Proposição 6.1.4. *Se $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, então o espaço vetorial $Hom_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ é nulo ou unidimensional sobre $\mathbb{K}$. Cada elemento não nulo de $Hom_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ é injetivo.*

Demonstração. a) Sejam v e v' os geradores canônicos de $M(\lambda)$ e $M(\mu)$, respectivamente, e $\varphi : M(\mu) \to M(\lambda)$ um $\mathfrak{g}$-homomorfismo. Existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ tal que $\varphi(v') = uv$. Se φ não é injetivo, então existe $u' \in \mathcal{U}(n^-)$ tal que $u'v' \neq 0$ e

$$0 = \varphi(u'v') = u'\varphi(v') = (u'u)v.$$

Daí, $u' \neq 0$ e $u'u = 0$, de onde temos $u = 0$, logo

$$\varphi(M(\mu)) = \varphi(\mathcal{U}(n^-)v') = \mathcal{U}(n^-)uv = \{0\}.$$

Assim, cada elemento diferente de zero de $Hom_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ é injetivo.

b) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ tal que $\varphi_1(M(\mu)) = \varphi_2(M(\mu))$. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi_1(v') = u_1 v$ e $\varphi_2(u_2 v') = u_1 v$. Definamos $\psi : M(\mu) \to M(\mu)$ por

$\psi(v') = u_2 v'$. Temos que ψ é um $\mathfrak{g}$-homomorfismo e $\varphi_2 \circ \psi(v') = \varphi_1(v')$. Assim, dado $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$\varphi_2 \circ \psi(uv') = u\left(\varphi_2 \circ \psi(v')\right) = u\varphi_1(v') = \varphi_1(uv'),$$

isto é, $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$. Pelo Teorema 4.3.2 (4) temos que ψ é escalar. Logo, φ_1 e φ_2 são linearmente dependentes.

c) Suponhamos que $M(\mu)$ é simples e sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom_{\mathfrak{g}}\left(M(\mu), M(\lambda)\right) - \{0\}$. Como $M(\mu)$ é simples, $\ker(\varphi_1) = \{0\} = \ker(\varphi_2)$. Pelo Teorema de Isomorfismo,

$$\varphi_1(M(\mu)) \approx M(\mu) \approx \varphi_2(M(\mu)).$$

Logo, $\varphi_1(M(\mu))$ e $\varphi_2(M(\mu))$ são simples. Pela proposição 6.1.3, temos $\varphi_1(M(\mu)) = \varphi_2(M(\mu))$ daí que φ_1 e φ_2 são linearmente dependentes.

d) Agora, passamos para o caso geral. Pela Proposição 6.1.3, existe $\nu \in \mathfrak{h}^*$ e $\psi \in Hom_{\mathfrak{g}}\left(M(\nu), M(\mu)\right)$ tal que $M(\nu)$ é simples e ψ é injetivo. Temos, por (c), que

$$\dim Hom_{\mathfrak{g}}\left(M(\nu), M(\mu)\right) \leq 1.$$

A aplicação $f : \varphi \mapsto \varphi \circ \psi$ de $Hom_{\mathfrak{g}}\left(M(\mu), M(\lambda)\right)$ para $Hom_{\mathfrak{g}}\left(M(\nu), M(\mu)\right)$ é linear. Se $f(\varphi) = 0$, então $\varphi(\psi(M(\nu)) = 0$, daí φ não é injetivo e assim, de acordo com (a), $\varphi = 0$. Isso prova que f é injetivo, de onde temos que $\dim Hom_{\mathfrak{g}}\left(M(\mu), M(\lambda)\right) \leq 1$. $\square$

Se $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, então apenas dois casos são possíveis:

- ou os $\mathfrak{g}$-homomorfismos de $M(\mu)$ em $M(\lambda)$ são todos nulos;
- ou $M(\mu)$ é imerso em $M(\lambda)$, e escrevemos $M(\mu) \subset M(\lambda)$ por abuso de notação. Pela Proposição 6.1.2, fixando λ, esse caso acontece apenas para um conjunto finito de valores de μ.

Lema 6.1.3. *Se $w \in \mathcal{W}$ e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ então $(w\lambda)(H'_\alpha) = \lambda(H'_{w^{-1}\alpha})$, para toda raiz α.*

Demonstração. Notemos inicialmente que se $\alpha, \beta \in \Pi$ e $k \in \mathbb{K}$, então $H_{k\alpha+\beta} = kH_\alpha + H_\beta$. De fato, para todo $H \in \mathfrak{h}$,

$$\langle H, H_{k\alpha+\beta}\rangle = (k\alpha+\beta)(H) = k\alpha(H) + \beta(H) = k\langle H, H_\alpha\rangle + \langle H, H_\beta\rangle = \langle H, kH_\alpha + H_\beta\rangle.$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada temos que $H_{k\alpha+\beta} = kH_\alpha + H_\beta$. Além disso, como para todo $\alpha \in \Pi$, $H'_\alpha = 2H_\alpha/\langle \alpha, \alpha\rangle$, temos

$$\beta(H_\alpha)H'_\beta = \beta(H_\alpha)\frac{2H_\beta}{\langle \beta, \beta\rangle} = \frac{2\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}H_\beta = \alpha(H'_\beta)H_\beta.$$

Assim, usando a igualdade $r_\beta\lambda = \lambda - \lambda(H'_\beta)\beta$, obtemos

$$\begin{aligned}(r_\beta\lambda)(H_\alpha) &= \lambda\left(H_\alpha - \beta(H_\alpha)H'_\beta\right) = \lambda\left(H_\alpha - \alpha(H'_\beta)H_\beta\right) = \lambda\left(H_{\alpha-\alpha(H'_\beta)\beta}\right) \\ &= \lambda(H_{r_\beta\alpha}).\end{aligned}$$

Logo,

$$(r_{\beta_1}r_{\beta_2}\lambda)(H_\alpha) = (r_{\beta_2}\lambda)(H_{r_{\beta_1}\alpha}) = \lambda(H_{r_{\beta_2}r_{\beta_1}\alpha})$$

e, por indução, segue que se $w \in \mathcal{W}$, $w = r_{\beta_1}\cdots r_{\beta_n}$, então $(w\lambda)(H_\alpha) = \lambda(H_{w^{-1}\alpha})$. Portanto,

$$(w\lambda)(H'_\alpha) = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}w\lambda(H_\alpha) = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\lambda(H_{w^{-1}\alpha}) = \lambda\left(\frac{2H_{w^{-1}\alpha}}{\langle w^{-1}\alpha, w^{-1}\alpha\rangle}\right) = \lambda(H'_{w^{-1}\alpha}),$$

já que w^{-1} é isometria. □

Teorema 6.1.1. *Sejam $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$, $w \in W$ e $w = r_{\alpha_n}r_{\alpha_{n-1}}\cdots r_{\alpha_1}$ uma decomposição reduzida de w (onde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Sigma$). Se*

$$\lambda_0 = \lambda,\ \lambda_1 = r_{\alpha_1}\lambda_0,\ \lambda_2 = r_{\alpha_2}\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n = r_{\alpha_n}\lambda_{n-1}$$

então

1. *$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ e $\lambda_i(H'_{\alpha_{i+1}}) \in \mathbb{N}$ para $i = 0,1,\ldots,n-1$.*
2. *$M(\lambda_0) \supset M(\lambda_1) \supset \cdots \supset M(\lambda_n)$.*

Em particular, nesse caso temos $w\lambda \leq \lambda$ e $M(w\lambda) \subset M(\lambda)$.

Demonstração. Sejam $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ e $w' = r_{\alpha_i}\cdots r_{\alpha_1}$. Pelo Lema 6.1.3,

$$(w'\lambda)(H'_{\alpha_{i+1}}) = \lambda(H'_{w'^{-1}\alpha_{i+1}}).$$

Como a decomposição $r_{\alpha_{i+1}}r_{\alpha_i}\cdots r_{\alpha_1}$ é reduzida temos, pela Proposição 2.3.7, que $w'^{-1}\alpha_{i+1} \in \Pi^+$. Daí, e do fato que $\lambda \in \mathcal{P}_{++}$, temos $\lambda(H'_{w'^{-1}\alpha_{i+1}}) \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lambda_i(H'_{\alpha_{i+1}}) = (w'\lambda)(H'_{\alpha_{i+1}}) = \lambda(H'_{w'^{-1}\alpha_{i+1}}) \in \mathbb{N}.$$

Em particular, temos que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} = \lambda_i - r_{\alpha_{i+1}}\lambda_i = \lambda_i - \lambda_i + \lambda_i(H'_{\alpha_{i+1}})\alpha_{i+1} = \lambda_i(H'_{\alpha_{i+1}})\alpha_{i+1} \in \mathcal{Q}_+,$$

isto é, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, provando a afirmação (1). A afirmação (2) segue diretamente da Proposição 4.3.4. □

Lema 6.1.4. *Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie nilpotente. Se $X \in \mathfrak{a}$, $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$ e $p \in \mathbb{N}$, então existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $X^l u \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})X^p$.*

Demonstração. Seja L_X (ou R_X) $\in \mathrm{End}\,(\mathcal{U}(\mathfrak{a}))$ a multiplicação à esquerda (respectivamente à direita) por X. Denotando por ad a representação adjunta de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$ temos que $\mathrm{ad}X = L_X - R_X$. Assim, L_X, R_X e $\mathrm{ad}X$ comutam. Temos que $L_X = \mathrm{ad}X + R_X$.

Se $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$, então existe q tal que $(\mathrm{ad}X)^q u = 0$, pois $\mathfrak{a}$ é nilpotente. Assim,

$$\begin{aligned} X^l u &= L_X^l u \\ &= (R_X + \mathrm{ad}X)^l u \\ &= \sum_{i=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix} R_X^{l-1} (\mathrm{ad}X)^i u \\ &= \sum_{i=0}^{q} \begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix} \left((\mathrm{ad}X)^i u\right) X^{l-i} \in \mathcal{U}(\mathfrak{a}) X^{l-q} \end{aligned}$$

de onde segue o lema. □

Lema 6.1.5. *Sejam $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ e $\alpha \in \Sigma$ tal que $M(r_\alpha \mu) \subset M(\mu) \subset M(\lambda)$. Suponhamos que $p = \lambda(H'_\alpha) \in \mathbb{Z}$*

1. *se $p \leq 0$, então $M(\lambda) \subset M(r_\alpha \lambda)$.*
2. *se $p > 0$, então $M(r_\alpha \mu) \subset M(r_\alpha \lambda) \subset M(\lambda)$.*

Demonstração. Notemos que para todo $H \in \mathfrak{h}$,

$$(r_\alpha \lambda)(H) = \lambda(H) - \lambda(H'_\alpha)\alpha(H) = \lambda(H) - p\alpha(H).$$

Logo, se $p = 0$, então $r_\alpha \lambda = \lambda$ e, assim, $M(\lambda) = M(r_\alpha \lambda)$.

Por outro lado, se $p < 0$ então

$$(r_\alpha \lambda)(H'_\alpha) = \lambda(H'_\alpha) - p\alpha(H'_\alpha) = p - 2p = -p \in \mathbb{N}.$$

Daí, e pela Proposição 4.3.4, temos que $M(\lambda) = M(r_\alpha(r_\alpha \lambda)) \subset M(r_\alpha \lambda)$.

Agora, suponhamos $p > 0$. Pela Proposição 4.3.4, $M(r_\alpha \lambda) \subset M(\lambda)$.

Sejam v e v' os geradores canônicos de $M(\lambda)$ e $M(\mu)$ respectivamente. Sejam $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H'_\alpha$. Como $M(r_\alpha \mu) \subset M(\mu)$ temos pela Proposição 6.1.2 que $m = \mu(H'_\alpha) \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 4.3.4, $M(r_\alpha \mu)$ é isomorfo ao submódulo N de $M(\mu)$, gerado por $X_{-\alpha}^m v'$. Pela Proposição 6.1.4, $M(r_\alpha \mu)$ é imerso em $M(\mu)$ de modo único, a menos de um escalar. Logo, $M(r_\alpha \mu)$ é o submódulo gerado por $X_{-\alpha}^m v'$. Analogamente, $M(r_\alpha \lambda)$ é o $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$ gerado por $X_{-\alpha}^p v$. Como $M(\mu) \subset M(\lambda)$, existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ tal que podemos identificar v' com uv e $M(\mu)$ com o $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(\lambda)$ gerado por uv.

Para concluir que $M(r_\alpha \mu) \subset M(r_\alpha \lambda)$ basta mostrar que $X_{-\alpha}^m v' \in M(r_\alpha \lambda)$.

Pelo Lema 6.1.4, existe um inteiro l tal que $X_{-\alpha}^{l}u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^{-})X_{-\alpha}^{p}$, de onde temos

$$X_{-\alpha}^{l}v' = X_{-\alpha}^{l}uv \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^{-})X_{-\alpha}^{p}v \subset M(r_\alpha\lambda).$$

Se $l \leq m$ então existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m = l + k$. Daí, $X_{-\alpha}^{m}v = X_{-\alpha}^{k}X_{-\alpha}^{l}v' \in M(r_\alpha\lambda)$ e, assim, $M(r_\alpha\mu) \subset M(r_\alpha\lambda)$.

Suponhamos $l > m$. Pelo Lema 4.3.2, temos

$$\begin{aligned}
[X_\alpha, X_{-\alpha}^{l}]v' &= lX_{-\alpha}^{l-1}\left(H_\alpha' - l + 1\right)\nu' = l\left(\mu(H_\alpha') - \delta(H_\alpha') - l + 1\right)X_{-\alpha}^{l-1}\nu' \\
&= l(m-l)X_{-\alpha}^{l-1}\nu'
\end{aligned}$$

isto é,

$$l(m-l)X_{-\alpha}^{l-1}v' = X_\alpha X_{-\alpha}^{l}v' - X_{-\alpha}^{l}X_\alpha v' = X_\alpha X_{-\alpha}^{l}v' \in M(r_\alpha\lambda)$$

de onde temos $X_{-\alpha}^{l-1}v' \in M(r_\alpha\lambda)$.

Se $l - 1 = m$, então $X_{-\alpha}^{m}v' \in M(r_\alpha\lambda)$. Suponhamos $l - 1 > m$. Pelo Lema 4.3.2,

$$\begin{aligned}
[X_\alpha, X_{-\alpha}^{l-1}]v' &= (l-1)X_{-\alpha}^{l-2}\left(H_\alpha' - l + 2\right)\nu' = (l-1)\left(\mu(H_\alpha') - \delta(H_\alpha') - l + 2\right)X_{-\alpha}^{l-2}\nu' \\
&= (l-2)(m-l+1)X_{-\alpha}^{l-2}\nu'
\end{aligned}$$

isto é,

$$(l-1)(m-l+1)X_{-\alpha}^{l-2}v' = X_\alpha X_{-\alpha}^{l-1}v' - X_{-\alpha}^{l-1}X_\alpha v' = X_\alpha X_{-\alpha}^{l-1}v' \in M(r_\alpha\lambda)$$

de onde temos $X_{-\alpha}^{l-2}v' \in M(r_\alpha\lambda)$.

Continuando esse processo, concluimos que $X_{-\alpha}^{m}v' \in M(r_\alpha\lambda)$ e, assim, $M(r_\alpha\mu) \subset M(r_\alpha\lambda)$ provando o lema. $\square$

Lema 6.1.6. *Sejam $\lambda \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \Pi^+$, $\mu = r_\alpha\lambda$ e $m = \lambda(H_\alpha')$. Se $m \in \mathbb{N}$, então $M(\mu) \subset M(\lambda)$.*

Demonstração. Se $m = 0$, então $\mu = r_\alpha\lambda = \lambda - \lambda(H_\alpha')\alpha = \lambda - 0 \cdot \alpha = \lambda$, provando o Lema.

Suponhamos $m > 0$. Pela Proposição 2.3.6 (1), existe $w \in \mathcal{W}$ e $\mu' \in \mathcal{P}_{++}$ tal que $\mu = w\mu'$. Sejam $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda = w\lambda'$ e $w = r_{\alpha_n}r_{\alpha_{n-1}}\cdots r_{\alpha_2}r_{\alpha_1}$ a decomposição reduzida de w. Consideremos

$$\lambda_0 = \lambda'\ ,\ \lambda_1 = r_{\alpha_1}\lambda_0\ ,\ \lambda_2 = r_{\alpha_2}\lambda_1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_n = r_{\alpha_n}\lambda_{n-1} = \lambda$$

e

$$\mu_0 = \mu'\ ,\ \mu_1 = r_{\alpha_1}\mu_0\ ,\ \mu_2 = r_{\alpha_2}\mu_1\ ,\ \ldots\ ,\ \mu_n = r_{\alpha_n}\mu_{n-1} = \mu$$

Como $\lambda_0 = w^{-1}\lambda = w^{-1}r_\alpha\mu = w^{-1}r_\alpha ww^{-1}\mu = r_{w^{-1}\alpha}\mu_0$ temos que $\lambda_0 \in \mathcal{W}\mu_0$. Juntando a isso o fato de $\mu_0 \in \mathcal{P}_{++}$ concluímos pelo Teorema 6.1.1 que $\mu_0 \geq \lambda_0$ e isso significa que $\mu_0 - \lambda_0 \in \mathcal{Q}_+$. Além disso,

$$\mu_n - \lambda_n \;=\; \mu - \lambda = r_\alpha\lambda - \lambda = \lambda - \lambda(H_\alpha')\alpha - \lambda = -\lambda(H_\alpha')\alpha = -m\alpha \in -\mathcal{Q}_+.$$

Escrevendo $w_i = r_{\alpha_{i+1}} \cdots r_{\alpha_n}$ temos,

$$\lambda_i = r_{\alpha_i} r_{\alpha_{i-1}} \cdots r_{\alpha_1} \lambda_0 = r_{\alpha_i} r_{\alpha_{i-1}} \cdots r_{\alpha_1} w^{-1} \lambda = r_{\alpha_{i+1}} \cdots r_{\alpha_n} \lambda = w_i \lambda$$

e

$$\mu_i = r_{\alpha_i} r_{\alpha_{i-1}} \cdots r_{\alpha_1} \mu_0 = r_{\alpha_i} r_{\alpha_{i-1}} \cdots r_{\alpha_1} w^{-1} \mu = r_{\alpha_{i+1}} \cdots r_{\alpha_n} \mu = w_i \mu.$$

Daí

$$\mu_i = w_i \mu = w_i r_\alpha \lambda = w_i r_\alpha w_i^{-1} (w_i \lambda) = w_i r_\alpha w_i^{-1} \lambda_i = r_{w_i \alpha} \lambda_i.$$

Logo, $\mu_i - \lambda_i \in \mathcal{Q}_+$ ou $\lambda_i - \mu_i \in \mathcal{Q}_+$. De fato, se $\gamma_i = w_i \alpha$, então

$$\begin{aligned} \mu_i - \lambda_i &= r_{\gamma_i} \lambda_i - \lambda_i = \lambda_i - \lambda_i(H'_{\gamma_i})\gamma_i - \lambda_i = -\lambda_i(H'_{\gamma_i})\gamma_i = -w_i \lambda(H'_{\gamma_i})\gamma_i \\ &= -\lambda(H'_{w_i^{-1}\gamma_i})\gamma_i = -\lambda(H'_\alpha)\gamma_i = -m\gamma_i \end{aligned} \tag{6.1}$$

Assim, $\gamma_i \in \Pi^+$ se, e somente se, $\mu_i - \lambda_i \in -\mathcal{Q}_+$.

Seja i o menor inteiro tal que $\mu_i - \lambda_i \in \mathcal{Q}_+$ e $\mu_{i+1} - \lambda_{i+1} \in -\mathcal{Q}_+$. Tal inteiro existe pois $\mu_0 - \lambda_0 \in \mathcal{Q}_+$ e $\mu_n - \lambda_n \in -\mathcal{Q}_+$. Agora, por (6.1), temos

$$\begin{aligned} \mu_i - \lambda_i &= r_{\alpha_{i+1}} r_{\alpha_{i+1}} \mu_i - r_{\alpha_{i+1}} r_{\alpha_{i+1}} \lambda_i = r_{\alpha_{i+1}} \mu_{i+1} - r_{\alpha_{i+1}} \lambda_{i+1} \\ &= r_{\alpha_{i+1}}(\mu_{i+1} - \lambda_{i+1}) = r_{\alpha_{i+1}}(-m\gamma_{i+1}) = -m r_{\alpha_{i+1}} \gamma_{i+1}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Como $r_{\alpha_{i+1}} \gamma_{i+1} \in \mathcal{Q}$ e $\mu_i - \lambda_i \in \mathcal{Q}_+$, pela escolha de i, obtemos

$$r_{\alpha_{i+1}} \gamma_{i+1} = -\frac{1}{m}(\mu_i - \lambda_i) \in -\mathcal{Q}_+.$$

Logo $r_{\alpha_{i+1}} \gamma_{i+1} \in \Pi^-$. Notemos que $\gamma_{i+1} \in \Pi^+$, pois $\mu_{i+1} - \lambda_{i+1} \in -\mathcal{Q}_+$. Pela Proposição 2.3.5, α_{i+1} é a única raiz positiva que é levada em negativa pela reflexão $r_{\alpha_{i+1}}$ e, assim, $\gamma_{i+1} = \alpha_{i+1}$. Como,

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1} - \mu_{i+1} &= \lambda_{i+1} - r_{\alpha_{i+1}} \lambda_{i+1} \\ &= \lambda_{i+1} - \Big(\lambda_{i+1} - \lambda_{i+1}(H'_{\alpha_{i+1}})\alpha_{i+1}\Big) \\ &= \lambda_{i+1}(H'_{\alpha_{i+1}})\alpha_{i+1} \end{aligned}$$

e $\lambda_{i+1} - \mu_{i+1} \in \mathcal{Q}_+$ temos que $\lambda_{i+1}(H'_{\alpha_{i+1}}) \in \mathbb{N}$. Pelas relações $\lambda_{i+1} - \mu_{i+1} \in \mathcal{Q}_+$ e $\mu_{i+1} = r_{\alpha_{i+1}} \lambda_{i+1}$ e pela Proposição 4.3.4 temos que

$$M(\mu_{i+1}) = M(r_{\alpha_{i+1}} \lambda_{i+1}) \subset M(\lambda_{i+1}). \tag{6.3}$$

Por outro lado, temos que $\mu_0 \in \mathcal{P}_{++}$, $w_{i+2} = r_{\alpha_{i+2}} \cdots r_{\alpha_1}$ é a decomposição minimal de w_{i+2} e

$$\mu_{i+2} = r_{\alpha_{i+2}} \mu_{i+1} = r_{\alpha_{i+2}} r_{\alpha_{i+1}} \cdots r_{\alpha_1} \mu_0.$$

Logo, pelo Teorema 6.1.1

$$M(r_{\alpha_{i+2}} \mu_{i+1}) \subset M(\mu_{i+1}) \tag{6.4}$$

Combinando (6.3) e (6.4) obtemos, do Lema 6.1.5, que

$$M(\mu_{i+2}) = M(r_{\alpha_{i+2}}\mu_{i+1}) \subset M(r_{\alpha_{i+2}}\lambda_{i+1}) = M(\lambda_{i+2}).$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que se $k > 1$ é tal que $i + k < n$, então $M(\mu_{i+k}) \subset M(\lambda_{i+k})$.

Como $\mu_0 \in \mathcal{P}_{++}$ e $w_{i+k+1} = r_{\alpha_{i+k+1}} \cdots r_{\alpha_1}$ é a decomposição minimal de w_{i+k+1} obtemos, do Teorema 6.1.1, que

$$M(r_{\alpha_{i+k+1}}\mu_{i+k}) \subset M(\mu_{i+k})$$

Isso, juntamente com a hipótese de indução e o Lema 6.1.5, nos dá

$$M(\mu_{i+k+1}) = M(r_{\alpha_{i+k+1}}\mu_{i+k}) \subset M(r_{\alpha_{i+k+1}}\lambda_{i+k}) = M(\lambda_{i+k+1}).$$

Portanto, $M(\mu) = M(\mu_n) \subset M(\lambda_n) = M(\lambda)$. □

Denotemos por v_λ o gerador canônico de $M(\lambda)$.

Lema 6.1.7. *Sejam $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são os conjuntos definidos por*

$$\mathcal{X} = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) : [H, u] = -\mu(H)u, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

e

$$\mathcal{Y} = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) : uv_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}\}$$

então

1. *$\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são subespaços vetoriais de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ e $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.*
2. $\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Y} < \infty$.

Demonstração. Consideremos o isomorfismo $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \to M(\lambda)$, da Proposição 4.3.1. Como $\mathcal{X} = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)_\mu$ temos, pela Proposição 4.2.1, que $\varphi(\mathcal{X}) = M(\lambda)_\mu$. Logo, $\mathcal{X}$ é um subespaço vetorial e tem dimensão finita (pelo Teorema 4.3.1 (3)). Para concluir a demonstração basta mostrar que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Para todos $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ e $H \in \mathfrak{h}$, temos

$$[H, u]v_\lambda = (Hu - uH)v_\lambda = Huv_\lambda - uHv_\lambda, \tag{6.5}$$

ou equivalentemente,

$$Huv_\lambda = [H, u]v_\lambda + uHv_\lambda. \tag{6.6}$$

Se $u \in \mathcal{X}$ então $[H,u] = -\mu(H)u$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Daí, e de (6.6),

$$\begin{aligned} Huv_\lambda &= -\mu(H)uv_\lambda + u((\lambda-\delta)(H)v_\lambda) \\ &= -\mu(H)uv_\lambda + (\lambda-\delta)(H)uv_\lambda \\ &= (\lambda-\delta-\mu)(H)uv_\lambda, \end{aligned}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$, ou seja, $uv_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}$. Logo, $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$.

Por outro lado, se $u \in \mathcal{Y}$, então $Huv_\lambda = (\lambda-\delta-\mu)(H)uv_\lambda$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Daí, e de (6.5),

$$\begin{aligned} [H,u]v_\lambda &= (\lambda-\delta-\mu)(H)uv_\lambda - u(\lambda-\delta)(H)v_\lambda \\ &= (\lambda-\delta-\mu-\lambda+\delta)(H)uv_\lambda. \\ &= -\mu(H)uv_\lambda, \end{aligned}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$, ou seja, $u \in \mathcal{X}$. Logo, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. □

Lema 6.1.8. *Se $\mu \in \mathfrak{h}^*$, então o conjunto dos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $M(\lambda-\mu) \subset M(\lambda)$ é um subconjunto algébrico de $\mathfrak{h}^*$.*

Demonstração. Consideremos $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$. Para $i = 1, 2, \ldots, l$, definimos $H_i = H'_{\alpha_i}$. Se $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ e $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tal que $[X_i, Y_i] = H_i$, então $[X_i, Y_j] = 0$ para $i \neq j$. Temos que $\mathfrak{n}^-$ é gerada por $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$. Daí,

$$[X_i, \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)] \subset \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)\mathfrak{h}\, \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)H_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)H_l.$$

Consequentemente, para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ existem únicos elementos $u_{i,0}, u_{i,1}, \ldots, u_{i,l}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, tal que

$$[X_i, u] = u_{i,0} + u_{i,1}H_1 + \cdots + u_{i,l}H_l. \tag{6.7}$$

Para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos

$$g^\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \longrightarrow (\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-))^l$$

por $g^\lambda(u) = (f_1^\lambda(u), \ldots, f_l^\lambda(u))$, onde

$$f_i^\lambda(u) = u_{i,0} + (\lambda-\delta)(H_1)u_{i,1} + \cdots + (\lambda-\delta)(H_l)u_{i,l} \tag{6.8}$$

Temos que g^λ é linear.

Considerando o conjunto $\mathcal{X}$, do Lema 6.1.7, e denotando por $g^\lambda_{\mathcal{X}}$ a restrição de g^λ a $\mathcal{X}$, temos que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $M(\lambda - \mu) \subset M(\lambda)$.
2. existe $e \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}$ tal que $e \neq 0$ e $\mathfrak{n}^+ e = 0$.
3. existe $u \in \mathcal{X} - \{0\}$ tal que $\mathfrak{n}^+ u v_\lambda = 0$.
4. existe $u \in \mathcal{X} - \{0\}$ tal que $X_1 u v_\lambda = \cdots = X_l u v_\lambda = 0$.
5. existe $u \in \mathcal{X} - \{0\}$ tal que $[X_1, u]v_\lambda = \cdots = [X_l, u]v_\lambda = 0$.
6. existe $u \in \mathcal{X} - \{0\}$ tal que $f_1^\lambda(u)v_\lambda = \cdots = f_l^\lambda(u)v_\lambda = 0$.
7. existe $u \in \mathcal{X} - \{0\}$ tal que $f_1^\lambda(u) = \cdots = f_l^\lambda(u) = 0$.
8. $\ker g_{\mathcal{X}}^\lambda \neq \{0\}$.
9. $\det g_{\mathcal{X}}^\lambda = 0$.

Mostremos as equivalências acima.

Para vermos que 1. é equivalente a 2., notemos que se $M(\lambda - \mu) \subset M(\lambda)$, então pela Proposição 4.2.1, $M(\lambda-\mu)_{\lambda-\delta-\mu} \subset M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}$. Assim, tomando qualquer $e \in M(\lambda-\mu)_{\lambda-\delta-\mu} - \{0\}$, temos que $e \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}$ e $\mathfrak{n}^+ e = 0$.

Reciprocamente, pelo Teorema 4.3.2, existe um homomorfismo

$$\varphi : M(\lambda - \mu) \to M(\lambda)$$

tal que $\varphi(v_{\lambda-\mu}) = e$. Pela Proposição 6.1.4, φ é injetor. Logo, $M(\lambda-\mu) \subset M(\lambda)$.

Para ver que 2. implica 3. seja $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ tal que $e = uv_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}$. Assim, $u \in \mathcal{Y}$ (na notação do Lema 6.1.7). Pelo Lema 6.1.7, $u \in \mathcal{X}$ e como $e \neq 0$ temos que $u \neq 0$. Além disso, se $X \in \mathfrak{n}^+$, então

$$Xe = Xuv_\lambda = uXv_\lambda = 0$$

e, portanto, $\mathfrak{n}^+ e = 0$.

Reciprocamente, sejam $u \in \mathcal{X} - \{0\}$ tal que $\mathfrak{n}^+ uv_\lambda = \{0\}$ e $e = uv_\lambda$. Pelo Lema 6.1.7, temos que $e = uv_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-\delta-\mu}$ e, além disso, $e \neq 0$ e $\mathfrak{n}^+ e = \{0\}$.

O fato de $\{X_1, \ldots, X_l\}$ ser base de $\mathfrak{n}^+$ garante que 3. e 4. são equivalentes.

Agora, como para todo $i = 1, \ldots, l$, $X_i \in \mathfrak{n}^+$, temos que $X_i v_\lambda = 0$ e assim

$$[X_i, u]v_\lambda = X_i u v_\lambda - uX_i v_\lambda = X_i u v_\lambda,$$

e isto mostra que 4. é equivalente a 5..

Pelas expressões que definem $[X_i, u]$, em (6.7), e $f_i^\lambda(u)$, em (6.8), temos a igualdade

$$[X_i, u]v_\lambda = f_i^\lambda(u)v_\lambda,$$

o que mostra que 5. e 6. são equivalentes.

A equivalência entre 6. e 7. segue diretamente do fato que $v_\lambda \neq 0$, e entre 7. e 8. da definição de g^λ.

Por fim, a equivalência entre 8. e 9. é um resultado bem conhecido de transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita (veja, por exemplo, [6]).

Para concluir a demonstração, notemos que, $\det g^\lambda_\mathcal{X}$ é um polinômio em λ. Assim, da equivalência entre 1. e 9., acima, o conjunto dos λ tal que $M(\lambda - \mu) \subset M(\lambda)$, coincide com o conjunto dos λ tal que $\det g^\lambda_\mathcal{X} = 0$, o qual é um conjunto algébrico, concluindo a demonstração. $\square$

O seguinte Lema é parte essencial do Teorema 6.1.2.

Lema 6.1.9. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in \Pi^+$ e $m = \lambda(H'_\alpha)$. Se $m \in \mathbb{N}$, então $M(r_\alpha\lambda) \subset M(\lambda)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de $\nu \in \mathfrak{h}^*$ tal que $M(\nu - m\alpha) \subset M(\nu)$, que é um subconjunto algébrico de $\mathfrak{h}^*$, pelo Lema 6.1.8.

Se $\mathcal{H}$ é o hiperplano afim de $\mathfrak{h}^*$ que consiste dos elementos $\nu \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\nu(H'_\alpha) = m$, então temos $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$. De fato, se $\gamma \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$, então $\gamma \in \mathcal{P}$ e $\gamma(H'_\alpha) = m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 6.1.6, $M(\gamma - m\alpha) = M(r_\alpha(\gamma)) \subset M(\gamma)$. Logo, $\gamma \in \mathcal{A}$.

Mostremos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$, em relação a topologia de Zariski (alguns conceitos e resultados sobre a topologia de Zariski pode ser encontrados, por exemplo, na referência [3], Seção 1.6). Para isso, seja $\mathcal{B} = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ a base de $\mathfrak{h}^*$ formada pelos pesos fundamentais. Consideremos o isomorfismo entre $\mathfrak{h}^*$ e $\mathbb{K}^l$ que associa a cada elemento de $\mathfrak{h}^*$ as suas coordenadas em relação a base $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é base do grupo aditivo $\mathcal{P}$ e $\langle \omega_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ para todo $\lambda \in \mathcal{P}$ e para todo $1 \leq i \leq l$, temos que $\mathcal{P}$ se identifica com $\mathbb{Z}^l$. Além disso, se $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, $H_i = H'_{\alpha_i}$ e $\mathcal{C} = \{H_1 \ldots, H_l\}$ então $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são duais e, assim, $H'_\alpha = \omega_1(H'_\alpha)H_1 + \cdots + \omega_l(H'_\alpha)H_l$. Escrevendo $n_j = \omega_j(H'_\alpha)$ e $\nu = \xi_1\omega_1 + \cdots + \xi_l\omega_l$ temos que

$$\nu(H'_\alpha) = n_1\xi_1 + \cdots + n_l\xi_l.$$

Logo, com essas identificações, temos

$$\mathcal{H} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_l) \in \mathbb{K}^l : n_1\xi_1 + \cdots + n_l\xi_l = m\}.$$

Consideremos o polinômio $f = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_lx_l - m$, nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$. Daí,

$$\mathcal{H} = \{\xi \in \mathbb{K}^l : f(\xi) = 0\},$$

isto é, $\mathcal{H}$ é um conjunto algébrico e assim $\overline{\mathcal{P} \cap \mathcal{H}} \subset \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, onde a barra denota o fecho, na topologia de Zariski. Como f é irredutível, $\overline{\mathcal{P} \cap \mathcal{H}}$ não pode ser próprio em $\mathcal{H}$. Logo, do fato de $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$, obtemos

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{P} \cap \mathcal{H}} \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}.$$

Logo, se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é tal que $\lambda(H'_\alpha) = m \in \mathbb{N}$, isto é, $\lambda \in \mathcal{H}$ então $\lambda \in \mathcal{A}$ e, portanto,

$$M(r_\alpha \lambda) = M(\lambda - m\alpha) \subset M(\lambda),$$

concluindo o Lema. □

Proposição 6.1.5. *Seja F um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, e $(f_1, \ldots, f_s)$ uma base de F tal que, para todo i, temos $f_i \in F_{\mu_i}$. Suponhamos que a ordenação é tal que se $\mu_j > \mu_i$, então $j < i$. Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, então:*

1. *O $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda) \otimes F$ tem uma série de composição*

   $$M(\lambda) \otimes F = M_s \supset M_{s-1} \supset \cdots \supset M_0 = 0$$

   tal que, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ é isomorfo a $M(\lambda + \mu_i)$.

2. *O $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda) \otimes F$ tem uma série de Jordan-Holder.*

Demonstração. Sejam v o gerador canônico de $M(\lambda)$, e $a_i = v \otimes f_i$. Consideremos o $\mathfrak{g}$-módulo M_i definido por

$$M_i = \mathcal{U}(\mathfrak{g})a_1 + \cdots + \mathcal{U}(\mathfrak{g})a_i.$$

Pela linearidade do produto tensorial na segunda coordenada, temos $v \otimes F \subset M_s$. Além disso, se $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $f \in F$, então

$$u(v \otimes f) = (uv) \otimes f + v \otimes (uf),$$

isto é,

$$(uv) \otimes f = u(v \otimes f) - v \otimes (uf) \in M_s.$$

Logo, $(U(\mathfrak{g})v) \otimes F \subset M_s$ e, portanto, $M_s = M(\lambda) \otimes F$.

Denotemos por b_i a imagem de a_i, pela projeção canônica, em $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$. Assim, pela definição de M_i, b_i gera o $\mathfrak{g}$-módulo $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$.

Temos ainda,

$$\begin{aligned} Ha_i = &= H(v \otimes f_i) = (Hv) \otimes f_i + v \otimes (Hf_i) \\ &= (\lambda - \delta)(H)(v \otimes f_i) + \mu_i(H)(v \otimes f_i) \\ &= (\lambda - \delta + \mu_i)(H)(v \otimes f_i) \\ &= (\lambda - \delta + \mu_i)(H)a_i \end{aligned}$$

e

$$Hb_i \;=\; H\pi(a_i) = \pi(Ha_i) = (\lambda - \delta + \mu_i)(H)(\pi(a_i)) = (\lambda - \delta + \mu_i)(H)b_i,$$

isto é, $b_i \in \left(\dfrac{M_i}{M_{i-1}}\right)_{\lambda+\mu_i-\delta}$.

Se $\alpha \in \Pi^+$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, então

$$X_\alpha a_i = X_\alpha(v \otimes f_i) = X_\alpha v \otimes f_i + v \otimes X_\alpha f_i = v \otimes X_\alpha f_i,$$

pois $X_\alpha v = 0$. Pela Proposição 4.2.2, $X_\alpha a_i \in F_{\mu_{i+\alpha}}$ e assim $X_\alpha a_i \in v \otimes F_{\mu_{i+\alpha}}$.

Como $\mu_i + \alpha > \mu_i$ temos, pela hipótese na ordenação dos pesos, que

$$F_{\mu_{i+\alpha}} \subset \mathbb{K}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}f_{i-1}.$$

De fato, seja $w \in F_{\mu_i+\alpha}$,

$$w = k_1 f_1 + \cdots + k_s f_s,$$

onde $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{K}$. Dado $H \in \mathfrak{h}$,

$$Hw = k_1 H f_1 + \cdots + k_s H f_s = k_1 \mu_1(H) f_1 + \cdots + k_s \mu_s(H) f_s.$$

Por outro lado,

$$Hw = (\mu_i + \alpha)(H)w = k_1(\mu_i + \alpha)(H) f_1 + \cdots + k_s(\mu_i + \alpha)(H) f_s.$$

Assim, para todo j, $k_j(\mu_i + \alpha - \mu_j) = 0$. Se $j \geq i$ então, pela hipótese na ordenação dos pesos, $\mu_j \leq \mu_i$ e, assim, $\mu_i + \alpha - \mu_j > 0$ e, consequentemente, $k_j = 0$. Logo,

$$w = k_1 f_1 + \cdots + k_{i-1} f_{i-1} \in \mathbb{K}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}f_{i-1}.$$

Como $X_\alpha f_i \in F_{\mu_{i+\alpha}}$, existem escalares $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{K}$ tal que $X_\alpha f_i = k_1 f_1 + \cdots + k_{i-1} f_{i-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} X_\alpha a_i &= v \otimes (X_\alpha f_i) = k_1(v \otimes f_1) + \cdots + k_{i-1}(v \otimes f_{i-1}) \\ &= k_1 a_1 + \cdots + k_{i-1} a_{i-1} \in M_{i-1} \end{aligned}$$

e, consequentemente, para todo $X \in \mathfrak{n}^+$,

$$Xb_i = X\pi(a_i) = \pi(Xa_i) = 0.$$

Logo, $\mathfrak{n}^+ b_i = 0$ e $M_i = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)a_1 + \cdots + \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)a_i$.

Mostremos que M_i é um $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$-módulo livre com base $(a_1, \ldots, a_i)$.

Sejam $u_1, \ldots, u_i$ elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ que não são todos nulos, e p a maior das filtrações dos elementos não nulos u_j. Temos

$$u_1 a_1 + \cdots + u_i a_i = (u_1 v) \otimes f_1 + \cdots + (u_i v) \otimes f_i + (u_1' v) \otimes f_1 + \cdots + (u_s' v) \otimes f_s,$$

onde $u'_1, \ldots, u'_s$ tem filtração menor que p. Se $j \in \{1, \ldots, i\}$ é tal que u_j tem filtração p, então $u_j + u'_j \neq 0$, daí $(u_j + u'_j)v \neq 0$ de onde

$$u_1 a_1 + \cdots + u_i a_i \neq 0.$$

Isso prova que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ é um $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$-módulo livre e consequentemente é isomorfo a $M(\lambda + \mu_i)$ como um $\mathfrak{g}$-módulo, pelo Teorema 4.3.2, provando (1).

Mostremos (2). Pela parte (1), o $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda) \otimes F$ possui uma serie de composição

$$M(\lambda) \otimes F = M_s \supset M_{s-1} \supset \cdots \supset M_0 = 0,$$

tal que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}} \approx M(\lambda + \mu_i)$. Assim, pela Proposição 6.1.1, para cada i, $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ tem uma série de Jordan-Holder, isto é, existe uma sequência de submódulos $(N_0, N_1, \ldots, N_{r_i})$, onde $N_j = \dfrac{L_j}{M_{i-1}}$, $j \in \{0, 1, \ldots, r_i\}$, tal que

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_{r_i} = \{0\} = \frac{M_{i-1}}{M_{i-1}}$$

e cada quociente $\dfrac{N_i}{N_{i+1}}$ é simples.

Agora,

$$M_i = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_{r_i} = M_{i-1}.$$

e, pelo Teorema do Isomorfismo temos

$$\frac{L_j}{L_{j+1}} \approx \frac{L_j/M_{i-1}}{L_{j+1}/M_{i-1}} = \frac{N_j}{N_{j+1}},$$

isto é, cada quociente $\dfrac{L_j}{L_{j+1}}$ é simples. Como i é arbitrário concluímos que $M(\lambda) \otimes F$ tem uma série de Jordan-Holder, e isto termina a demonstração da proposição. □

Seja F um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Denotamos por $\mathcal{P}(F)$ o conjunto de pesos de F.

Corolário 6.1.1.1. *Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\mu_i \in \mathcal{P}(F)$, então $L(\lambda + \mu_i) \in JH\,(M(\lambda) \otimes F)$.*

Demonstração. Utilizando a notação da Proposição 6.1.5 temos que $M(\lambda + \mu_i) \approx \dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ e que N_1 é o submódulo maximal em $M(\lambda + \mu_i)$. Assim,

$$L(\lambda + \mu_i) = \frac{M(\lambda + \mu_i)}{N_1} \approx \frac{M_i/M_{i-1}}{L_1/M_{i-1}} \approx \frac{M_i}{L_1},$$

onde M_i e L_1 são submódulos de $M(\lambda) \otimes F$. Portanto, $L(\lambda + \mu_i) \in JH(M(\lambda) \otimes F)$. □

A partir de agora, a topologia usada em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ será a topologia usual.

Se $\mu \in \mathcal{P}$, então existe um único elemento μ' em $\mathcal{P}_{++}$ tal que $\mu' \in \mathcal{W}\mu$.

Definição 6.1.2. *Denotamos um $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita com peso máximo μ' por F_μ.*

Lema 6.1.10. *Se ν é peso de F_μ, então $\|\nu\| \leq \|\mu\|$.*

Demonstração. Por definição, F_μ é um $\mathfrak{g}$-módulo como peso máximo μ' tal que $\mu' = w\mu$, com $w \in \mathcal{W}$. Pela Proposição 5.1.2 (3), $\|\nu\| \leq \|\mu'\|$. Como w é uma isometria em relação à forma de Cartan-Killing, temos que $\|\mu'\| = \|w\mu\| = \|\mu\|$, concluindo a demonstração. □

Definição 6.1.3. *Um triplo (λ, μ, F) é dito **admissível** quando satisfaz*

1. *$\lambda \in \mathfrak{h}^*$;*

2. *F é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita;*

3. *$\mu \in \mathcal{P}(F)$;*

4. *Não existe par (w, ν) tal que $w \in \mathcal{W}$, $\nu \in \mathcal{P}(F)$, $w\lambda < \lambda$*

$$w(\lambda + \nu) \geq \lambda + \mu \quad \text{e} \quad \lambda + \mu \in \mathcal{W}(\lambda + \nu).$$

Sejam $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$. Dizemos que uma sequência $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de elementos de Π^+ **liga** λ' com λ quando

$$\lambda' \geq r_{\gamma_1}\lambda' \geq r_{\gamma_2}r_{\gamma_1}\lambda' \geq \cdots \geq r_{\gamma_n}r_{\gamma_{n-1}}\cdots r_{\gamma_1}\lambda' = \lambda.$$

Aqui, a câmara de Weyl correspondente a Σ será denotada por C^+.

Em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, a forma de Cartan-Killing (que é um produto interno) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induz uma norma e uma distância que denotamos, respectivamente, por $\| \cdot \|$ e $d(\cdot, \cdot)$. Temos que, $\langle \delta, \alpha \rangle > 0$ para todo $\alpha \in \Pi^+$. Definimos c_1, c_2 e c_3 por

$$c_1 = \sup_{\alpha \in \Sigma} \frac{\| \delta \| \cdot \| \alpha \|}{\langle \delta, \alpha \rangle} + 1; \quad c_2 = \sup_{1 \leq i \leq l} \| \omega_i \| \quad \text{e} \quad c_3 = \inf_{\xi \in \mathcal{Q}_+} \| \xi \|$$

onde ω_i são os pesos fundamentais e $\xi \neq 0$.

Para cada $\alpha \in \Pi$, denotamos por Ξ_α o subespaço ortogonal a α, em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, e por Ξ, a união $\Xi = \bigcup_{\alpha \in \Pi} \Xi_\alpha$.

Considerando $\mathbb{K}$ com um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, obtemos um subespaço $\mathbb{K}'$ tal que

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{K}'.$$

A partir desta decomposição de $\mathbb{K}$ temos a decomposição correspondente de $\mathfrak{h}^*$, dada por

$$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{K}'\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}.$$

Essas componentes são invariantes pelo grupo de Weyl $\mathcal{W}$. De fato, cada $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ se escreve como combinação linear de raízes simples, com coeficientes racionais. Dado $w \in \mathcal{W}$ temos que a imagem de uma raiz simples por w é uma raiz e, assim, se escreve como combinação linear das raízes simples, com coeficientes inteiros. Logo, $w\mu$ se escreve como combinação linear das raízes simples, com coeficientes racionais e, portanto, $w\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$. Daí, segue que $\mathbb{K}'\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, também, é invariante por $\mathcal{W}$.

Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, denotemos por $\Re\lambda$ a componente de λ em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e por $\Im\lambda$ a componente de λ em $\mathbb{K}'\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, isto é,

$$\lambda = \Re\lambda + \Im\lambda,$$

com $\Re\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e $\Im\lambda \in \mathbb{K}'\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$.

Lema 6.1.11. *Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $w \in \mathcal{W}$, então $w\Re\lambda = \Re w\lambda$ e $w\Im\lambda = \Im w\lambda$.*

Demonstração. Como $\lambda = \Re\lambda + \Im\lambda$ e, pela linearidade de w, temos

$$w\Re\lambda + w\Im\lambda = w\lambda = \Re w\lambda + \Im w\lambda.$$

Pela invariância, por w, das componentes na decomposição de $\mathfrak{h}^*$ temos que $w\Re\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e $w\Im\lambda \in \mathbb{K}'\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$. Logo, pela unicidade das componentes na soma direta, $w\Re\lambda = \Re w\lambda$ e $w\Im\lambda = \Im w\lambda$. $\square$

Um elemento $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é dito **longe das paredes** quando $d(\Re\lambda, \Xi) > 2c_1c_2$. Dada uma câmara de Weyl C, denotamos por C^0 o conjunto de $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ que estão longe das paredes, tal que $\Re\lambda \in C$.

Lema 6.1.12. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mu \in \mathcal{P}(F)$ e C uma câmara de Weyl. Se $\Re\lambda \in C$ e $2c_1 \parallel \mu \parallel < d(\Re\lambda, \Xi)$, então $\Re\lambda + \mu \in C$.*

Demonstração. Temos que,

$$d(\Re\lambda, \Re\lambda + \mu) = \parallel \Re\lambda - (\Re\lambda + \mu) \parallel = \parallel \mu \parallel .$$

Como $c_1 = \sup_{\alpha\in\Sigma} \dfrac{\parallel \delta \parallel \cdot \parallel \alpha \parallel}{\langle \delta, \alpha \rangle} + 1 > 1$, temos

$$d(\Re\lambda, \Re\lambda + \mu) = \parallel \mu \parallel < 2c_1 \parallel \mu \parallel < d(\Re\lambda, \Xi).$$

Logo, $d(\Re\lambda, \Re\lambda + \mu) < d(\Re\lambda, \Xi)$ e como $\Re\lambda \in C$ concluímos que $\Re\lambda + \mu \in C$. $\square$

Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, denotamos a seguinte afirmação por $\mathcal{A}(\lambda)$:

- **Afirmação** $\mathcal{A}(\lambda)$: Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$, então existe uma sequência de elementos de Π^+ ligando λ' com λ.

Nosso objetivo é provar que $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeira, para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Lema 6.1.13. *Se $\Re\lambda \in \overline{C^+}$, então $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeiro.*

Demonstração. Seja $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$ tal que $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$. Assim, $\lambda \leq \lambda'$ e existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $\lambda = w\lambda'$. Daí,

$$\Re(\lambda' - \lambda) + \Im(\lambda' - \lambda) = \lambda' - \lambda \in \mathcal{Q}_+ \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}},$$

isto é, $\Im(\lambda' - \lambda) = 0$ e $\Re(\lambda' - \lambda) \in \mathcal{Q}_+$. Isso significa que $\Re\lambda \leq \Re\lambda'$.

Além disso, como

$$\Re\lambda + \Im\lambda = \lambda = w\lambda' = w\Re\lambda' + w\Im\lambda'$$

temos, pelo Lema 6.1.11,

$$\Re\lambda = w\Re\lambda', \Im\lambda = w\Im\lambda'.$$

Como $\Re\lambda \in \overline{C^+}$ temos que $\Re\lambda' = w^{-1}\Re\lambda \leq \Re\lambda$. Logo, $\Re\lambda = \Re\lambda'$ e, assim, $\lambda = \lambda'$. $\square$

Lema 6.1.14. *Se (λ, μ, F) é um triplo admissível, então $L(\lambda + \mu) \in JH(L(\lambda) \otimes F)$.*

Demonstração. a) Seja K o maior $\mathfrak{g}$-módulo de $M(\lambda)$ distinto de $M(\lambda)$. Pela Proposição 6.1.1, cada subquociente simples de K é isomorfo a $L(\nu)$ com $\nu \in \mathcal{W}\lambda \cap (\lambda - \mathcal{Q}_+)$. Em particular, $\nu < \lambda$. Além disso, $L(\nu)$ é um subquociente simples de $M(\nu)$. Assim,

$$JH(K) \subset \{L(\nu) : \nu \in \mathcal{W}\lambda,\ \nu < \lambda\} \subset \bigcup_{\substack{\nu \in \mathcal{W}\lambda \\ \nu < \lambda}} JH(M(\nu)) \tag{6.9}$$

Se $(T_1, \ldots, T_n)$ é uma série de Jordan-Holder de K, então $(T_1 \otimes F, \ldots, T_n \otimes F)$ é uma série de composição de $K \otimes F$, que pode ser refinada para uma série de Jordan-Holder de $K \otimes F$, pela Proposição 6.1.5 parte (2) (veja o Teorema 3.5 e o Lema 3.6 de [12]). Daí, se $N \in JH(K \otimes F)$, então existe i tal que $N = W_i/W_{i+1}$, onde

$$T_i \otimes F = W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_s = T_{i+1} \otimes F,$$

é parte da série de Jordan-Holder de $K \otimes F$. Assim, $N \approx \dfrac{W_i/(T_{i+1} \otimes F)}{W_{i+1}/(T_{i+1} \otimes F)}$, onde

$$\frac{W_{i+1}}{T_{i+1} \otimes F} \subset \frac{W_i}{T_{i+1} \otimes F} \subset \frac{T_i \otimes F}{T_{i+1} \otimes F} \approx \frac{T_i}{T_{i+1}} \otimes F.$$

Logo, tomando $S = T_i/T_{i+1}$ temos que $S \in JH(K)$ e $N \in JH(S \otimes F)$.

Por (6.9), existe $\nu \in W\lambda$ tal que $S \in JH(M(\nu))$, isto é, $S = S_1/S_2$, onde $S_2 \subset S_1 \subset M(\nu)$. Logo, $N = N_1/N_2$, onde

$$N_2 \subset N_1 \subset S \otimes F = (S_1/S_2) \otimes F \approx \frac{S_1 \otimes F}{S_2 \otimes F}$$

e, portanto, $N \in JH(M(\nu) \otimes F)$.

Pela Proposição 6.1.5 parte (1), vemos que

$$JH(K \otimes F) \subset \bigcup_{\substack{\nu \in W\lambda \\ \xi \in \mathcal{P}(F)}} JH(M(\nu + \xi)).$$

b) Suponhamos que $L(\lambda + \mu) \in JH(K \otimes F)$. Por (a), existe $w \in W$ e $\xi \in \mathcal{P}(F)$ tal que $w\lambda < \lambda$ e

$$L(\lambda + \mu) \in JH(M(w\lambda + \xi)) \tag{6.10}$$

Definimos $\nu = w^{-1}\xi \in \mathcal{P}(F)$. Por (6.10) e pela Proposição 6.1.1 temos

$$\lambda + \mu \leq w\lambda + \xi = w\lambda + w\nu = w(\lambda + \nu)$$

e

$$\lambda + \mu \in W(w\lambda + \xi) = W(\lambda + \nu)$$

que contradiz a hipótese de que (λ, μ, F) é admissível.

c) De b), $L(\lambda + \mu) \notin JH(K \otimes F)$. Pela Proposição 6.1.5 temos

$$L(\lambda + \mu) \in JH(M(\lambda) \otimes F).$$

Como

$$JH(M(\lambda) \otimes F) = JH(L(\lambda) \otimes F) \bigcup JH(K \otimes F)$$

segue que $L(\lambda + \mu) \in JH(L(\lambda) \otimes F)$, provando o lema. $\square$

Lema 6.1.15. *Sejam (λ, μ, F) um triplo admissível, e $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$. Se $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$, então existe $\nu \in \mathcal{P}(F)$ tal que $L(\lambda + \mu) \in JH(M(\lambda' + \nu))$*

Demonstração. Temos pelo Lema 6.1.14 que

$$L(\lambda + \mu) \in JH(L(\lambda) \otimes F).$$

Por hipótese, $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$ e isso implica que

$$JH(L(\lambda) \otimes F) \subset JH(M(\lambda') \otimes F)$$

e pela Proposição 6.1.5

$$JH(M(\lambda') \otimes F) \subset \bigcup_{\nu \in \mathcal{P}(F)} JH(M(\lambda' + \nu)).$$

Portanto, $L(\lambda + \mu) \in JH(M(\lambda' + \nu))$. $\square$

Lema 6.1.16. *Sejam C, C' câmaras de Weyl, e $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathfrak{h}^*$. Suponhamos que:*

- $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}, \;\; \mu' \in \mathcal{P}, \;\; \lambda' \in \mathcal{W}\lambda$;
- $\Re\lambda \in \overline{C}, \;\; \Re\lambda + \mu \in C$;
- $\Re\lambda' \in \overline{C'}, \;\; \Re\lambda' + \mu' \in C'$.

Se $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma sequência de elementos de Π^+ ligando $\lambda' + \mu'$ com $\lambda + \mu$, então $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ liga λ' com λ.

Demonstração. Sejam

$$\lambda_0 = \lambda', \; \lambda_1 = r_{\gamma_1}\lambda_0, \; \lambda_2 = r_{\gamma_2}\lambda_1, \; \ldots, \; \lambda_n = r_{\gamma_n}\lambda_{n-1}$$

e

$$\nu_0 = \lambda' + \mu', \; \nu_1 = r_{\gamma_1}\nu_0, \; \nu_2 = r_{\gamma_2}\nu_1, \; \ldots, \; \nu_n = r_{\gamma_n}\nu_{n-1} = \lambda + \mu.$$

Como $\Re\nu_0 \in C'$ e $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ liga $\lambda' + \mu'$ com $\lambda + \mu$, temos $\nu_0 > \nu_1 > \cdots > \nu_n$ e, assim, $\nu_i\left(H'_{\gamma_{i+1}}\right)$ é um inteiro positivo para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. De fato,

$$\nu_i - \nu_{i+1} = \nu_i - r_{\gamma_{i+1}}\nu_i = \nu_i(H'_{\gamma_{i+1}})\gamma_{i+1}.$$

Como $\nu_i - \nu_{i+1} \in \mathcal{Q}_+$ temos que $\nu_i\left(H'_{\gamma_{i+1}}\right) \in \mathbb{N}$.

Temos que $r_{\gamma_i}r_{\gamma_{i-1}}\cdots r_{\gamma_1}$ transforma λ' em λ_i e $\lambda' + \mu'$ em ν_i, isto é,

$$\lambda_i = r_{\gamma_i}r_{\gamma_{i-1}}\cdots r_{\gamma_1}\lambda_0 = r_{\gamma_i}r_{\gamma_{i-1}}\cdots r_{\gamma_1}\lambda'$$

e

$$\nu_i = r_{\gamma_i}r_{\gamma_{i-1}}\cdots r_{\gamma_1}\nu_0 = r_{\gamma_i}r_{\gamma_{i-1}}\cdots r_{\gamma_1}\left(\lambda' + \mu'\right)$$

assim $\Re\lambda_i$ e $\Re\nu_i$ estão em uma mesma câmara. Além disso, $\lambda_i - \nu_i \in \mathcal{P}$, daí $\lambda_i\left(H'_{\gamma_{i+1}}\right)$ é não negativo. De fato, se $\lambda_i - \nu_i \in \mathcal{P}$ então $(\lambda_i - \nu_i)\left(H'_\alpha\right) \in \mathbb{Z}$, para todo $\alpha \in \Pi$. Se $(\lambda_i - \nu_i)\left(H'_{\gamma_{i+1}}\right) = m_i \in \mathbb{Z}$, então

$$\lambda_i(H'_{\gamma_{i+1}}) = m_i + \nu_i(H'_{\gamma_{i+1}}).$$

Como $\nu_i(H'_{\gamma_{i+1}}) > 0$ e ν_i e λ_i estão na mesma câmara, concluímos que $\lambda_i\left(H'_{\gamma_{i+1}}\right) \geq 0$. Consequentemente,

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Agora, seja $w = r_{\gamma_n}r_{\gamma_{n-1}}\cdots r_{\gamma_1}$. Como

$$w\left(\Re\lambda' + \mu'\right) = \Re w(\lambda' + \mu') = \Re r_{\gamma_n}r_{\gamma_{n-1}}\cdots r_{\gamma_1}(\lambda' + \mu') = \Re\nu_n = \Re\lambda + \mu, \tag{6.11}$$

temos $w(C') = C$ e daí $\Re\lambda_n = w(\Re\lambda') \in \overline{C}$. Por outro lado, como $\lambda \in \mathcal{W}\lambda_n$, existe $w_n \in \mathcal{W}$ tal que $\lambda = w_n\lambda_n = w_n w\lambda'$. Daí,

$$w_n^{-1}\lambda = w\lambda', \quad \text{isto é,} \quad w_n^{-1}\Re\lambda = w\Re\lambda' \in \overline{C}.$$

Como $\Re\lambda \in \overline{C}$ e $w_n^{-1}\Re\lambda \in \overline{C}$ temos $\Re\lambda = w_n^{-1}\Re\lambda = w\Re\lambda'$. De (6.11), $w\mu' = \mu$ e como $w(\lambda' + \mu') = \lambda + \mu$ vemos que $\lambda_n = w\lambda' = \lambda$. Portanto, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ liga λ' com λ. □

Lema 6.1.17. *Sejam $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$, $\mu, \mu' \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$. Se $\lambda > \lambda'$ e $\lambda + \mu \leq \lambda' + \mu'$, então*

$$\| \lambda - \lambda' \| < c_1 \left(\| \mu \| + \| \mu' \| \right).$$

Demonstração. Se $\xi \in \mathcal{Q}_+ - \{0\}$ então podemos escrever $\xi = \sum n_\alpha \alpha$, onde n_α são inteiros não negativos e que não são todos nulos. Como $c_1 = \sup_{\alpha \in \Sigma} \dfrac{\| \delta \| \| \alpha \|}{\langle \delta, \alpha \rangle} + 1$ e para todo $\alpha \in \Sigma$, $\langle \delta, \alpha \rangle > 0$ temos

$$\| \delta \| \cdot \| \alpha \| < c_1 \langle \delta, \alpha \rangle$$

para todo $\alpha \in \Sigma$. Logo,

$$\| \delta \| \cdot \| \xi \| \leq \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \| \delta \| \| \alpha \| < \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha c_1 \langle \delta, \alpha \rangle = c_1 \langle \delta, \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha \rangle = c_1 \langle \delta, \xi \rangle.$$

Daí, e da hipótese $\lambda - \lambda' \in \mathcal{Q}_+ - \{0\}$, temos

$$\| \delta \| \cdot \| \lambda - \lambda' \| < c_1 \langle \delta, \lambda - \lambda' \rangle. \tag{6.12}$$

Por hipótese, $\mu' - \mu \geq \lambda - \lambda'$. Assim, escrevendo $\mu' - \mu + \lambda' - \lambda = \sum k_\alpha \alpha$, com $k_\alpha \in \mathbb{Z}_+$, obtemos $\langle \delta, \mu' - \mu + \lambda' - \lambda \rangle = \sum k_\alpha \langle \delta, \alpha \rangle \geq 0$, isto é, $\langle \delta, \lambda - \lambda' \rangle \leq \langle \delta, \mu' - \mu \rangle$. Combinando isso com (6.12) otbemos

$$\| \delta \| \cdot \| \lambda - \lambda' \| < c_1 \langle \delta, \mu' - \mu \rangle \leq c_1 \| \delta \| \left(\| \mu \| + \| \mu' \| \right),$$

concluindo a demonstração. □

Lema 6.1.18. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mu \in \mathcal{P}$ e C uma câmara de Weyl. Suponhamos que:*

- *$\Re\lambda \in C$; e*
- *$2c_1 \| \mu \| < d(\Re\lambda, \Xi)$.*

Se $\mathcal{A}(\lambda + \mu)$ é verdadeiro, então $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeiro.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que a terna (λ, μ, F_μ) é admissível. Sejam $w \in \mathcal{W}$ e $\nu \in \mathcal{P}(F_\mu)$ tal que $w\lambda < \lambda$ e $w(\lambda + \nu) \geq \lambda + \mu$. Como μ e $w\nu$ são pesos de F_μ e $\dim F_\mu < \infty$ temos pela Proposição 5.1.1 (2) que $\mu, w\nu \in \mathcal{P} \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$.

Pelo Lema 6.1.17, temos

$$\| \lambda - w\lambda \| < c_1 (\| \mu \| + \| w\nu \|)$$

e, pelo Lema 6.1.10, $\| w\nu \| \leq \| \mu \|$. Daí,

$$c_1 (\| \mu \| + \| w\nu \|) \leq c_1 (\| \mu \| + \| \mu \|) = 2c_1 \| \mu \| < d(\Re\lambda, \Xi)$$

Logo, $\| \Re\lambda - w\Re\lambda \| \leq \| \lambda - w\lambda \| < d(\Re\lambda, \Xi)$. Isso juntamente com o fato que $\Re\lambda \in C$ implica que $w\Re\lambda \in C$. Assim, $w = 1$, contradizendo $w\lambda < \lambda$. Portanto, (λ, μ, F_μ) é admissível.

Agora, seja $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$ tal que $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$. Como (λ, μ, F_μ) é admissível temos, pelo Lema 6.1.15, que existe $\mu' \in \mathcal{P}(F_\mu)$ tal que $L(\lambda + \mu) \in JH(M(\lambda' + \mu'))$.

Como $\mathcal{A}(\lambda + \mu)$ é verdadeiro, existe uma sequência $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de elementos de Π^+ ligando $\lambda' + \mu'$ com $\lambda + \mu$. Por outro lado, como $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$ temos, pela Proposição 6.1.1, que $\lambda' \in W\lambda$, isto é, existe $w' \in \mathcal{W}$ tal que $\lambda = w'\lambda'$. Pelo Lema 6.1.10,

$$2c_1 \| \mu' \| \leq 2c_1 \| \mu \| < d(\Re\lambda, \Xi) = d(\Re\lambda', \Xi).$$

Consequentemente, se C' é uma câmara contendo $\Re\lambda'$, então, pelo Lema 6.1.12, $\Re\lambda' + \mu' \in C'$. Portanto, pelo Lema 6.1.16, temos que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ liga λ' com λ. $\square$

Lema 6.1.19. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mu \in \mathcal{P}$, C uma câmara de Weyl e $\gamma \in \Pi^+$. Suponhamos que:*

- *γ é ortogonal a uma parede de C e $\langle C, \gamma \rangle < 0$;*
- *$\Re\lambda \in C$ e $\Re\lambda + \mu \in r_\gamma C$;*
- *$2c_1 \| \mu \| < d(\Re\lambda, \Xi_\beta)$ para todo $\beta \in \Pi^+ - \{\gamma\}$.*

Se $\mathcal{A}(\lambda + \mu)$ é verdadeiro, então $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeiro.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que a terna (λ, μ, F) é admissível. Sejam $w \in \mathcal{W}$ e $\nu \in \mathcal{P}(F)$ tal que $w\lambda < \lambda$ e $w(\lambda + \nu) \geq \lambda + \mu$. Pela proposição 5.1.2 (3) e pelos Lemas 6.1.17 e 6.1.18 temos

$$\| \Re\lambda - w\Re\lambda \| \leq \| \lambda - w\lambda \| < c_1 (\| \mu \| + \| w\nu \|) \leq 2c_1 \| \mu \| < d(\Re\lambda, \Xi_\beta)$$

para todo $\beta \in \Pi^+ - \{\gamma\}$. Daí, e do fato que $\Re\lambda \in C$, temos que $w(\Re\lambda) \in C$ ou $w(\Re\lambda) \in r_\gamma C$.

- Se $w(\Re\lambda) \in C$, então $w(\Re\lambda) = \Re\lambda$ e, assim, $w = 1$ contradizendo $w\lambda < \lambda$.

- Se $w(\Re\lambda) \in r_\gamma C$, então $r_\gamma w(\Re\lambda) \in C$ e assim $r_\gamma w(\Re\lambda) = \Re\lambda$, isto é, $w = r_\gamma$. Como

$$\lambda - \lambda(H'_\gamma)\gamma = r_\gamma\lambda = w\lambda < \lambda$$

temos que $\lambda(H'_\gamma) > 0$. Mas

$$\frac{2\langle\Re\lambda, \gamma\rangle}{\langle\gamma, \gamma\rangle} = \Re\lambda(H'_\gamma) = \lambda(H'_\gamma) > 0$$

e, assim, $\langle\Re\lambda, \gamma\rangle > 0$, o que contraria as hipóteses $\Re\lambda \in C$ e $\langle\gamma, C\rangle < 0$.

Portanto, (λ, μ, F) é admissível.

Seja $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$ tal que $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$. Como (λ, μ, F_μ) é admissível, temos pelo Lema 6.1.15 que existe $\mu' \in \mathcal{P}(F_\mu)$ tal que $L(\lambda + \mu) \in JH(M(\lambda' + \mu'))$. Em particular, $\mu' \in \mathcal{P}$.

Como $\mathcal{A}(\lambda + \mu)$ é verdadeiro, existe uma sequência $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de elementos de Π^+ ligando $\lambda' + \mu'$ com $\lambda + \mu$. Definimos

$$\lambda_0 = \lambda',\ \lambda_1 = r_{\gamma_1}\lambda_0,\ \lambda_2 = r_{\gamma_2}\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n = r_{\gamma_n}\lambda_{n-1}$$

e

$$\nu_0 = \lambda' + \mu',\ \nu_1 = r_{\gamma_1}\nu_0,\ \nu_2 = r_{\gamma_2}\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n = r_{\gamma_n}\nu_{n-1} = \lambda + \mu.$$

Assim, $\nu_0, \ldots, \nu_n$ são congruentes módulo $\mathcal{Q}$. De fato, temos que $\nu_i > \nu_{i+1}$, pois $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ liga $\lambda' + \mu'$ com $\lambda + \mu$, daí temos que $\nu_i - \nu_{i+1} \in \mathcal{Q}_+ \subset Q$.

Notemos que $\lambda_0 - \nu_0 = \lambda' - (\lambda' + \mu') = -\mu' \in \mathcal{P}$. Assim, considerando $w_i = r_{\gamma_i} \cdots r_{\gamma_1}$ temos

$$\lambda_i - \nu_i = w_i(\lambda_0 - \nu_0) \in \mathcal{P}, \tag{6.13}$$

pois $\lambda_0 - \nu_0 \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{P}$ é invariante por $\mathcal{W}$. Além disso,

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} = (\lambda_i - \nu_i) + (\nu_i - \nu_{i-1}) + (\nu_{i-1} - \lambda_{i-1}).$$

Daí, e do fato que $\lambda_i - \nu_i,\ \nu_{i-1} - \lambda_{i-1} \in \mathcal{P}$ e $\nu_i - \nu_{i-1} \in \mathcal{P}$, temos que $\lambda_i - \lambda_{i-1} \in \mathcal{P}$.

Logo, os elementos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ são congruentes módulo $\mathcal{P}$.

Como $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$ temos, pela Proposição 6.1.1, que $\lambda \in \mathcal{W}\lambda' \cap (\lambda' - \mathcal{Q}_+)$, daí λ' e λ também são congruentes módulo $\mathcal{P}$ e existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $\lambda = w\lambda'$. Além disso,

$$\lambda_n - \lambda = (\lambda_n - \lambda') + (\lambda' - \lambda)$$

o que mostra que λ_n e λ são congruentes módulo $\mathcal{Q}$. Em particular, a aplicação $\Im$ tem o mesmo valor em todos os pontos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \nu_0, \ldots, \nu_n$, isto é,

$$\Im\nu_i = \Im\lambda_i = \Im\lambda_j,$$

para todo i e j. De fato, como $\lambda_i - \lambda_j \in \mathcal{Q} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, temos $\Im(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ e assim $\Im\lambda_i = \Im\lambda_j$, para todo i, j. De forma análoga, como $\lambda_i - \nu_i \in \mathcal{P} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ também temos que $\Im(\lambda_i - \nu_i) = 0$ e assim $\Im\lambda_i = \Im\nu_i$. Além disso, o valor $\Im\lambda_i$ é fixado por $r_{\gamma_1}, \ldots, r_{\gamma_n}$, pois para cada i

$$r_{\gamma_i}\Im\lambda_0 = \Im\lambda_i = \Im\lambda_0.$$

Temos

$$2c_1 \parallel w\mu' \parallel \leq 2c_1 \parallel \mu \parallel < d(\Re\lambda, \Xi_\beta)$$

para todo $\beta \in \Pi^+ - \{\gamma\}$. Consequentemente, pelo Lema 6.1.12,

$$\Re\lambda + w\mu' = \Re w\lambda' + w\mu' = \Re w(\lambda' + \mu')$$

pertence a C ou a $r_\gamma C$.

Suponhamos, inicialmente, que $\Re w(\lambda' + \mu') \in C$. Assim, $\Re\lambda' + \mu' \in w^{-1}C$. Como $\lambda = w\lambda'$ e $\Re\lambda \in C$ temos que $\Re\lambda' = w^{-1}\Re\lambda \in w^{-1}C$ e assim $\Re\lambda_n = w_n\Re\lambda'$ e $\Re\nu_n = \Re\lambda + \mu$ pertencem a mesma câmara, a saber $r_\gamma C$. Agora,

$$\lambda_n = w_n\lambda' = w_n w^{-1}\lambda = (w_n w^{-1} r_\gamma) r_\gamma \lambda = w' r_\gamma \lambda,$$

e assim, $w' r_\gamma \Re\lambda = \Re\lambda_n \in r_\gamma C$ e isto implica que $w' = 1$ e, portanto, $\lambda_n = r_\gamma\lambda$.

Como $\gamma \in \Pi^+$ existem $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$ e assim

$$\lambda(H'_\gamma)\gamma = n_1\lambda(H'_\gamma)\alpha_1 + \cdots + n_l\lambda(H'_\gamma)\alpha_l.$$

Por outro lado,

$$\lambda(H'_\gamma)\gamma = \lambda - (\lambda - \lambda(H'_\gamma)\gamma) = \lambda - r_\gamma\lambda = \lambda - \lambda_n \in \mathcal{Q},$$

assim, $\lambda(H'_\gamma)n_j = m_j \in \mathbb{Z}$. Logo, se $n_j \neq 0$, então $\lambda(H'_\gamma) = m_j/n_j \in \mathbb{Q}$. Assim, $\lambda(H'_\gamma) \in \mathcal{Q} \cap \mathbb{Q}\gamma$. Portanto, pela Proposição 2.3.8, $\lambda(H'_\gamma) \in \mathbb{Z}$.

Por hipótese, $\lambda(H'_\gamma) = \dfrac{2\langle\Re\lambda, \gamma\rangle}{\langle\gamma, \gamma\rangle} < 0$, logo $r_\gamma\lambda \geq \lambda$ e $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma)$ liga λ' com λ, pelo Lema 6.1.16.

Suponhamos, agora, que $\Re w(\lambda' + \mu') \in r_\gamma C$. Assim, $\Re w(\lambda' + \mu')$ e $\Re w_n(\lambda' + \mu') = \Re(\lambda + \mu)$ estão na mesma câmara, daí $w = w_n = r_{\gamma_n} r_{\gamma_{n-1}} \cdots r_{\gamma_1}$, e consequentemente,

$$\lambda_n = r_{\gamma_n} r_{\gamma_{n-1}} \cdots r_{\gamma_1}\lambda' = w\lambda' = \lambda.$$

Notemos que

- $\lambda_{i+1} - \lambda_i = r_{\gamma_{i+1}}\lambda_i - \lambda_i = \lambda_i(H'_{\gamma_{i+1}})\gamma_{i+1}$; e

- $\lambda_i = w_i\lambda' = w_i w^{-1}\lambda$.

Como $\Re\lambda \in C$ e $\gamma_{i+1} \in \Pi^+$ para todo i temos que $\lambda_i(H'_{\gamma_{i+1}}) \neq 0$ para todo i. Logo, $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ ou $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ para todo i.

Se $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ para todo i, a prova esta concluída. Caso contrário, seja i_0 o menor inteiro tal que $\lambda_{i_0-1} < \lambda_{i_0}$.

Mostremos que a sequência $(\gamma_1, \dots, \gamma_{i_0-1}, \gamma_{i_0+1}, \dots, \gamma_n, \gamma)$ liga λ' com λ.

Em primeiro lugar, a sequência $(\gamma_1, \dots, \gamma_{i_0-1})$ liga λ' com λ_{i_0-1}. Mostremos que $\Re\lambda_{i_0-1}$ e $\Re\nu_{i_0}$ estão em uma mesma câmara.

Temos

$$\nu_i = w_i(\lambda' + \mu') = w_i\lambda' + w_i\mu' = \lambda_i + w_i\mu'$$

para todo i. Assim, $\nu_i - \lambda_i = w_i\mu'$ e

$$\nu_i - \nu_{i-1} = \lambda_i + w_i\mu' - \lambda_{i-1} - w_{i-1}\mu' < 0.$$

Em particular,

$$\| \lambda_{i_0} - \nu_{i_0} \| = \| w_i\mu' \| \leq \| \mu \| \leq 2c_1 \| \mu \|$$

e

$$\lambda_{i_0} + w_{i_0}\mu' \leq \lambda_{i_0-1} + w_{i_0-1}\mu'.$$

Como $\lambda_{i_0} > \lambda_{i_0-1}$ temos, pelo Lema 6.1.17,

$$\| \lambda_{i_0} - \lambda_{i_0-1} \| \leq c_1(\| w_{i_0}\mu' \| + \| w_{i_0-1}\mu' \|) = 2c_1 \| \mu' \| \leq 2c_1 \| \mu \| .$$

Agora, a bola fechada de centro $\Re\lambda_{i_0}$ e raio $2c_1 \| \mu \|$ intercepta no máximo duas câmaras. Como $\Re\nu_{i_0}$ e $\Re\lambda_{i_0-1}$ pertencem a essa bola, temos que $\Re\nu_{i_0}$ e $\Re\lambda_{i_0-1}$ estão na mesma câmara ou $\Re\nu_{i_0}$ e $\Re\lambda_{i_0}$ estão na mesma câmara. Isso segue do fato que $\Re\lambda_{i_0}$ e $\Re\lambda_{i_0-1}$ estão em câmaras distintas, já que $\Re\lambda_{i_0} = r_{\gamma_{i_0}}\Re\lambda_{i_0-1}$ (ou equivalentemente, $\Re\lambda_{i_0-1} = r_{\gamma_{i_0}}\Re\lambda_{i_0}$).

Além disso, escrevendo $r_i = r_{\gamma_i}$ para todo i e $w' = r_n \cdots r_{i_0+1}$, temos

$$\lambda = r_n \cdots r_{i_0+1} r_{i_0} r_{i_0+1} \cdots r_1\lambda' = w'\lambda_{i_0}$$

e

$$\lambda + \mu = r_n \cdots r_{i_0+1} r_{i_0} r_{i_0+1} \cdots r_1(\lambda' + \mu') = w'\nu_{i_0}.$$

e, assim, $\Re\lambda_{i_0} = w'^{-1}\Re\lambda$ e $\Re\nu_{i_0} = w'^{-1}(\Re\lambda + \mu)$. Daí, e do fato que $\Re\lambda$ e $\Re\lambda + \mu$ estão em câmaras distintas temos que $\Re\lambda_{i_0}$ e $\Re\nu_{i_0}$ estão em câmaras distintas. Logo, $\Re\nu_{i_0}$ e $\Re\lambda_{i_0-1}$ estão na mesma câmara. Assim, r_{i_0} transforma a câmara contendo $\Re\nu_{i_0}$ na câmara contendo $\Re\lambda_{i_0}$. Daí, valem as seguintes implicações

$$\begin{aligned} \Re\lambda + \mu \in r_\gamma C \quad &\Rightarrow \quad \Re\nu_{i_0} = w'^{-1}(\Re\lambda + \mu) \in w'^{-1}r_\gamma C \Rightarrow \Re\lambda_{i_0} \in r_{i_0}w'^{-1}r_\gamma C \\ &\Rightarrow \quad \Re\lambda = w'\Re\lambda_{i_0} \in w'r_{i_0}w'^{-1}r_\gamma C. \end{aligned}$$

Mas, $\Re\lambda \in C$ e, assim, $w' r_{i_0} w'^{-1} r_\gamma C = C$. Consequentemente, $w' r_{i_0} w'^{-1} r_\gamma = 1$ e, portanto, $r_\gamma = w' r_{i_0} w'^{-1}$. Isso significa que r_γ é um produto das reflexões $r_{\gamma_1}, \ldots, r_{\gamma_n}$ e assim $r_\gamma(\Im\lambda) = \Im\lambda$.

A sequência $(\gamma_{i_0+1}, \ldots, \gamma_n)$ liga ν_{i_0} com ν_n.

Como $\Re\lambda_{i_0-1}$ e $\Re\nu_{i_0}$ estão na mesma câmara, temos que $\Re(r_\gamma\lambda)$ e $\Re\nu_n$ estão também em uma mesma câmara, pois $\nu_n = w'\nu_{i_0}$ e

$$r_\gamma\lambda = w' r_{i_0} w'^{-1}\lambda = w' r_{i_0} w'^{-1} w' \lambda_{i_0} = w' r_{i_0} \lambda_{i_0} = w' \lambda_{i_0-1}.$$

Temos também

$$\Im\left(\nu_n - r_\gamma\lambda\right) = \Im\left(\lambda + \mu - r_\gamma\lambda\right) = \Im\lambda - r_\gamma\Im\lambda + \Im\mu = 0,$$

pois $r_\gamma\Im\lambda = \Im\lambda$ e $\mu \in \mathcal{P}$ e, assim, $\nu_n - r_\gamma\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$.

Além disso, como

$$\nu_{i-1}(H'_{\gamma_i})\gamma_i = \nu_{i-1} - r_{\gamma_i}\nu_{i-1} = \nu_i - \nu_{i-1} \in Q,$$

e, por (6.13), $\nu_{i-1} - \lambda_{i-1} \in \mathcal{P}$, temos que

$$\nu_{i_0} - \lambda_{i_0-1} = r_{i_0}\nu_{i_0-1} - \lambda_{i_0-1} = \nu_{i_0-1} - \lambda_{i_0-1} - \nu_{i_0-1}(H'_{\gamma_{i_0}})\gamma_{i_0}$$

temos que $\nu_{i-1}(H'_{\gamma_{i_0}}) \in \mathbb{Z}$. Como a sequência $(\gamma_{i_0+1}, \ldots, \gamma_n)$ liga ν_{i_0} com ν_n e

$$r_\gamma\lambda = r_{\gamma_n} \cdots r_{\gamma_{i_0+1}} r_{\gamma_{i_0-1}} \lambda' = r_{\gamma_n} \cdots r_{\gamma_{i_0+1}} \lambda_{i_0-1},$$

temos que $(\gamma_{i_0+1}, \ldots, \gamma_n)$ liga λ_{i_0-1} com $r_\gamma\lambda$.

Temos

$$r_\gamma\lambda - \lambda = w' r_{i_0} w'^{-1}(w'\lambda_{i_0}) - \lambda = w' r_{i_0}\lambda_{i_0} - w'\lambda_{i_0} = w'(\lambda_{i_0-1} - \lambda_{i_0}) \in \mathcal{Q},$$

pois $\lambda_{i_0-1} - \lambda_{i_0} \in \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}$ é invariante por $\mathcal{W}$. Temos também que

$$\begin{aligned} r_\gamma\lambda - \lambda &= r_\gamma(\Re\lambda) + r_\gamma(\Im\lambda) - \Re\lambda - \Im\lambda \\ &= r_\gamma(\Re\lambda) - \Re\lambda, \end{aligned}$$

pois $r_\gamma(\Im\lambda) = \Im\lambda$.

Como $\langle \Re\lambda, \gamma \rangle < 0$, temos

$$r_\gamma(\Re\lambda) - \Re\lambda = \Re\lambda - \Re\lambda(H'_\gamma)\gamma - \Re\lambda = -\langle \Re\lambda, \gamma \rangle\gamma \in \mathcal{Q}_+,$$

e isso implica que $r_\gamma\lambda > \lambda$.

Portanto, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i_0-1}, \gamma_{i_0+1}, \ldots, \gamma_n, \gamma)$ liga λ' com λ. $\square$

Lema 6.1.20. *Seja C uma câmara de Weyl. Se $\nu \in \overline{C}$ então existem $k \in \mathbb{N}$ e $\mu \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$ tal que $k\nu \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$ e $\nu + \mu \in C^0$.*

Demonstração. Escrevendo $\nu(H'_{\alpha_j}) = m_j/n_j \in \mathbb{Q}$ com $m_j \in \mathbb{Z}$, $n_j \in \mathbb{N}$, e $k = n_1 \cdots n_l$ temos que $k\nu \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$.

Agora, tomemos $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_l$ elementos, que são imagens por $\mathcal{W}$, dos pesos fundamentais, e que geram as paredes de C. Assim, tomando $\mu = p(\omega'_1 + \cdots + \omega'_l)$, com $p \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $\mu \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$, $\nu + \mu \in C$ e $d(\nu + \mu, \Xi) > 2c_1c_2$, isto é, $\nu + \mu \in C^0$. □

Lema 6.1.21. *Sejam C_1 e C_2 câmaras de Weyl com uma parede comum e tal que:*

- *Existe γ ortogonal a parede comum de C_1 e C_2;*
- *$\langle C_1, \gamma \rangle < 0$;*
- *$C_2 = r_\gamma C_1$.*

Se $\nu \in C_1$, então existe $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $\nu + \mu \in C_2^0$.

Demonstração. Como $\nu \in C_1$, temos $\langle \nu, \gamma \rangle = r_1 < 0$. Fixemos $\nu_2 \in C_2$. Assim, $\langle \nu_2, \gamma \rangle = r_2 > 0$. Pelo Lema 6.1.20, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k\nu_2 \in \mathcal{P} \cap C_2$. Fixemos um tal k com a propriedade $r_1 + kr_2 > 0$. Temos

$$\langle \nu + k\nu_2, \gamma \rangle = \langle \nu, \gamma \rangle + k\langle \nu_2, \gamma \rangle = r_1 + kr_2 > 0.$$

Logo, $\nu + k\nu_2 \in C_2$. Sejam $d_1 = d(\nu_2, \Xi)$, $d_2 = d(\nu + k\nu_2, \Xi)$ e $d = \min\{d_1, d_2\}$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $nd > 2c_1c_2$ obtemos

$$\mu = nk\nu_2 \in \mathcal{P} \cap C_2 \ \text{ e } \ d(\nu + \mu, \Xi) \geq nd > 2c_1c_2.$$

Logo, $\nu + \mu \in C_2^0$. □

Lema 6.1.22. *Se λ é um elemento de $\mathfrak{h}^*$ longe das paredes, então $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeiro.*

Demonstração. Seja C uma câmara tal que $\Re\lambda \in C$. Seja n o menor inteiro não negativo tal que existem câmaras $C_0 = C,\ C_1,\ \ldots,\ C_n = C^+$ com a seguinte propriedade:

(∗) Para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, existe um elemento γ_i de Π^+ ortogonal a uma parede comum de C_i e C_{i+1}, tal que $\langle C_i, \gamma_i \rangle < 0$ e $C_{i+1} = r_{\gamma_i} C_i$.

A demonstração é por indução em n. Para $n = 0$, temos, pelo Lema 6.1.13, que $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeiro.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $\mathcal{A}(\nu)$ é verdadeiro para qualquer ν numa câmara que tem a propriedade acima com $k < n$.

Pelo Lema 6.1.21, existe $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $\Re\lambda + \mu \in C_1^0$.

Sejam $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_l'$ elementos, que são imagens por $\mathcal{W}$, dos pesos fundamentais, e que geram as paredes de $C_0 = C$ de tal forma que $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_{l-1}'$ geram a parede comum de C_0 e C_1. Assim, as paredes de C_1 são geradas por $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_{l-1}', r_{\gamma_0}\omega_l'$.

Para p um número inteiro suficientemente grande, temos

$$2c_1 \parallel \mu \parallel < d\left(\Re\lambda + p(\omega_1' + \omega_2' + \cdots + \omega_{l-1}'), \Xi_\alpha\right)$$

para $\alpha \in \Pi^+ - \{\gamma_0\}$.

Por outro lado, para quaisquer inteiros $p_1, \ldots, p_{l-1} \geq 0$, temos

$$\Re\lambda + p_1\omega_1' + \cdots + p_{l-1}\omega_{l-1}' \in C_0^0, \tag{6.14}$$

$$\Re\lambda + \mu + p_1\omega_1' + \cdots + p_{l-1}\omega_{l-1}' \in C_1^0. \tag{6.15}$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ e todo $\nu \in \mathfrak{h}^*$ longe das paredes, temos

$$2c_1 \parallel \omega_i' \parallel \leq 2c_1c_2 < d(\Re\nu, \Xi). \tag{6.16}$$

Aplicando o Lema 6.1.18 sucessivamente obtemos

$$\mathcal{A}(\lambda + p(\omega_1' + \cdots + \omega_{l-1}')) \Rightarrow \mathcal{A}(\lambda).$$

De fato, notando que a relação em (6.14) vale para quaisquer inteiros não negativos $p_1, \ldots, p_{l-1}$, usando a desigualdade em (6.16) e o Lema 6.1.18, temos as implicações

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda + p(\omega_1' + \cdots + \omega_{l-1}')) &\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda + (p-1)\omega_1' + p(\omega_2' + \cdots + \omega_{l-1}')) \\
&\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda + (p-2)\omega_1' + p(\omega_2' + \cdots + \omega_{l-1}')) \\
&\Rightarrow \cdots \\
&\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda + p(\omega_2' + \cdots + \omega_{l-1}')) \\
&\Rightarrow \cdots \\
&\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda + p(\omega_3' + \cdots + \omega_{l-1}')) \\
&\Rightarrow \cdots \\
&\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda).
\end{aligned}$$

Como a relação em (6.15) vale para quaisquer inteiros não negativos $p_1, \ldots, p_{l-1}$, usando a desigualdade em (6.16) e o Lema 6.1.19, sucessivamente, como acima, temos

$$\mathcal{A}(\lambda + \mu + p(\omega_1' + \cdots + \omega_{l-1}')) \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda + p(\omega_1' + \cdots + \omega_{l-1}')).$$

Finalmente, por (6.15), com $p_1 = \cdots = p_{l-1} = p$, temos que

$$\Re\lambda + \mu + p(\omega'_1 + \cdots + \omega'_{l-1}) \in C_1^0,$$

e como a câmara C^+ é obtida de C_1 por $n-1$ reflexões com a propriedade $(*)$ acima temos, por hipótese de indução, que

$$\mathcal{A}(\lambda + \mu + p(\omega'_1 + \cdots + \omega'_{l-1}))$$

é verdadeiro, concluindo a demonstração. □

Teorema 6.1.2. *Se $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $M(\lambda) \subset M(\lambda')$;
2. $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$;
3. *existem* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Pi^+$ *tal que* $\lambda' \geq r_{\gamma_1}\lambda' \geq r_{\gamma_2}r_{\gamma_1}\lambda' \geq \cdots \geq r_{\gamma_n}\cdots r_{\gamma_2}r_{\gamma_1}\lambda' = \lambda$.

Demonstração. Mostremos que (3) implica (1).

Definimos

$$\lambda_0 = \lambda',\ \lambda_1 = r_{\gamma_1}\lambda',\ \ldots,\ \lambda_n = r_{\gamma_n}\lambda_{n-1} = r_{\gamma_n}\cdots r_{\gamma_2}r_{\gamma_1}\lambda' = \lambda.$$

Por hipótese, para todo i, $\lambda_{i-1} \geq \lambda_i$, isto é,

$$\lambda_{i-1}(H'_{\gamma_i})\gamma_i = \lambda_{i-1} - r_{\gamma_i}\lambda_{i-1} = \lambda_{i-1} - \lambda_i \in \mathcal{Q}_+.$$

Assim, $\lambda_{i-1}(H'_{\gamma_i})\gamma_i \in \mathcal{Q}_+ \cap \mathbb{Q}\gamma_i$. Pela Proposição 2.3.8, $\lambda_{i-1}(H'_{\gamma_i})\gamma_i \in \mathbb{Z}\gamma_i$ e, portanto, $\lambda_{i-1}(H'_{\gamma_i}) \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema 6.1.9 temos, para todo i, que $M(\lambda_i) = M(r_i\lambda_{i-1}) \subset M(\lambda_{i-1})$, ou seja,

$$M(\lambda) = M(r_{\gamma_n}\lambda_{n-1}) \subset M(r_{\gamma_{n-1}}\lambda_{n-2}) \subset \cdots \subset M(r_{\gamma_1}\lambda_0) \subset M(\lambda_0) = M(\lambda').$$

Portanto, $M(\lambda) \subset M(\lambda')$.

Mostremos que (1) implica (2).

Como, por hipótese, $M(\lambda) \subset M(\lambda')$ temos que $JH\left(M(\lambda)\right) \subset JH\left(M(\lambda')\right)$. Logo, $L(\lambda) \in JH\left(M(\lambda)\right) \subset JH\left(M(\lambda')\right)$.

Mostremos que (2) implica (3), isto é, mostremos que $\mathcal{A}(\lambda)$ é verdadeiro.

a) Seja C uma câmara tal que $\Re\lambda \in \overline{C}$. Pelo Lema 6.1.20, existe $\xi \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$, tal que $\Re\lambda + \xi \in C^0$. Assim,

$$\Re\lambda + \xi + \left(\mathcal{P} \cap \overline{C}\right) \subset C^0.$$

Por outro lado, dado $\nu \in \overline{C}$, existe, pelo Lema 6.1.20, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k\nu \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$. Assim, para $p \in \mathbb{N}$

$$\nu - \frac{1}{p}(\xi + k\nu) = \nu\left(1 - \frac{k}{p}\right) - \frac{\xi}{p} \ \rightarrow \ \nu, \ \text{ quando } \ p \to \infty.$$

Logo, $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{p}\right)\left(\xi + \left(\mathcal{P} \cap \overline{C}\right)\right)$ é denso em $\overline{C}$. Daí existem $\mu \in \mathcal{P} \cap \overline{C}$ e inteiro $n > 0$ tal que $\Re\lambda + \mu \in C^0$ e $\parallel \Re\lambda - (1/n)\mu \parallel < \dfrac{c_3}{2c_1}$.

b) Seja $\nu \in \mathcal{P}(F_\mu)$ tal que $\lambda + \mu \in \mathcal{W}(\lambda + \nu)$. Mostremos que existe um elemento de $\mathcal{W}$ que transforma λ em λ e μ em ν.

Sejam $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ tal que $w_1 C = C^+$ e $w_2(\lambda + \nu) = w_1(\lambda + \mu)$. Como $\Re w_1 \lambda \in \overline{C^+}$ temos

$$\langle \delta, \Re w_1 \lambda \rangle \geq \langle \delta, \Re w_2 \lambda \rangle. \tag{6.17}$$

Como $w_1\mu \in C^+$, temos que $w_1\mu$ é peso máximo de F_μ. Daí $w_1\mu \geq w_2\nu$ e consequentemente

$$\langle \delta, w_1\mu \rangle \geq \langle \delta, w_2\nu \rangle \tag{6.18}$$

Agora, $\langle \delta, \Re w_1\lambda + w_1\mu \rangle = \langle \delta, \Re w_2\lambda + w_2\nu \rangle$. Daí, temos a igualdade em 6.17 e 6.18, que requer que $\Re w_1\lambda = \Re w_2\lambda$ e $w_1\mu = w_2\nu$. Além disso, $\Im w_1\lambda = \Im w_2\lambda$, daí $w_1\lambda = w_2\lambda$, o que prova nossa afirmação.

c) Mostremos que (λ, μ, F) é admissível. Seja $w \in \mathcal{W}$ e $\nu \in \mathcal{P}(F_\mu)$ tal que $w\lambda < \lambda$, $w(\lambda + \nu) \geq \lambda + \mu$ e $\lambda + \mu \in \mathcal{W}(\lambda + \nu)$. Então

$$w\Re(n+1)\lambda < \Re(n+1)\lambda, \ w(\Re\lambda + \nu) \geq \Re\lambda + \mu.$$

Daí, e pelo Lema 6.1.17, onde substituimos $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ por $\Re(n+1)\lambda, w\Re(n+1)\lambda, -\Re n\lambda + \mu, -w\Re n\lambda + w\nu$, respectivamente, temos

$$(n+1) \parallel \Re(w\lambda - \lambda) \parallel < c_1(\parallel n\Re\lambda - \mu \parallel + \parallel n\Re\lambda - \nu \parallel)$$

mas $w\lambda - \lambda \in \mathcal{Q} - \{0\}$. Por (a),

$$(n+1)c_3 < c_1 n\frac{c_3}{2c_1} + c_1 n\frac{c_3}{2c_1} = nc_3$$

de onde temos uma contradição, que prova nossa afirmação.

d) Suponhamos que $L(\lambda) \in JH(M(\lambda'))$. Por (c), e pelo Lema 6.1.15, existe $\nu \in \mathcal{P}(F_\mu)$ tal que $L(\lambda + \mu) \in JH(M(\lambda' + \nu))$. Pelo Lema 6.1.22, existe uma sequência $(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ ligando $\lambda' + \nu$ com $\lambda + \mu$.

Seja $w \in \mathcal{W}$ tal que $w\lambda' = \lambda$. Então, $\lambda + \mu \in \mathcal{W}(\lambda' + \nu) = \mathcal{W}(\lambda + w\nu)$.

Por outro lado, $\Re\lambda + \mu \in C$ e $\Re\lambda \in \overline{C}$. Por (b), existe uma câmara C' tal que $\Re\lambda + w\nu \in C'$ e $\Re\lambda \in \overline{C'}$, de onde $\Re\lambda' + \nu \in w^{-1}C'$ e $\Re\lambda' \in w^{-1}\overline{C'}$. Pelo Lema 6.1.16, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ liga λ' com λ, concluindo a demonstração do teorema. $\square$

Teorema 6.1.3. *Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda)$ é simples;*

2. *para todo $\alpha \in \Pi^+$ temos $\lambda(H'_\alpha) \notin \{1, 2, \ldots\}$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $\alpha \in \Pi^+$ tal que $\lambda(H'_\alpha) \in \{1, 2, \ldots\}$. Pelo lema 6.1.9 temos que $M(r_\alpha\lambda) \subset M(\lambda)$. Como $r_\alpha\lambda = \lambda - \lambda(H'_\alpha)\alpha \neq \lambda$, temos que $M(r_\alpha\lambda)$ é um submódulo próprio e não trivial de $M(\lambda)$, mostrando que $M(\lambda)$ não é simples.

Reciprocamente, suponhamos que $M(\lambda)$ não é simples. Pela Proposição 6.1.3, existe $\mu \in \mathfrak{h}^*$ com $\mu \neq \lambda$ tal que $M(\mu) \subset M(\lambda)$. Pela equivalência de (1) e (3) no Teorema 6.1.2, existe $\alpha \in \Pi^+$ tal que $\lambda > r_\alpha\lambda = \lambda - \lambda(H'_\alpha)\alpha$, daí temos que $\lambda(H'_\alpha)$ é um inteiro positivo. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] BERNSTEIN, I.N.; GELFAND, I.M.; GELFAND, S.I. *Differential operators on the base affine space and a study of* $\mathfrak{g}$*-modules*, in "Lie Groups and Their Representations," Summer School of the Bolyai János Math. Soc., 21-64. New York: Halsted Press, 1975.

[2] DIXMIER, J. *Enveloping Algebras*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 11, AMS. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1977.

[3] EISENBUD, D. *Commutative Algebra: whith a view toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150. New York: Springer-Verlag, 1995.

[4] FULTON, W.; HARRIS, J. *Representation Theory: a first course*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 129. New York: Springer-Verlag, 1991.

[5] GREUB, W. *Multilinear Algebra*. 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 1978.

[6] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Traduzido da 2^a ed. por Renate Watanabe. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

[7] HUMPHREYS, J.E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1972.

[8] HUMPHREYS, J.E. *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category* $\mathcal{O}$. Graduates Studies in Mathematics, Vol. 94. Providence: AMS, 2008.

[9] JACOBSON, N. *Lie Agebras*. New York: Interscience Publishers, 1962.

[10] KNAPP, A. *Lie Groups: beyond an introduction*. Progress in Mathematics, Vol. 140. 2nd Ed. Boston: Birkhauser, 2004.

[11] LANG, S. *Algebra*. Graduates Studies in Mathematics, vol. 211. 3rd Ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

[12] PASSMAN, D.S. *A Course in Ring Theory*. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2004.

[13] SAN MARTIN, L.A.B. *Álgebras de Lie*. 2^a ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2010.

[14] VARADARAJAN, V.S. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 102. New York: Springer-Verlag, 1974.

[15] VERMA, D.N. Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* 74, 1968, 160 - 166.