Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Jorge Luis Abanto Montoya**

**Existência de medidas invariantes para aplicações no intervalo com presença de pontos críticos e singularidades.**

Juiz de Fora

2016

**Jorge Luis Abanto Montoya**

**Existência de medidas invariantes para aplicações no intervalo com presença de pontos críticos e singularidades.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Abanto Montoya, Jorge Luis.
Existência de medidas invariantes para aplicações no intervalo com presença de pontos críticos e singularidades. / Jorge Luis Abanto Montoya. – 2016.
109 f. : il.

Orientador: Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Aplicações no intervalo. 2. Medidas invariantes. 3. Pontos críticos e singularidades. I. Soares Junior, Regis Castijos Alves, orient. II. Título.

**Jorge Luis Abanto Montoya**

**Existência de medidas invariantes para aplicações no intervalo com presença de pontos críticos e singularidades.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 20 de maio de 2016

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior -
Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professora Dra. Laura Senos Lacerda Fernandez
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. André Junqueira Da Silva Corrêa
Universidade Federal de Viçosa

*Dedico esta dissertação: Aos meus pais, Antia e Segundo, as minhas irmãs, Evelyn e Lis, a meus avós Belermina, Jorge, Clara e Luis, e meu sobrino, Joaquin.*

## AGRADECIMENTOS

A meus pais, Antia e Segundo, por sua compreensão e suporte que eles sempre me deram em momentos ruins e bons, graças aos valores que me ensinaram os quais tenho servido na passagem da minha vida.

A minhas irmãs, Evelyn e Lis, por seu apoio em todo estágio da minha vida.

A meus melhores amigos, Angel, Raime, Mirko e Froilan.

A meus companheiros, Hugo, Eduardo, Erasmo e Lívia.

A meu orientador. Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior, pela competência, solicitude e flexibilidade na orientação, além da sua compreensão nos contratempos que teve ao longo do trabalho.

A meus professores do mestrado, Olimpio, Beatriz, Regis e Flaviana.

À Universidade, por me aceitar formar parte do mestrado em matemática e o apoio para ter bons estudos.

À Coodinação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pela bolsa de estudos de mestrado.

“O coração das mães é um abismo no fundo do qual se encontra sempre um perdão.”

Honoré de Balzac.

**RESUMO**

Provaremos a existência de medidas de probabilidade invariantes absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue. Aqui trabalhamos com uma classe de funções que denotamos por $\mathcal{F}$, esta classe consiste de aplicações no intervalo $f : M \to M$, que possuem pontos críticos e singularidades mais outras propriedades. É preciso mencionar que uma das propriedades é a condição de somabilidade ao longo da órbita crítica que vai ajudar a ter resultados importantes para nosso trabalho.

O resultado principal diz que, para cada $f \in \mathcal{F}$ existe uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua. Para conseguir este resultado, provaremos um teorema auxiliar que trata da existência de uma partição enumerável $\mathcal{I}$ de intervalos abertos de $M$, de uma aplicação que chamamos tempo induzido $\tau : M \to \mathbb{N}$ que é constante nos elementos da partição $\mathcal{I}$, tal que a aplicação $\hat{f} : M \to M$ definida por $\hat{f} = f^{\tau}$ que chamamos aplicação induzida, satisfaz três propriedades importantes que são, expansão, variação somável e tempo induzido somável. Por isso ao longo do trabalho vamos concentrar em provar essas três propriedades.

O ponto importante é que as duas primeiras propriedades junto com o teorema $A$ garantem a existência de uma medida de probabilidade absolutamente contínua para $\hat{f}$, finalmente utilizando a terceira propriedade junto com a proposição $A$, obtemos a existência de uma medida de probabilidade absolutamente contínua para nossa $f$.



Palavras-chave: Aplicações no intervalo. Medidas invariantes. Pontos críticos e singularidades. Expansão. Variação somável. Tempo induzido somável.

## ABSTRACT

We prove the existence of invariant probability measures absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. Here we work with a class of maps that we denote by $\mathcal{F}$, this class consists of interval maps $f : M \to M$, having critical points and singularities more other properties. I must mention that one of the properties is the condition of summability along the critical orbit which will help to have important results for our work.

The main result says, for each $f \in \mathcal{F}$ there is a probability measure invariant absolutely continuous. To achieve this result, we prove an auxiliary theorem that is the existence of a countable partition $\mathcal{I}$ of open intervals of $M$, an map that called induced time $\tau : M \to \mathbb{N}$ that is constant on the elements of the partition $\mathcal{I}$, such that the map $\hat{f} : M \to M$ defined by $\hat{f} = f^{\tau}$ we call induced map, satisfies three important properties that are, expanding, summable variation and summable induced time. So throughout the work we focus on evidence these three properties.

The important point is that the first two properties together with theorem $A$ ensures the existence of a measure absolutely continuous probability $\hat{f}$, finally using the third property together with proposition $A$, we get the existence of an absolutely continuous probability measure for our $f$.



Key-words: Interval maps. Invariant measures. Critical points and singularities. Expansion. Summable variation. Summable induced time.

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A existência de medidas de probabilidade invariantes absolutamente contínuas *(acip's: absolutely continuous invariant probability measures)* para sistemas dinâmicos tem uma história de pelo menos 70 anos (ver trabalhos [11], [20], [12], [23] e [10]). Apesar de muitas pesquisas neste campo nas últimas duas décadas o problema não está completamente resolvido, inclusive em dimensão um, como é o caso a tratar em nosso trabalho. Conhecem-se trabalhos que garantem a existência de *acip's* para aplicações com expansão uniforme no caso suave ou admitindo descontinuidades com possíveis derivadas ilimitadas, (ver por exemplo [21, 13]); para aplicações suaves com um número finito de pontos críticos [5, 6], e para aplicações suaves com um conjunto enumerável de pontos críticos [3].

Este trabalho se baseia no artigo [2], aqui tratamos de uma classe geral de aplicações que contêm pontos críticos e singularidades. Uma família natural de aplicações que pertencem a esta classe foi estudada em [14, 15], também temos alguns resultados gerais para a existência de *acip's* e suas propriedades em aplicações com pontos críticos e singularidades [1], com as condições de crescimento exponencial da derivada e recorrência subexponencial em $m$-quase todo ponto. Por outro lado, em [14, 15] se provou que, com probabilidade positiva no espaço de parâmetros da família de aplicações tipo-Lorenz as órbitas dos pontos críticos satisfazem as condições de crescimento exponencial da derivada e recorrência subexponencial. Em [8] se mostrou, num contexto mais geral das aplicações com múltiplos pontos críticos e singularidades, que estas condições são suficientes para garantir a existência de uma medida ergódica *acip*.

Nosso trabalho é obter a existência de uma *acip* porém relaxando o máximo possível as condições da órbita nos pontos críticos, para incluir os casos particulares em que o crescimento da derivada seja subexponencial e\ou a recorrência dos pontos críticos seja exponencial.

## 1.1 ESTRUTURA

Começamos por dar algumas ferramentas no capítulo 2 sobre teoria da medida e nomenclaturas tais como: partição (*mod* 0), bacias, medidas invariantes, medidas físicas, medidas absolutamente contínuas, etc; que ajudarão a compreender o teorema principal do trabalho. Ao final do capítulo damos duas proposições importantes sobre existência de *acip's* e aplicação induzida.

No capítulo 3, enunciaremos o teorema principal como também a técnica que utilizamos para sua prova. É importante mencionar que esta técnica consiste em provar um teorema que chamamos teorema auxiliar para logo com as duas proposições mencionadas anteriormente ter provado o teorema principal. Falemos um pouco do teorema auxiliar: Ele consiste em construir uma partição enumerável $\mathcal{I}$ do intervalo $M(mod\ 0)$ em intervalos abertos para definir $\tau : M \to \mathbb{N}$ que chamamos aplicação tempo induzido, que é constante nos elementos de $\mathcal{I}$ para logo definir $\hat{f} : M \to M$, $\hat{f} = f^{\tau}$ que chamamos a aplicação induzida. O importante desta construção é que tem-se: $\hat{f}$ expansora, variação somável e tempo induzido somável, três propriedades muito importantes que satisfazem as condições das duas proposições.

Agora fazemos uma pergunta: *Como obtemos essa construção e suas propriedades*?. Para isso vamos trabalhar com uma classe de funções $f$ que tem certas condições, tais como: pontos críticos e singularidades (ver figura 1), expansora longe de pontos críticos e uma condição de somabilidade ao longo da órbita crítica. Esta última vai ajudar a ter variação somável e tempo induzido somável, duas das três propriedades importantes.

Dessa maneira, este trabalho é dirigido a provar o teorema auxiliar. No capítulo 4, vamos trabalhar na distorção durante período binding. É importante mencionar que no capítulo 3 damos um resultado que relaciona a variação com a distorção. Desta maneira, graças aos resultados obtidos aqui, obtemos variação e tempo induzido limitados. Tal limitação depende do período binding. Por conseguinte, pela condição de somabilidade, temos variação e tempo induzido somáveis. Logo veremos alguns resultados sobre expansão durante período binding que ajudarão a ter $\hat{f}$ expansora. Finalmente, no capítulo 5, veremos em detalhes, a prova das três propriedades importantes mencionadas anteriormente e assim concluir com o teorema auxiliar.

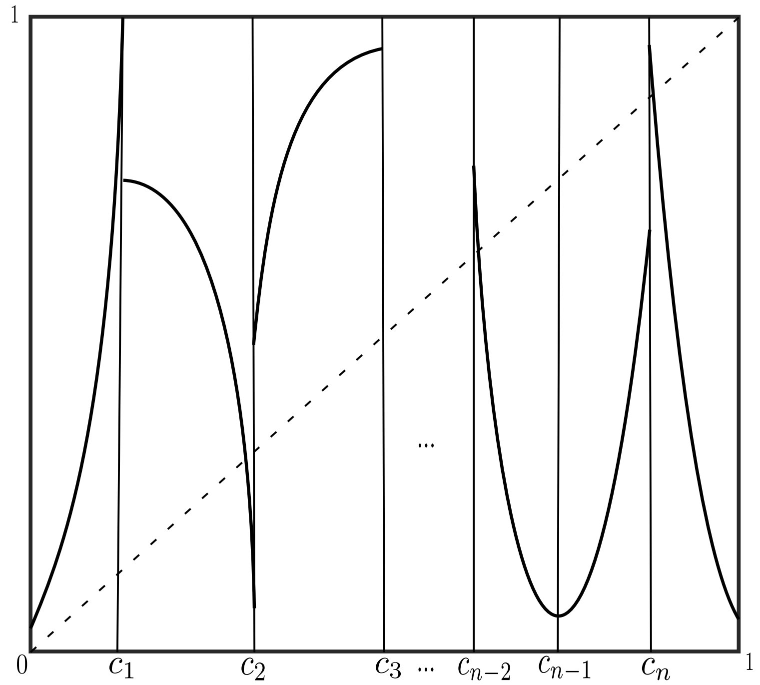


Figura 1 – Aplicação no intervalo com pontos críticos e singularidades.

# 2 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos mencionar algumas definições para termos conhecimento e compreensão das nomenclaturas que vamos utilizar, como também resultados prévios que nos ajudarão a obter o resultado principal de nosso trabalho. Para isto usaremos as seguintes referências [9], [16], [18], [21] e [22].

## 2.1 TEORIA DA MEDIDA

Nesta seção damos definições e resultados que precisamos para compreender o resultado principal do trabalho.

### 2.1.1 Espaço mensurável

Seja $X$ um conjunto. Uma *$\sigma$-álgebra* de $X$ é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ que satisfaz:

*i.* $X \in \mathcal{B}$,

*ii.* $A \in \mathcal{B}$ implica $A^c \in \mathcal{B}$,

*iii.* $A_j \in \mathcal{B}$ para $j = 1, 2, ...$ implica $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$.

Um *espaço mensurável* é uma dupla $(X, \mathcal{B})$, onde $X$ é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados *conjuntos mensuráveis*.

Lembremos o que é um espaço topológico. Seja $X$ um conjunto. Uma *topologia* de $X$ é uma família $\tau$ de subconjuntos de $X$ que satisfaz:

*i.* $\emptyset$, $X \in \tau$,

*ii.* $V_i \in \tau$, para $i = 1, 2, ..., n$ implica $V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \in \tau$,

*iii.* Se $\{V_\alpha\}$ é uma família arbitrária de elementos de $\tau$ então $\bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

Um *espaço topológico* é uma dupla $(X, \tau)$, onde $X$ é um conjunto e $\tau$ uma topologia em $X$. Os elementos de $\tau$ são chamados *conjuntos abertos* de $X$.

**Proposição 2.1.** *Se $\mathcal{F}$ é qualquer coleção de subconjuntos de $X$, então existe a menor $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ em $X$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$.*

Seja $(X, \tau)$ um espaço topológico. Então pela proposição anterior existe a menor $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ em $X$ tal que $\tau \subset \mathcal{B}$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados *conjuntos de Borel* de $X$. Em particular, conjuntos fechados são conjuntos de Borel, também uniões enumeráveis de conjuntos fechados e toda interseção enumerável de conjuntos abertos. Estes dois últimos serão denotados por $F_\sigma$ e $G_\delta$ respectivamente.

### 2.1.2 Medida

**Definição 2.2.** Uma *medida* num espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ que satisfaz:

*i.* $\mu(\emptyset) = 0$,

*ii.* $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois a dois.

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é chamada *espaço de medida.* Quando $\mu(X) < \infty$ dizemos que $\mu$ é uma *medida finita* e se $\mu(X) = 1$ dizemos que $\mu$ é uma *medida de probabilidade.* Neste último caso, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um *espaço de probabilidade.*

Dizemos que uma propriedade é valida em *$\mu$-quase todo ponto* se é válida em todo o conjunto $X$ exceto, possivelmente, num conjunto de medida nula.

Uma medida $\mu$ sobre uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ é dita *completa* se, e somente se

$$E \subset A,\ A \in \mathcal{B} \text{ e } \mu(A) = 0, \text{ então } E \in \mathcal{B}.$$

**Definição 2.3.** Uma partição $\mathcal{P}$ de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é uma família de subconjuntos em $\mathcal{B}$ com medida não-nula tais que

*i.* $A, B \in \mathcal{P}$ com $A \neq B$, então $\mu(A \cap B) = 0$.

*ii.* $\mu\left(X - \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A\right) = 0$.

A partição $\mathcal{P}$ é chamada *partição de $X$ (mod 0)*.

Se $E \subset \mathbb{R}^k$ e $x \in \mathbb{R}^k$ a *translação* de $E$ por $x$ é o conjunto

$$E + x = \{y + x : y \in E\}.$$

O conjunto da forma

$$W = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : \alpha_i < x_i < \beta_i, 1 \leq i \leq k\right\}, \tag{2.1}$$

ou qualquer conjunto obtido pela substituição de uma, ou todas as desigualdades em (2.1) por $\leq$, é chamado uma *k-célula.* O seu *volume* é definido por

$$Vol(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

**Teorema 2.4.** *Existe uma medida completa $m$ definida numa $\sigma$-álgebra $\mathcal{L}$ em $\mathbb{R}^k$ com as seguintes propriedades:*

*(a) $m(W) = Vol(W)$, para toda k-célula $W$,*

*(b) $\mathcal{L}$ contém todo conjunto de Borel em $\mathbb{R}^k$, mais precisamente, $E \in \mathcal{L}$ se, e somente se, existem $A, B \subset \mathbb{R}^k$ tal que $A \subset E \subset B$, $A \in F_\sigma$, $B \in G_\alpha$ e $m(B - A) = 0$.*

*(c) $m$ é invariante por translação, isto é,*

$$m(E + x) = m(E),$$

*para todo $E \in \mathcal{L}$, $x \in \mathbb{R}^k$.*

*(d) Se $\mu$ é qualquer medida de Borel invariante por traslação em $\mathbb{R}^k$ tal que $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto $K$, então existe uma constante $c$ tal que $\mu(E) = cm(E)$, para todo conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^k$.*

Os elementos de $\mathcal{L}$ são conjuntos *mensuráveis de Lebesgue* ou *Lebesgue mensuráveis* em $\mathbb{R}^k$; $m$ é a *medida de Lebesgue* em $\mathbb{R}^k$.

### 2.1.3 Funções mensuráveis

**Definição 2.5.** Sejam $(X, \mathcal{B})$ e $(Y, \mathcal{B}')$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \to Y$ é dita *mensurável* se $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$ para todo $E \in \mathcal{B}'$.

Dado um conjunto $E \subset X$, definimos a *função característica*, $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, de $E$ por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in E, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin E. \end{cases}$$

Observe que a função $\chi_E$ é mensurável se, e somente se, $E$ é mensurável.

**Definição 2.6.** Uma função $s : X \to \mathbb{R}$ definida num espaço mensurável $X$ cuja imagem consiste de um número finito de pontos, é chamada *função simples.*

Se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são os distintos valores da função simples $s$ e $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$, então

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde $\chi_{A_i}$ é a função característica de $A_i$. É claro que $s$ é mensurável se, e somente se, cada conjunto $A_i$ é mensurável.

### 2.1.4 Integração

**Definição 2.7.** Seja $s : X \to \mathbb{R}$ uma função simples mensurável, da forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são os distintos valores de $s$. Se $E \in \mathcal{B}$, definimos

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Se $f : X \to [0, +\infty]$ é mensurável, e $E \in \mathcal{B}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples mensuráveis $s$ tais que $0 \leq s \leq f$. O lado esquerdo da igualdade é chamado a *integral de Lebesgue* de $f$ sobre $E$ com respeito à medida $\mu$.

Vejamos algumas propriedades da integral de Lebesgue.

$(a)$ Se $0 \leq f \leq g$, então $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

$(b)$ Se $A \subset B$ e $f \geq 0$, então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

$(c)$ Se $f \geq 0$ e $c$ uma constante, $0 \leq c < \infty$, então

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

$(d)$ Se $f(x) = 0$, para todo $x \in E$, então $\int_E f d\mu = 0$ inclusive se $\mu(E) = \infty$.

$(e)$ Se $\mu(E) = 0$, então $\int_E f d\mu = 0$ inclusive se $f(x) = \infty$ para todo $x \in E$.

Denotemos por $L^1(X)$ a coleção de funções mensuráveis $f$ em $X$ que satisfaz:

$$\int_X |f| < \infty.$$

Os elementos de $L^1(X)$ são chamados funções *integráveis de Lebesgue.*

Se $E$ é um subconjunto mensurável de Lebesgue de $\mathbb{R}^k$, e consideramos $m$ restrita aos subconjuntos mensuráveis de $E$, então obtemos um novo espaço de medida.

Se $k = 1$, $I$ qualquer dos conjuntos $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$, e $f \in L^1(I)$, denotemos

$$\int_a^b f(x) dx := \int_I f dm.$$

## 2.2 MEDIDAS INVARIANTES

Nesta seção, damos algumas definições e resultados que vamos utilizar para a existência de medidas invariantes.

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to X$ uma função mensurável.

**Definição 2.8.** A medida $\mu$ é *invariante* por $f$ ou *f-invariante*, se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)),$$

para todo conjunto mensurável $E \subset X$.

Se $\mu$ é invariante por $f$, dizemos que $\mu$ é uma *medida ergódica* se

$$\mu(E) = 0 \text{ ou } \mu(E) = 1, \text{ para todo } E \in \mathcal{B} \text{ tal que } f^{-1}(E) = E.$$

Se $\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ é outra medida, dizemos que $\mu$ é *absolutamente contínua* com respeito a $\nu$ se

$$E \in \mathcal{B} \text{ e } \nu(E) = 0, \text{ então } \mu(E) = 0.$$

### 2.2.1 Bacia

Sejam $f : M \to M$ uma função mensurável em algum espaço mensurável M, $\mu$ uma medida de probabilidade definida na $\sigma$-álgebra de $M$ invariante por $f$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Para $z \in M$, definimos

$$E_z(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z)),$$

que é chamado *média temporal de $\varphi$*.

**Definição 2.9.** A *bacia* de $\mu$ é o conjunto $B(\mu)$ de pontos $z \in M$ tais que $E_z(\varphi)$ existe e coincide com $\int \varphi d\mu$, para toda função contínua $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

**Definição 2.10.** Uma medida de probabilidade $f$-invariante $\mu$ é uma *medida física* ou *Sinai-Ruelle-Bowen(SRB)* para $f$ se sua bacia $B(\mu)$ tem medida de Lebesgue positiva.

### 2.2.2 Variação e distorção

**Definição 2.11.** Seja $M = [0, 1]$. A *variação* $\operatorname{var}\varphi$ de uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$\operatorname{var}_M \varphi = \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$, $n \geq 1$ de $M$.

A variação $\operatorname{var}_I \varphi = \operatorname{var}\left(\varphi\Big|_I\right)$ de $\varphi$ sobre um intervalo qualquer $I \subset M$ é definido de forma análoga, com o supremo tomado sobre todo $x_0, x_1, ..., x_n \in I$ e $\inf I \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq \sup I$.

Apresentamos algumas propriedades de variação. Para qualquer intervalo $I \subset M$, $a, b \in \mathbb{R}$, e $\varphi$, $\psi : M \to \mathbb{R}$.

$(V1)$ $\operatorname{var}_I |\varphi| \le \operatorname{var}_I \varphi$,

$(V2)$ $\operatorname{var}_I(a\varphi + b\psi) \le |a| \operatorname{var}_I \varphi + |b| \operatorname{var}_I \psi$,

$(V3)$ $\operatorname{var}_I(\varphi\psi) \le \sup\limits_I |\varphi| \operatorname{var}_I \psi + \operatorname{var}_I \varphi \sup\limits_I |\psi|$,

$(V4)$ $\operatorname{var}_J \varphi = \operatorname{var}_I(\varphi \circ h)$, se $h : I \to J$ é um homeomorfismo,

$(V5)$ Se $\varphi$ é de classe $C^1$, então $\operatorname{var}_I \varphi = \int_I |D\varphi(x)| dx$.

$(V6)$ Se $I \subset J$, então $\operatorname{var}_I \varphi \le \operatorname{var}_J \varphi$.

Dizemos que $\varphi$ tem *variação limitada*, se $\operatorname{var}_M \varphi < \infty$. A continuação para os seguintes Teoremas, ver prova em [17].

**Teorema 2.12.** *Toda função monótona definida em $[a, b]$ tem variação limitada em $[a, b]$.*

**Teorema 2.13.** *Toda função com variação limitada em $[a, b]$ é limitada em $[a, b]$.*

**Teorema 2.14.** *Seja $f$ uma função de variação limitada em $[a, b]$ e $a < c < b$, então*

$$\operatorname{var}_{[a,b]} f = \operatorname{var}_{[a,c]} f + \operatorname{var}_{[c,b]} f.$$

Agora damos a definição de distorção padrão. Na seção 3.4 daremos uma definição mais generalizada.

**Definição 2.15.** Seja $g : N \to N$ uma aplicação de classe $C^1$, onde $N$ é $S^1$ ou o intervalo $[0, 1]$. Se $T \subset N$ é um intervalo tal que $Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in T$, definimos a *distorção* de $g$ em $T$ como

$$Dist(g, T) = \sup_{x,y \in T} \log \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|},$$

onde $|Dg(x)|$ denota a norma ou valor absoluto da derivada de $g$ em $x$.

### 2.2.3 Aplicação expansora por partes

Sejam $M$ um intervalo compacto, $f : M \to M$, e $\mathcal{P}$ uma partição enumerável de $M$ de intervalos $\eta_j$, $j \geq 1$.

**Definição 2.16.** Dizemos que $f$ é *expansora por partes*, se para cada $j \geq 1$, $f$ é diferenciável em $\eta_j$ e existe uma constante $\sigma > 1$ tal que

$$|Df(x)| \geq \sigma,$$

para todo $x \in \eta_j$.

Vejamos alguns exemplos de aplicações expansoras por partes.

$(A)$ *Aplicação tenda (Tent map)*

Seu comportamento da aplicação é como na figura 2, deste modo temos que

$$|f'(x)| = \begin{cases} k_1, & \text{se} \quad x \in [0, c) \\ k_2, & \text{se} \quad x \in [c, 1] \end{cases}$$

onde $k_i > 1$.

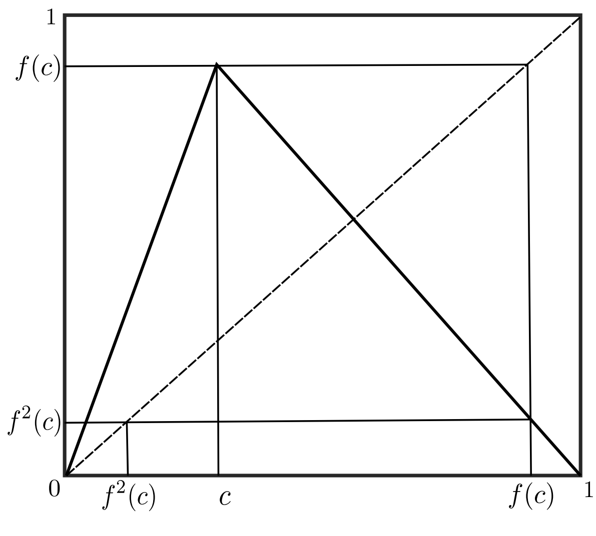


Figura 2 – Tent map

$(B)$ *Aplicação do tipo-Lorenz (Lorenz-like map)*

Seu comportamento da aplicação é como na figura 3, deste modo temos que

$$\left| \begin{array}{l} |f'(x)| > \sigma > 1, \quad \text{se} \quad x \neq \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} |f'(x)| = \infty \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} |f'(x)| = \infty \end{array} \right.$$

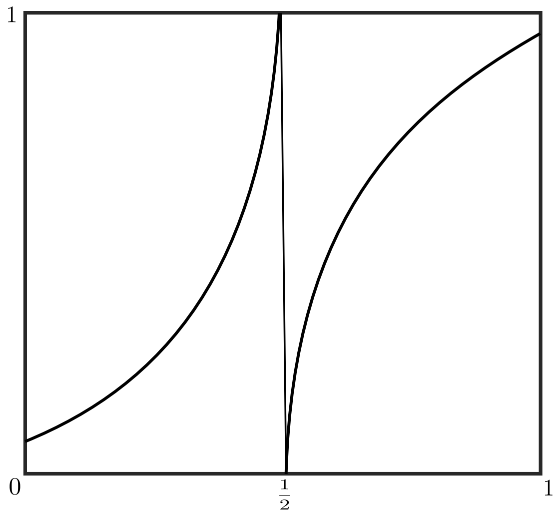


Figura 3 – Lorenz-like map

$(C)$ *Aplicação de Gauss (Gauss map)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

onde [ ] é a aplicação máximo inteiro.

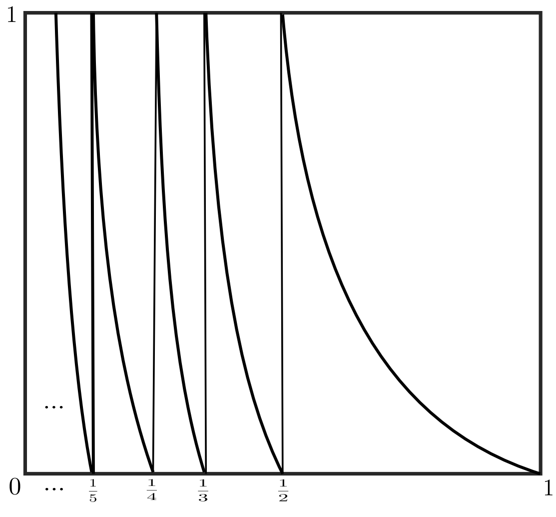


Figura 4 – Gauss map

### 2.2.4 Existência de medidas invariantes

Nesta seção damos dois resultados importantes, que chamamos Teorema $A$ e Proposição $A$ como falamos no prelúdio, que ajudarão a garantir existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para nossa aplicação $f$ original.

Assumimos que $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma familia enumerável de intervalos fechados com interior disjuntos tais que

$$cl\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = I = [0,1] \quad , \quad U = \bigcup_{i=1}^{\infty} Int(I_i) \quad \text{e} \quad S = I \setminus U,$$

onde $cl(A)$, $Int(A)$ é o fecho e o interior do conjunto $A$ respectivamente.

Assumimos que $f$ é expansora por partes na partição $\mathcal{P}$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|f'(x)|}, & \text{se} \quad x \in U \\ 0, & \text{se} \quad x \in S. \end{cases}$$

**Teorema 2.17.** *Sejam $f$ e $g$ definidos como acima. Se*

$$\operatorname{var}_I g < +\infty,$$

*então $f$ tem uma medida invariante absolulatemente contínua.*

*Demonstração.* Ver prova em [4]. □

Utilizando o argumento na seção 3.4 e a demonstração do Corolário 3.4 em [21], obtemos o

**Corolário 2.18.** *Se $\mu$ é uma medida de probabilidade $f$-invariante absolutamente contínua, então*

$$\mu = \varphi m,$$

*onde $\varphi$ tem variação limitada.*

Sejam $f : M \to M$ uma função mensurável e $E \subset M$ um conjunto mensurável. Dada uma medida invariante $\nu$ qualquer de $g : E \to E$, tal que

$$g(x) = f^{\rho(x)}(x),$$

onde $\rho : E \to \mathbb{N}$ é uma função mensurável, podemos construir uma certa medida invariante $\nu_\rho$ para $f$. De fato, denotemos por $E_k$ o conjunto dos $x \in E$ tais que $\rho(x) = k$ e então definimos

$$\nu_\rho(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k), \tag{2.2}$$

para todo conjunto mensurável $B \subset M$.

**Proposição 2.19.** *A medida $\nu_\rho$ definida em (2.2) é invariante por $f$ e satisfaz $\nu_\rho(M) = \int_E \rho d\nu$. Em particular, $\nu_\rho$ é finita se, e somente se, a função $\rho$ é integrável com respeito a $\nu$.*

*Demonstração.* Ver prova em [22]. $\square$

# 3 CLASSE DE FUNÇÕES

Neste capítulo daremos as propriedades da classe de funções que vamos trabalhar como também alguns resultados que nos ajudarão a conseguir nosso propósito. Logo enunciaremos o resultado principal e a técnica que utilizamos para sua prova.

## 3.1 A CLASSE $\mathcal{F}$

Em nosso trabalho é importante mencionar que vamos trabalhar no intervalo $M = [0, 1]$ e com uma função $f : M \to M$ que satisfaz certas condições que mencionamos a seguir.

### 3.1.1 Notação

Sejam $f, g : X \to Y \subset \mathbb{R}^+$ duas funções.

$(i)$ Dizemos que $f \approx g$, se existe $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{A} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A,$$

para todo $x \in X$.

$(ii)$ Dizemos que $f \gtrsim g$, se existe $C > 0$ que independe de qualquer constante tal que

$$f(x) \geq Cg(x),$$

para todo $x \in X$.

$(iii)$ Dizemos que $f \gg g$, se existe $N \geq 1$ tal que

$$f(x) \geq Ng(x),$$

para todo $x \in X$.

### 3.1.2 Conjunto crítico-singular

Seja $f : M \to M$ uma aplicação de classe $C^2$ por partes, ou seja, existe um conjunto finito $D$ tal que $f$ é de classe $C^2$ e monótona em cada componente conexa de $M \backslash D$ e admite extensão contínua na fronteira, isto é

$$f(c_i^+) := \lim_{x \to c_i^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(c_i^-) := \lim_{x \to c_i^-} f(x) \text{ existem,}$$

onde $D = \{c_1, ..., c_n\}$. Fazemos uma pausa aqui para detalhar estes fatos

Sejam $1 < i < n$ e $c_i \in D$. Então $f$ definida em $(c_{i-1}, c_i)$ admite extensão contínua na fronteira, isto é, existe $F_i : [c_{i-1}^+, c_i^-] \to M$, tal que

$$F_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in (c_{i-1}, c_i) \\ \lim\limits_{x \to c_{i-1}^+} f(x), & \text{se} \quad x = c_{i-1}^+ \\ \lim\limits_{x \to c_i^-} f(x), & \text{se} \quad x = c_i^-, \end{cases}$$

e $F_i$ é contínua em $[c_{i-1}^+, c_i^-]$. Também, $f$ definida em $(c_i, c_{i+1})$ admite extensão contínua na fronteira, isto é, existe $F_{i+1} : [c_i^+, c_{i+1}^-] \to M$ tal que

$$F_{i+1}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in (c_i, c_{i+1}) \\ \lim\limits_{x \to c_i^+} f(x), & \text{se} \quad x = c_i^+ \\ \lim\limits_{x \to c_{i+1}^-} f(x), & \text{se} \quad x = c_{i+1}^-, \end{cases}$$

e $F_{i+1}$ é contínua em $[c_i^+, c_{i+1}^-]$.

Seja $c \in D$, então denotemos por $\mathcal{C}$ o conjunto dos *pontos unilateriais (one sided)* $c^+$ e $c^-$, onde $c^+$: aproximamos a $c$ pela direita e $c^-$: aproximamos a $c$ pela esquerda. Definimos sua correspondente *vizinhança unilateral* como:

$$\Delta(c^+, \delta) = (c^+, c^+ + \delta) \quad \text{e} \quad \Delta(c^-, \delta) = (c^- - \delta, c^-),$$

para cada $\delta > 0$. Por simplicidade, usaremos $c$ para representar o elemento genérico de $\mathcal{C}$, e escrevemos

$$\Delta = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} \Delta(c, \delta).$$

Denotemos por $d(x) = d(x, \mathcal{C})$ a *distância* de $x$ ao conjunto crítico-singular $\mathcal{C}$. Para cada $c \in \mathcal{C}$, definimos a *ordem unilateral* $\ell = \ell(c) > 0$ no seguinte sentido:

$$|f(x) - f(c)| \approx d(x, c)^\ell, \quad |Df(x)| \approx d(x, c)^{\ell - 1} \quad e \quad |D^2 f(x)| \approx d(x, c)^{\ell - 2}, \tag{3.1}$$

para todo $x$ em algum $\Delta(c, \delta)$.

No resto do trabalho assumimos $\ell(c) \neq 1$. Agora estamos prontos para definir o seguinte.

**Definição 3.1.** Se $\ell(c) < 1$, dizemos que $c$ é *ponto singular*. Se $1 < \ell(c)$, dizemos que $c$ é *ponto crítico*.

**Observação 3.2.** Temos duas consequências dessa definição. A primeira, quando $c$ é ponto singular, então a derivada é ilimitada perto de $c$. A segunda, quando $c$ é ponto crítico, então a derivada tende a zero perto de $c$.

**Proposição 3.3.** *Existe $\delta > 0$ tal que, para cada $c \in \mathcal{C}$ e $x \in \Delta(c, \delta)$, temos*

$$d(x) = d(x, c).$$

*Demonstração.* Como $\mathcal{C}$ é finito, então $\mathcal{C} = \{c_0, ..., c_n\}$. Definimos

$$\delta = \min\left\{\frac{|c_i - c_{i-1}|}{2}; \quad 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Seja $c \in \mathcal{C}$ e $x \in \Delta(c, \delta)$. Então

$$d(x, c) < \delta \leq \frac{|c_i - c_{i-1}|}{2}, \tag{3.2}$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Também, por definição de distância, obtemos

$$d(x) \leq d(x, c). \tag{3.3}$$

Por outro lado, seja $\tilde{c} \in \mathcal{C}$ e $\tilde{c} \neq c$, então

$$d(c, x) + d(x, \tilde{c}) \geq d(c, \tilde{c}) \geq |c_s - c_{s-1}|,$$

para algum $1 \leq s \leq n$.

Assim, por (3.2) obtemos

$$\delta + d(x, \tilde{c}) > 2\delta.$$

Por consequência

$$d(x, \tilde{c}) > \delta > d(x, c) \Rightarrow d(x, \tilde{c}) > d(x, c),$$

para todo $\tilde{c} \in \mathcal{C}$ e $\tilde{c} \neq c$. Então

$$\min \{d(x, \tilde{c}) : \tilde{c} \in \mathcal{C}\} \geq d(x, c) \Rightarrow d(x) \geq d(x, c).$$

Dessa maneira, por (3.3), tem-se

$$d(x) = d(x, c).$$

□

**Observação 3.4.** Como $\mathcal{C}$ é finito então a quantidade de ordens é um número finito. Logo vamos tomar $\delta$ o mínimo de todos os raios onde estão definidas as ordens de cada ponto crítico-singular. Assim obtemos um novo $\delta$.

**Proposição 3.5.** *Para cada $x \in M \setminus \mathcal{C}$, tem-se*

$$\frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} \approx \frac{1}{d(x)}.$$

*Demonstração.* Seja $x \in M \setminus (\Delta \cup \mathcal{C})$. Como $\Delta \cup \mathcal{C}$ é aberto, então $K = M \setminus (\Delta \cup \mathcal{C})$ é fechado e portanto compacto. Por (3.1), temos que $|Df(x)| > 0$ e, além disso, $Df$ é contínua em K. Então, existe $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{A} \leqslant |Df(x)| \leq A. \tag{3.4}$$

Também, tem-se $|D^2 f(x)| > 0$ em $K$. Como $D^2 f$ é contínua em $K$, então existe $B > 0$ tal que

$$\frac{1}{B} \leq |D^2 f(x)| \leq B.$$

Dessa forma, por (3.4), obtemos

$$\frac{1}{AB} \leq \frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} \leq AB. \tag{3.5}$$

Além disso $\delta \leq d(x) < 1$. Logo, por (3.5), obtemos

$$\frac{\delta}{AB} \leq \frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} d(x) < AB.$$

Assim

$$\frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} \approx \frac{1}{d(x)}, \tag{3.6}$$

para todo $x \in M \backslash (\Delta \cup C)$.

Seja $x \in \Delta$ então existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $x \in \Delta(c, \delta)$. Por definição de ordem no ponto $c$, obtemos

$$|Df(x)| \approx d(x)^{\ell-1} \quad \text{e} \quad |D^2 f(x)| \approx d(x)^{\ell-2}.$$

Então, existe $A > 0$ tais que

$$\frac{1}{A} \leq \frac{|Df(x)|}{d(x)^{\ell-1}} \leq A \quad \text{e} \quad \frac{1}{A} \leq \frac{|D^2 f(x)|}{d(x)^{\ell-2}} \leq A.$$

Logo

$$\frac{1}{A^2} \leq \frac{|D^2 f(x)| d(x)^{\ell-1}}{|Df(x)| d(x)^{\ell-2}} \leq A^2 \Rightarrow \frac{1}{A^2} \leq \frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} d(x) \leq A^2.$$

Daqui, resulta que

$$\frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} \approx \frac{1}{d(x)}, \tag{3.7}$$

para todo $x \in \Delta$.

Portanto, de (3.6) e (3.7), obtemos

$$\frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} \approx \frac{1}{d(x)},$$

para todo $x \in M \backslash \mathcal{C}$. $\square$

### 3.1.3 Expansão uniforme fora da vizinhança crítica

Para nosso trabalho, vamos supor que $f$ é uniformemente expansora longe de pontos críticos. Isto significa que as duas condições seguintes são satisfeitas

($\mathcal{E}1$) Existe uma constante $k > 0$, que independe de $\delta$ tal que, para cada $x \in M$ e cada inteiro $n \geq 1$ tais que, se $d(f^j(x), \mathcal{C}) \geq \delta$, para todo $0 \leq j \leq n-1$ e $d(f^n(x), \mathcal{C}) < \delta$, então

$$|Df^n(x)| \geq k. \tag{3.8}$$

($\mathcal{E}2$) Para cada $\delta > 0$ existem constantes $c(\delta) > 0$ e $\lambda(\delta) > 0$ tais que

$$|Df^n(x)| \geq c(\delta)e^{\lambda(\delta)n}, \tag{3.9}$$

para cada $x \in M$ e $n \geq 1$ tais que $d(f^j(x), \mathcal{C}) \geq \delta$, para todo $0 \leq j \leq n-1$.

### 3.1.4 Condição de somabilidade ao longo da órbita crítica.

Para cada $c \in \mathcal{C}$, escrevemos

$$D_n = D_n(c) = |(f^n)'(f(c))| \quad \text{e} \quad d(c_n) = d(c_n, C),$$

onde $c_n = f^n(c)$. Isto denota a derivada ao longo da órbita $c$, e a distância de $c_n$ ao conjunto crítico, respectivamente.

Assumimos que, para cada ponto $c \in \mathcal{C}$ com $\ell = \ell(c) > 1$, tem-se

$$\sum_n \frac{-n \log d(c_n)}{d(c_n) D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \infty. \tag{3.10}$$

**Observação 3.6.** A condição (3.10) é satisfeita se

$$D_{n-1} \gtrsim e^{\lambda n} \quad \text{e} \quad d(c_n) \gtrsim e^{-\alpha n} \quad \text{com } \alpha < \tfrac{\lambda}{2\ell-1}.$$

## 3.2 O RESULTADO PRINCIPAL

Nesta seção primeiro enunciamos o resultado principal de nosso trabalho para logo dar a técnica que utilizamos para sua prova.

Denotemos por $\mathcal{F}$ a família de aplicações no intervalo que satisfazem as condições dadas na seção anterior.

**Teorema 3.7.** *Se $f \in \mathcal{F}$ então existe uma medida de probabilidade $f$-invariante absolutamente contínua.*

A seguir, vejamos a técnica para provar o Teorema 3.7, começando pela construção de uma partição enumerável $\mathcal{I}$ de $M(mod\ 0)$ em intervalos abertos, que define uma função $\tau : M \to \mathbb{N}$ que chamamos *função tempo induzido.* Esta função é constante nos elementos de $\mathcal{I}$, e denotamos por $\hat{f} : M \to M$ a *aplicação induzida* definida por

$$\hat{f}(x) = f^{\tau}(x).$$

Para cada $I \in \mathcal{I}$ definimos a função $\omega_I : M \to M$ por

$$\omega_I(x) = \left| \frac{\chi_I(x)}{\hat{f}'(x)} \right|,$$

onde $\chi_I$ é a função característica de $I$.

Assim, trocaremos a prova do Teorema 3.7 pela prova do seguinte Teorema.

**Teorema 3.8.** *Existe uma partição enumerável $\mathcal{I}$ de $M(mod\ 0)$, e uma função tempo induzido $\tau : M \to \mathbb{N}$, constante nos elementos de $\mathcal{I}$, tal que a aplicação induzida $\hat{f}(x) = f^{\tau}(x)$ é uniformemente expansora e satisfaz as seguintes propriedades:*

$(V_s)$ *Variação somável*

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \operatorname{var}_M \omega_I < \infty. \tag{3.11}$$

$(T_s)$ *Tempo induzido somável*

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \tau(I)|I| < \infty. \tag{3.12}$$

Nosso objetivo é provar o Teorema 3.8 para logo mostrar, com ajuda do Teorema 2.17 e da Proposição 2.19, que o Teorema 3.8 implica o Teorema 3.7.

## 3.3 APLICAÇÃO INDUZIDA

Nesta seção damos as ferramentas para definir em primeiro lugar a função tempo induzido e finalmente definir a aplicação induzida.

### 3.3.1 **Notações**

Para $x$ na vizinhança $\Delta(c,\delta)$ de $c \in \mathcal{C}$, denotemos

$$\hat{I} = \hat{I}_0 = (x, c) \quad \text{e} \quad \hat{I}_j = (x_j, c_j) = (f^j(x), f^j(c)).$$

Para qualquer intervalo $I$, denotemos com $|I|$ o comprimento de $I$, e $d(I)$ a distância ao conjunto crítico. Para cada ponto $c \in \mathcal{C}$ com $\ell = \ell(c) > 1$, e cada inteiro $n \geqslant 1$, definimos

$$\gamma_n = \gamma_n(c) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{d(c_n)D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right\}. \tag{3.13}$$

Observe que, de (3.10), resulta

$$\sum_n \gamma_n < \infty. \tag{3.14}$$

De fato, como $\mathcal{C}$ é finito, então $\mathcal{C} = \left\{c^1, ..., c^\theta\right\}$, onde $\theta \geq 2$ e $c^1 < ... < c^\theta$. Podemos definir, sem perda de generalidade, $c^0 = 0$ e $c^{\theta+1} = 1$, logo tomamos $\xi = \max\left\{c^{i+1} - c^i : 0 \leq i \leq \theta\right\}$, então $0 < \xi < 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Por (3.10), obtemos $d(c_n) > 0$, então existe $\beta = \beta(n) \in \{0, ..., \theta\}$ tal que $c^\beta < f^n(c) < c^{\beta+1}$.

À vista disso

$$d(c_n) = d(f^n(c), \mathcal{C}) < |c^{\beta+1} - c^\beta| \leq \xi.$$

Logo

$$d(c_n) < \xi. \tag{3.15}$$

Consequentemente

$$d(c_n)^{-1} > \frac{1}{\xi} \Rightarrow n \log d(c_n)^{-1} > \log \frac{1}{\xi} > 0.$$

O que resulta

$$\frac{\log \frac{1}{\xi}}{d(c_n) D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \frac{n \log d(c_n)^{-1}}{d(c_n) D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, de (3.10) e pelo critério de comparação para séries, obtemos

$$\sum_n \gamma_n < \infty.$$

**Observação 3.9.** Caso o sistema dinâmico possue um único ponto crítico ou singular e este esteja em um dos extremos do intervalo ainda é possivel mostrar que existe $0 < \xi < 1$ tais que $d(c_n) < \xi$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

### 3.3.2 Período binding

Dado $c \in \mathcal{C}$, definimos o período binding do ponto $x \in \Delta(c, \delta)$ como segue: Se $\ell(c) < 1$, então $p = p(x) = 1$. No outro caso, definimos o período binding, como o menor $p = p(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\hat{I}_j| \leq \gamma_j d(c_j) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq p-1 \quad \text{e} \quad |\hat{I}_p| > \gamma_p d(c_p).$$

Observe que a partir da definição de binding segue-se que:

$$h(\delta) := \inf \{p(x) : x \in \Delta(c, \delta)\} \to \infty, \tag{3.16}$$

monotonamente, quando $\delta \to 0$.

De fato, antes daremos um resultado prévio que sera provado no Capítulo 4. Seja $x \in \Delta(c,\delta)$ com $c$ ponto crítico, então

$$[f^j(x), f^j(c)] \cap \mathcal{C} = \emptyset, \tag{3.17}$$

para todo $1 \leq j < p(x) = p$.

Veja que, pela definição de $h(\delta)$ se, $\zeta < \delta$, então

$$h(\zeta) \geq h(\delta). \tag{3.18}$$

Por outro lado, seja $c \in \mathcal{C}$ ponto crítico. Visto que $\{p(a) : a \in \Delta(c,\delta)\} \subset \mathbb{N}$, então pelo Princípio da Boa Ordenação temos que

$$p(x) = p = \inf \{p(a) : a \in \Delta(c,\delta)\}, \tag{3.19}$$

para algum $x \in \Delta(c,\delta)$.

Agora, como $\delta > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{m} < \delta$, então $0 < \dfrac{1}{n} < \delta$ para todo $n \geq m$. Definimos

$$x_n = c + \frac{1}{n}, \tag{3.20}$$

para todo $n \geq m$.

Também, por (3.17) e (3.19) tem-se que $f^j$ é contínua em $\Delta(c,\delta)$ para todo $1 \leq j \leq p$. Assim, por (3.20), temos que $f^p(x_n) \to f^p(c)$. Então, para $\gamma_p d(c_p) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f^p(x_N) - f^p(c)| < \gamma_p d(c_p).$$

Então $p(x_N) = \hat{p} > p(x) \geq h(\delta)$. Tomando $\delta_1 = \dfrac{1}{N}$ tem-se que

$$p(z) \geq \hat{p},$$

para todo $z \in \Delta(c,\delta_1)$.

Assim, $h(\delta_1) > h(\delta)$. Fazendo o mesmo, construímos uma sequência $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\delta_n \to 0$ e

$$\delta_m < \delta_n \Rightarrow h(\delta_m) > h(\delta_n).$$

Como $\{h(\delta_n)\} \subset \mathbb{N}$ é uma sequência crescente, então $\{h(\delta_n)\}$ é não limitada. Seja $A > 0$ então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h(\delta_{n_0}) > A$. Logo por (3.18), se $0 < \delta < \delta_{n_0}$, então $h(\delta) > A$.

Portanto, para cada $c \in \mathcal{C}$ ponto crítico, obtemos que

$$\lim_{\delta\to 0} h(\delta) = \infty,$$

monotonamente.

Para cada $c \in \mathcal{C}$ e $p \geq 1$, definimos $I(c,p) = \{x \in \Delta(c,\delta) : p(x) = p\}$. Notemos que o intervalo $I(c,p) = \emptyset$, se $p < h(\delta)$.

Provaremos que $I(c,p)$ é um intervalo. Se $c \in \mathcal{C}$ é um ponto singular, então $I(c,p) = \Delta(c,\delta)$, logo $I(c,p)$ é um intervalo. Vejamos o caso $I(c,p)$ quando $c \in \mathcal{C}$ é ponto crítico.

Sejam $a, b \in I(c,p)$, então

$$(a,b) \subset I(c,p).$$

Com efeito, provaremos por contradição, isto é, suponhamos que existe $x \in (a,b)$ tais que $x \notin I(c,p)$, então $p(x) = \hat{p}$ com $\hat{p} \neq p$. Vejamos por casos

**Caso** 1 : Se $\hat{p} < p$. Como $a, b \in I(c,p)$, então $p(a) = p(b) = p$. Logo, por (3.17) temos que

$$[f^j(a), f^j(c)] \cap \mathcal{C} = \emptyset \quad e \quad [f^j(b), f^j(c)] \cap \mathcal{C} = \emptyset, \tag{3.21}$$

para todo $1 \leq j < p$.

Por outro lado, como $(a,b) \subset \Delta(c,\delta)$, então $f$ é monótona em $(a,b)$, assim $f(a) < f(x) < f(b)$. Aqui vamos supor crescente, o caso decrescente é análogo.

Então, por (3.21), obtemos $f^{\hat{p}}(a) < f^{\hat{p}}(x) < f^{\hat{p}}(b)$. Note que $f^{\hat{p}}(c) \notin (f^{\hat{p}}(a), f^{\hat{p}}(b))$, pois, se $f^{\hat{p}}(a) < f^{\hat{p}}(c) < f^{\hat{p}}(b))$, então, por (3.21) temos que $s = c$ para algum $s \in (a, b)$ o qual é uma contradição. Assim

$$f^{\hat{p}}(c) \leq f^{\hat{p}}(a) < f^{\hat{p}}(x) < f^{\hat{p}}(b) \quad \text{ou} \quad f^{\hat{p}}(a) < f^{\hat{p}}(x) < f^{\hat{p}}(b) \leq f^{\hat{p}}(c).$$

Então, para o primeiro, temos

$$\gamma_{\hat{p}} d(c_{\hat{p}}) < |f^{\hat{p}}(x) - f^{\hat{p}}(c)| \leq |f^{\hat{p}}(b) - f^{\hat{p}}(c)| \leq \gamma_{\hat{p}} d(c_{\hat{p}}),$$

uma contradição. Para o segundo

$$\gamma_{\hat{p}} d(c_{\hat{p}}) < |f^{\hat{p}}(x) - f^{\hat{p}}(c)| \leq |f^{\hat{p}}(a) - f^{\hat{p}}(c)| \leq \gamma_{\hat{p}} d(c_{\hat{p}}),$$

uma contradição.

**Caso** 2 : Se $p < \hat{p}$. Então, por (3.21), $f^p(a) < f^p(x) < f^p(b)$, também, tem-se $f^p(c) \notin (f^p(a), f^p(b))$ pelo mesmo argumento que o caso anterior, temos

$$f^p(c) \leq f^p(a) < f^p(x) < f^p(b) \quad \text{ou} \quad f^p(a) < f^p(x) < f^p(b) \leq f^p(c).$$

Então, para o primeiro temos que

$$\gamma_p d(c_p) < |f^p(a) - f^p(c)| \leq |f^p(x) - f^p(c)| \leq \gamma_p d(c_p),$$

o qual é uma contradição. Para o segundo

$$\gamma_p d(c_p) < |f^p(b) - f^p(c)| \leq |f^p(x) - f^p(c)| \leq \gamma_p d(c_p),$$

uma contradição.

Assim, $(a, b) \subset I(c, p)$ para todo $a, b \in I(c, p)$ portanto, $I(c, p)$ é um intervalo.

### 3.3.3 Fixando $\delta$

Usando a monotonicidade de $h(\delta)$ podemos fixar, neste momento e para o resto do trabalho, $\delta$ suficientemente pequeno tal que

$(i)$ $\Delta(c,\delta) \cap \Delta(\tilde{c},\delta) = \emptyset$, para todo $c \neq \tilde{c}$.

De fato, escolhendo o $\delta > 0$ da Proposição 3.3 obtemos que $\Delta(c,\delta) \cap \Delta(\tilde{c},\delta) = \emptyset$, para todo $c \neq \tilde{c}$.

$(ii)$ $f(\Delta(c,\delta)) \cap \Delta(\hat{c},\delta) = \emptyset$, para todo $c, \hat{c} \in \mathcal{C}$.

De fato, já que $\mathcal{C}$ é finito, então $\mathcal{C} = \{c^1, c^2, ..., c^n\}$. Sejam $0 < i \leq n$ e $c^i \in \mathcal{C}$, então $f(c^i) \notin \mathcal{C}$, pois conforme a (3.10) temos $d(c_m) > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso, como $\mathbb{R} \backslash \mathcal{C}$ é aberto, então existe um intervalo aberto $J_i$ tal que

$$f(c^i) \in J_i \subset \mathbb{R}\backslash\mathcal{C}. \tag{3.22}$$

Assim, definimos

$$\Delta(c^i, \delta_i) = f^{-1}(J_i) \cap \Delta(c^i, \delta).$$

Logo, por (3.22), obtemos $c^i \notin f(\Delta(c^i,\delta_i))$. Mais ainda, $f(\Delta(c^i,\delta_i)) \cap \mathcal{C} = \emptyset$, para todo $0 < i \leq n$. Caso contrário, existe $0 < i \leq n$ tal que $f(\Delta(c^i,\delta_i)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, então, $J_i$ tem ponto crítico o qual é uma contradição por (3.22).

Antes de passar ao resultado, vamos homogenizar os $\delta_i$, tomando $\delta = \min\{\delta_i, 0 < i \leq n\}$. Então, conseguimos um $\delta > 0$ tais que

$$f(\Delta(c^i,\delta)) \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

para todo $0 < i \leq n$.

Portanto, basta definir um novo $\delta > 0$, da forma

$$\delta = \min\{d(I_i, \mathcal{C}), 0 < i \leq n\},$$

onde $I_i = f(\Delta(c^i,\delta))$ e $d(I_i,\mathcal{C})$ é a distância de $I_i$ ao conjunto crítico-singular $\mathcal{C}$.

Assim sendo

$$f(\Delta(c^i,\delta)) \cap \Delta(c^j,\delta) = \emptyset,$$

para todo $i, j$.

Com efeito, por contradição, se existem $0 < i, j \leq n$ tais que $f(\Delta(c^i,\delta)) \cap \Delta(c^j,\delta) \neq \emptyset$ então, $a \in I_i$ e $a \in \Delta(c^j,\delta)$, logo

$$\delta \leq d(I_i, \mathcal{C}) \leq d(a, c^j) < \delta,$$

o qual é uma contradição.

Em vista disso

$$f(\Delta(c,\delta)) \cap \Delta(\hat{c},\delta) = \emptyset,$$

para todo $c, \hat{c} \in \mathcal{C}$.

$(iii)$ $\gamma_n < \dfrac{1}{2}$, para todo $n \geq h(\delta)$.

Com efeito, por (3.14), temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_n < \frac{1}{2}, \tag{3.23}$$

para todo $n \geq n_0$.

Por outro lado, por (3.16) existe um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $h(\delta) > n_0$. Logo por (3.23) obtemos que

$$\gamma_n < \frac{1}{2},$$

para todo $n \geq h(\delta)$.

$(iv)$ $D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}} \gg \dfrac{2}{k}$, para todo $n \geq h(\delta)$.

De fato, como $k > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{2n} = 0$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{k}{2n_0} < \dfrac{1}{2}$.

Deste modo, fazendo o mesmo que em $(iii)$, obtemos que

$$\gamma_n < \frac{k}{2n_0} < \frac{1}{2},$$

para todo $n \geq h(\delta)$.

Logo, pela definição de $\gamma_n$, temos que

$$\frac{1}{d(c_n)D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \frac{k}{2n_0}.$$

Assim, por (3.15), tem-se

$$\frac{1}{D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \frac{k}{2n_0}d(c_n) \Rightarrow D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}} > n_0\frac{2}{k}.$$

Portanto

$$D_{n-1}^{\frac{1}{2\ell-1}} \gg \frac{2}{k},$$

para todo $n \geq h(\delta)$.

### 3.3.4 Fixando $q_0$

Agora vamos fixar um inteiro $q_0 = q_0(\delta) \geq 1$ suficientemente grande tal que

$$c(\delta)e^{\lambda(\delta)q_0(\delta)} \geq 2. \tag{3.24}$$

Note que as constantes $c(\delta)$ e $\lambda(\delta)$ aparecem a partir da segunda condição de expansão uniforme fora da vizinhança crítica. A escolha de $q_0$ é motivada pelo fato de a órbita de um ponto $c \in \mathcal{C}$ até o tempo $q_0 - 1$ ficar fora da vizinhança crítica, deste modo alcançar uma derivada acumulada de pelo menos 2.

### 3.3.5 Tempo induzido

Definimos os seguintes conjuntos

$$M_f = \{x \in M : f^j(x) \notin \Delta, \text{ para todo } 0 \leq j < q_0\} \quad \text{e} \quad M_b = M \backslash M_f.$$

Dessa maneira, $M_f$ é o conjunto de pontos em $M$ que ficam fora de $\Delta$ para as primeiras $q_0 - 1$ iterações, e $M_b$ denota o conjunto dos pontos que entram em $\Delta$ para algum tempo antes de $q_0$.

Se $x \in M_b$, definimos

$$l_0 = l_0(x) = \min\{0 \leq j < q_0 : f^j(x) \in \Delta\} \quad \text{e} \quad p_0 = p_0(f^{l_0}(x)),$$

onde $l_0$ é o primeiro tempo que a órbita de $x$ entra em $\Delta$, e $p_0$ denota o período binding correspondente ao ponto $f^{l_0}(x)$. Assim definimos o *tempo induzido* por:

$$\tau(x) = \begin{cases} q_0, & \text{se} \quad x \in M_f \\ l_0 + p_0, & \text{se} \quad x \in M_b. \end{cases} \tag{3.25}$$

### 3.3.6 A aplicação induzida

Aqui vamos definir a *aplicação induzida* da seguinte forma:

$$\hat{f}(x) = f^{\tau(x)}(x).$$

Denotaremos por $\mathcal{I}$ a partição de $M$ em intervalos máximos onde a aplicação induzida é um difeomorfismo de classe $C^2$, e $\mathcal{I}_f = \mathcal{I} \mid M_f$ e $\mathcal{I}_b = \mathcal{I} \mid M_b$.

Note que, $\mathcal{I}_f$ são os intervalos $I \in \mathcal{I}$ tais que $f^j(I) \cap \Delta = \emptyset$ para todo $0 \leq j < q_0$, e $\mathcal{I}_b$ aqueles $I \in \mathcal{I}$ tais que $f^l(I) \subset \Delta(c, \delta)$ para o menor $0 \leq l < q_0$ e $c \in \mathcal{C}$.

Denotemos por $\mathcal{I}_{b_c}$ os intervalos $I \in \mathcal{I}_b$ tais que $f^l(I) \subset \Delta(c, \delta)$ para algum $c \in \mathcal{C}$ ponto crítico e $\mathcal{I}_{b_s}$ aqueles $I \in \mathcal{I}_b$ tais que $f^l(I) \subset \Delta(c, \delta)$ para algum $c \in \mathcal{C}$ ponto singular. Então

$$\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_{b_c} \cup \mathcal{I}_{b_s}.$$

Por último, definamos o conjunto $\mathcal{I}_l := \Big\{I \in \mathcal{I}_b : f^l(I) \subset \Delta(c, \delta), c \in \mathcal{C}\Big\}$.

**Observação 3.10.** Veja que, card $\mathcal{I}_{b_s} < \infty$.

De fato, como $\mathcal{C}$ é finito, então $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Assim, geramos uma partição $P = \{0 \leq c_1 < c_2 < ... < c_n \leq 1\}$ e os intervalos $(c_i, c_{i+1})$ para $0 < i < n$.

Para $l = 0$, temos

$$\mathcal{I}_0 = \Big\{I^0 : I^0 = \Delta(c, \delta), c \in \mathcal{C}\Big\}.$$

Como card $\mathcal{C} = n$ e os elementos de $\mathcal{C}$ são unilaterais, então, Card $\mathcal{I}_0 \leq 2n$.

Para $l = 1$, temos

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ I^1 : I^1 = f^{-1}(I^0) \cap (c_i, c_{i+1}), I^0 \in \mathcal{I}_0, 0 < i < n \right\}.$$

Como card $\mathcal{I}_0 \leq 2n$ e o número de intervalos $(c_i, c_{i+1})$ é $n-1$, então card $\mathcal{I}_1 \leq 2n(n-1)$.

Para $l = 2$, temos

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ I^2 : I^2 = f^{-1}(I^1) \cap (c_i, c_{i+1}), I^1 \in \mathcal{I}_1, 0 < i < n \right\},$$

então card $\mathcal{I}_2 \leq 2n(n-1)^2$.

Assim, por recursividade, para $l = q_0 - 1$, temos que card $\mathcal{I}_{q_0-1} \leq 2n(n-1)^{q_0-1}$.

Portanto

$$\text{card } \mathcal{I}_{b_s} \leq \sum_{l=0}^{q_0-1} 2n(n-1)^l.$$

Denotemos, por card $\mathcal{I}_i = n_i$, para $0 \leq i < q_0$.

**Observação 3.11.** Pela construção da partição temos que card $\mathcal{I}_f < \infty$.

Com efeito, basta ver que

$$\left( \bigcup_{i=0}^{q_0-1} \left( \bigcup_{j=1}^{n_i} I^{(i,j)} \right) \right)^c,$$

é um número finito de intervalos. Seja $\left\{ \tilde{I}_i : i = 1, ..., m \right\}$ tais conjuntos, assim $\mathcal{I}_f = \left\{ Int(\tilde{I}_i) : i = 1, ..., m \right\}$, portanto card $\mathcal{I}_f < \infty$.

Observe que $\hat{f}$ restrito a cada $I \in \mathcal{I}$ é de classe $C^2$ sobre $\hat{f}(I)$.

De fato. Visto que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f \cup \mathcal{I}_{b_s} \cup \mathcal{I}_{b_c}$, vejamos por casos

**Caso** 1 : Se $I \in \mathcal{I}_f$, então $\hat{f}(x) = f^{q_0}(x)$ para todo $x \in I$. Por outro lado, pela definição de $\mathcal{I}_f$ temos que

$$f^j(I) \cap \Delta = \emptyset,$$

para todo $0 \leq j < q_0$. Então, $f^{q_0} : I \to f^{q_0}(I)$ é de classe $C^2$, portanto $\hat{f}$ é de classe $C^2$ em $I$.

**Caso** $2:$ Se $I \in \mathcal{I}_{b_s}$, então $\hat{f}(x) = f^{l+1}(x)$ para todo $x \in I$. Pela definição de $l$ obtemos que

$$f^j(I) \cap \Delta = \emptyset,$$

para todo $0 \leq j < l$.

Então

$$f^l : I \to f^l(I), \tag{3.26}$$

é de classe $C^2$.

Por outro lado, como $f^l(I) \subset \Delta(c, \delta)$, então $f : f^l(I) \to f^{l+1}(I)$ é de classe $C^2$, logo por (3.26) obtemos que $f^{l+1} : I \to f^{l+1}(I)$ é de classe $C^2$, portanto $\hat{f}$ é de classe $C^2$ em $I$.

**Caso** $3:$ Se $I \in \mathcal{I}_{b_c}$, então $\hat{f}(x) = f^{l+p}(x)$ para todo $x \in I$. Pela definição de $l$ temos que

$$f^j(I) \cap \Delta = \emptyset,$$

para todo $0 \leq j < l$.

Então

$$f^l : I \to f^l(I), \tag{3.27}$$

é de classe $C^2$.

Por outro lado, por (3.17) obtemos que

$$f^j(f^l(I)) \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

para todo $1 \leq j < p$.

Então

$$f^{p-1} : f^{l+1}(I) \to f^{l+p}(I), \tag{3.28}$$

é de classe $C^2$.

Também, como $f^l(I) \subset \Delta(c, \delta)$, então

$$f : f^l(I) \to f^{l+1}(I), \tag{3.29}$$

é de classe $C^2$.

Assim, por (3.28) e (3.29) resulta que $f^p : f^l(I) \to f^{l+p}(I)$ é de classe $C^2$. Logo, por (3.27) $f^{l+p} : I \to f^{l+p}(I)$ é de classe $C^2$, portanto $\hat{f}$ é de classe $C^2$ em $I$.

## 3.4 DISTORÇÃO GENERALIZADA

Nesta seção definimos distorção generalizada como também suas consequências.

Para qualquer intervalo $I$ e inteiro $n \geq 1$, definimos a *distorção generalizada* por

$$\mathcal{D}(f^n, I) = \prod_{j=0}^{n-1} \sup_{x_j, y_j \in I_j} \frac{|Df(x_j)|}{|Df(y_j)|},$$

onde $I_j = f^j(I)$.

Observemos que o supremo é tomado sobre toda escolha de sequências $x_j, y_j \in I_j$. Em particular, se escolhemos as sequências $x_j = f^j(x)$ como a órbita num ponto e $y_j$ arbitrária, obtemos o seguinte resultado

**Proposição 3.12.**

$$\prod_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \leqslant \frac{\mathcal{D}(f^n, I)}{|Df^n(x)|},$$

*para todo $x \in I$.*

*Demonstração.* Seja $x \in I$. Então

$$\begin{aligned}
|Df^n(x)| \prod_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} &= \left( \prod_{j=0}^{n-1} |Df(f^j(x))| \right) \left( \prod_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \right) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} |Df(f^j(x))| \left( \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \right) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \sup_{y_j \in I_j} \frac{|Df(f^j(x))|}{|Df(y_j)|} \\
&\leq \prod_{j=0}^{n-1} \sup_{x_j, y_j \in I_j} \frac{|Df(x_j)|}{|Df(y_j)|} \\
&= \mathcal{D}(f^n, I).
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\prod_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \leq \frac{\mathcal{D}(f^n, I)}{|Df^n(x)|},$$

para todo $x \in I$.

$\square$

**Proposição 3.13.**

$$\mathcal{D}(f^n, I) \leq \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{\sup_{I_j} |D^2 f|}{\inf_{I_j} |Df|} |I_j| \right).$$

*Demonstração.* Sejam $j \in \{0, ..., n-1\}$ e $x_j, y_j \in I_j$. Então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi_j \in (y_j, x_j) \subset I_j$ tal que

$$\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} = 1 + \frac{Df(x_j) - Df(y_j)}{Df(y_j)} = 1 + \frac{D^2 f(\xi_j)}{Df(y_j)} (x_j - y_j).$$

Então

$$\left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| = \left| 1 + \frac{D^2 f(\xi_j)}{Df(y_j)} (x_j - y_j) \right| \leq 1 + \frac{|D^2 f(\xi_j)|}{|Df(y_j)|} |x_j - y_j| \leq 1 + \frac{\sup_{I_j} |D^2 f|}{\inf_{I_j} |Df|} |I_j|.$$

Logo

$$\left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq 1 + \frac{\sup_{I_j} |D^2 f|}{\inf_{I_j} |Df|} |I_j|,$$

para todo $x_j$, $y_j \in I_j$. Então

$$\sup_{x_j, y_j \in I_j} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq 1 + \frac{\sup_{I_j} |D^2 f|}{\inf_{I_j} |Df|} |I_j|,$$

para todo $0 \leq j \leq n-1$. O que resulta

$$\prod_{j=0}^{n-1} \sup_{x_j, y_j \in I_j} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{\sup_{I_j} |D^2 f|}{\inf_{I_j} |Df|} |I_j| \right).$$

$\square$

**Lema 3.14.** Para qualquer intervalo $I$, e todo inteiro $l \geq 1$ tal que $f^j : I \to f^j(I)$ é um difeomorfismo para todo $0 \leq j < l$, temos que

$$\mathrm{var}_I \frac{1}{|Df^l|} \lesssim \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} . \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{dx}{d(x)}.$$

*Demonstração.* Escrevemos primeiro o seguinte

$$\mathrm{var}_I \frac{1}{Df^l} = \mathrm{var}_I \left[ \prod_{j=0}^{l-1} \frac{1}{Df} \circ f^j \right] = \mathrm{var}_I \left[ \left( \frac{1}{Df} \circ f^{l-1} \right) \left( \prod_{j=0}^{l-2} \frac{1}{Df} \circ f^j \right) \right].$$

Desta maneira, pela propriedade de variação $(V3)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_I \frac{1}{Df^l} \quad &\leq \quad \left( \sup_I \frac{1}{|Df|} \circ f^{l-1} \right) \left( \mathrm{var}_I \prod_{j=0}^{l-2} \frac{1}{Df} \circ f^j \right) \\ &+ \quad \left( \mathrm{var}_I \frac{1}{Df} \circ f^{l-1} \right) \left( \sup_I \prod_{j=0}^{l-2} \frac{1}{|Df|} \circ f^j \right). \end{aligned}$$

Logo, pela propriedade de supremo, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_I \frac{1}{Df^l} \quad &\leq \quad \left( \sup_I \frac{1}{|Df|} \circ f^{l-1} \right) \left( \mathrm{var}_I \prod_{j=0}^{l-2} \frac{1}{Df} \circ f^j \right) \\ &+ \quad \left( \mathrm{var}_I \frac{1}{Df} \circ f^{l-1} \right) \left( \prod_{j=0}^{l-2} \sup_I \frac{1}{|Df|} \circ f^j \right). \end{aligned}$$

Agora, colocando em evidência o produto do primeiro com último termo da direita da expressão, e usando a notação $\dfrac{1}{Df(f^j)} = \dfrac{1}{Df} \circ f^j$, temos que

$$\mathrm{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \left( \prod_{j=0}^{l-1} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|} \right) \left[ \frac{\mathrm{var}_I \prod_{j=0}^{l-2} \frac{1}{Df(f^j)}}{\prod_{j=0}^{l-2} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}} + \frac{\mathrm{var}_I \frac{1}{Df(f^{l-1})}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^{l-1})|}} \right]. \tag{3.30}$$

Fazendo o mesmo para $l - 1$ obtemos

$$\mathrm{var}_I \frac{1}{Df^{l-1}} = \mathrm{var}_I \left[ \prod_{j=0}^{l-2} \frac{1}{Df(f^j)} \right] = \mathrm{var}_I \left[ \left( \frac{1}{Df(f^{l-2})} \right) \left( \prod_{j=0}^{l-3} \frac{1}{Df(f^j)} \right) \right].$$

Portanto

$$\mathrm{var}_I \frac{1}{Df^{l-1}} \leq \left( \prod_{j=0}^{l-2} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|} \right) \left[ \frac{\mathrm{var}_I \prod_{j=0}^{l-3} \frac{1}{Df(f^j)}}{\prod_{j=0}^{l-3} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}} + \frac{\mathrm{var}_I \frac{1}{Df(f^{l-2})}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^{l-2})|}} \right]. \tag{3.31}$$

Também

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^{l-2}} = \operatorname{var}_I \left[\prod_{j=0}^{l-3} \frac{1}{Df(f^j)}\right] = \operatorname{var}_I \left[\left(\frac{1}{Df(f^{l-3})}\right)\left(\prod_{j=0}^{l-4} \frac{1}{Df(f^j)}\right)\right].$$

Em vista disso

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^{l-2}} \leq \left(\prod_{j=0}^{l-3} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}\right)\left[\frac{\operatorname{var}_I \prod_{j=0}^{l-4} \frac{1}{Df(f^j)}}{\prod_{j=0}^{l-4} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}} + \frac{\operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f^{l-3})}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^{l-3})|}}\right].$$

Usando esse argumento de forma indutiva, temos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^2} = \operatorname{var}_I \left[\prod_{j=0}^{1} \frac{1}{Df(f^j)}\right] \leq \left(\prod_{j=0}^{1} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}\right)\left[\frac{\operatorname{var}_I \frac{1}{Df}}{\sup_I \frac{1}{|Df|}} + \frac{\operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f)}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f)|}}\right].$$

Desta maneira, substituindo (3.31) em (3.30). Obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \left(\prod_{j=0}^{l-1} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}\right)\left[\frac{\operatorname{var}_I \prod_{j=0}^{l-3} \frac{1}{Df(f^j)}}{\prod_{j=0}^{l-3} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}} + \frac{\operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f^{l-2})}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^{l-2})|}} + \frac{\operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f^{l-1})}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^{l-1})|}}\right].$$

Continuando da mesma forma, tem-se

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \left(\prod_{j=0}^{l-1} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}\right)\left[\sum_{j=0}^{l-1} \frac{\operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f^j)}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}}\right]. \tag{3.32}$$

Por outro lado, seja $0 \leq j < l$ e denotemos por $h_j = f^j$, $f^j : I \to f^j(I) = I_j$, e $\varphi = \dfrac{1}{Df}$. Como $h_j$ é um homeomorfismo, então por $(V4)$, temos que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f^j)} = \operatorname{var}_I \left(\frac{1}{Df} \circ f^j\right) = \operatorname{var}_I(\varphi \circ h_j) = \operatorname{var}_{I_j} \varphi = \operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df}.$$

Deste modo, por (3.32), obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \left(\prod_{j=0}^{l-1} \sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}\right)\left[\sum_{j=0}^{l-1} \frac{\operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df}}{\sup_I \frac{1}{|Df(f^j)|}}\right] = \left(\prod_{j=0}^{l-1} \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|}\right)\left[\sum_{j=0}^{l-1} \frac{\operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df}}{\sup_{I_j} \frac{1}{|Df|}}\right].$$

Assim, pela Proposição 3.12, temos que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{|Df^l(x)|} \left[ \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df}}{\sup_{I_j} \frac{1}{|Df|}} \right],$$

para todo $x \in I$. Então

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} \left[ \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df}}{\sup_{I_j} \frac{1}{|Df|}} \right]. \tag{3.33}$$

Por outro lado, por $(V5)$, temos que

$$\operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df} = \int_{I_j} \left| D\left(\frac{1}{Df}\right) \right| dx = \int_{I_j} \left| \frac{D^2 f(x)}{(Df)^2(x)} \right| dx, \tag{3.34}$$

onde

$$\int_{I_j} \left| \frac{D^2 f(x)}{(Df)^2(x)} \right| dx = \int_{I_j} \left( \frac{|D^2 f(x)|}{|Df(x)|} \right) \left( \frac{1}{|Df(x)|} \right) dx \leq \left( \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \right) \left( \int_{I_j} \left| \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} \right| dx \right).$$

Dessa maneira, pela Proposição 3.5, existe $A > 0$ tal que

$$\int_{I_j} \left| \frac{D^2 f(x)}{(Df)^2(x)} \right| dx \leq A \left( \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \right) \left( \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \right).$$

Assim, substituindo em (3.34), obtemos

$$\operatorname{var}_{I_j} \frac{1}{Df} \leq A \left( \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \right) \left( \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \right).$$

Deste modo, por (3.33), segue-se

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} \left[ \sum_{j=0}^{l-1} \frac{A \left( \sup_{I_j} \frac{1}{|Df|} \right) \left( \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \right)}{\sup_{I_j} \frac{1}{|Df|}} \right].$$

Então

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{Df^l} \leq A \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} . \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx.$$

Finalmente, por $(V1)$. Obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^l|} \leq A \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} . \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx.$$

Consequentemente

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^l|} \lesssim \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} . \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{dx}{d(x)}.$$

□

# 4 EXPANSÃO E DISTORÇÃO

Neste capítulo vamos dar alguns resultados que auxiliarão na prova de expansão e de distorção da aplicação induzida.

## 4.1 DISTORÇÃO DURANTE PERÍODO BINDING

Denotemos por $\hat{I}_j = (f^j(x), f^j(c))$ e $|\hat{I}_j|$ o comprimento do intervalo $\hat{I}_j$.

**Proposição 4.1.** *Sejam $x \in \Delta(c, \delta)$ para algum $c \in \mathcal{C}$ e $\hat{I}_0 = (x, c)$. Então*

$$\frac{|\hat{I}_j|}{d(\hat{I}_j)} \leq 2\gamma_j,$$

*para cada $1 \leq j < p(x) = p$.*

*Demonstração.* Seja $1 \leq j < p$. Como $d(\hat{I}_j) = \inf\left\{d(s,c) : s \in \hat{I}_j, c \in \mathcal{C}\right\}$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem $s \in \hat{I}_j$ e $\hat{c} \in \mathcal{C}$, tais que

$$d(\hat{I}_j) + \varepsilon > d(s, \hat{c}) \quad \text{e} \quad d(f^j(x), f^j(c)) \geq d(s, f^j(c)).$$

À vista disso

$$\begin{aligned} d(\hat{I}_j) + d(f^j(x), f^j(c)) + \varepsilon &> d(s, \hat{c}) + d(s, f^j(c)) \\ &\geq d(\hat{c}, f^j(c)) \\ &\geq d(f^j(c), \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Logo

$$d(\hat{I}_j) + \varepsilon > d(f^j(c), \mathcal{C}) - d(f^j(x), f^j(c)). \tag{4.1}$$

Por outro lado, pela definição do período binding, temos que

$$d(f^j(x), f^j(c)) = |\hat{I}_j| \leq \gamma_j d(c_j).$$

Então, substituindo em (4.1), obtemos

$$d(\hat{I}_j) + \varepsilon > d(f^j(c), \mathcal{C}) - \gamma_j d(f^j(c), \mathcal{C}) = (1 - \gamma_j) d(f^j(c), \mathcal{C}),$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$d(\hat{I}_j) \geq (1-\gamma_j) d(f^j(c), \mathcal{C}). \tag{4.2}$$

Logo, visto que $d(c_j) = d(c_j, \mathcal{C}) > 0$ e pela definição de $\gamma_j$, temos que

$$d(\hat{I}_j) > 0. \tag{4.3}$$

Também, por (4.2) e definição de binding, temos

$$\frac{1}{d(\hat{I}_j)} \leq \frac{1}{(1-\gamma_j) d(f^j(c), \mathcal{C})} \Rightarrow \frac{|\hat{I}_j|}{d(\hat{I}_j)} \leq \frac{\gamma_j d(f^j(c), \mathcal{C})}{(1-\gamma_j) d(f^j(c), \mathcal{C})}.$$

Portanto

$$\frac{|\hat{I}_j|}{d(\hat{I}_j)} \leq \frac{\gamma_j}{1-\gamma_j}. \tag{4.4}$$

Por outro lado, pela definição de $\gamma_j$, obtemos que

$$\gamma_j \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma_j} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_j}{1-\gamma_j} \leq 2\gamma_j.$$

Desta forma, substituindo em (4.4), temos que

$$\frac{|\hat{I}_j|}{d(\hat{I}_j)} \leq 2\gamma_j,$$

para todo $1 \leq j < p$.

$\square$

Como consequência da Proposição 4.1, temos que

$$\int_{\hat{I}_j} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j, \tag{4.5}$$

para todo $1 \leq j < p$.

De fato, sejam $1 \leq j < p$ e $x \in \hat{I}_j$. Então

$$d(\hat{I}_j) \leq d(x) \Rightarrow \frac{1}{d(x)} \leq \frac{1}{d(\hat{I}_j)}.$$

Logo, pela Proposição 4.1, tem-se

$$\int_{\hat{I}_j} \frac{1}{d(x)} dx \leq \int_{\hat{I}_j} \frac{1}{d(\hat{I}_j)} dx = \frac{1}{d(\hat{I}_j)} \int_{\hat{I}_j} dx = \frac{|\hat{I}_j|}{d(\hat{I}_j)} \leq 2\gamma_j.$$

Portanto

$$\int_{\hat{I}_j} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j,$$

para todo $1 \leq j < p$.

Antes de começar a prova da seguinte proposição, daremos alguns resultados prévios. Seja $1 \leq j < p$.

**Lema 4.2.** Se $x \in \hat{I}_j$, então $d(x) \approx d(\hat{I}_j)$.

*Demonstração.* Sejam $x \in \hat{I}_j$, $s \in \hat{I}_j$ e $\hat{c} \in C$. Então

$$d(x) \leq d(x, \hat{c}) \leq d(x, s) + d(s, \hat{c}) \leq |\hat{I}_j| + d(s, \hat{c}).$$

Dessa maneira

$$d(x) \leq |\hat{I}_j| + d(\hat{I}_j).$$

Logo, pela Proposição 4.1 e definição de distância, resulta que

$$d(\hat{I}_j) \leq d(x) \leq 2d(\hat{I}_j).$$

Portanto

$$1 \leq \frac{d(x)}{d(\hat{I}_j)} \leq 2 \Rightarrow d(x) \approx d(\hat{I}_j),$$

para todo $x \in \hat{I}_j$.

□

**Lema 4.3.**
$$\sup_{x_j, y_j \in \hat{I}_j} \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|} = \frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|}.$$

*Demonstração.* Como

$$\inf_{\hat{I}_j} |Df| \leq |Df(y_j)| \quad \text{e} \quad |D^2 f(x_j)| \leq \sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|,$$

para todo $x_j, y_j \in \hat{I}_j$, então

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \geq \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|}.$$

Desta forma

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \geq \sup_{x_j, y_j \in \hat{I}_j} \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|}. \tag{4.6}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existem $a_j, b_j \in \hat{I}_j$ tais que

$$\inf_{\hat{I}_j} |Df| + \varepsilon > |Df(b_j)| \quad e \quad \sup_{\hat{I}_j} |D^2 f| - \varepsilon < |D^2 f(a_j)|.$$

Então

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f| - \varepsilon}{\inf_{\hat{I}_j} |Df| + \varepsilon} < \frac{|D^2 f(a_j)|}{|Df(b_j)|} \leq \sup_{x_j, y_j \in \hat{I}_j} \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|}.$$

Consequentemente

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f| - \varepsilon}{\inf_{\hat{I}_j} |Df| + \varepsilon} < \sup_{x_j, y_j \in \hat{I}_j} \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|},$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, fazendo $\varepsilon \to 0$, tem-se que

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \leq \sup_{x_j, y_j \in \hat{I}_j} \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|}. \tag{4.7}$$

Logo, por (4.6) e (4.7), obtemos

$$\sup_{x_j,y_j\in\hat{I}_j}\frac{|D^2f(x_j)|}{|Df(y_j)|}=\frac{\sup_{\hat{I}_j}|D^2f|}{\inf_{\hat{I}_j}|Df|}.$$

□

Agora com estes resultados prévios estamos prontos para provar a seguinte proposição.

**Proposição 4.4.** *Seja* $x\in\Delta(c,\delta)$ *para algum* $c\in\mathcal{C}$, $\hat{I}_0=(x,c)$. *Então*

$$\sup_{x_j,y_j\in\hat{I}_j}\frac{|D^2f(x_j)|}{|Df(y_j)|}\lesssim\frac{1}{d(\hat{I}_j)},$$

*para todo* $1\leq j<p(x)=p$.

*Demonstração.* Seja $1\leq j<p$. Para provar esta proposição, vamos analisar por casos.

**Caso** $1:$ Se $\hat{I}_j\cap\Delta=\emptyset$.

Então pela Proposição 4.1, obtemos que $\hat{I}_j\subset M\backslash(\Delta\cup C)$. Assim, existe $A>0$, tal que

$$\frac{1}{A}\leq|D^2f(x_j)|\leq A\quad\text{e}\qquad\frac{1}{A}\leq|Df(y_j)|\leq A,$$

para todo $x_j,y_j\in\hat{I}_j$.

Desta maneira

$$\sup_{\hat{I}_j}|D^2f|\leq A\quad e\quad\frac{1}{A}\leq\inf_{\hat{I}_j}|Df|.\tag{4.8}$$

Por outro lado, temos que

$$d(\hat{I}_j)<1\Rightarrow 1<\frac{1}{d(\hat{I}_j)}.$$

Assim, por (4.8), obtemos

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j}|D^2f|}{\inf_{\hat{I}_j}|Df|}\leq A^2<A^2\left(\frac{1}{d(\hat{I}_j)}\right).$$

Logo

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \lesssim \frac{1}{d(\hat{I}_j)},$$

para todo $1 \leq j < p$.

**Caso** $2:$ Se $\hat{I}_j \cap \Delta \neq \emptyset$.

Então, existe $c_j \in \mathcal{C}$ tal que $\hat{I}_j \cap \Delta(c_j, \delta) \neq \emptyset$.

**Afirmação 4.5.** $\hat{I}_j \subset \Delta(c_j, 2\delta)$.

Com efeito, seja $a \in \hat{I}_j$ e $s \in \hat{I}_j \cap \Delta(c_j, \delta)$. Então

$$d(a, c_j) \leq d(a, s) + d(s, c_j).$$

Assim, pela Proposição 4.1, temos que

$$d(a, c_j) < |\hat{I}_j| + \delta \leq d(\hat{I}_j) + \delta < \delta + \delta = 2\delta.$$

Logo

$$a \in \Delta(c_j, 2\delta) \Rightarrow \hat{I}_j \subset \Delta(c_j, 2\delta).$$

Lembremos que, se $c \in \mathcal{C}$, então existe $\ell = \ell(c) > 0$ tal que satisfaz (3.1), então podemos tomar $\hat{\delta}$ suficientemente pequeno tal que, em $\Delta(c, 2\hat{\delta}) \subset \Delta(c, \delta)$ continua satisfazendo (3.1).

Desta forma, obtemos

$$|Df(x)| \approx d(x)^{\ell(c_j)-1} \quad \text{e} \quad |D^2 f(x)| \approx d(x)^{\ell(c_j)-2},$$

para todo $x \in \Delta(c_j, 2\delta)$.

Logo, pela Afirmação 4.5, obtemos

$$|Df(x_j)| \approx d(x_j)^{\ell(c_j)-1} \quad \text{e} \quad |D^2 f(y_j)| \approx d(y_j)^{\ell(c_j)-2},$$

para todo $x_j, y_j \in \hat{I}_j$.

Portanto, existe $A > 0$, tal que

$$\frac{1}{A} d(x_j)^{\ell(c_j)-1} \leq |Df(x_j)| \quad e \quad |D^2 f(y_j)| \leq A d(y_j)^{\ell(c_j)-2}, \tag{4.9}$$

para todo $x_j, y_j \in \hat{I}_j$

Por outro lado, pelo Lema 4.2, existe $B > 0$ tal que

$$\frac{1}{B} d(\hat{I}_j) \leq d(x) \leq B d(\hat{I}_j), \tag{4.10}$$

para todo $x \in \hat{I}_j$.

Sejam $x_j, y_j \in \hat{I}_j$. Por (4.10), obtemos

$$B_{\ell(c_j)} d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-1} \leq d(x_j)^{\ell(c_j)-1}, \text{ onde } B_{\ell(c_j)} = \min\left\{\frac{1}{B^{\ell(c_j)-1}}, B^{\ell(c_j)-1}\right\}.$$

Assim, por (4.9), obtemos

$$\frac{B_{\ell(c_j)}}{A} d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-1} \leq |Df(x_j)|,$$

para todo $x_j \in \hat{I}_j$.

Logo

$$\frac{B_{\ell(c_j)}}{A} d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-1} \leq \inf_{\hat{I}_j} |Df|.$$

Tomando $S = \min\left\{\frac{B_{\ell(c_j)}}{A} : 1 \leq j < p\right\}$, temos que

$$S d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-1} \leq \inf_{\hat{I}_j} |Df|.$$

Consequentemente

$$\frac{1}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \leq \frac{1}{S}\left(\frac{1}{d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-1}}\right). \tag{4.11}$$

Analogamente, por (4.10) tem-se que

$$d(y_j)^{\ell(c_j)-2} \leq \hat{B}_{\ell(c_j)} d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-2}, \text{ onde } \hat{B}_{\ell(c_j)} = \max\left\{\frac{1}{B^{\ell(c_j)-2}}, B^{\ell(c_j)-2}\right\}.$$

Assim, por (4.9), obtemos

$$|D^2 f(y_j)| \leq A\hat{B}_{\ell(c_j)} d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-2},$$

para todo $y_j \in \hat{I}_j$.

Dessa forma

$$\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f| \leq A\hat{B}_{\ell(c_j)} d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-2}.$$

Tomando $R = \max\left\{A\hat{B}_{\ell(c_j)} : 1 \leq j < p\right\}$, obtemos

$$\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f| \leq R d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-2}. \tag{4.12}$$

Logo, por (4.11) e (4.12), temos que

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \leq \frac{R}{S}\left(\frac{d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-2}}{d(\hat{I}_j)^{\ell(c_j)-1}}\right) \Rightarrow \frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \leq \frac{R}{S}\left(\frac{1}{d(\hat{I}_j)}\right).$$

Então

$$\frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} \lesssim \frac{1}{d(\hat{I}_j)}.$$

Portanto, pelo Lema 4.3, tem-se

$$\sup_{x_j, y_j \in \hat{I}_j} \frac{|D^2 f(x_j)|}{|Df(y_j)|} \lesssim \frac{1}{d(\hat{I}_j)}, \tag{4.13}$$

para todo $1 \leq j < p(x)$.

$\square$

**Proposição 4.6.** *Seja $x \in \Delta(c, \delta)$ para algum $c \in \mathcal{C}$. Então existe $\Gamma > 0$ que independe de $x$ tal que*

$$\mathcal{D}(f^k, \hat{I}_1) \leq \Gamma,$$

*para todo $1 \leq k < p(x) = p$.*

*Demonstração.* Seja $1 \leq k < p$. Então pelas Proposições 3.13, 4.4 e 4.1, existe $A > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f^k, \hat{I}_1) &\leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{\sup_{\hat{I}_j} |D^2 f|}{\inf_{\hat{I}_j} |Df|} |\hat{I}_j|\right) \\
&\leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + A \frac{|\hat{I}_j|}{d(\hat{I}_j)}\right) \\
&\leq \prod_{j=1}^{k} (1 + 2A\gamma_j). \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a desigualdade $\log(1 + x) \leq x$, para todo $x \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\log \prod_{j=1}^{k} (1 + 2A\gamma_j) &= \sum_{j=1}^{k} \log (1 + 2A\gamma_j) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} 2A\gamma_j \\
&\leq 2A \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Também por (3.10), existe $s \geq 0$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = s$. Logo, substituindo em (4.15), temos que

$$\log \prod_{j=1}^{k} (1 + 2A\gamma_j) \leq 2As \Rightarrow \prod_{j=1}^{k} (1 + 2A\gamma_j) \leq e^{2As} = \Gamma.$$

Portanto, de (4.14) tem-se

$$\mathcal{D}(f^k, \hat{I}_1) \leq \Gamma,$$

onde $\Gamma > 0$. □

Previamente daremos alguns resultados para logo provar a seguinte proposição.

**Lema 4.7.** Se $h$ é contínua e monótona em $[a, b]$, então

$$h((a, b)) = (h(a), h(b)).$$

*Demonstração.* Suponhamos que $h$ é crescente. O outro caso é tratado de maneira análoga.

Seja $x \in h((a,b))$, então existe $y \in (a,b)$ tal que $x = h(y)$, como $a < y < b$ e $h$ é crescente, então $h(a) \leq h(y) \leq h(b)$ logo $x \in (h(a), h(b))$, por conseguinte

$$h((a,b)) \subset (h(a), h(b)). \tag{4.16}$$

Por outro lado, seja $x \in (h(a), h(b))$ então $h(a) < x < h(b)$, logo pelo Teorema do Valor Intermediario, existe $y \in (a,b)$ tal que $x = h(y)$ então $x \in h(a,b)$ e, assim

$$(h(a), h(b)) \subset h((a,b)). \tag{4.17}$$

Portanto, de (4.16) e (4.17), obtemos o resultado. □

**Lema 4.8.**

$$[f^j(x), f^j(c)] \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

para todo $1 \leq j < p(x) = p$.

*Demonstração.* Provaremos por contradição, isto é, suponhamos que existe $1 \leq j < p$ tal que $[f^j(x), f^j(c)] \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Por (4.3), obtemos que $(f^j(x), f^j(c)) \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Também temos $f^j(c) \notin \mathcal{C}$, pois $d(c_j) \neq 0$ então $f^j(x) = \hat{c}$, para algum $\hat{c} \in \mathcal{C}$. Deste modo, como $\hat{I}_j \neq \emptyset$, existe $y \in \hat{I}_j$ tal que $\hat{c} < y < f^j(c)$, pela Proposição 4.1, temos que

$$d(y, \hat{c}) < |\hat{I}_j| \leq d(\hat{I}_j) \leq d(y, \hat{c}) \Rightarrow d(y, \hat{c}) < d(y, \hat{c}),$$

o qual é uma contradição.

Portanto

$$[f^j(x), f^j(c)] \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

para todo $1 \leq j < p(x)$. □

**Lema 4.9.** Seja $I_0 = (x, c)$ e $I_j = f^j(I_0)$. Então

$$I_j = (f^j(x), f^j(c)),$$

para todo $1 \leq j < p(x) = p$.

*Demonstração.* Provaremos primeiro para $j = 1$, é dizer $f(x,c) = (f(x), f(c))$. De fato, como $f$ admite extensão contínua na fronteira, então existe $F : [x,c] \to M$ contínua, definido por

$$F(y) = \begin{cases} f(y), & \text{se} \quad y \in [x,c) \\ F(c) = \lim_{y \to c} f(y), & \text{se} \quad y = c, \end{cases}$$

onde $c = c^-$ e vamos supor $f$ crescente em $(x,c)$. Os outros casos são tratados de maneira analoga.

Neste caso $F$ é crescente em $[x,c]$.

De fato, como $f$ é crescente em $[x,c)$, então basta analisar no ponto $c$. Por contradição, suponhamos que existe $x \leq s < c$ tal que $F(s) > F(c)$. Então, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $F(s) > r > F(c)$; porém $F$ é contínua em $[s,c]$, logo existe $t \in (s,c)$ tal que $r = F(t)$ desse modo $F(s) > F(t)$, uma contradição, pois $f$ é crescente em $[s,t]$. Portanto, $F$ é crescente em $[x,c]$.

Utilizando o Lema 4.7, obtemos que

$$f((x,c)) = (f(x), f(c)). \tag{4.18}$$

Agora vejamos para $1 < j < p$.

Pelo Lema 4.8, temos que $f$ é contínua em $[f^j(x), f^j(c)]$, além disso $f$ é monótona em $[f^j(x), f^j(c)]$, então por (4.18) e pelo Lema 4.7, tem-se o seguinte

$$\begin{array}{ccccccccc}
j=2 & f^2((x,c)) & = & f(f((x,c))) & = & f((f(x), f(c))) & = & (f^2(x), f^2(c)) \\
j=3 & f^3((x,c)) & = & f(f^2((x,c))) & = & f((f^2(x), f^2(c))) & = & (f^3(x), f^3(c)) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
j=p-1 & f^{p-1}((x,c)) & = & f(f^{p-2}((x,c))) & = & f((f^{p-2}(x), f^{p-2}(c))) & = & (f^{p-1}(x), f^{p-1}(c)).
\end{array}$$

Portanto

$$I_j = (f^j(x), f^j(c)),$$

para todo $1 \leq j < p(x)$.

$\square$

Observe que, a partir dos Lemas 4.9, 4.8 e 4.7, obtemos que

$$\begin{aligned} f^p((x,c)) &= f(f^{p-1}((x,c))) \\ &= f(f^{p-1}(x), f^{p-1}(c)) \\ &= (f^p(x), f^p(c)). \end{aligned}$$

Seja $1 \leq k < p(x) = p$.

**Lema 4.10.**

$$f^j(\bar{I}_1) \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

para todo $0 \leq j < k$, onde $\bar{I}_1$ denota o fecho de $I_1$.

*Demonstração.* Seja $0 \leq j < k$. Basta provar que

$$f^j(\bar{I}_1) = [f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)],$$

onde $I_1 = (f(x), f(c))$.

De fato, seja $a \in f^j(\bar{I}_1)$, então existe $y \in \bar{I}_1$ tal que $a = f^j(y)$ e $f(x) \leq y \leq f(c)$, assim pelo Lema 4.8, sem perda de generalidade, temos que $f^{j+1}(x) \leq f^j(y) \leq f^{j+1}(c)$, então $a \in [f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)]$. Por conseguinte

$$f^j(\bar{I}_1) \subset [f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)]. \tag{4.19}$$

Por outro lado, seja $a \in [f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)]$ então $f^j(f(x)) \leq a \leq f^j(f(c))$. Se $a = f^j(f(x))$ ou $a = f^j(f(c))$, então nada temos que provar. Caso $f^j(f(x)) < a < f^j(f(c))$, como $f^j$ é contínua em $[f(x), f(c)]$, então pelo Teorema do Valor Intermediario, existe $y \in (f(x), f(c))$ tal que $a = f^j(y)$, então $a \in f^j(\bar{I}_1)$. Por consequência

$$[f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)] \subset f^j(\bar{I}_1). \tag{4.20}$$

Assim, por (4.19) e (4.20), obtemos

$$f^j(\bar{I}_1) = [f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)].$$

Então, pelo Lema 4.8, tem-se que

$$f^j(\bar{I}_1) \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

para todo $0 \leq j < k$.

$\square$

**Lema 4.11.**

$$f^j(\bar{I}_1) = \overline{f^j(I_1)},$$

para todo $0 \leq j < k$.

*Demonstração.* Seja $0 \leq j < k$. Como $I_1 = (f(x), f(c))$, então pelos Lemas 4.10 e 4.9 obtemos que

$$\begin{aligned} f^j(\bar{I}_1) &= [f^{j+1}(x), f^{j+1}(c)] \\ &= \overline{(f^{j+1}(x), f^{j+1}(c))} \\ &= \overline{f^j(I_1)}, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq j < k$. $\square$

**Lema 4.12.**

$$\mathcal{D}(f^k, I_1) = \mathcal{D}(f^k, \bar{I}_1),$$

para todo $1 \leq k < p(x)$.

*Demonstração.* Seja $1 \leq k < p(x)$. Basta provar que

$$\sup_{x_j, y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| = \sup_{x_j, y_j \in f^j(\bar{I}_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|, \tag{4.21}$$

para todo $0 \leq j < k$.

De fato, seja $0 \leq j < k$, como $I_1 \subset \bar{I}_1 \Rightarrow f^j(I_1) \subset f^j(\bar{I}_1)$. Então

$$\sup_{x_j, y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq \sup_{x_j, y_j \in f^j(\bar{I}_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|. \tag{4.22}$$

Por outro lado, sejam $x_j, y_j \in f^j(\bar{I}_1)$, então existem $a, b \in \bar{I}_1$ tais que $x_j = f^j(a)$ e $y_j = f^j(b)$, também, desde que $a, b \in \bar{I}_1$, existem $z_n, w_n \in I_1$ sequências tais que $z_n \to a$ e $w_n \to b$. Pelo Lema 4.8, $f^j$ é contínua em $\bar{I}_1$, então

$$f^j(z_n) \to f^j(a) \quad \text{e} \quad f^j(w_n) \to f^j(b).$$

Logo

$$f^j(z_n) \to x_j \quad \text{e} \quad f^j(w_n) \to y_j.$$

Desta forma, pelo Lema 4.10, $|Df|$ é contínua em $f^j(\bar{I}_1)$. Então

$$|Df(f^j(z_n))| \to |Df(x_j)| \quad \text{e} \quad |Df(f^j(w_n))| \to |Df(y_j)|.$$

Porém

$$\frac{|Df(f^j(z_n))|}{|Df(f^j(w_n))|} \leq \sup_{x_j,y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|.$$

Assim, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\frac{|Df(x_j)|}{|Df(y_j)|} \leq \sup_{x_j,y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|,$$

para todo $x_j, y_j \in f^j(\bar{I}_1)$.

Portanto

$$\sup_{x_j,y_j \in f^j(\bar{I}_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq \sup_{x_j,y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|. \tag{4.23}$$

Então, por (4.22) e (4.23), temos

$$\sup_{x_j,y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| = \sup_{x_j,y_j \in f^j(\bar{I}_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|,$$

para todo $0 \leq j < k$.

Assim

$$\mathcal{D}(f^k, I_1) = \prod_{j=0}^{k-1} \sup_{x_j,y_j \in f^j(I_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| = \prod_{j=0}^{k-1} \sup_{x_j,y_j \in f^j(\bar{I}_1)} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| = \mathcal{D}(f^k, \bar{I}_1),$$

para todo $1 \leq k < p(x)$.

$\square$

Com este resultados prévios estamos prontos para provar a seguinte proposição.

**Proposição 4.13.** *Se* $1 \leq k < p(x) = p$ *e* $y, z \in [x, c]$. *Então*

$$|Df^k(f(y))| \approx |Df^k(f(z))|.$$

*Demonstração.* Sejam $1 \leq k < p$ e $y \in [x, c]$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{|Df^k(f(y))|}{|Df^k(f(c))|} &= |Df^k(f(y))| \left( \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{|Df(f^j(c))|} \right) \\
&= |Df^k(f(y))| \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|Df(f^{j+1}(c))|} \right) \\
&\leq |Df^k(f(y))| \left( \prod_{j=0}^{k-1} \sup_{\bar{I}_{j+1}} \frac{1}{|Df|} \right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.11, resulta que $f^j(\bar{I}_1) = \bar{I}_{j+1}$, para todo $0 \leq j < k$. Logo, pela Proposição 3.12, Lema 4.12 e a Proposição 4.6, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|Df^k(f(y))|}{|Df^k(f(c))|} &\leq |Df^k(f(y))| \left( \prod_{j=0}^{k-1} \sup_{f^j(\bar{I}_1)} \frac{1}{|Df|} \right) \\
&\leq \mathcal{D}(f^k, \bar{I}_1) \\
&= \mathcal{D}(f^k, I_1) \\
&\leq \Gamma.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{|Df^k(f(y))|}{|Df^k(f(c))|} \leq \Gamma. \tag{4.24}$$

Analogamente, prova-se que

$$\begin{aligned}
\frac{|Df^k(f(c))|}{|Df^k(f(y))|} &\leq |Df^k(f(c))| \left( \prod_{j=0}^{k-1} \sup_{f^j(\bar{I}_1)} \frac{1}{|Df|} \right) \\
&\leq \mathcal{D}(f^k, \bar{I}_1) \\
&= \mathcal{D}(f^k, I_1) \\
&\leq \Gamma.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{\Gamma} \leq \frac{|Df^k(f(y))|}{|Df^k(f(c))|}.$$

Logo, por (4.24), obtemos que

$$|Df^k(f(y))| \approx |Df^k(f(c))|, \tag{4.25}$$

para todo $y \in [x, c]$.

Por último, sejam $y, z \in [x, c]$, então, por (4.25), temos

$$|Df^k(f(y))| \approx |Df^k(f(c))| \quad \text{e} \quad |Df^k(f(z))| \approx |Df^k(f(c))|.$$

O que resulta

$$|Df^k(f(y))| \approx |Df^k(f(z))|,$$

para todo $y, z \in [x, c]$ e $1 \leq k \leq p(x) - 1$.

□

## 4.2 A PARTIÇÃO PERÍODO BINDING

Nesta seção vamos trabalhar com as partições de $\mathcal{I}$ que tem período binding $p > 1$ como também suas consequências.

**Proposição 4.14.** *Seja $I \in \mathcal{I}$ com $p(I) = p$, onde $I$ esta contida numa vizinhança de um ponto crítico de ordem $\ell$. Então*

$$D_{p-1}^{-\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim \inf_{x \in I} d(x) \leq \sup_{x \in I} d(x) \lesssim D_{p-2}^{-\frac{2}{2\ell-1}}.$$

*Demonstração.* Seja $x \in I$,então pela definição de ordem num ponto critíco, obtemos

$$|f(x) - f(c)| \approx d(x)^\ell \Rightarrow |f(x) - f(c)|^{\frac{1}{\ell}} \approx d(x).$$

Consequentemente

$$d(x) = d(x, c) \approx |f(x) - f(c)|^{\frac{1}{\ell}}.$$

Assim

$$d(x) = |\hat{I}_0| \approx |\hat{I}_1|^{\frac{1}{\ell}}. \tag{4.26}$$

Por outro lado, como $f^{p-1}$ é contínua em $[f(x), f(c)]$ e derivável em $(f(x), f(c))$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (f(x), f(c))$, tais que

$$f^{p-1}(f(c)) - f^{p-1}(f(x)) = (f^{p-1})'(\xi)(f(c) - f(x)).$$

Dessa forma

$$|f^p(x) - f^p(c)| = |(f^{p-1})'(\xi)||(f(x) - f(c))|.$$

Também, como $\xi \in (f(x), f(c))$ então pelo Teorema do Valor Intermediario, existe $\tilde{\xi} \in (x, c)$ tais que $\xi = f(\tilde{\xi})$.

Logo

$$|f^{p-1}(x) - f^{p-1}(c)| = |(f^{p-1})'(f(\tilde{\xi}))||(f(x) - f(c))|.$$

Assim, pelo Proposição 4.13, temos

$$|f^p(x) - f^p(c)| \approx |(f^{p-1})'(f(c))||(f(x) - f(c))|.$$

O que resulta

$$|\hat{I}_p| \approx D_{p-1}|\hat{I}_1| \Rightarrow |\hat{I}_1|^{\frac{1}{\ell}} \approx \left[D_{p-1}^{-1}|\hat{I}_p|\right]^{\frac{1}{\ell}}.$$

Deste modo, por (4.26), existe $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{A}\left[D_{p-1}^{-1}|\hat{I}_p|\right]^{\frac{1}{\ell}} \leq d(x).$$

Portanto, pela definição de período binding obtemos que

$$\frac{1}{A}\left[D_{p-1}^{-1}\gamma_p d(c_p)\right]^{\frac{1}{\ell}} < d(x). \tag{4.27}$$

Analogamente, $f^{p-2}$ é contínua em $[f(x), f(c)]$ e derivável em $(f(x), f(c))$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (f(x), f(c))$ tais que

$$f^{p-2}(f(c)) - f^{p-2}(f(x)) = (f^{p-2})'(\theta)(f(c) - f(x)).$$

Então

$$|f^{p-1}(x) - f^{p-1}(c)| = |(f^{p-2})'(\theta)||(f(x) - f(c))|.$$

Também, como $\theta \in (f(x), f(c))$, pelo Teorema do Valor Intermediario, existe $\tilde{\theta} \in (x, c)$ tais que $\theta = f(\tilde{\theta})$.

Desta maneira

$$|f^{p-1}(x) - f^{p-1}(c)| = |(f^{p-2})'(f(\tilde{\theta}))||(f(x) - f(c))|.$$

Assim, pelo Proposição 4.13, temos

$$|f^{p-1}(x) - f^{p-1}(c)| \approx |(f^{p-2})'(f(c))||(f(x) - f(c))|.$$

Logo

$$|\hat{I}_{p-1}| \approx D_{p-2}|\hat{I}_1| \Rightarrow |\hat{I}_1|^{\frac{1}{\ell}} \approx \left[D_{p-2}^{-1}|\hat{I}_{p-1}|\right]^{\frac{1}{\ell}}.$$

Dessa forma, por (4.26), temos

$$d(x) \leq A\left[D_{p-2}^{-1}|\hat{I}_{p-1}|\right]^{\frac{1}{\ell}}.$$

Portanto, pela definição de período binding obtemos que

$$d(x) \leq A\left[D_{p-2}^{-1}\gamma_{p-1}d(c_{p-1})\right]^{\frac{1}{\ell}}. \tag{4.28}$$

Agora, fazendo $\delta$ suficientemente pequeno, podemos tomar $p$ suficientemente grande tal que $\gamma_{p-1}, \gamma_p < \dfrac{1}{2}$, e portanto, a partir da definição da sequência $\gamma_n$, temos

$$\gamma_p d(c_p) = D_{p-1}^{-\frac{1}{2\ell-1}} \quad e \quad \gamma_{p-1} d(c_{p-1}) = D_{p-2}^{-\frac{1}{2\ell-1}}. \tag{4.29}$$

Então, substituindo (4.29) em (4.27) e (4.28), obtemos

$$\frac{1}{A} D_{p-1}^{-\frac{2}{2\ell-1}} < d(x) \quad \text{e} \quad d(x) \leq A D_{p-2}^{-\frac{2}{2\ell-1}}, \text{ para todo } x \in I.$$

Por consequência

$$\frac{1}{A} D_{p-1}^{-\frac{2}{2\ell-1}} \leq \inf_I d(x) \quad \text{e} \quad \sup_I d(x) \leq A D_{p-2}^{-\frac{2}{2\ell-1}}.$$

O que resulta

$$D_{p-1}^{-\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim \inf_{x \in I} d(x) \leq \sup_{x \in I} d(x) \lesssim D_{p-2}^{-\frac{2}{2\ell-1}}.$$

□

Neste ponto damos um resultado prévio para logo provar nossa seguinte proposição.

**Lema 4.15.**

$$|Df(c_{p-1})| \approx d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1},$$

onde $\ell_k = \ell_k(c)$ denota a ordem do ponto crítico mais perto de $c_k$.

*Demonstração.* Para provar este resultado apresentamos dois casos.

**Caso** 1 : Se $c_{p-1} = f^{p-1}(c) \notin \Delta$, então

$$\frac{1}{A} \leq |Df(c_{p-1})| \leq A, \tag{4.30}$$

para algum $A > 0$.

Por outro lado, temos

$$\delta \leq d(c_{p-1}) < 1.$$

Então $B_{\ell_{p-1}} \leq d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} < D_{\ell_{p-1}}$. Como $\mathcal{C}$ é finito resulta que a quantidade de ordens é finita, assim podemos tomar

$$B = \min\left\{B_{\ell_{p-1}}, c \in \mathcal{C}\right\} \quad \text{e} \quad D = \max\left\{D_{\ell_{p-1}}, c \in \mathcal{C}\right\}.$$

Logo, por (4.30), obtemos

$$B \leq d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} \leq D \Rightarrow \frac{1}{AD} \leq \frac{|Df(c_{p-1})|}{d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1}} \leq \frac{A}{B}.$$

Consequentemente

$$|Df(c_{p-1})| \approx d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1}.$$

**Caso** 2 : Se $c_{p-1} \in \Delta$, então existe $\hat{c} \in \mathcal{C}$ tal que $c_{p-1} \in \Delta(\hat{c}, \delta)$, onde $\ell(\hat{c}) = \ell_{p-1}(\hat{c}) = \ell_{p-1}$.

Portanto, pela definição de ordem num ponto crítico obtemos

$$|Df(c_{p-1})| \approx d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1}.$$

□

**Proposição 4.16.** *Seja $I \in \mathcal{I}$ com $p(I) = p$, onde $I$ esta contido numa vizinhança de um ponto crítico de ordem $\ell$. Então*

$$\mathcal{D}(f, I) \lesssim \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}},$$

*onde $\ell_k = \ell_k(c)$ denota a ordem do ponto crítico mais perto de $c_k$.*

*Demonstração.* Seja $x \in I$, então $d(x) \leq \sup_I d(x)$. Assim

$$d(x)^{\ell-1} \leq \left[\sup_I d(x)\right]^{\ell-1}. \tag{4.31}$$

Também, por definição de ordem, tem-se $|Df(x)| \approx d(x)^{\ell-1}$. Então existe $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{A} d(x)^{\ell-1} \leq |Df(x)| \leq A d(x)^{\ell-1}. \tag{4.32}$$

Logo, por (4.31) e (4.32), resulta que

$$|Df(x)| \leq A\left[\sup_I d(x)\right]^{\ell-1},$$

para todo $x \in I$.

Dessa maneira

$$\sup_I |Df| \leq A\left[\sup_I d(x)\right]^{\ell-1}. \tag{4.33}$$

Também tem-se, pela Proposição 4.14 que

$$\sup_I d(x) \lesssim D_{p-2}^{-\frac{2}{2\ell-1}} \Rightarrow \left[\sup_I d(x)\right]^{\ell-1} \lesssim D_{p-2}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}}.$$

Consequentemente

$$\left[\sup_I d(x)\right]^{\ell-1} \leq A D_{p-2}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}}.$$

Assim, por (4.33), temos que

$$\sup_I |Df| \leq A^2 D_{p-2}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}}. \tag{4.34}$$

Por outro lado, seja $x \in I$, então

$$\inf_I d(x) \leq d(x) \Rightarrow \left[\inf_I d(x)\right]^{\ell-1} \leq d(x)^{\ell-1}.$$

Desta forma, por (4.32), obtemos

$$\frac{1}{A}\left[\inf_I d(x)\right]^{\ell-1} \leq |Df(x)|,$$

para todo $x \in I$. Então

$$\frac{1}{A}\left[\inf_I d(x)\right]^{\ell-1} \leq \inf_I |Df|. \tag{4.35}$$

Por outro lado, pela Proposição 4.14, temos

$$D_{p-1}^{-\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim \inf_I d(x) \Rightarrow D_{p-1}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \lesssim \left[\inf_I d(x)\right]^{\ell-1}.$$

Então

$$\frac{1}{A} D_{p-1}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \leq \left[\inf_I d(x)\right]^{\ell-1}.$$

Logo. por (4.35), temos que

$$\frac{1}{A^2} D_{p-1}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \leq \inf_I |Df|. \tag{4.36}$$

Assim, por (4.34) e (4.36), temos que

$$\frac{1}{A^2} D_{p-1}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \leq |Df(y)| \quad \text{e} \quad |Df(x)| \leq A^2 D_{p-2}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}},$$

para todo $x, y \in I$. Logo

$$\frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \leq A^4 \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}},$$

para todo $x, y \in I$. Portanto

$$\sup_{x,y\in I} \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \leq A^4 \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}}.$$

Logo

$$\mathcal{D}(f, I) \lesssim \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}}. \tag{4.37}$$

Vejamos a outra estimativa, por definição da derivada ao longo da órbita $c$ e pela regra da cadeia, obtemos que

$$\begin{aligned}
D_{p-1} &= |(f^{p-1})'(f(c))| \\
&= |(f \circ f^{p-2})'(f(c))| \\
&= |Df(f^{p-1}(c)).Df^{p-2}(f(c))| \\
&= |Df(c_{p-1})||(f^{p-2})'(f(c))| \\
&= |Df(c_{p-1})|D_{p-2}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 4.15, tem-se que

$$D_{p-1} \approx D_{p-2} d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1}. \tag{4.38}$$

Então

$$\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}} \approx d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1}.$$

Em vista disso

$$\left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \approx d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}} \Rightarrow \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}.$$

Sendo assim, por (4.37), obtemos

$$\mathcal{D}(f, I) \lesssim \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}.$$

□

Previamente damos um resultado para logo demonstrar nossa seguinte proposição.

**Lema 4.17.** Se $f : X \to Y$ é uma função limitada inferiormente e $A > 0$, tal que $\inf f(x) \geq C > 0$. Então, existe $B > 0$ tal que $A + f(x) \leq Bf(x)$, para todo $x \in X$.

*Demonstração.* De fato, como $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} = 0$, então para $C > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{A}{n} < C$ para todo $n \geq n_0$. Logo

$$f(x) > \frac{A}{n_0} \Rightarrow n_0 f(x) + f(x) > A + f(x).$$

Portanto $A + f(x) < Bf(x)$, onde $B = n_0 + 1$.

□

**Proposição 4.18.** *Seja $I \in \mathcal{I}$ com $p(I) = I$, onde $I$ esta contido numa vizinhança de um ponto crítico de ordem $\ell$. Então*

$$\int_I \frac{1}{d(x)} dx \lesssim S + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim \log d(c_{p-1})^{-1},$$

*para algum $S > 0$.*

*Demonstração.* Seja $I = (x, y)$, então $\bar{I} = [x, y]$, logo

$$\int_I \frac{1}{d(z)} dz = \int_{\bar{I}} \frac{1}{d(z)} dz \Rightarrow \int_I \frac{1}{d(z)} dz = \int_{\bar{I}} \frac{1}{|z-c|} dz.$$

Desta forma apresentamos dois casos

**Caso** $1:$ Se $c = c^+$.

$$\begin{aligned} \int_I \frac{1}{d(z)} dz &= \int_{\bar{I}} \frac{1}{z-c} dz \\ &= \log(z-c)\Big|_x^y \\ &= \log d(z)\Big|_x^y \\ &= \log d(y) - \log d(x). \end{aligned}$$

**Caso** $2:$ Se $c = c^-$.

$$\begin{aligned} \int_I \frac{1}{d(z)} dz &= \int_{\bar{I}} \frac{1}{c-z} dz \\ &= -\log(c-z)\Big|_x^y \\ &= -\log d(z)\Big|_x^y \\ &= \log d(x) - \log d(y). \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\int_I \frac{1}{d(z)} dz = |\log d(x) - \log d(y)|. \tag{4.39}$$

Por outro lado, pelo Proposição 4.14 existe $A > 1$ tal que

$$\frac{1}{A} D_{p-1}^{\frac{-2}{2\ell-1}} \leq d(x) \quad \text{e} \quad d(y) \leq A D_{p-2}^{\frac{-2}{2\ell-1}}.$$

Então

$$\frac{d(y)}{d(x)} \leq \frac{A^2 D_{p-2}^{\frac{-2}{2\ell-1}}}{D_{p-1}^{\frac{-2}{2\ell-1}}} \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} \leq A^2 \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}}.$$

Logo

$$\log \frac{d(y)}{d(x)} \leq \log A^2 + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}}. \tag{4.40}$$

Analogamente, obtemos que

$$\log \frac{d(x)}{d(y)} \leq \log A^2 + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}}. \tag{4.41}$$

Dessa maneira por (4.40) e (4.41), temos

$$|\log d(x) - \log d(y)| \leq \log A^2 + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}}.$$

Logo, substituindo isto em (4.39), obtemos

$$\int_I \frac{1}{d(z)} dz \lesssim S + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}}, \tag{4.42}$$

onde $S = \log A^2 > 0$.

Vejamos a outra desigualdade, por (4.38), temos

$$D_{p-1} \approx D_{p-2} d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} \Rightarrow D_{p-1}^{\frac{2}{2\ell-1}} \approx D_{p-2}^{\frac{2}{2\ell-1}} d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}.$$

Então existe $B > 1$ tal que

$$D_{p-1}^{\frac{2}{2\ell-1}} \leq B\left(D_{p-2}^{\frac{2}{2\ell-1}} d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}\right) \Rightarrow \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}} \leq B d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}} &\leq \log B + \log d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}} \\
&= \log B + \frac{2}{2\ell-1} \log d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} \\
&< \log B + 2 \log d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} \\
&= 2\left[\frac{\log B}{2} + \log d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1}\right]. \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$d(c_{p-1}) < 1 \Rightarrow d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} < d(c_{p-1})^{-1} \Rightarrow \log d(c_{p-1})^{\ell_{p-1}-1} < \log d(c_{p-1})^{-1}.$$

Então substituindo isto em (4.43), obtemos

$$S + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim S_1 + \log d(c_{p-1})^{-1}, \tag{4.44}$$

onde $S_1 > 0$.

Vejamos o seguinte, por (3.15), obtemos $d(c_{p-1}) < \xi$, onde $0 < \xi < 1$, então

$$\frac{1}{\xi} < d(c_{p-1})^{-1} \Rightarrow 0 < \log \frac{1}{\xi} < \log d(c_{p-1})^{-1} \Rightarrow 0 < \log \frac{1}{\xi} \leq \inf_p \log d(c_{p-1})^{-1}.$$

Deste modo, pelo Lema 4.17, obtemos

$$S_1 + \log d(c_{p-1})^{-1} \leq S_2 \log d(c_{p-1})^{-1},$$

para algum $S_2 > 0$.

Logo, por (4.44), temos que

$$S + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim \log d(c_{p-1})^{-1}.$$

Por último, de (4.42), tem-se que

$$\int_I \frac{1}{d(z)} dz \lesssim S + \log \left[\frac{D_{p-1}}{D_{p-2}}\right]^{\frac{2}{2\ell-1}} \lesssim \log d(c_{p-1})^{-1},$$

onde $S > 0$.

□

## 4.3 EXPANSÃO DURANTE PERÍODO BINDING

Nesta seção provaremos a expansão durante o período binding da aplicação $f$ que vai ajudar para provar a expansão da aplicação induzida $\hat{f}$.

**Proposição 4.19.** *Seja $c \in \mathcal{C}$, $x \in \Delta(c, \delta)$ e $p = p(x)$. Então*

$$|Df^p(x)| \gtrsim D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}.$$

*Demonstração.* Seja $c \in \mathcal{C}$ e $x \in \Delta(c,\delta)$, com $p(x) = p$. Usando Regra da Cadeia, Proposição 4.13 e o resultado (4.36), temos

$$\begin{aligned}
|Df^p(x)| &= |(f^{p-1} \circ f)'(x)| \\
&= |Df^{p-1}(f(x))||Df(x)| \\
&\geq \Big(A|Df^{p-1}(f(c))|\Big)\left(AD_{p-1}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}}\right) \\
&= A^2 D_{p-1} D_{p-1}^{-\frac{2(\ell-1)}{2\ell-1}} \\
&= A^2 D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}},
\end{aligned}$$

para algum $A > 0$.

Portanto

$$|Df^p(x)| \gtrsim D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}.$$

$\square$

Antes de continuar, vejamos um resultado prévio.

**Lema 4.20.**

$$D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}} > \frac{2}{Ck},$$

para $p$ suficientemente grande e para todo $C > 0$, onde $k$ é a constante que obtemos por $f$ ser uniformemente expansora longe de pontos críticos em $(\mathcal{E}1)$ da seção 3.1.3.

*Demonstração.* Seja $C > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{Ck}{2n} = 0$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{Ck}{2n_1} < \frac{1}{2}. \tag{4.45}$$

Por outro lado, por (3.14), temos que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, então existe $n_2 > 0$ tal que

$$\gamma_n < \frac{Ck}{2n_1}, \tag{4.46}$$

para todo $n \geq n_2$.

Também, por (3.16), temos $\lim_{\delta\to 0} h(\delta) = +\infty$, então existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$h(\delta) > n_2,$$

sempre que $0 < \delta < \hat{\delta}$.

Agora, pela definição de $h(\delta)$ temos que $p \geq h(\delta)$, logo por (4.46) e a definição de $\gamma_n$, temos que

$$\frac{1}{d(c_p)D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \frac{Ck}{2n_1} \Rightarrow \frac{1}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \frac{Ck}{2n_1}.$$

Deste modo

$$D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}} > \frac{2}{Ck},$$

para todo $C > 0$. $\square$

**Observação 4.21.** Em particular, podemos escolher um $\delta$ suficientemente pequeno tal que

$$|Df^p(x)| \geq \frac{2}{k}.$$

De fato, pela Proposição 4.19, existe $A > 0$ tal que $|Df^p(x)| \geq AD_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}$. Logo, pelo Lema 4.20, temos que

$$|Df^p(x)| > A\left(\frac{2}{Ak}\right) \Rightarrow |Df^p(x)| > \frac{2}{k}.$$

# 5 SOMABILIDADE

Neste capítulo vamos provar a expansão da aplicação induzida, assim como os resultados (3.11) e (3.12), para logo ter o resultado final de nosso trabalho.

## 5.1 EXPANSÃO DA APLICAÇÃO INDUZIDA

Nesta seção provaremos a expansão da aplicação induzida na partição $\mathcal{I}$.

**Proposição 5.1.** *Para todo $I \in \mathcal{I}$,*

$$|D\hat{f}\Big|_I| \geq 2.$$

*Demonstração.* Como $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f \cup \mathcal{I}_{b_s} \cup \mathcal{I}_{b_c}$, então apresentamos três casos

**Caso** 1 : Se $I \in \mathcal{I}_f$. Como $\hat{f}(z) = f^{q_0}(z)$, para todo $z \in I$, então $D\hat{f}(x) = Df^{q_0}(x)$, porém $f^j(x) \notin \Delta$, para todo $0 \leq j < q_0$. Logo pelas condições (3.9) e (3.24), obtemos

$$|D\hat{f}(x)| \geq 2.$$

**Caso** 2 : Se $I \in \mathcal{I}_{b_s}$. Como $\hat{f}(z) = f^{l+1}(z)$, para todo $z \in I$, então, pela Regra da Cadeia, temos que

$$|D\hat{f}(x)| = |Df(f^l(x))||Df^l(x)|. \tag{5.1}$$

Por outro lado, por (3.8), obtemos

$$|Df^l(x)| \geq k. \tag{5.2}$$

Também, pela Observação (3.2), obtemos

$$\lim_{x \to c^+} |Df(x)| = \infty.$$

Então, dado $\dfrac{2}{k} > 0$, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$c < x < c + \hat{\delta} \Rightarrow |Df(x)| > \frac{2}{k}.$$

Assim, podemos tomar $\delta$ suficientemente pequeno tais que

$$c < f^l(x) < c + \hat{\delta} \Rightarrow |Df(f^l(x))| > \frac{2}{k}.$$

Deste modo, por (5.2) e (5.1), obtemos

$$|D\hat{f}(x)| > 2,$$

análogo para $c = c^-$.

**Caso** $3:$ Se $I \in \mathcal{I}_{b_c}$. Como $\hat{f}(z) = f^{l+p}(z)$, para todo $z \in I$, então pela Regra da Cadeia, temos que

$$|D\hat{f}(x)| = |Df^p(f^l(x))||Df^l(x)|. \tag{5.3}$$

Por outro lado, pela Observação 4.21 do capítulo anterior, temos que

$$|Df^p(f^l(x))| \geq \frac{2}{k}, \tag{5.4}$$

onde $p(f^l(x)) = p$.

Também, pela definição de $l$, temos que $f^j(x) \notin \Delta$, para todo $0 \leq j < l$. Assim pela condição (3.8), obtemos

$$|Df^l(x)| \geq k. \tag{5.5}$$

Por tanto, substituindo (5.4) e (5.5) em (5.3), obtemos

$$|D\hat{f}(x)| \geq 2.$$

□

**Observação 5.2.** $\hat{f}$ é um difeomorfismo em $I$ sobre $\hat{f}(I)$, para todo $I \in \mathcal{I}$.

De fato, seja $I \in \mathcal{I}$, então pela Proposição 5.1 tem-se $D\hat{f}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, portanto segue-se o resultado.

## 5.2 DISTORÇÃO DA APLICAÇÃO INDUZIDA

Antes de começar com a prova da seguinte proposição, vamos dar um resultado prévio. Seja $I \in \mathcal{I}_f$.

**Lema 5.3.** Existe $S = S(\delta) > 0$ tal que

$$\sup_{x_j, y_j \in I_j} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq S,$$

para todo $0 \leq j < q_0$.

*Demonstração.* Sejam $0 \leq j < q_0$ e $x_j, y_j \in I_j = f^j(I)$, então existem $x, y \in I$ tais que $x_j = f^j(x)$ e $y_j = f^j(y)$.

Como $I_j \cap \Delta = \emptyset$, então $f^{\tau-j}$ é contínua em $[x_j, y_j]$ e derivável em $(x_j, y_j)$. logo pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi_j \in (x_j, y_j)$ tal que

$$|f^{\tau-j}(x_j) - f^{\tau-j}(y_j)| = |Df^{\tau-j}(\xi_j)||x_j - y_j|.$$

Logo

$$|f^{\tau-j}(f^j(x)) - f^{\tau-j}(f^j(y))| = |Df^{\tau-j}(\xi_j)||x_j - y_j|.$$

Assim

$$1 > |f^{\tau}(x) - f^{\tau}(y)| = |Df^{\tau-j}(\xi_j)||x_j - y_j|. \tag{5.6}$$

Observe que $f^k(\xi_j) \notin \Delta$, para todo $0 \leq k < \tau - j$, pois $f^k(\xi_j) = f^k(f^j(\hat{\xi})) = f^{k+j}(\hat{\xi})$ e $k + j < \tau$, $\hat{\xi} \in I$.

Consequentemente, utilizando a condição (3.9), obtemos que

$$|Df^{\tau-j}(\xi_j)| \geq c(\delta)e^{\lambda(\delta)(\tau-j)}.$$

Portanto, substituindo isto em (5.6), temos que

$$1 > c(\delta)e^{\lambda(\delta)(\tau-j)}|x_j - y_j|.$$

Deste modo

$$|x_j - y_j| < c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}. \tag{5.7}$$

Por outro lado, como $\log Df$ é contínua em $[x_j, y_j]$ e derivável em $(x_j, y_j)$, então pelo Teorema do Valor Médio e a Proposição 3.5, obtemos

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| &= \log \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \\ &= \log Df(x_j) - \log Df(y_j) \\ &= (\log Df)'(\zeta_j)(x_j - y_j) \\ &\leq \left| \frac{D^2 f(\zeta_j)}{Df(\zeta_j)} \right| |x_j - y_j| \\ &\leq \frac{A}{d(\zeta_j)} |x_j - y_j|, \end{aligned} \tag{5.8}$$

para algum $A > 0$ e $\zeta_j \in (x_j, y_j)$.

Porém $\delta \leq d(\zeta_j)$. Então substituindo isto em (5.8), obtemos

$$\log \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| \leq \frac{A}{\delta} |x_j - y_j|.$$

Assim, por (5.7), temos que

$$\log \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| < \frac{A}{\delta} c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}. \tag{5.9}$$

Por outro lado, tem-se

$$e^{\lambda(\delta)(j-\tau)} \leq \sum_{i=0}^{\tau-1} e^{\lambda(\delta)(i-\tau)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\tau} - 1}{1 - a} = E(\delta),$$

onde $a = e^{\lambda(\delta)}$.

Então, substituindo isto em (5.9), obtemos

$$\log \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| < \frac{A}{\delta} c(\delta)^{-1} E(\delta).$$

Portanto

$$\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| < e^{AE(\delta)(\delta c(\delta))^{-1}} = S(\delta),$$

para todo $x_j, y_j \in I_j$.

O que resulta

$$\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \leq S,$$

para todo $0 \leq j < \tau$.

□

**Proposição 5.4.** *Existe uma constante $D = D(\delta) > 0$ tal que*

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) \leq D,$$

*para todo $I \in \mathcal{I}_f$.*

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_f$. Então $\tau(x) = q_0$, para todo $x \in I$. Pelo Lema 5.3, obtemos que

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) = \prod_{j=0}^{\tau-1}\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \leq S(\delta)^\tau = D_1(\delta).$$

□

Vejamos alguns resultados prévios antes de passar a provar a seguinte proposição. Seja $I \in \mathcal{I}_b$ $(\tau = l + p)$.

**Lema 5.5.** Existe $D_1 = D_1(\delta) > 0$ tal que

$$\mathcal{D}(f^l, I) \leq D_1,$$

para todo $0 < l < q_0$, onde $D_1$ é como na Proposição 5.4.

*Demonstração.* Seja $0 < l < q_0$. Como $\mathcal{D}(f^l, I) = \prod_{j=0}^{l-1}\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|$, basta provar que

$$\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|,$$

é limitado para todo $0 \leq j < l$.

Com efeito, sejam $0 \leq j < l$ e $x_j, y_j \in I_j$, então existem $x, y \in I$ tais que $x_j = f^j(x), y_j = f^j(y)$. Além disso, desde que $I_j \cap \Delta = \emptyset$, então $f^{l-j}$ é contínua em $[x_j, y_j]$ e derivável em $(x_j, y_j)$. Logo pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi_j \in (x_j, y_j)$ tal que

$$|f^{l-j}(x_j) - f^{l-j}(y_j)| = |Df^{l-j}(\xi_j)||x_j - y_j|.$$

Deste modo

$$|f^{l-j}(f^j(x)) - f^{l-j}(f^j(y))| = |Df^{l-j}(\xi_j)||x_j - y_j|.$$

Consequentemente

$$1 > |f^l(x) - f^l(y)| = |Df^{l-j}(\xi_j)||x_j - y_j|. \tag{5.10}$$

Observe que $f^k(\xi_j) \notin \Delta$, para todo $0 \leq k < l-j$, pois $f^k(\xi_j) = f^k(f^j(\hat{\xi})) = f^{k+j}(\hat{\xi})$ e $k + j < l$, $\hat{\xi} \in I$.

Então, utilizando a condição (3.9), obtemos que

$$|Df^{l-j}(\xi_j)| \geq c(\delta)e^{\lambda(l-j)}.$$

Assim, substituindo isto em (5.10), temos que

$$1 > c(\delta)e^{\lambda(l-j)}|x_j - y_j|.$$

Logo

$$|x_j - y_j| < c(\delta)^{-1}e^{\lambda(j-l)}. \tag{5.11}$$

Por outro lado, como $\log Df$ é contínua em $[x_j, y_j]$ e derivável em $(x_j, y_j)$, então pelo Teorema do Valor Médio e a Proposição 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| &= \log\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\\ &= \log Df(x_j) - \log Df(y_j)\\ &= (\log Df)'(\zeta_j)(x_j - y_j)\\ &\leq \left|\frac{D^2 f(\zeta_j)}{Df(\zeta_j)}\right| |x_j - y_j|\\ &\leq \frac{A}{d(\zeta_j)}|x_j - y_j|, \qquad (5.12)\end{aligned}$$

para algum $\zeta_j \in (x_j, y_j)$ e $A > 0$.

Também $\delta \leq d(\zeta_j)$, então substituindo isto em (5.12), obtemos

$$\log\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \leq \frac{A}{\delta}|x_j - y_j|.$$

Desta maneira, por (5.11), temos que

$$\log\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| < \frac{A}{\delta}c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-l)}. \qquad (5.13)$$

Por outro lado

$$e^{\lambda(\delta)(j-l)} \leq \sum_{i=0}^{l-1} e^{\lambda(\delta)(i-l)} \leq \sum_{i=0}^{q_0-1} e^{\lambda(\delta)(i-q_0)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_0} - 1}{1-a} = E(\delta),$$

onde $a = e^{\lambda(\delta)}$ e $q_0 = q_0(\delta)$.

Deste modo substituindo isto em (5.13), obtemos

$$\log\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| < \frac{A}{\delta}c(\delta)^{-1}E(\delta).$$

Assim

$$\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| < e^{AE(\delta)(\delta c(\delta))^{-1}} = S(\delta),$$

para todo $x_j, y_j \in I_j$.

Logo

$$\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \leq S,$$

para todo $0 \leq j < l$.

Em vista disso

$$\mathcal{D}(f^l, I) = \prod_{j=0}^{l-1} \sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \leq S(\delta)^l.$$

Por último, como $S(\delta) > 1$, obtemos que

$$\mathcal{D}(f^l, I) \leq S(\delta)^l \leq \left[S(\delta)^l\right]^{\frac{q_0}{l}} = S(\delta)^{q_0} = D_1(\delta),$$

para todo $0 < l < q_0$.

□

**Lema 5.6.**

$$\mathcal{D}(f, I_l) \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}},$$

onde $\ell$ é a ordem do ponto crítico associado a $I_l$.

*Demonstração.* Como $p(I_l) = p$, então usando a Proposição 4.16, obtemos o desejado. □

**Lema 5.7.**

$$\mathcal{D}(f^{p-1}, I_{l+1}) \leq \Gamma,$$

onde $\Gamma > 0$ como na Proposição 4.6.

*Demonstração.* Sejam $x, y \in I_{l+1} = f(I_l)$. Então existem $a, b \in I_l$ tais que $x = f(a)$ e $y = f(b)$, além disso $p(I_l) = p$, então pela Proposição 4.6, obtemos que

$$\mathcal{D}(f^{p-1}, (f(a), f(c))) \leq \Gamma \quad e \quad \mathcal{D}(f^{p-1}, (f(b), f(c))) \leq \Gamma. \tag{5.14}$$

Note que $f(c) \notin (f(a), f(b))$.

De fato. Por contradição, suponhamos que $f(c) \in (f(a), f(b))$, então $f(a) < f(c) < f(b)$, além disso $f$ é contínua em $[a, b]$ então pelo Teorema do Valor Intermediário existe $s \in (a, b)$ tal que $f(c) = f(s)$, então $F(c) = F(s)$, onde $F$ é a extensão contínua de $f$, então $c = s$ o qual é uma contradição, pois $c \notin (a, b)$, logo $f(c) \notin (f(a), f(b))$.

Daí, obtemos

$$(f(a), f(b)) \subset (f(a), f(c)) \quad \text{ou} \quad (f(a), f(b)) \subset (f(b), f(c)).$$

Logo, pela definição de distorção e (5.14), temos que

$$\mathcal{D}(f^{p-1}, (x, y)) \leq \Gamma, \tag{5.15}$$

para todo $x, y \in I_{l+1}$.

Por outro lado, temos que

$$\mathcal{D}(f^{p-1}, I_{l+1}) = \prod_{j=0}^{p-2} \sup_{x_j, y_j \in f^j(I_{l+1})} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|.$$

Sejam $I_{l+1} = (s, t)$, $0 \leq j < p - 1$ e $\varepsilon > 0$, então por propriedade de supremo, existem $\hat{x}_j, \hat{y}_j \in f^j((s, t))$ tais que

$$\sup_{x_j, y_j \in f^j((s,t))} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| - \varepsilon < \left| \frac{Df(\hat{x}_j)}{Df(\hat{y}_j)} \right|. \tag{5.16}$$

Também, como $\hat{x}_j, \hat{y}_j \in f^j((s, t))$, então existem $x, y \in (s, t)$ tais que $\hat{x}_j = f^j(x)$ e $\hat{y}_j = f^j(y)$. Mais ainda, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$s + \frac{1}{n_j} < x, y < t - \frac{1}{n_j} \Rightarrow \hat{x}_j, \hat{y}_j \in f^j((s + \frac{1}{n_j}, t - \frac{1}{n_j})).$$

Então, por (5.16) e definição de supremo, obtemos

$$\sup_{x_j, y_j \in f^j((s,t))} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| - \varepsilon < \sup_{x_j, y_j \in f^j((s+\frac{1}{n_j}, t-\frac{1}{n_j}))} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|. \tag{5.17}$$

Assim, tomando $m = \max\{n_j : 0 \leq j < p - 1\}$, temos que

$$(s + \frac{1}{n_j}, t - \frac{1}{n_j}) \subset (s + \frac{1}{m}, t - \frac{1}{m}).$$

Logo, por (5.17) e propriedade de supremo, tem-se

$$\sup_{x_j, y_j \in f^j((s,t))} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right| - \varepsilon < \sup_{x_j, y_j \in f^j((s+\frac{1}{m}, t-\frac{1}{m}))} \left| \frac{Df(x_j)}{Df(y_j)} \right|,$$

para todo $0 \leq j < p-1$.

Além disso $s+\frac{1}{m}, t-\frac{1}{m} \in I_{l+1}$. Então por (5.15), tem-se

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{p-2}\left(\sup_{x_j,y_j\in f^j((s,t))}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|-\varepsilon\right) &< \prod_{j=0}^{p-2}\sup_{x_j,y_j\in f^j((s+\frac{1}{m},t-\frac{1}{m}))}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \\
&= \mathcal{D}(f^{p-1},(s+\frac{1}{m},t-\frac{1}{m})) \\
&\leq \Gamma.
\end{aligned}$$

Dessa maneira

$$\prod_{j=0}^{p-2}\left(\sup_{x_j,y_j\in f^j((s,t))}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|-\varepsilon\right) < \Gamma,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\mathcal{D}(f^{p-1},I_{l+1}) = \prod_{j=0}^{p-2}\sup_{x_j,y_j\in f^j(I_{l+1})}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right| \leq \Gamma.$$

□

**Proposição 5.8.** *Seja $I \in \mathcal{I}_b$. Então*

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}},$$

*onde $\ell$ é a ordem do ponto crítico associado a $I_l$. (Neste caso $\tau = l+p$).*

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_b$. Apresentamos dois casos

**Caso** 1**:** Se $0 < l < q_0$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f^\tau, I) &= \left(\prod_{j=0}^{l-1}\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|\right)\left(\sup_{x_l,y_l\in I_l}\left|\frac{Df(x_l)}{Df(y_l)}\right|\right)\left(\prod_{j=l+1}^{l+p-1}\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|\right) \\
&= \left(\prod_{j=0}^{l-1}\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|\right)\left(\sup_{x_l,y_l\in I_l}\left|\frac{Df(x_l)}{Df(y_l)}\right|\right)\left(\prod_{j=0}^{p-2}\sup_{x_j,y_j\in f^j(I_{l+1})}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|\right) \\
&= \mathcal{D}(f^l, I)\mathcal{D}(f, I_l)\mathcal{D}(f^{p-1}, I_{l+1}).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Logo, pelos Lemas 5.5, 5.6 e 5.7, tem-se

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) \leq D_1(\delta)\left(Ad(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}\right)\Gamma,$$

para algum $A > 0$.

Então

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}},$$

para todo $I \in \mathcal{I}_b$.

**Caso 2:** Se $l = 0$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f^\tau, I) &= \left(\sup_{x_0,y_0\in I_0}\left|\frac{Df(x_0)}{Df(y_0)}\right|\right)\left(\prod_{j=1}^{p-1}\sup_{x_j,y_j\in I_j}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|\right) \\
&= \left(\sup_{x_0,y_0\in I_0}\left|\frac{Df(x_0)}{Df(y_0)}\right|\right)\left(\prod_{j=0}^{p-2}\sup_{x_j,y_j\in f^j(I_1)}\left|\frac{Df(x_j)}{Df(y_j)}\right|\right) \\
&= \mathcal{D}(f, I)\mathcal{D}(f^{p-1}, I_1). \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

Logo, pelos Lemas 5.6 e 5.7, tem-se

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) \leq \left(Ad(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}\right)\Gamma,$$

para algum $A > 0$.

O que resulta

$$\mathcal{D}(f^\tau, I) \lesssim d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}},$$

para todo $I \in \mathcal{I}_b$.

$\square$

**Proposição 5.9.** *Existe uma constante $D = D(\delta) > 0$ tal que*

$$\sum_{j=0}^{\tau-1}\int_{I_j}\frac{1}{d(x)}dx \leq D(\delta),$$

*para todo $I \in \mathcal{I}_f$.*

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_f$, $x_j, y_j \in I_j$ e $0 \le j < q_0$. Como $I_j \cap \Delta = \emptyset$, então $f^{\tau-j}$ é contínua em $[x_j, y_j]$ e derivável em $(x_j, y_j)$, assim pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi_j \in (x_j, y_j)$ tal que

$$|f^{\tau-j}(x_j) - f^{\tau-j}(y_j)| = |Df^{\tau-j}(\xi_j)||x_j - y_j|.$$

Então

$$1 \ge |f^{\tau}(x) - f^{\tau}(y)| = |Df^{\tau-j}(\xi_j)||x_j - y_j|,$$

para algum $x, y \in I$ tal que $x_j = f^j(x), y_j = f^j(y)$.

Logo

$$|x_j - y_j| \le \frac{1}{|Df^{\tau-j}(\xi_j)|}. \tag{5.20}$$

Observe que $f^k(\xi_j) \notin \Delta$, para todo $0 \le k < \tau - j$, pois $f^k(\xi_j) = f^k(f^j(\xi)) = f^{k+j}(\xi)$ e $k + j < \tau$, $\xi \in I$.

Por conseguinte, utilizando a condição (3.9), obtemos que

$$|Df^{\tau-j}(\xi_j)| \ge c(\delta)e^{\lambda(\delta)(\tau-j)} \Rightarrow \frac{1}{|Df^{\tau-j}(\xi_j)|} \le c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}.$$

Assim, por (5.20), tem-se

$$|x_j - y_j| \le c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}, \tag{5.21}$$

para todo $x_j, y_j \in I_j$.

Por outro lado, seja $I_j = (s_j, t_j)$. Então $s_j + \dfrac{1}{2n}, t_j - \dfrac{1}{2n} \in I_j$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Logo por (5.21), obtemos

$$\left|\left(s_j + \frac{1}{2n}\right) - \left(t_j - \frac{1}{2n}\right)\right| \le c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}.$$

Desta forma

$$\left|s_j - t_j + \frac{1}{n}\right| \le c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}.$$

Portanto, fazendo $n \to \infty$, obtemos que

$$|s_j - t_j| \leq c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}.$$

Dessa maneira

$$|I_j| \leq c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}. \tag{5.22}$$

Por outro lado, seja $x \in I_j$. Então $\delta \leq d(I_j) \leq d(x)$. O que resulta

$$\frac{1}{d(x)} \leq \frac{1}{d(I_j)} \leq \frac{1}{\delta}. \tag{5.23}$$

Assim, por (5.22) e (5.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\tau-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx &\leq \sum_{j=0}^{\tau-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(I_j)} dx \\
&= \sum_{j=0}^{\tau-1} \frac{|I_j|}{d(I_j)} dx \\
&\leq \sum_{j=0}^{\tau-1} \frac{c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-\tau)}}{\delta} \\
&= D_2(\delta).
\end{aligned}$$

Por consequência

$$\sum_{j=0}^{\tau-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \leq D_2(\delta),$$

para todo $I \in \mathcal{I}_f$.

$\square$

Começemos por dar alguns resultados prévios antes de provar a seguinte proposição. Seja $I \in \mathcal{I}_b$ $(\tau = l + p)$.

**Lema 5.10.**

$$\sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \leq D_2,$$

onde $D_2 = D_2(\delta) > 0$ como na Proposição 5.9.

*Demonstração.* Seja $0 \leq j < l$ e $x_j, y_j \in I_j$. Como $I_j \cap \Delta = \emptyset$, então $f^{l-j}$ é contínua em $[x_j, y_j]$ e derivável em $(x_j, y_j)$, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi_j \in (x_j, y_j)$ tal que

$$|f^{l-j}(x_j) - f^{l-j}(y_j)| = |Df^{l-j}(\xi_j)||x_j - y_j|. \tag{5.24}$$

Também, visto que $x_j, y_j \in f^j(I)$, então existem $x, y \in I$ tal que $x_j = f^j(x), y_j = f^j(y)$, assim substituindo em (5.24), obtemos

$$1 > |f^l(x) - f^l(y)| = |Df^{l-j}(\xi_j)||x_j - y_j|.$$

Desse modo

$$|x_j - y_j| < \frac{1}{|Df^{l-j}(\xi_j)|}. \tag{5.25}$$

Temos que, $f^k(\xi_j) \notin \Delta$, para todo $0 \leq k < l - j$.

De fato, seja $0 \leq k < l - j$. Como $\xi_j \in (x_j, y_j) \subset I_j$, então existe $\hat{\xi} \in I$ tal que $\xi_j = f^j(\hat{\xi})$. Além disso, como $k < l - j$, então $k + j < l$. Logo

$$f^k(\xi_j) = f^k(f^j(\hat{\xi})) = f^{k+j}(\hat{\xi}) \notin \Delta.$$

Portanto, utilizando a condição (3.9), tem-se

$$|Df^{l-j}(\xi_j)| \geq c(\delta)e^{\lambda(\delta)(l-j)}.$$

Assim, por (5.25), obtemos que

$$|x_j - y_j| < c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-l)},$$

para todo $x_j, y_j \in I_j$.

Então

$$|I_j| \leq c(\delta)^{-1}e^{\lambda(\delta)(j-l)}. \tag{5.26}$$

Por outro lado, seja $x \in I_j$. Então $\delta \leq d(I_j) \leq d(x)$, logo

$$\frac{1}{d(x)} \leq \frac{1}{d(I_j)} \leq \frac{1}{\delta}. \tag{5.27}$$

Sendo assim, por (5.26) e (5.27), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx &\leq \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(I_j)} dx \\
&= \sum_{j=0}^{l-1} \frac{|I_j|}{d(I_j)} dx \\
&\leq \sum_{j=0}^{l-1} \frac{c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-l)}}{\delta} \\
&\leq \sum_{j=0}^{q_0-1} \frac{c(\delta)^{-1} e^{\lambda(\delta)(j-q_0)}}{\delta} \\
&= D_2(\delta).
\end{aligned}$$

□

**Lema 5.11.**

$$\int_{I_l} \frac{1}{d(x)} dx \lesssim \log d(c_{p-1})^{-1}.$$

*Demonstração.* Como $p(I_l) = p$, então pela Proposição 4.18, obtemos que

$$\int_{I_l} \frac{1}{d(x)} dx \lesssim \log d(c_{p-1})^{-1}.$$

□

**Lema 5.12.**

$$\sum_{j=1}^{p-1} \int_{f^j(I_l)} \frac{1}{d(x)} dx < +\infty.$$

*Demonstração.* Seja $1 \leq j < p$. Basta mostrar que

$$\int_{f^j(I_l)} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j.$$

De fato, seja $x_j, y_j \in f^j(I_l)$. Então existem $x, y \in I_l$ tais que $x_j = f^j(x), y_j = f^j(y)$, assim por (4.5), obtemos

$$\int_{(f^j(x), f^j(c))} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j \quad e \quad \int_{(f^j(y), f^j(c))} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j. \tag{5.28}$$

Se trabalhamos com o intervalo $(f^j(x), f^j(c))$ apresenta-se dois casos

$$(f^j(y), f^j(x)) \subset (f^j(y), f^j(c)) \quad \text{ou} \quad (f^j(x), f^j(y)) \subset (f^j(x), f^j(c)).$$

De maneira análoga com o intervalo $(f^j(y), f^j(c))$. Desse modo, em qualquer dos casos, junto com (5.28) e propriedade de integrais, tem-se

$$\int_{(f^j(x),f^j(y))} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j.$$

Portanto

$$\int_{(x_j,y_j)} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j, \tag{5.29}$$

para todo $x_j, y_j \in f^j(I_l)$.

Por outro lado, se $f^j(I_l) = (s_j, t_j)$, então $s_j + \dfrac{1}{n}, t_j - \dfrac{1}{n} \in f^j(I_l)$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Assim por (5.29), tem-se

$$\int_{(s_j+\frac{1}{n},t_j-\frac{1}{n})} \frac{1}{d(x)} dx = \left|\log d\left(s_j + \frac{1}{n}\right) - \log d\left(t_j - \frac{1}{n}\right)\right| \leq 2\gamma_j.$$

Por conseguinte, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$|\log d(s_j) - \log d(t_j)| \leq 2\gamma_j \Rightarrow \int_{(s_j,t_j)} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j.$$

Desta maneira

$$\int_{f^j(I_l)} \frac{1}{d(x)} dx \leq 2\gamma_j,$$

para todo $1 \leq j < p$.

Logo, por (3.14), tem-se

$$\sum_{j=1}^{p-1} \int_{f^j(I_l)} \frac{1}{d(x)} dx \leq \sum_{j=1}^{p-1} 2\gamma_j \leq 2\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = R,$$

onde $R \geq 0$. $\square$

Agora estamos prontos para provar a seguinte proposição.

**Proposição 5.13.** *Existe uma constante $D = D(\delta) > 0$ tal que*

$$\sum_{j=0}^{\tau-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \lesssim D(\delta) + \log d(c_{p-1})^{-1},$$

*para todo $I \in \mathcal{I}_b$.*

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_b$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\tau-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx &= \sum_{j=0}^{l+p-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \\
&= \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx + \int_{I_l} \frac{1}{d(x)} dx + \sum_{j=l+1}^{l+p-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \\
&= \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx + \int_{I_l} \frac{1}{d(x)} dx + \sum_{j=1}^{p-1} \int_{f^j(I_l)} \frac{1}{d(x)} dx. \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Portanto, pelos Lemas 5.10, 5.11 e 5.12, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\tau-1} \int_{I_j} \frac{1}{d(x)} dx \lesssim D_3(\delta) + \log d(c_{p-1})^{-1},$$

onde $D_3(\delta) > 0$.

□

**Observação 5.14.** Tomando $D = D(\delta) = \max\{D_1(\delta), D_2(\delta), D_3(\delta)\}$, podemos homogenizar o $D(\delta) = D$ nas Proposições 5.4, 5.9 e 5.13.

## 5.3 SOMABILIDADE

Nesta seção, vamos provar nossas duas condições importantes que são, variação somável e tempo induzido somável.

### 5.3.1 **Variação somável**

Previamente vejamos algums resultados para logo provar nossa seguinte proposição.

**Lema 5.15.**

$$\operatorname{var}_M \omega_I \leq \operatorname{var}_I \omega_I + 2 \sup_I \omega_I,$$

para todo $I \in \mathcal{I}$.

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}$ e $c_0 = 0 < c_1 < ... < c_{N-1} < c_N = 1$, $N \in \mathbb{N}$, uma partição qualquer de $M = [0,1]$. Apresentamos dois casos

**Caso** 1 : Se existem $\alpha, \beta \in \{0, ..., N\}$ tais que $c_\alpha = \inf I$, $c_\beta = \sup I$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| &= \sum_{j=1}^{\alpha+1} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| + \sum_{j=\alpha+2}^{\beta-1} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| \\
&+ \sum_{j=\beta}^{N} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| \\
&= \omega_I(c_{\alpha+1}) + \sum_{j=\alpha+2}^{\beta-1} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| + \omega_I(c_{\beta-1}) \\
&\leq \sup_I \omega_I + \operatorname{var}_I \omega_I + \sup_I \omega_I \\
&= \operatorname{var}_I \omega_I + 2 \sup_I \omega_I,
\end{aligned}$$

para qualquer partição $c_0 = 0 < c_1 < ... < c_{N-1} < c_N = 1$ de $M$.

Logo, tomando supremo com respeito a todas as partições de $M$, obtemos

$$\operatorname{var}_M \omega_I = \sup \sum_{j=1}^{N} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| \leq \operatorname{var}_I \omega_I + 2 \sup_I \omega_I, \text{ para todo } I \in \mathcal{I}.$$

**Caso** 2 : Se não existem $\alpha, \beta \in \{0, ..., N\}$ tais que $c_\alpha = \inf I$, $c_\beta = \sup I$. Então

$$\sum_{j=1}^{N} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| \leq \sum_{j=1}^{T(N)} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})|,$$

onde $P_N = \{c_0, c_1, ..., c_N\} \subset P_{T(N)} = \{c_0, c_1, ..., \inf I, ..., \sup I, ..., c_N\}$.

Assim, estamos no caso (1), por conseguinte

$$\sum_{j=1}^{N} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| \leq \operatorname{var}_I \omega_I + 2 \sup_I \omega_I,$$

para qualquer partição $c_0 = 0 < c_1 < ... < c_{N-1} < c_N = 1$ de $M$.

Deste modo, tomando supremo com respeito a todas as partições de $M$, obtemos

$$\operatorname{var}_M \omega_I = \sup \sum_{j=1}^{N} |\omega_I(c_i) - \omega_I(c_{i-1})| \leq \operatorname{var}_I \omega_I + 2 \sup_I \omega_I, \text{ para todo } I \in \mathcal{I}.$$

$\square$

**Lema 5.16.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_f} \operatorname{var}_M \omega_I < \infty.$$

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_f$. Então pelo Lema 5.15 e definição de $\omega_I$, obtemos

$$\operatorname{var}_M \omega_I \leq \operatorname{var}_I \omega_I + 2\sup_I \omega_I = \operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} + 2\sup_I \frac{1}{|Df^\tau|}, \tag{5.31}$$

onde $\tau = q_0$.

Por outro lado, pela Proposição 5.1, obtemos $|Df^\tau(x)| \geq 2$, para todo $x \in I$. Desta maneira

$$\sup_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq \frac{1}{2}. \tag{5.32}$$

Então, visto que $\sup_I \frac{1}{|Df^\tau|} = \frac{1}{\inf_I |Df^\tau|}$ e pelo Lema 3.14, obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq A\frac{\mathcal{D}(f^\tau, I)}{\inf_I |Df^\tau|}\sum_{j=0}^{\tau-1}\int_{I_j}\frac{1}{d(x)}dx \leq A\frac{\mathcal{D}(f^\tau, I)}{2}\sum_{j=0}^{\tau-1}\int_{I_j}\frac{1}{d(x)}dx,$$

para algum $A > 0$

Logo, por (5.31), (5.32) e as Proposições 5.4 e 5.9, tem-se que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq \frac{AD^2}{2} + 1,$$

para todo $I \in \mathcal{I}_f$.

Portanto, pela Observação 3.11, obtemos

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_f} \operatorname{var}_M \omega_I < \infty. \tag{5.33}$$

□

**Lema 5.17.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_s}} \operatorname{var}_M \omega_I < \infty.$$

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_{b_s}$. Então, pelo Lema 5.15, temos que

$$\operatorname{var}_M \omega_I \leq \operatorname{var}_I \omega_I + 2\sup_I \omega_I. \tag{5.34}$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1, obtemos

$$|D\hat{f}(x)| \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{|D\hat{f}(x)|} \leq \frac{1}{2},$$

para todo $x \in I$.

Logo

$$\frac{1}{\inf_I |D\hat{f}(x)|} = \sup_I \frac{1}{|D\hat{f}(x)|} = \sup_I \omega_I \leq \frac{1}{2}. \tag{5.35}$$

Também, $\hat{f}(x) = f^{l+1}(x)$, para todo $x \in I$, então, pela Regra da Cadeia, tem-se

$$\omega_I(x) = \frac{1}{|D\hat{f}(x)|} = \frac{1}{|Df(f^l(x))||Df^l(x)|}.$$

Assim, pela propriedade $(V3)$ de variação, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{var}_I \omega_I &\leq \left(\sup_I \frac{1}{|Df(f^l(x))|}\right)\left(\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^l(x)|}\right) \\ &+ \left(\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df(f^l(x))|}\right)\left(\sup_I \frac{1}{|Df^l(x)|}\right). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Vejamos o seguinte

$(\mathcal{X}1)$ Pela condição (3.8), tem-se

$$|Df^l(x)| \geq k \Rightarrow \sup_I \frac{1}{|Df^l(x)|} \leq \frac{1}{k}.$$

$(\mathcal{X}2)$ Pelo Lema 5.1 o caso (2), obtemos

$$|Df(f^l(x))| > \frac{2}{k} \Rightarrow \sup_I \frac{1}{|Df(f^l(x))|} < \frac{k}{2}.$$

($\mathcal{X}3$) Pelo Lema 3.14, temos que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^l|} \leq A \frac{\mathcal{D}(f^l, I)}{\inf_I |Df^l|} . \sum_{j=0}^{l-1} \int_{I_j} \frac{dx}{d(x)},$$

para algum $A > 0$.

Então, pelos Lemas 5.5, 5.10 e por ($\mathcal{X}1$), resulta que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^l|} \leq A \frac{D_1 D_2}{k}.$$

($\mathcal{X}4$) Por $(V1)$ e $(V4)$, obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df(f^l(x))|} \leq \operatorname{var}_I \frac{1}{Df(f^l(x))} = \operatorname{var}_I \left( \frac{1}{Df} \circ f^l \right) = \operatorname{var}_{I_l} \frac{1}{Df(x)}. \tag{5.37}$$

Por outro lado, como $I_l \subset \Delta(c, \delta)$, então $D^2 f \neq 0$ em $I_l$, mais ainda, como $f$ é de classe $C^2$, então $D^2 f > 0$ em $I_l$ ou $D^2 f < 0$ em $\mathcal{I}_l$. Logo $Df$ é monótona em $\mathcal{I}_l$.

Desta forma, pelo Teorema 2.12 e (5.37), temos que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df(f^l(x))|} < \infty.$$

Assim, por ($\mathcal{X}1$), ($\mathcal{X}2$), ($\mathcal{X}3$), ($\mathcal{X}4$) e (5.36), tem-se que $\operatorname{var}_I \omega_I$ é limitado. Em vista disso, por (5.35) e (5.34), resulta que $\operatorname{var}_M \omega_I$ é limitado.

Portanto, da Observação 3.10, obtemos

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_{b_s}} \operatorname{var}_M \omega_I < \infty.$$

$\square$

Sejam $c^i \in \mathcal{C}_s = \{c^1, ..., c^{m_s}\}$ e $0 \leq l < q_0$. Denotemos por $I = I_{(c^i, l, 1)}$, então

$$\operatorname{var}_M \omega_I = \operatorname{var}_M \omega_{I_{(c^i, l, 1)}}.$$

Dessa maneira

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_s}} \mathrm{var}_M\, \omega_I = \sum_{i=1}^{m_s}\sum_{l=0}^{q_0-1} \mathrm{var}_M\, \omega_{I_{(c^i,l,1)}}.$$

**Lema 5.18.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_c}} \mathrm{var}_M\, \omega_I < \infty.$$

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_{b_c}$. Então $f^{\tau}(x) = f^{l+p}(x)$, para todo $x \in I$, logo pela Regra da Cadeia, obtemos

$$|Df^{\tau}(x)| = |Df^{p}(f^{l}(x))||Df^{l}(x)|.$$

Assim, pela Proposição 4.19 e a condição (3.8), existe $S > 0$, tal que

$$|Df^{\tau}(x)| \geq S\left(D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}\right)k,$$

para todo $x \in I$.

Deste modo

$$\sup_I \frac{1}{|Df^{\tau}|} \leq \frac{1}{SkD_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}. \tag{5.38}$$

Logo, visto que $\sup_I \dfrac{1}{|Df^{\tau}|} = \dfrac{1}{\inf_I |Df^{\tau}|}$ e pelo Lema 3.14, temos que

$$\mathrm{var}_I\, \frac{1}{|Df^{\tau}|} \leq A\frac{\mathcal{D}(f^{\tau}, I)}{\inf_I |Df^{\tau}|}\sum_{j=0}^{\tau-1}\int_{I_j}\frac{1}{d(x)}dx \leq A\frac{\mathcal{D}(f^{\tau}, I)}{SkD_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\sum_{j=0}^{\tau-1}\int_{I_j}\frac{1}{d(x)}dx,$$

para algum $A > 0$.

Portanto, pelas Proposições 5.8 e 5.13, existe $B > 0$ tal que

$$\mathrm{var}_I\, \frac{1}{|Df^{\tau}|} \leq A\left(\frac{1}{SkD_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right)\left(Bd(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}\right)\left(D + \log d(c_{p-1})^{-1}\right).$$

O que resulta

$$\mathrm{var}_I\, \frac{1}{|Df^{\tau}|} \leq \frac{AB}{Sk}\left(\frac{D + \log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1})^{-\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}}D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right). \tag{5.39}$$

Apresentamos dois casos

**Caso** 1 : Se $\ell_{p-1} < 1$. Por (4.38), obtemos

$$D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}} \approx D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}} d(c_{p-1})^{\frac{\ell_{p-1}-1}{2\ell-1}}.$$

Então, existe $T > 0$ tal que

$$T\left(D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}\right)\left(d(c_{p-1})^{\frac{\ell_{p-1}-1}{2\ell-1}}\right) \leq D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}.$$

Assim

$$\frac{1}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} \leq \frac{1}{T D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}} d(c_{p-1})^{\frac{\ell_{p-1}-1}{2\ell-1}}}.$$

Logo, substituindo isto em (5.39), obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq G \frac{D + \log d(c_{p-1})^{-1}}{\left(d(c_{p-1})^{-\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}} d(c_{p-1})^{\frac{\ell_{p-1}-1}{2\ell-1}}\right) D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}, \tag{5.40}$$

onde $G = \dfrac{AB}{TSk} > 0$.

Por outro lado, temos que

$$\frac{2\ell-3}{2\ell-1} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2\ell-3}{2\ell-1}\right)(1-\ell_{p-1}) < 1 - \ell_{p-1}.$$

Desta maneira, como $0 < d(c_{p-1}) < 1$, obtemos

$$d(c_{p-1})^{-\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}} d(c_{p-1})^{\frac{\ell_{p-1}-1}{2\ell-1}} = d(c_{p-1})^{\left(\frac{2\ell-3}{2\ell-1}\right)(1-\ell_{p-1})} > d(c_{p-1}). \tag{5.41}$$

Assim, por (5.41) e (5.40), obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} < G\left(\frac{D + \log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1}) D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right).$$

**Caso** 2 : Se $1 < \ell_{p-1}$. Então

$$\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1} > 0 \Rightarrow d(c_{p-1})^{\frac{2(\ell-1)(\ell_{p-1}-1)}{2\ell-1}} \leq 1.$$

Assim, por (5.39), tem-se

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq \frac{AB}{Sk}\left(\frac{D+\log d(c_{p-1})^{-1}}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right). \tag{5.42}$$

Também, pela Proposição (4.14), obtemos

$$D_{p-1}^{-\frac{1}{2\ell-1}} \lesssim D_{p-2}^{-\frac{1}{2\ell-1}}.$$

Deste modo, existe $T > 0$ tal que

$$\frac{1}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} \leq \frac{1}{TD_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}.$$

Logo, por (5.42), tem-se

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq G\left(\frac{D+\log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1})D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right),$$

onde $G = \dfrac{AB}{TSk} > 0$.

Portanto, em qualquer dos casos, existe $G > 0$ tal que

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq G\left(\frac{D+\log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1})D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right).$$

Assim, como $p > 1$, obtemos

$$\operatorname{var}_I \frac{1}{|Df^\tau|} \leq G\left(\frac{D+(p-1)\log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1})D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right). \tag{5.43}$$

Desta maneira, por (5.38), (5.43) e pelo Lema 5.15, tem-se

$$\mathrm{var}_M \frac{1}{|Df^\tau|} \le G\left(\frac{D+(p-1)\log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1})D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right) + \frac{2}{Sk}\left(\frac{1}{d(c_p)D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right),$$

para todo $I \in \mathcal{I}_{b_c}$.

Também, por (3.10), temos que

$$\sum_{(p,c)} = G\sum_p\left(\frac{D+(p-1)\log d(c_{p-1})^{-1}}{d(c_{p-1})D_{p-2}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right) + \frac{2}{Sk}\sum_p\left(\frac{1}{d(c_p)D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right) < +\infty,$$

onde $c_{p-1} = f^{p-1}(c)$.

Sejam $c^i \in \mathcal{C}_c = \{c^1, c^2, ..., c^{m_c}\}$, $0 \le l < q_0$ e $p > 1$. Denotemos por $I = I_{(c^i,l,p)}$, então

$$\mathrm{var}_M \frac{1}{|Df^\tau|} = \mathrm{var}_M\, \omega_I = \mathrm{var}_M\, \omega_{I_{(c^i,l,p)}}.$$

Desta forma

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_c}} \mathrm{var}_M\, \omega_I = \sum_{i=1}^{m_c}\sum_{l=0}^{q_0-1}\sum_{p>1}^{\infty} \mathrm{var}_M\, \omega_{I_{(c^i,l,p)}} \le m_c q_0 \sum_{(p,c)} < +\infty.$$

□

**Proposição 5.19.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \mathrm{var}_M\, \omega_I < \infty.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \mathrm{var}_M\, \omega_I = \sum_{I\in\mathcal{I}_f} \mathrm{var}_M\, \omega_I + \sum_{i=1}^{m_s}\sum_{l=0}^{q_0-1} \mathrm{var}_M\, \omega_{I_{(c^i,l,1)}} + \sum_{i=1}^{m_c}\sum_{l=0}^{q_0-1}\sum_{p>1}^{\infty} \mathrm{var}_M\, \omega_{I_{(c^i,l,p)}},$$

onde card $\mathcal{C}_s = m_s$ e card $\mathcal{C}_c = m_c$.

Assim, pelos Lemas 5.16, 5.17 e 5.18, obtemos

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \mathrm{var}_M\, \omega_I < \infty.$$

□

### 5.3.2 Tempo induzido somável

Antes de começar com a seguinte prova daremos alguns resultados prévios.

**Lema 5.20.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_f} \tau(I)|I| < \infty.$$

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_f$. Então

$$\tau(I)|I| = q_0|I|.$$

Sendo assim, pela Observação 3.11, obtemos que

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_f} |I| < \infty \Rightarrow \sum_{I\in\mathcal{I}_f} \tau(I)|I| < \infty.$$

□

**Lema 5.21.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_s}} \tau(I)|I| < \infty.$$

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_{b_s}$. Então

$$\tau(I)|I| = (l+1)|I| < (q_0+1)|I|.$$

Sendo assim, pela Observação 3.10, obtemos que

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_s}} |I| < \infty \Rightarrow \sum_{I\in\mathcal{I}_{b_s}} \tau(I)|I| < \infty.$$

□

Observe que

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_s}} \tau(I)|I| = \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{l=0}^{q_0-1} \tau(I_{(c^i,l,1)})|I_{(c^i,l,1)}|.$$

**Lema 5.22.**

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_{b_c}} \tau(I)|I| < \infty.$$

*Demonstração.* Seja $I \in \mathcal{I}_{b_c}$, então $\tau(I) = l + p < q_0 + p$.

Assim, pelo Lema 4.17, obtemos que

$$\tau(I) < Bp, \tag{5.44}$$

para algum $B > 0$.

Por outro lado, seja $x, y \in I$, como $f^\tau$ é contínua em $[x, y]$ e derivável em $(x, y)$, então pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$|f^\tau(x) - f^\tau(y)| = |Df^\tau(\xi)||x - y| \Rightarrow |Df^\tau(\xi)||x - y| \leq 1.$$

Deste modo, por (5.38), obtemos

$$|x - y| \leq \frac{1}{SkD_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}},$$

para todo $x, y \in I$

Assim

$$|I| \leq \frac{1}{SkD_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}.$$

Então, por (5.44), tem-se

$$\tau(I)|I| \leq \frac{B}{Sk}\left(\frac{p}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}}\right), \tag{5.45}$$

para todo $I \in \mathcal{I}_{b_c}$.

Observe que

$$\sum_p \frac{p}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \infty.$$

De fato, por (3.15), existe $0 < \theta < 1$ tal que $d(c_p) < \theta$. Então

$$\log d(c_p)^{-1} \geq \log \frac{1}{\theta}.$$

Consequentemente

$$\frac{p \log \frac{1}{\theta}}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \frac{p \log d(c_p)^{-1}}{d(c_p) D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}},$$

onde $\log \dfrac{1}{\theta} > 0$.

Logo, por (3.10) e pelo critério de comparação para séries, tem-se

$$\sum_p \frac{p}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}} < \infty.$$

Pelo visto anteriormente, temos que

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_{b_c}} \tau(I)|I| = \sum_{i=1}^{m_c} \sum_{l=0}^{q_0-1} \sum_{p>1}^{\infty} \tau(I_{(c^i,l,p)})|I_{(c^i,l,p)}|.$$

Denotemos

$$\sum_{(p,c)} = \frac{B}{Sk} \sum_p \frac{p}{D_{p-1}^{\frac{1}{2\ell-1}}},$$

onde $D_{p-1} = |(f^{p-1})'(f(c))|$.

Portanto, de (5.45), obtemos

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_{b_c}} \tau(I)|I| \leq m_c q_0 \sum_{(p,c)} < \infty.$$

□

**Proposição 5.23.**

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \tau(I)|I| < \infty.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \tau(I)|I| = \sum_{I \in \mathcal{I}_f} \tau(I)|I| + \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{l=0}^{q_0-1} \tau(I_{(c^i,l,1)})|I_{(c^i,l,1)}| + \sum_{i=1}^{m_c} \sum_{l=0}^{q_0-1} \sum_{p>1}^{\infty} \tau(I_{(c^i,l,p)})|I_{(c^i,l,p)}|.$$

Deste modo, pelos Lemas 5.20, 5.21 e 5.22, tem-se

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \tau(I)|I| < \infty.$$

$\square$

## 5.4 CONCLUSÃO

Nesta seção faremos uma coletânea dos tópicos demonstrados nesta dissertação, assim como a prova do Teorema 3.7.

($\diamond$) $\mathcal{I}$ *partição enumerável* ($mod$ 0)

De fato, sejam $I$, $J \in \mathcal{I}$ com $I \neq J$, então $m(I \cap J) = m(\emptyset) = 0$, também

$$m\left(M - \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I\right) = m(\bigcup_{I\in\mathcal{I}} \partial I) = 0.$$

Por outro lado

Denotemos por $\mathcal{C}_c$ o conjunto dos pontos críticos, $T = \{0, 1, ..., q_0 - 1\}$ e para cada $(c, l) \in \mathcal{C}_c \times T$ por $D_{c,l} = \left\{I \in \mathcal{I}_b : f^l(I) \subset \Delta(c, \delta)\right\}$, pela Observação 3.10 tem-se que, $D_{c,l}$ é finito. Observe que

$$\mathcal{I}_{b_c} = \bigcup_{(c,l)\in\mathcal{C}_c\times T} \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_{c,l,p}\right),$$

onde $D_{c,l,p} = \left\{I \in \mathcal{I}_b : f^l(I) \subset \Delta(c, \delta),\ p(f^l(I)) = p\right\}$.

Para cada $(c, l, p) \in \mathcal{C}_c \times T \times \mathbb{N}$ temos que $D_{c,l,p}$ é finito. De fato, apresentam-se dois casos: que $D_{c,l,p} = D_{c,l}$ ou pode acontecer que, para cada $I \in D_{c,l}$ existe um único intervalo $I_p \subset I$. Em qualquer dos casos obtemos que $D_{c,l,p}$ é finito.

Logo $\mathcal{I}_{b_c}$ é enumerável. Visto que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f \cup \mathcal{I}_{b_s} \cup \mathcal{I}_{b_c}$, então pelas Observações 3.11 e 3.10 obtemos que $\mathcal{I}$ é enumerável. Portanto $\mathcal{I}$ é uma partição enumerável de $M(mod\ 0)$.

($\diamond\diamond$) *Expansão e somabilidade*

Pela Proposição 5.1, temos que $\hat{f}$ é expansora em cada elemento da partição $\mathcal{I}$ e pelas Proposições 5.19 e 5.23, obtemos variação somável e tempo induzido somável respectivamente.

Portanto, de $(\diamond)$ e $(\diamond\diamond)$, temos provado o Teorema 3.8.

Finalmente, vejamos que o Teorema 3.8 implica o Teorema 3.7.

De fato, definimos

$$\mathcal{P} = \left\{J_i = \bar{I}_i : I_i \in \mathcal{I}\right\} \quad , \quad U = \bigcup_{i=1}^{\infty} Int(J_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad , \quad S = M \setminus U \quad , \text{e}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|D\hat{f}(x)|}, & \text{se} \quad x \in U \\ 0, & \text{se} \quad x \in S \end{cases}$$

Então

$$cl\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) = cl\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{I}_i\right) = cl(M) = M.$$

**Afirmação 5.24.**

$$\operatorname{var}_M g < +\infty.$$

*Demonstração.* De fato, seja $n \in \mathbb{N}$, então

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{I}_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right) \cup A_n,$$

onde $A_n = \displaystyle\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \bar{I}_i$.

Assim, pelo Teorema 2.14, obtemos que

$$\operatorname{var}_M g = \operatorname{var}_{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i} g + \operatorname{var}_{A_n} g = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_{\bar{I}_i} g + \operatorname{var}_{A_n} g.$$

Logo, pela definição de $\omega_I$ e a propriedade $(V6)$ de variação, tem-se que

$$\operatorname{var}_M g = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_{\bar{I}_i} \omega_{I_i} + \operatorname{var}_{A_n} g \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_M \omega_{I_i} + \operatorname{var}_{A_n} g. \tag{5.46}$$

Por outro lado, como $A_{n+1} \subset A_n$, então, pela propriedade $(V6)$ temos que

$$\operatorname{var}_{A_{n+1}} g \leq \operatorname{var}_{A_n} g.$$

Consequentemente, temos uma sequência $(\operatorname{var}_{A_n} g)_n$ não crescente e limitada inferiormente, então $(\operatorname{var}_{A_n} g)_n$ é limitada.

Logo, por (5.46) e $(i)$ do Teorema 3.8, obtemos que

$$\operatorname{var}_M g < +\infty.$$

$\square$

Assim, pelo Teorema 3.8 e a Afirmação 5.24 obtemos que $\hat{f}$ é diferenciável em $I_i$, $|D\hat{f}\big|_{I_i}| \geq \sigma$, para algum $\sigma > 1$ e $\operatorname{var}_M g < +\infty$, então, pelo Teorema 2.17, $\hat{f}$ possui uma medida invariante absolutamente contínua.

Agora, seja $\nu$ a medida invariante absolutamente contínua de $\hat{f} : M \to M$, $\hat{f}(x) = f^{\tau(x)}(x)$. Denotemos por $E_k$ o conjunto dos $x \in M$ tais que $\tau(x) = k$. Definimos

$$\nu_\tau(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k),$$

para todo conjunto mensurável $B \subset M$.

Logo, pela Proposição 2.19 obtemos que $\nu_\tau$ é uma medida $f$-invariante. Mais ainda, $\nu_\tau$ é absolutamente continua.

De fato, seja $B \subset M$ um conjunto mensurável tal que $m(B) = 0$. Vamos provar por contradição. Suponhamos que $\nu_\tau(B) > 0$, então, como $\nu$ é absolutamente contínua, obtemos que

$$\nu(f^{-n}(B) \cap E_k) > 0 \Rightarrow m(f^{-n}(B) \cap E_k) > 0,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $k > n$. Além disso, como $f^n$ é um difeomorfismo de $C^1$ em $E_k$, então $m(f^n(f^{-n}(B) \cap E_k)) > 0$ o qual é uma contradição, pois $f^n(f^{-n}(B) \cap E_k) \subset B$ e $m(B) = 0$. Logo $\nu_\tau(B) = 0$, portanto $\nu_\tau$ é absolutamente contínua.

Vejamos que, $\nu_\tau$ é uma medida de probabilidade. Antes, observe que

$$M = \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I\right) \cup \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} \partial I\right) = \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I\right) \cup Z,$$

onde $Z = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \partial I$ é enumerável.

Por outro lado, como $\nu$ é absolutamente contínua, e $m(Z) = 0$, obtemos que $\nu(Z) = 0$. Logo

$$\int_M \tau(x) d\nu = \int_{\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I} \tau(x) d\nu + \int_Z \tau(x) d\nu = \int_{\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I} \tau(x) d\nu = \sum_{I \in \mathcal{I}} \int_I \tau(x) d\nu.$$

Assim, pelo Corolário 2.18, Teorema 2.13 e $(ii)$ do Teorema 3.8 temos que

$$\int_M \tau(x) d\nu = \sum_{I \in \mathcal{I}} \int_I \tau(x) d\nu = \sum_{I \in \mathcal{I}} \tau(I) \nu(I) \leq A \sum_{I \in \mathcal{I}} \tau(I) |I| < +\infty,$$

para algum $A > 0$.

Portanto, pela Proposição 2.19, tem-se que $\nu_\tau$ é finita. Podemos considerar que $\nu_\tau$ é de probabilidade, caso contrário, basta definir $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ por

$$\mu(B) = \frac{\nu_\tau(B)}{\nu_\tau(M)},$$

então $\mu$ é uma medida de probabilidade.

Deste modo, temos a existência de uma medida de probabilidade $f$-invariante absolutamente contínua e por conseguinte, provado o Teorema 3.7.

### 5.4.1 Observação final

Com os resultados de [4, 19, 21] pode-se mostrar também que a aplicação induzida possui um número finito de medidas de probabilidades físicas invariantes absolutamente contínuas cujas bacias cobrem $M$ a menos de um conjunto de medida zero. Sendo assim, utilizando resultados em [7] podemos provar o mesmo resultado, porém, para a aplicação original.

## REFERÊNCIAS


[1] ALVES, J. F.; LUZZATTO, S.; PINHEIRO, V. Lyapunov exponents and rates of mixing for one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*. v. 24, n. 3, p. 637 – 657, 2004.

[2] ARAÚJO, V.; LUZZATTO, S.; VIANA, M. Invariant measures for interval maps with critical points and singularities. *Adv. Math.* v. 221, n. 5, p. 1428 – 1444, 2009.

[3] ARAÚJO, V.; PACIFICO, M. J. Physical measures for infinite-modal maps. *Fund. Math.* v. 203, n. 3, p. 211 – 262, 2009.

[4] BOYARSKY, A.; GÓRA, P. *Laws of Chaos*: Invariant measures and dynamical systems in one dimension. Boston: Birkhäuser, 1997.

[5] BRUIN, H.; LUZZATTO, S.; VAN STRIEN, S. Decay of correlations in one-dimensional dynamics. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* v. 36, n. 4, p. 621 – 646, 2003.

[6] BRUIN, H.; RIVERA-LETELIER, J.; SHEN, W.; VAN STRIEN, S. Large derivatives, backward contraction and invariant densities for interval maps. *Invent. Math.* v. 172, n. 3, p. 509 – 533, 2008.

[7] DE MELO, W.; VAN STRIEN, S. *One-dimensional dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[8] DÍAZ-ORDAZ, K.; HOLLAND, M. P.; LUZZATTO, S. Statistical properties of one-dimensional maps with critical points and singularities. *Stoch. Dyn.* v. 6, n. 4, p. 423 – 458, 2006.

[9] FERNANDEZ, P. J. *Medida e integração*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 198 p. (Projeto Euclides).

[10] HOLFBAUER, F.; KELLER, G. Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Springer-Verlag. Math. Z.* v. 180, n. 1, p. 119 – 140, 1982.

[11] HOPF, E. Theory of measure and invariant integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* v. 34, n. 2, p. 373 – 393, 1932.

[12] LASOTA, A.; YORKE, J. A. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* v. 186, p. 481 – 488, 1973.

[13] LUZZATTO, S. Stochastic-like behaviour in nonuniformly expanding maps. In: *Handbook of Dynamical Systems*. Amsterdam: Elsevier, 2006. v. 1B. p. 265 – 326.

[14] LUZZATTO, S.; TUCKER, W. Non-uniformly expanding dynamics in maps with singularities and criticalities. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n. 89, p. 179 – 226, 1999.

[15] LUZZATTO, S.; VIANA, M. Positive Lyapunov exponents for Lorenz-like families with criticalities. *Géométrie complexe et systèmes dynamiques. Astérisque*. v. 13, n. 261, p. 201 – 237, 2000.

[16] MAÑÉ, R. *Teoria ergódica*. Rio de Janeiro: IMPA, 1983. 389 p. (Projeto Euclides).

[17] NATANSON, I. P. *Theory of functions of a real variable*. 3. ed. New York: Frederick Ungar, 1964.

[18] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1987.

[19] RYCHLIK, M. Bounded variation and invariant measures. *Studia Math.* v. 76, n. 1, p. 69 – 80, 1983.

[20] ULAM, S.; VON NEUMANN, J. On combination of stochastic and deterministic processes. *Bull. Amer. Math. Soc.* v. 53, n. 11, p. 1120, 1947.

[21] VIANA, M. *Stochastic dynamics of deterministic systems*. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[22] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Fundamentos da teoria ergódica*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Fronteiras da Matemática).

[23] WONG, S. Some metric properties of piecewise monotonic mappings of the unit interval. *Trans. Amer. Math. Soc.* v. 246, p. 493 – 500, 1978.