

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Miguel Cutipa Coaquira**

**Estudo teórico de injeção de espuma em meios porosos**

Juiz de Fora

2016

Miguel Cutipa Coaquira

Estudo teórico de injeção de espuma em meios porosos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cutipa Coaquira, Miguel.

Estudo teórico de injeção de espuma em meios porosos / Miguel Cutipa  
Coaquira. – 2016.

72 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Espuma. 2. Ondas viajantes. 3. Equações diferenciais ordinárias. 4.  
Leis de conservação. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Título.

Miguel Cutipa Coaquira

**Estudo teórico de injeção de espuma em meios porosos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Pacelli Lidio Jose Zitha  
Delft University of Technology

---

Professor Dr. Rodrigo Weber dos Santos  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## AGRADECIMENTOS

Gostaria agradecer a tudo e a todos que contribuíram para a conclusão desta dissertação e peço desculpas aos que não foram citados explicitamente.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Grigori Chapiro por me aceitar em trabalhar na dissertação sob sua orientação, pela ajuda em esclarecer minhas dúvidas da pesquisa, por seus conselhos e discussões construtivas sobre a pesquisa e demais assuntos. Também agradeço a confiança, amizade e paciência que teve comigo.

Aos professores Dr. Dan Marchesin e Dr. Pacelli L. J. Zitha pela sugestão do modelo para a elaboração da dissertação.

Aos professores do Departamento de matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Pelos conhecimentos nas disciplinas que cursei durante estes dois anos de curso, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação.

A CAPES, pelo apoio financeiro oferecido.

A meus companheiros e amigos do Departamento de matemática, Daniel, Eduardo, Carlos, Marcos, Alejandro, Hugo, Jorge, Oscar, Santiago, Julio, Natalia, Camila, Talita, Vladimir, Julio, Julio L., pela companhia, conversa e brincadeira que graças a vocês minha estadia em Juiz de Fora foi muito agradável. Também agradeço a meus amigos de muitos anos de estudos, Juan, Jesus e Angel pelo conselho, ânimos e ajuda para estudar o mestrado.

Agradeço a minha mãe, Isidora pelo apoio moral e ânimos de seguir avançando em meus estudos. Também dou graças a meu pai, Emeterio que com seu exemplo me inspirou a cumprir minhas metas e pelos conselhos fornecidos que me ajudaram a ser perseverante em meu caminho.

A minha querida esposa, Goyita pelo grande apoio, a compreensão, carinho, amor e palavras de forças, que me ajudaram a reduzir as dificuldades.

A Deus pela saúde e bem-estar que nunca me faltou.

## RESUMO

O uso de espuma para o controle da mobilidade é uma técnica potencial que melhora a eficiência na recuperação avançada de óleo. As propriedades da espuma são controladas pela dinâmica de criação e destruição seguindo os modelos mais usados de balanço de população e modelos de equilíbrio local, considerando algumas hipóteses como deslocamento unidimensional, método do fluxo fracionário. O surfactante como componente da fase líquida é responsável da criação de espuma. Em muitos artigos por simplicidade a concentração do surfactante é considerada constante. Neste trabalho não é considerado esta simplificação.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo onde a concentração do surfactante é descrita por uma equação de balanço. O modelo é completado por equações de balanço de massa de água, gás e a concentração de bolhas de espuma. A geração e destruição de bolhas é descrita pela dinâmica do modelo cinético de primeira ordem. Para estudar matematicamente o modelo usamos ferramentas de equações diferenciais ordinárias e ondas viajantes. Para estados de equilíbrio adequados mostramos a existência de ondas viajantes. Para o caso particular, desprezando a pressão capilar, a existência foi rigorosamente provada. Para o caso geral, uma investigação numérica foi realizada.

Palavras-chave: Espuma. Ondas viajantes. Equações diferenciais ordinárias. Leis de conservação.

## ABSTRACT

The use of foam to control the mobility is a potential technique that improves the efficiency of the enhanced oil recovery. The properties of the foam are controlled by the dynamics of creation and destruction following the most used population balance models and models in local equilibrium. Under some assumptions, one-dimensional displacements, the fractional flow method. The surfactant as a component of the water phase is responsible for the foam generation and destruction. Some papers neglect this component for simplicity. In the present work the surfactant concentration is considered.

In the present work the surfactant phase is considered in the model as separate balance law. The model is complete with mass balance equations of water, gas and the concentration of bubbles foam. The bubble generation and destruction is described by dynamic of the first order kinetic model. The mathematical study was based on ordinary differential equation tools and traveling waves analysis. For reasonable equilibrium conditions we study the existence of the traveling wave solution. For the particular case neglecting the capillary pressure, the existence was proved rigorously. For the general case numerical investigation was performed.

Key-words: Foam. Traveling waves. Ordinary differential equations. Conservation laws.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A curva $\Gamma$ com seu vetor normal e o conjunto $V$ dividido em $V_l$ e $V_r$ por $\Gamma$ .	19
Figura 2 – Onda de Choque que resolve o problema de Riemann para $u^l > u^r$ .	26
Figura 3 – Onda Rarefação que resolve o problema de Riemann para $u^l < u^r$ .	26
Figura 4 – Curvas características para uma onda de contato	27
Figura 5 – Lado esquerdo, função de fluxo Buckley-Leverett. Lado direito, sua derivada, para (2.35).	29
Figura 6 – Função de Buckley-Leverett em $(u^r, u^*)$ a função $f$ é convexa e em $(u^*, u^l)$ a função é concava.	29
Figura 7 – Onda viajante monótona	31
Figura 8 – A espuma evidenciando a lamela, [24].	38
Figura 9 – Ondas viajantes do Sistema (4.23) dos estados $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$ e $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ , para $K_c = 200$ .	48
Figura 10 – Ondas viajantes do Sistema (4.23) dos estados $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$ e $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ , para $K_c = 1$ .	48
Figura 11 – Ondas viajantes do Sistema (4.23) dos estados $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$ e $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ , para $K_c = 0.01$ .	49
Figura 12 – Para $u = 5.29 \times 10^{-5} ms^{-1}$ , curva de fluxo fracionário em EL (linha vermelha). As curvas solidas de cor preto representam curvas de fluxo fracionário com textura de espuma constante; os números sobre a curva são a textura adimensional da espuma. A linha horizontal indica a injeção do fluxo fracionário de água de 0.05. Os pontos $I$ e $J$ correspondem as condições inicial e de injeção (casos $C_c = 1$ , $C_c = 0.001$ ). A linha pontilhada verde é a solução fluxo fracionário para o choque, ver [21], Fig. 8.	50
Figura 13 – Saturação de água vs coordenadas onda viajante $\eta$ para o caso $C_c = 1$ , ver [21] Figura 9.	51
Figura 14 – Fluxo fracionário de água vs saturação de água coordenadas onda viajante $\eta$ para o caso na Figura 13, ver [21] Fig. 10.	51
Figura 15 – Figura que mostra o sinal do campo da EDO do sistema (5.30), para os estados de $S_w = 0.31$ e $S_w = 0.41$ , aqui indica-se os pontos de equilíbrio por pontos pretos e as descontinuidades por pontos brancos.	58
Figura 16 – Figura que mostra o sinal do campo da EDO do sistema (5.30), para os estados $S_w = 0.34$ e $S_w = 0.5$ , aqui indica-se os pontos de equilíbrio por pontos pretos e as descontinuidades por pontos brancos.	58
Figura 17 – Figura que mostra o sinal do campo da EDO do sistema (5.30), para os estados $S_w = 0.37$ e $S_w = 0.566$ , aqui indica-se os pontos de equilíbrio por pontos pretos e as descontinuidades por pontos brancos.	58



Figura 18 – Ondas viajantes do sistema (5.30) para o estados  $(S_w, n_D, C_s)^- = (0.37, 0, 0)$  e  $(S_w, n_D, C_s)^+ = (0.566, 1, -1.153691)$ , para  $K_c = 1$ . . . . 60

Figura 19 – Ondas viajantes do sistema (5.40) para o estados  $(S_w, n_D, C_s)^- = (0.372, 0.66403, 0)$  e  $(S_w, n_D, C_s)^+ = (0.72, 1, -0.38335)$ , para  $K_c = 200$ . 62

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
EOR	Recuperação avançada de óleo (Enhanced Oil Recovery)
PVI	Problema de valor inicial
EL	Equilíbrio local

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{C}_0^1$	Espaço de funções continuamente diferenciáveis com suporte compacto
$\mathcal{C}^1$	Espaço de funções continuamente diferenciáveis
$S_w$	Saturação de água
$S_w^*$	Saturação limite de água
$S_{wc}$	Saturação de água conato
$S_g$	Saturação de gás
$S_{gr}$	Saturação de gás residual
$u$	Velocidade superficial total, $m s^{-1}$
$u_w$	Velocidade superficial de água, $m s^{-1}$
$u_g$	Velocidade superficial de gás, $m s^{-1}$
$v$	Velocidade onda viajante, $m s^{-1}$
$f_w$	Fluxo fracionário de água
$\phi$	Porosidade
$k$	Permeabilidade absoluta
$\lambda_w$	Mobilidade de água, $(Pa s)^{-1}$
$\lambda_g$	Mobilidade de gás, $(Pa s)^{-1}$
$\mu_w$	Viscosidade de água, $Pa s$
$\mu_g^0$	Viscosidade do gás em ausência de espuma, $Pa s$
$\mu_g^f$	Viscosidade do gás em presença de espuma, $Pa s$
$\sigma$	Tensão interfacial, $N m^{-1}$
$n_f$	Textura de espuma (números de lamelas por unidade de volume), $m^{-3}$
$n_D$	Textura de espuma adimensional ( $n_f/n_{\max}$ )
$n_D^{EL}$	Textura de espuma adimensional em EL
$n_f^{EL}$	Textura de espuma em EL $m^{-3}$
$n_{\max}$	Máxima textura de espuma, $m^{-3}$

$k_{rw}$	Permeabilidade relativa de água
$k_{rg}^0$	Permeabilidade relativa de gás em ausência de espuma
$k_{rg}^f$	Permeabilidade relativa de gás em presença de espuma
$MRF$	Fator de redução da mobilidade, modelo cinético de primeira ordem
$K_c$	Parâmetro de espuma em modelo cinético de primeira ordem, $s^{-1}$
$r_c$	Função de geração de espuma, $m^{-3}s^{-1}$
$r_g$	Função de coalescência de espuma, $m^{-3}s^{-1}$
$\nabla p$	Gradiente de pressão no modelo de Kam, $psi\ ft^{-1}$
$\nabla p_0$	Parâmetro no modelo de Kam, $psi\ ft^{-1}$
$P_c$	Pressão capilar gás-água, $Pa$
$C_c$	Parâmetro no modelo de Kam, $m^3\ s^{-1}$
$C_f$	Parâmetro no modelo de Kam
$C_g$	Parâmetro no modelo de Kam, $m^3\ s^{-1}$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>LEIS DE CONSERVAÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	LEIS DE CONSERVAÇÃO ESCALARES . . . . .	16
2.1.1	Solução clássica e o método das características . . . . .	16
2.1.2	Soluções fracas . . . . .	18
2.1.3	Condição de Rankine-Hugoniot ou condição de choque . . . . .	19
2.1.4	Solução entrópica . . . . .	21
2.1.5	Problema de Riemann . . . . .	25
2.1.6	Ondas de contato . . . . .	26
2.2	EQUAÇÃO DE BUCKLEY-LEVERETT . . . . .	27
2.3	ONDAS VIAJANTES . . . . .	30
<b>3</b>	<b>TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS .</b>	<b>32</b>
3.1	PRELIMINARES . . . . .	32
3.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES . . . . .	32
3.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES . . . . .	33
3.3.1	Equações lineares com coeficientes constantes . . . . .	33
3.4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES . . . . .	34
3.4.1	Campos vetoriais e fluxos . . . . .	34
3.4.2	Conjugação de campos vetoriais . . . . .	35
<b>4</b>	<b>ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA ESPUMA DENTRO DE UM MEIO POROSO POR ONDAS VIAJANTES . . . . .</b>	<b>38</b>
4.1	PRELIMINARES . . . . .	38
4.2	FORMAÇÃO DO FRENTE DE CHOQUE EM PROCESSO DE ESPUMA	39
4.2.1	Modelo de população para a textura de espuma . . . . .	41
4.2.2	Estudo do frente de choque . . . . .	41
4.3	SIMULAÇÃO DA ONDA VIAJANTE . . . . .	45
4.3.1	Aproximação da onda viajante . . . . .	45
4.3.2	Construção da onda viajante . . . . .	46
4.3.2.1	Modelo cinético de primeira ordem . . . . .	47
4.3.2.2	Modelo de Kam . . . . .	49
<b>5</b>	<b>MODELO DE INJEÇÃO DE ESPUMA . . . . .</b>	<b>52</b>
5.1	RESOLUÇÃO DO MODELO POR ONDAS VIAJANTES . . . . .	52
5.1.1	Ondas viajantes para o modelo cinético sem capilaridade . . . . .	55

5.1.1.1	Determinação dos estados de equilíbrio . . . . .	56
5.1.2	<b>Ondas viajantes para o modelo cinético com capilaridade . . . .</b>	<b>60</b>
5.1.2.1	Determinação dos pontos de equilíbrio . . . . .	61
5.1.2.2	Determinação da onda viajante . . . . .	61
<b>6</b>	<b>DISCUSSÃO . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>64</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE A – MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA OR-</b>	
	<b>DEM . . . . .</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE B – MODELO DE KAM . . . . .</b>	<b>71</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Um reservatório de petróleo é um meio poroso que contém hidrocarbonetos. O principal objetivo da simulação de reservatórios é prever o futuro rendimento de um reservatório e encontrar maneiras e métodos de otimização para a recuperação de hidrocarbonetos.

As duas principais características de um reservatório de petróleo são a natureza da rocha e dos fluidos enchendo este. A natureza dos fluidos contidos em um reservatório depende fortemente da fase de recuperação de óleo. Na fase inicial, os reservatórios contêm essencialmente um único fluido tais como gás ou óleo. Devido a alta pressão no reservatório, gás e óleo são produzidos por uma simples descompressão natural sem qualquer esforço de bombeamento nos poços. Esta fase é referida como a *recuperação primária*, e isto termina quando alcança-se um equilíbrio de pressão entre o campo de petróleo e a atmosfera. A recuperação primária usualmente deixa 70% – 85% de hidrocarbonetos no reservatório. Depois desta fase temos a *recuperação secundária* que refere a técnicas tais como injeção de água ou gás dentro de algum poço (poço de injeção) enquanto o óleo é produzido mediante outros poços (poços de produção). Este processo serve para manter alta a pressão do reservatório e a taxa do fluxo, assim desloca-se uma quantidade de óleo, puxando este para os poços de produção. Uma grande quantidade de estatísticas mostram que o máximo convencional recuperado é quase 35% [6], ficando óleo preso em poros pequenos que não é lavado para fora usando estas técnicas. Além disso, o óleo é pesado e viscoso, e a água é extremadamente móvel. Se a taxa de fluxo é suficientemente alta, em lugar de produzir óleo, os poços de produção produzem água principalmente.

Para recuperar mais dos hidrocarbonetos, várias técnicas de recuperação foram desenvolvidas. Algumas destas técnicas são injeção de complexos químicos e efeitos térmicos, que são chamados de *recuperação terciária* ou *recuperação avançada*. A recuperação avançada de óleo (EOR) é recuperação de óleo por injeção de materiais que normalmente não estão presentes dentro do reservatório [6]. O objetivo das técnicas de EOR é aumentar a quantidade de óleo não recuperável por meios convencionais alcançando a miscibilidade. A miscibilidade é alcançada por incremento de temperatura (combustão in situ) [26, 27], ou por injeção de outra espécie química como  $CO_2$  [6]. Os fluxos involucram métodos térmicos, particularmente vapor e inundação química, tais como: surfactante, polímeros e espuma, ver [8].

Várias técnicas de EOR usam gases, que são usados como fluidos de acionamento, tais como:  $CO_2$ , nitrogênio e vapor, estes possuem viscosidade baixa e mobilidade alta. Estes canalizam-se seletivamente através de zonas de alta permeabilidade ao invés deslocar de maneira eficiente o óleo [1, 2, 4, 3, 36], como o fluido de gás é menos denso que o óleo cru, o gás migra à parte superior do reservatório e deixa sem escoar zonas ricas de óleo. Portanto os processos de deslocamento de gás não têm controle da mobilidade, resultando

em baixa eficiência de deslocamento volumétrico de óleo [1, 2, 4].

O processo de deslocamento de gás pode ser melhorado, decrescendo a mobilidade do gás, injetando surfactante para criar espuma que pode reduzir a mobilidade de gás e melhorar a eficiência do varrido volumétrico [1, 2, 4, 5]. A estrutura da espuma dentro de um meio poroso pode diferir da espuma comumente encontrada quando usamos detergente para lavar pratos ou roupas. Para evitar a confusão, a espuma dentro de um meio poroso é definida como a dispersão de gás e líquido tal que a fase líquida é contínua (i.e. conexas), uma parte do gás é feito descontínuo por um filme líquido fino chamada *lamela*, isto significa que o gás fica dentro de uma bolha de espuma, fechada pela lamela que é feita de surfactante [1]. A injeção de espuma é um método de EOR que já foi mostrado ser um método de recuperação de óleo mais efetivo e menos custoso [4, 3], já que a produção de espuma pode ser gerada com baixas concentrações de surfactante (0.1% – 1%) e maior porcentagem de produção.

No processo de criação de espuma, podemos produzir dois tipos de espuma, a primeira é o gás-contínuo, aqui existe ao menos um canal de gás que é contínuo (i.e. ininterrupto por lamelas), as lamelas estão presentes mas em estado estacionário e somente prevê que o gás está fluindo através da rede de poros. O segundo é chamado espuma de gás descontínuo; neste caso não existe canais de gás contínuo de comprimento grande. Para o gás fluir, as lamelas da espuma devem ser transportadas através do sistema de poros [1].

Existem diferentes modelos que permitem simular o comportamento da espuma dentro de um meio poroso, os mais populares são baseados no método do fluxo fracionário e métodos de balanço de população como em [36, 2, 3, 4, 1].

Neste trabalho fazemos o estudo do comportamento da espuma dentro de um meio poroso feito por [21]. Neste artigo se usa dois modelos: um modelo de balanço de massa e um modelo de balanço de população para a espuma; para este último caso tem-se dois modelos que expressam a taxa de geração e coalescência (destruição) de bolhas de espuma: o modelo cinético e o modelo de Kam. O modelo de Kam é um modelo mais realista e complexo [10]. Também mostra-se que a existência de soluções do tipo ondas viajantes permite simplificar o estudo, obtendo um sistema de EDO's. Usando os estados – (estado a traz do fluxo) e + (estado frente do fluxo) das ondas viajantes que são estados equilíbrios (pontos singulares para o sistema de EDO's), logo por teoria de EDO's se faz uma simulação do comportamento da espuma dentro do meio poroso.

Em muitos modelos de injeção de espuma a concentração do surfactante é deixado do lado, porque por exemplo, assumem que o meio poroso está saturado deste na máxima concentração possível como [21, 36] e assim fica constante no modelo. Isto motiva formular um modelo de espuma onde se considere a concentração do surfactante.

Neste trabalho se formula um modelo de injeção espuma que considera a concentra-



ção de surfactante, este é resolvido supondo a existência de ondas viajantes nas variáveis do modelo. Logo usando teoria de EDO's e métodos numéricos se determina soluções aproximadas que expressa o comportamento da espuma no meio poroso.

A dissertação está organizado da seguinte maneira: no segundo capítulo, apresentamos uma base teórica de leis de conservação e ondas viajantes. No terceiro capítulo, teoria de EDO's ressaltando o Teorema de Hartman-Grobman e da Variedade Estável. No quarto capítulo, veremos o estudo do modelo da injeção de espuma apresentado por [21]; aqui tem-se dois modelos: modelo cinético de primeira ordem e o modelo de Kam, sendo o primeiro simulado para diferentes parâmetros  $K_c$  e para o segundo fazemos uma explicação de alguns resultados e se mostra a complexidade deste. No quinto capítulo, realizamos o estudo analítico do modelo de injeção de espuma apresentado considerando a concentração de surfactante, para o modelo cinético de primeira ordem Apêndice A, para dois casos: com capilaridade e sem capilaridade. No sexto e sétimo capítulo, apresentamos as discussões e conclusões respectivamente. Finalmente no Anexo se descreve o modelo cinético de primeira ordem e o modelo de Kam.

## 2 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Uma lei de conservação é uma equação diferencial parcial de evolução, as quais podemos encontrar em várias áreas da ciência: física, dinâmica de fluidos, engenharia de petróleo e outros, expressando a conservação de uma ou várias grandezas, como: massa, quantidade de movimento, energia, etc. Uma lei de conservação é expressada matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f(u)) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vetorial, a qual expressa os estados do sistema em cada ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e em cada tempo  $t \in [0, \infty)$ . A função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada de fluxo e a divergência é aplicada nas variáveis espaciais [29, 30, 31].

Uma lei de conservação pode ser expressada numa forma mais fraca como integrais, por exemplo na conservação de massa, ver [30]. Se integramos a equação (2.1) sobre  $\omega \subset \Omega$  e aplicamos o Teorema de Divergência, conseguimos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} u(x, t) + \int_{\partial\omega} f(u(x, t)) \cdot \vec{n}(x) dx = 0, \quad (2.2)$$

sendo  $\vec{n}(x)$  o vetor normal a  $\omega$ , unitário e que aponta para o exterior. Esta igualdade interpreta o balanço entre a quantidade  $u$  e o fluxo na fronteira do domínio.

Neste capítulo mostraremos os resultados sobre a resolução analítica das leis de conservação escalares, a existência e unicidade de solução e também propriedades que estes possam ter. As referências utilizadas são encontradas na bibliografia, [29, 30, 31].

### 2.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO ESCALARES

Nesta seção estudaremos as leis de conservação escalares, isto é,  $m = 1$  em (2.1) e o caso unidimensional,  $n=1$ . Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial para a lei de conservação escalar unidimensional:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (2.3)$$

sendo as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função incógnita.

#### 2.1.1 Solução clássica e o método das características

**Definição 2.1.** Dizemos que  $u$  é uma solução clássica de (2.3) num aberto de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , se  $u$  é também de classe  $\mathcal{C}^1$  e satisfaz (2.3) em todo ponto do domínio.

Em particular, se  $u_0 \in \mathcal{C}^1$ , a solução clássica é também de classe  $\mathcal{C}^1$  para  $t \geq 0$ . Com a finalidade de evitar os fenômenos relacionados com velocidade de propagação infinita, vamos supor que  $u_0$  está limitada em  $\mathbb{R}$ . Consideraremos também que o fluxo  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Definição 2.2.** *Seja  $u \in \mathcal{C}^1$  uma solução de (2.3). Definimos as curvas características em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  como as curvas  $t \rightarrow (x(t), t)$  dadas por a equação diferencial,*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f'(u(x(t), t)). \quad (2.4)$$

Substituindo  $(x, t)$  por uma curva característica em uma solução  $u$  de (2.3) e derivando respeito a  $t$ , obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{dx}{dt}u_x(x, t) + u_t(x, t) = (u_t + f'(u)u_x)(x, t) = 0.$$

Aqui observamos que a última igualdade tem a forma da lei de conservação. Sendo assim,  $u$  constante ao longo de cada curva característica, tomando o valor  $u_0(x_0)$  com  $x_0$  ponto inicial (em  $t = 0$ ) da curva. Podemos ver que as curvas são linhas retas dadas por :

$$x(t) = x_0 + tf'(u_0(x_0)). \quad (2.5)$$

Encontrar uma solução clássica  $u$  para (2.3) se reduz a resolver a equação  $x = x_0 + tf'(u_0(x_0))$ , para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$  e tomar  $u(x, t) = u_0(x_0)$ . Se  $u_0(x_0)$  é contínua, pode-se provar a existência da solução usando o teorema do valor intermediário, mas não pode se garantir a unicidade.

**Teorema 2.1.** *Suponha que  $c_0(x) = f'(u(x))$  é uma função crescente em  $\mathbb{R}$  e  $f$  de  $\mathcal{C}^2$ , então o problema (2.3) tem única solução clássica.*

*Demonstração.* Fixamos  $t > 0$ . Como  $c_0$  é crescente então a função contínua  $F(y) = y + tc_0(y)$  define uma bijeção nos reais. Com efeito,  $F$  assim definida é estritamente crescente:

$$F'(y) = 1 + t(c_0(y))' > 0,$$

e além disso  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$  e  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = -\infty$  pois  $c_0(y) \leq c_0(0)$  para  $y > 0$  e  $c_0(y) \geq c_0(0)$  para  $y < 0$  respectivamente.

Então podemos afirmar que para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  existe um único  $y$  tal que,

$$F(y) = x \quad \Rightarrow \quad x = y + tc_0(y). \quad (2.6)$$

Agora , vamos introduzir:  $u(x, t) = u_0(y(x, t))$  e verificar se satisfaz (2.3),

$$u_t(x, t) + f'(u)u_x(x, t) = u'_0(y(x, t))\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + f'(u_0(y))\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\right].$$

Derivando a equação (2.6) com respeito as variáveis  $x$  e  $t$ , obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)(1 + tc'_0(y)) = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)(1 + tc'_0(y)) = -c_0(y), \end{cases} \quad (2.7)$$

substituindo as derivadas parciais de (2.7) em (2.6) podemos deduzir que  $u(x, t) = u_0(y(x, t))$  é uma solução clássica de (2.3).  $\square$

Se temos que  $f$  é uma função convexa, a hipótese  $c_0$  crescente pode ser substituída por  $u_0$  crescente.

Este teorema estuda um caso particular, mas pode surgir algumas dificuldades ao resolver (2.3) quando  $u_0$  é uma função descontínua ou a função  $c'_0(x)$  não é crescente. O primeiro caso pode-se encontrar em problemas físicos que surgem de forma natural, por exemplo: o problema de tubo de choque estudado por Riemann onde o dado inicial é uma função descontínua; no segundo caso, se  $c'_0(x)$  não é crescente conseguimos a existência de soluções mas até um tempo  $T$  pois as linhas características se interceptam, sendo uma contradição. Para uma detalhada explicação destes casos, pode-se encontrar em [33]. Assim, surge a necessidade de encontrar outra forma de resolver o Problema (2.3), com hipóteses mais fracas.

### 2.1.2 Soluções fracas

Uma maneira natural de definir uma solução generalizada que não requer diferenciabilidade é ver a forma integral da lei de conservação. Existe outro resultado com uma formulação integral um pouco diferente, que é mais conveniente para trabalhar. A ideia básica é tomar a EDP do Problema (2.3), multiplicar por uma função teste  $\psi$  (função de  $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ), e integrar por partes, passando assim as derivadas para a função  $\psi$ . Dessa maneira obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( u \frac{\partial \psi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \psi(x, 0) dx = 0. \quad (2.8)$$

**Definição 2.3.** Dizemos que  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  é uma solução fraca de (2.3) se para toda função teste  $\psi$  verifica-se (2.8).

Pode ser provado que a definição de solução fraca é uma extensão da solução clássica; toda solução clássica é de fato uma solução fraca. A recíproca, no entanto, nem sempre é verdadeira. Este conceito de solução fraca inclui funções que não são contínuas e logo não diferenciáveis.

**Teorema 2.2.** Se  $u$  é uma solução clássica do PVI (2.3), então é uma solução fraca de (2.3).

A demonstração é simples e pode ser encontrada em [31] pp. 16. Por causa das aplicações, estamos interessados por certo tipo de soluções fracas: soluções de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes.

**Definição 2.4** (Função de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes). *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ . Dizemos que uma função  $v$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $\Omega$ , se existe um número finito de curvas  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  da forma:*

$$\Gamma_i : \begin{cases} x = \xi_i(t), & t \in [t_i^{(1)}, t_i^{(2)}], \\ \text{onde } \xi_i \text{ é uma função de classe } \mathcal{C}^1 \end{cases},$$

tais que  $v$  é igual á restrição de uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  em cada componente conexa de  $\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$ .

Uma função  $v(x, t)$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , se é de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes, para todo aberto limitado de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

### 2.1.3 Condição de Rankine-Hugoniot ou condição de choque

Uma pergunta interessante, que podemos fazer ou dizer? acerca de uma solução fraca da Equação (2.3). Para responder esta questão, observemos o seguinte caso para o qual  $u$ , a pesar de não ser contínua, tem uma particular estrutura simples.

Suponhamos que temos uma região aberta  $V \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$  e sejam  $u$  de  $\mathcal{C}^1$  e  $V_l$  e  $V_r$  as regiões esquerda e direita respectivamente obtidas pela curva  $\Gamma$  ao cortar a região  $V$ , ver Figura 1

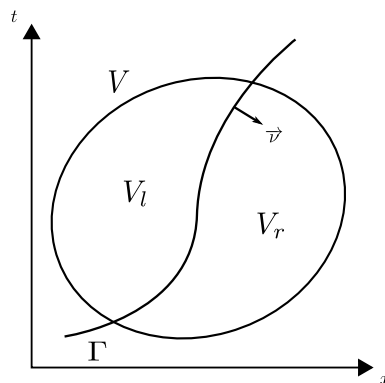


Figura 1 – A curva  $\Gamma$  com seu vetor normal e o conjunto  $V$  dividido em  $V_l$  e  $V_r$  por  $\Gamma$ .

Seja  $u$  uma solução fraca de (2.3) tal que sua primeira derivada é uniformemente contínua em  $V_l$  e  $V_r$  (isto é para que exista os limites laterais em  $\Gamma$  para  $u$  e a primeira derivada lateral). Chamando  $u^l = u|_{V_l}$  e  $u^r = u|_{V_r}$  podemos obter um resultado muito importante que caracteriza as soluções fracas de  $\mathcal{C}^1$ .

Inicialmente, seja  $\psi$  uma função teste com suporte compacto em  $V_l$ . Em (2.8),

$$\int_0^\infty (u\psi_t + f(u)\psi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0\psi(x, 0) dx = 0,$$

e como  $\psi(x, 0) = 0$  pois  $(x, 0) \in V_l^c$ , então  $\int_{-\infty}^\infty u_0\psi(x, 0) dx = 0$ , logo

$$\int_0^\infty u\psi_t + f(u)\psi_x dx dt = \int_0^\infty (u_t + f(u)_x)\psi dx dt = 0, \quad (2.9)$$

de (2.9), podemos deduzir para toda função teste  $\psi$  de suporte compacto em  $V_l$  que:  $u_t + f(u)_x = 0$  em  $V_l$ . Do mesmo modo em  $V_r$ ,  $u_t + f(u)_x = 0$  em  $V_r$ .

Agora, tomando funções testes  $\psi$  com suporte compacto em  $V$  que não necessariamente se anulam em  $\Gamma$  e substituindo em (2.8) obtemos:

$$\iint_{V_l} u\psi_t + f(u)\psi_x dx dt + \iint_{V_r} u\psi_t + f(u)\psi_x dx dt = 0. \quad (2.10)$$

Como  $\psi$  tem suporte compacto em  $V$ ,  $u$  é de  $\mathcal{C}^1$  em  $V_l$  e usando a fórmula de integração por partes, ver [29] pp. 628, teremos:

$$\iint_{V_l} u\psi_t + f(u)\psi_x dx dt = - \iint_{V_l} (u_t + f(u)_x)\psi dx dt + \int_\Gamma (u^l\nu^2 + f(u^l)\nu^1)\psi dl.$$

Então:

$$\iint_{V_l} u\psi_t + f(u)\psi_x dx dt = \int_\Gamma (u^l\nu^2 + f(u^l)\nu^1)\psi dl, \quad (2.11)$$

aqui  $\vec{\nu} = (\nu^1, \nu^2)$  é o vetor normal unitário da curva  $\Gamma$  que aponta de  $V_l$  para  $V_r$ .

Analogamente para  $V_r$ , obtemos que:

$$\iint_{V_r} u\psi_t + f(u)\psi_x dx dt = - \int_\Gamma (u^r\nu^2 + f(u^r)\nu^1)\psi dl. \quad (2.12)$$

Somando (2.11) e (2.12) teremos:

$$\int_\Gamma [(f(u^l) - f(u^r))\nu^1 + (u^l - u^r)\nu^2]\psi dl = 0.$$

Por ser  $\psi$  uma função teste com suporte compacto em  $V$ , e  $u^l$  e  $u^r$  contínuas em  $\Gamma$ , podemos concluir que:

$$(f(u^l) - f(u^r))\nu^1 + (u^l - u^r)\nu^2 = 0, \quad (2.13)$$

ao longo de  $\Gamma$ .

Se  $\Gamma = \{(x, t)/x = \xi(t)\}$  por alguma função  $\xi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , então podemos escrever,

$$\vec{\nu} = (\nu^1, \nu^2) = \frac{(1, -\xi'(t))}{\sqrt{1 + (\xi'(t))^2}}.$$

Consequentemente, de (2.13) implica que,

$$f(u^l) - f(u^r) = -\frac{\nu^2}{\nu^1}(u^l - u^r) = \xi'(t)(u^l - u^r),$$

em  $V$  ao longo da curva  $\Gamma$ .

Denotando por  $[[u]] = u^r - u^l$  e  $[[f(u)]] = f(u^r) - f(u^l)$  os saltos das funções  $u$  e  $f(u)$  ao longo de  $\Gamma$ , a última identidade torna-se:

$$s = \frac{[[f(u)]]}{[[u]]}, \quad \text{com } s = \xi'(t).$$

Esta última igualdade é chamada de *condição de Rankine-Hugoniot*, nos diz que  $s$  é a velocidade de propagação da descontinuidade ao longo da curva  $\Gamma$ .

**Definição 2.5.** Dizemos que um choque  $(u^r, u^l, s)$  satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot se e somente se verifica:

$$f(u^r) - f(u^l) = s(u^r - u^l). \quad (2.14)$$

**Exemplo 2.1.** Seja a equação de Burgers,  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ , a condição de Rankine-Hugoniot escreve-se:

$$s = \frac{u^r + u^l}{2}.$$

Isto é, a média aritmética dos valores dos estados à direita e à esquerda da descontinuidade é a velocidade de propagação do choque.

#### 2.1.4 Solução entrópica

Com a definição de solução fraca, agora estamos em condições de calcular soluções globais para o problema (2.3) em cenários onde o problema pode não ter soluções clássicas. No entanto, agora é a unicidade da solução fraca que não está garantida. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 2.2.** Seja a equação de Burgers,  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ , com a condição inicial,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

a qual têm uma solução global do PVI:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{se } x \geq t \end{cases}.$$

A função  $u$  é contínua e solução clássica da equação de Burgers. Como é uma solução clássica então pelo teorema demonstrado podemos afirmar que é solução fraca.

Além disso, podemos determinar outra solução fraca ao problema, calculando a velocidade de propagação do choque usando (2.14), mas esta solução não é contínua,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < t/2 \\ 1 & \text{se } x > t/2 \end{cases} .$$

Podemos ver no exemplo, que foi possível construir uma solução contínua a partir de uma condição inicial descontínua. Será visto mais adiante que a solução que tem sentido físico é a que temos em consideração.

Vamos propor o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + (f(u^\epsilon))_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u^\epsilon = u_0 & \text{em } \mathbb{R} \times t = 0 \end{cases} . \quad (2.15)$$

**Lema 2.1.** *Seja  $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  um conjunto de soluções clássicas de (2.15) tais que:*

$$\|u^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))} < C \quad \text{para todo } \epsilon > 0, \quad (2.16)$$

e,

$$u^\epsilon \rightarrow u \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ q.t.p. de } \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (2.17)$$

Então  $u$  é uma solução fraca de (2.3).

*Demonstração.* Seja  $\psi$  uma função teste, multiplicando a (2.15) e integrando por partes teremos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( -u^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} - f(u^\epsilon) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \epsilon u^\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dt dx = 0.$$

Considerando (2.16) e (2.17) e que suporte de  $\psi$  é compacto, podemos usar o Teorema de convergência dominada de Lebesgue, veja [29], para passar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  na expressão anterior e dessa forma obter:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( u \frac{\partial \psi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dt dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \psi(x, 0) dx.$$

Por tanto, este resultado é a mesma definição de solução fraca.  $\square$

Para caracterizar o limite  $u$  das soluções da Equação parabólica (2.15), utilizaremos a noção matemática de entropia.

**Definição 2.6.** *O par  $U, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de funções de classe  $\mathcal{C}^1$  chama-se par de entropia, para a lei de conservação (2.1), se:*

(i)  $U$  é uma função convexa.

(ii)  $F'(z) = U'(z)f'(z)$ , para todo  $z \in \mathbb{R}$ .



Observe que sendo  $U$  e  $F$  funções regulares satisfazendo o segundo item anterior, e se  $u$  é uma solução clássica de (2.1), então:

$$U'(u)\frac{\partial u}{\partial t} + U'(u)f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

torna-se em,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = 0. \quad (2.18)$$

No entanto, se  $u$  é uma solução fraca de  $\mathcal{C}^1$  por partes de (2.1), então a equação (2.18) não pode ser satisfeita no sentido fraco. Em efeito, de outro modo é necessário que  $s[|U(u)|] = |F(u)|$  ao longo da curva de descontinuidade de  $u$ , mas esta relação não pode ser satisfeita ao mesmo tempo que a condição de Rankine-Hugoniot. No entanto temos o seguinte resultado, quando  $u$  é uma solução de fraca de  $\mathcal{C}^1$  por partes, (2.18) torna-se uma desigualdade.

**Teorema 2.3.** *Seja  $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  um conjunto de soluções regulares de (2.15) que verificam (2.16) e (2.17) e seja  $(U, F)$  um par de entropia para (2.1). Então  $u$  verifica a condição,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( U(u)\frac{\partial \psi}{\partial t} + F(u)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dt dx \geq 0, \quad (2.19)$$

para toda função teste  $\psi \geq 0$ .

A condição (2.19) chama-se condição de entropia e sua notação (está no sentido de distribuições), isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) \leq 0.$$

A demonstração deste último teorema é extensa e pode ser encontrada na referência ([29], pp. 607).

**Definição 2.7** (Solução entrópica). *Uma solução fraca de (2.15), chama-se solução entrópica se satisfaz a condição de entropia (2.19) para todo par de entropia  $(U, F)$  da equação (2.1).*

**Teorema 2.4** (Entropia para soluções de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes). *Seja  $u$  uma solução fraca de classe  $\mathcal{C}^1$  de (2.15). Então  $u$  é uma solução entrópica se e somente se, para todo par de entropia  $(U, F)$ , se verifica a condição:*

$$\int_{\Gamma} \xi' [U(u^r(t)) - U(u^l(t))] \frac{\psi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma \geq \int_{\Gamma} [F(u^r(t)) - F(u^l(t))] \frac{\psi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma, \quad (2.20)$$

para toda função teste não negativa  $\psi$  ao longo da curva de descontinuidade  $\Gamma = (\xi(t), t)$ .

Note que:

$$\xi'(t)[U(u^r(t)) - U(u^l(t))] \geq F(u^r(t)) - F(u^l(t)), \quad (2.21)$$

é uma condição suficiente para que o critério (2.20) seja verificado. Para o caso de uma função convexa esta condição se simplifica ainda mais.

**Teorema 2.5** (Choque entrópico de Lax, caso convexo). *Suponhamos que  $f$  é estritamente convexa. Então, a condição suficiente (2.21) para um choque entrópico equivale a,*

$$u^l > u^r \tag{2.22}$$

ao longo da curva de descontinuidade  $\Gamma$ .

*Demonstração.* Definamos a função  $G$  por:

$$G(u) = \frac{f(u) - f(u^l)}{u - u^l} (U(u) - U(u^l)) - (F(u) - F(u^l)).$$

Mostraremos que  $G$  é decrescente. Admitindo isto por um momento. Como  $G(u^l) = 0$  e (2.21) escreve-se como  $G(u^r) \geq 0$ , como resultado de que  $G$  é decrescente as condições (2.21) e (2.22) são equivalentes, e o teorema estaria demonstrado. Provaremos agora que  $G$  é decrescente.

Derivando  $G$ :

$$G'(u) = \frac{f'(u)(u - u^l) - (f(u) - f(u^l))}{(u - u^l)^2} (U(u) - U(u^l)) + \frac{f(u) - f(u^l)}{u - u^l} (U'(u)) = F'(u),$$

como  $F'(u) = U'(u)f'(u)$ , obtemos que:

$$G'(u) = \frac{f'(u)(u - u^l) - f(u) + f(u^l)(U(u) - U(u^l) - U'(u)(u - u^l))}{(u - u^l)^2}.$$

Do fato que,  $f$  e  $U$  são convexas temos:  $f'(u)(u - u^l) < f(u) - f(u^l)$ , para todo  $u$ , o mesmo para a função  $U$ ,  $U'(u)(u - u^l) < U(u) - U(u^l)$ . Por tanto,  $G'(u) < 0$ .  $\square$

**Corolário 2.1.** *Seja  $u$  uma solução entrópica de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes de (2.1) com função de fluxo  $f$  estritamente convexo. Então  $u$  satisfaz:*

$$f'(u^r) < \xi'(t) < f'(u^l), \tag{2.23}$$

ao longo de toda curva  $\Gamma$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é estritamente convexa, definimos a função,

$$G(u) = \frac{f(u) - f(u^r)}{u - u^r}.$$

$G$  é contínua e estritamente crescente sobre o intervalo  $[u^r, u^l]$ . Daqui resulta que:

$$f'(u^r) < \frac{f(u^l) - f(u^r)}{u^l - u^r}.$$

No entanto, pela condição de Rankine-Hugoniot, podemos escrever:  $f'(u^r) < \xi'(t)$ . A outra desigualdade mostra-se de igual maneira.  $\square$

No que se segue, apresentaremos a variação de entropia para resolver a equação de fluxo de Buckley-Leverett.

**Teorema 2.6** (Choque entrópico de Oleinik, caso geral). *A condição de choque entrópico (2.21) equivale a,*

$$\begin{cases} f(\alpha u^l + (1 - \alpha)u^r) \geq \alpha f(u^l) + (1 - \alpha)f(u^r) & \text{se } u^r > u^l, \\ f(\alpha u^l + (1 - \alpha)u^r) \leq \alpha f(u^l) + (1 - \alpha)f(u^r) & \text{se } u^r < u^l \end{cases} \quad (2.24)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Geometricamente o teorema significa que um choque é entrópico de Oleinik, se verifica uma das seguintes condições:

- $u^r > u^l$  e o gráfico de  $f$  está acima do segmento formado por  $(u^r, f(u^r))$  e  $(u^l, f(u^l))$ .
- $u^r < u^l$  e o gráfico de  $f$  está abaixo do segmento formado por  $(u^r, f(u^r))$  e  $(u^l, f(u^l))$ .

Realçamos que, no caso de  $f$  concava, a condição  $u^r > u^l$  é suficiente para garantir que o choque seja entrópico. No caso que  $f$  seja convexa, é suficiente  $u^r < u^l$ .

### 2.1.5 Problema de Riemann

Nesta seção vamos considerar  $f$  convexa, e além disso que  $f$  seja uniformemente convexa (i.e. existe  $\theta > 0$  tal que  $f'' \geq \theta > 0$ ), com esta hipótese apresentamos o problema de Riemann como:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}, \quad (2.25)$$

onde  $u^l$  e  $u^r$  são constantes diferentes e correspondem aos estados iniciais à esquerda e direita respectivamente.

**Teorema 2.7** (Solução do problema de Riemann). *Consideramos os seguintes dois casos:*

*i) Onda de Choque:*

*Se  $u^l > u^r$ , a única solução entrópica de (2.25) é*

$$u(x, t) = \begin{cases} u^l & \text{se } x/t < s \\ u^r & \text{se } x/t > s \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\text{onde: } s = \frac{f(u^l) - f(u^r)}{u^l - u^r}.$$

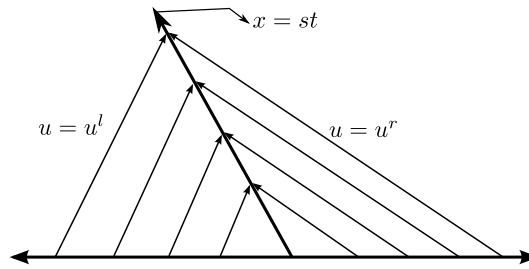


Figura 2 – Onda de Choque que resolve o problema de Riemann para  $u^l > u^r$ .

ii) **Onda de Rarefação:**

Se  $u^l < u^r$ , a única solução entrópica de (2.25) é,

$$u(x, t) = \begin{cases} u^l & \text{se } x/t < f'(u^l) \\ G(x/t) & \text{se } f'(u^l) < x/t < f'(u^r) \\ u^r & \text{se } x/t > f'(u^r) \end{cases}, \quad (2.27)$$

onde:  $G = (f')^{-1}$ .

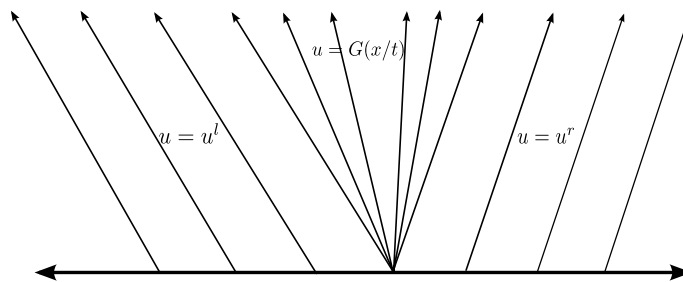


Figura 3 – Onda Rarefação que resolve o problema de Riemann para  $u^l < u^r$ .

A demonstração deste Teorema está em [29] pp. 154.

### 2.1.6 Ondas de contato

Na solução do problema de Riemann (2.25), como caso particular, temos a descontinuidade de contato. Este tipo de descontinuidade ocorre quando a velocidade  $f'(u)$  é constante para todo  $u$ . Para este caso as curvas características são paralelas, pois  $f'(u^l) = f'(u^r)$ , podemos ver isso na Figura 2.1.6.

**Definição 2.8.** Soluções do problema de Riemann com descontinuidade de contato são chamadas **ondas de contato**.

Caso que em (2.25),  $u(x, 0) = u_0(x)$  e  $f'(u) = c$ , então não é difícil provar pelo método de características que:  $u(x, t) = u_0(x - ct)$ .

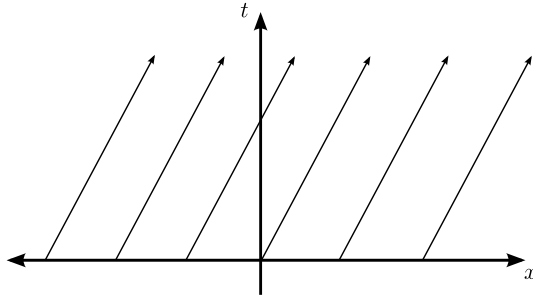


Figura 4 – Curvas características para uma onda de contato

## 2.2 EQUAÇÃO DE BUCKLEY-LEVERETT

Nesta seção estudaremos a equação de Buckley-Leverett, e sua aplicação à recuperação de óleo, ver [9, 7]. No ano 1941, Leverett apresentou o conceito de fluxo fracionário. A partir da lei de Darcy para a água e óleo, foi obtida a expressão:

$$f_w = \frac{1 + \frac{k k_{ro} A}{q \mu_0} \left( \frac{\partial P_c}{\partial x} - g \Delta \rho \sin(\alpha_d) \right)}{1 + \frac{\mu_w k_o}{\mu_o k_w}}. \quad (2.28)$$

Em esta expressão

$f_w$ : Representa a taxa de fluxo de água que passa por qualquer ponto da rocha.

$k$ : Permeabilidade absoluta da formação.

$k_w, k_o$ : Permeabilidade efetivas da água e óleo respectivamente.

$q$ : Fluxo total de água e óleo.

$P_c$ : Pressão capilar  $P_o - P_w$ .

$\mu_w, \mu_o$ : viscosidade de água e óleo respectivamente.

$g$ : Gravidade.

$\Delta \rho$ : Diferença entre as densidades de água e óleo.

$\alpha_d$ : Ângulo de injeção da formação com relação a horizontal.

$A$ : Área da seção transversal do meio poroso.

O caso mais simples é considerar o fluxo horizontal, com gradiente de pressão capilar desprezível, a expressão (2.28) reduz-se à:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w k_{ro}}{\mu_o k_{rw}}}. \quad (2.29)$$

Em geral as funções de permeabilidade relativa, são expressados da seguinte forma, ver [34].

$$k_{rw}(S_w) = k_{rw}^0 \left( \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \right)^{n_w}, \quad k_{ro}(S_w) = k_{ro}^0 \left( \frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \right)^{n_o} \quad (2.30)$$

onde:  $S_w$ : Saturação de água,  $S_{wc}$ : Saturação de água conato,  $S_{ro}$ : Saturação residual de óleo. Logo, substituindo (2.30) em (2.29) temos que:

$$f_w(S_w, T) = \left( 1 + m(T) \frac{(1 - S_{or} - S_w)^{n_o}}{(S_w - S_{wc})^{n_w}} \right)^{-1}, \quad (2.31)$$

onde,  $T$  é a temperatura e  $m(T)$  está dado por:

$$m(T) = \frac{\mu_w(T)k_{ro}^0}{\mu_o(T)k_{rw}^0} (1 - S_{or} - S_{wc})^{n_w - n_o}. \quad (2.32)$$

Um caso particular é  $n_w = n_o = 1$ , pois dele podemos encontrar solução analítica. Logo, segue que:

$$f_w(S_w, T) = \left( 1 + m(T) \frac{(1 - S_{or} - S_w)}{(S_w - S_{wc})} \right)^{-1}, \quad (2.33)$$

a qual pode ser escrita

$$f_w(S_w, T) = \frac{(1 - S_{or} - S_w)}{(S_w - S_{wc}) + m(T)(1 - S_{or} - S_w)}. \quad (2.34)$$

Na industria de petróleo tem sido desenvolvidos métodos para recuperar o óleo que ficou da primeira fase, para complementar a produção faz-se injeção de água através dos poços de injeção e assim deslocar o óleo à superfície. Este processo pode ser simulado utilizando a equação de fluxo bifásico num meio poroso. Para um modelo unidimensional, a evolução da saturação de óleo é governada pela lei de conservação escalar de Buckley-Leverett.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{para todo } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (2.35)$$

onde  $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1 - u)^2}$ .

Do estudo feito da seção anterior sabemos que se  $f$  é convexa, a solução do problema de Riemann (2.25) é uma onda de choque ou de rarefação. Ora se  $f$  não é convexa, a solução entrópica pode ter as duas ondas. Este é o caso da a equação de Buckley-Leverett.

Para  $f$  da (2.35) podemos ver na Figura 5 que a função possui um ponto de inflexão, denotamos esse ponto por  $u^*$ .

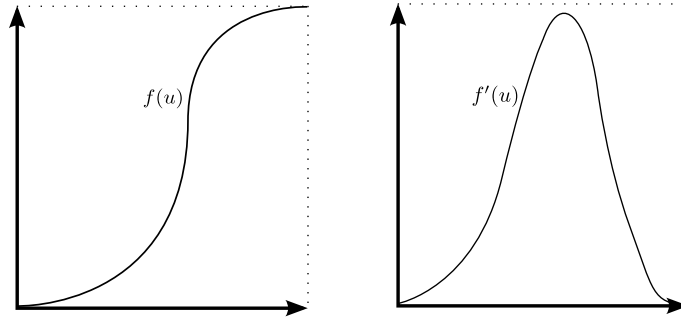


Figura 5 – Lado esquerdo, função de fluxo Buckley-Leverett. Lado direito, sua derivada, para (2.35).

Um problema de Riemann para (2.35) com  $u^l > u^r$ , pode ser visto resolvido usando o estudado na seção anterior, a resolução consiste em encontrar o ponto de tangência  $u^*$  a partir do estado  $u^r$  à curva de Buckley-Leverett, o qual pode ser visto na seguinte Figura 6.

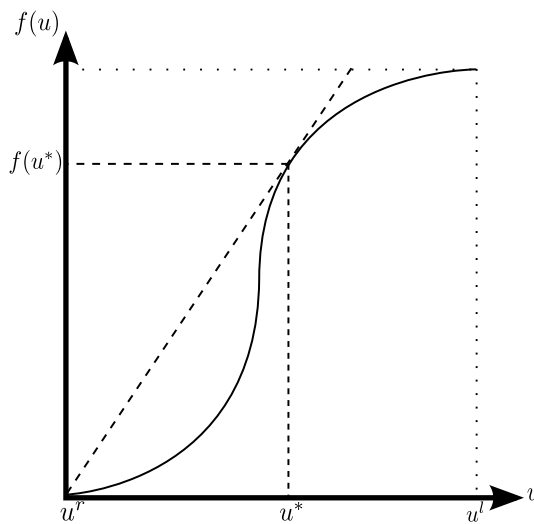


Figura 6 – Função de Buckley-Leverett em  $(u^r, u^*)$  a função  $f$  é convexa e em  $(u^*, u^l)$  a função é concava.

O estado  $u_w^*$  deve satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot:

$$f(u^*) - f(u^r) = f'(u^*)(u^* - u^r).$$

Uma vez quantificado o ponto, temos que  $f$  é convexa no intervalo  $(u^r, u^*)$ , obtendo uma onda de choque. No intervalo  $(u^*, u^l)$  a função é concava, gerando uma onda rarefação.

Assim, a solução do problema será dada pela seguinte expressão:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < tf'(u^l) \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } tf'(u^l) \leq x \leq tf'(u^*) \\ u^* & \text{se } tf'(u^*) < x < st \\ u^r & \text{se } x > st \end{cases} \quad (2.36)$$

onde,  $s = \frac{f(u^*) - f(u^r)}{u^* - u^r}$ .

A solução  $u(x, t)$  obtida é solução entrópica do problema. O caso  $u^l < u^r$  é análogo.

### 2.3 ONDAS VIAJANTES

Ondas viajantes são soluções de EDP's de evolução que possuem um perfil que é transportado no tempo à velocidade constante. Estas ondas aparecem em diversos problemas físicos, uma referência pode ser [32] onde tem-se vários exemplos desenvolvidos, também existem outros artigos que aplicam essa teoria em problemas específicos [26, 27, 21]. Dentro o estudo desta teoria está a demonstração de existência de ondas viajantes. Na Seção 4.2, a teoria de ondas viajantes se aplicara no modelo de espuma que é apresentado em essa seção.

**Definição 2.9** (Solução na forma de onda viajante). *Para um sistema de EDP's no domínio espaço-tempo. Uma solução na forma de onda viajante para o sistema é uma função  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  que satisfaz*

$$u(x, t) = w(x - ct), \quad (2.37)$$

onde  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , é o frente de onda e  $c$  é uma constante (velocidade de onda).

Como pode-se encontrar em [32] para EDP's tipo parabólicas, uma solução da forma onda viajante cumpre as seguintes características,

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} w(\eta) = w_{\pm}, \quad (2.38)$$

onde,

$$w_+ \neq w_-, \quad (2.39)$$

além disso, outra forma típica é quando a onda é monótona, onde cada componente da função  $w$  tem uma forma semelhante à figura 7, então  $w'$  e  $w''$  satisfazem:

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} w'(\eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} w''(\eta) = 0 \quad (2.40)$$

Uma forma de demonstrar a existência de ondas estacionárias é explicado em [32] pp. 11, o qual consiste em reduzir o sistema de EDP's em um sistema de EDO's de



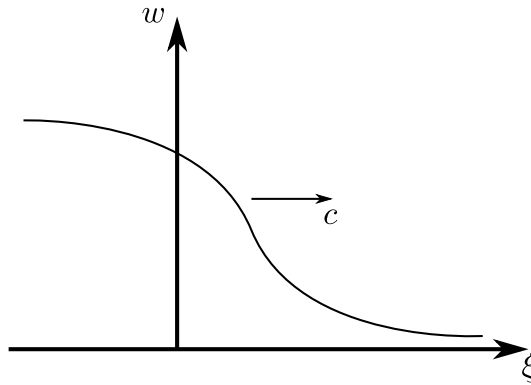


Figura 7 – Onda viajante monótona

primeiro ordem e fazer um análise das soluções de este último por vários métodos. Por exemplo, para o sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u). \quad (2.41)$$

Fazendo  $u(x, t) = w(x - ct)$  como solução de (2.41) obtemos os sistema de EDO's.

$$Aw'' + cw' + F(w) = 0, \quad (2.42)$$

este sistema é reduzido ao sistema de primeira ordem

$$w' = p \quad , \quad Ap' = -cp - F(w). \quad (2.43)$$

Supondo que  $w$  é uma onda viajante com as hipóteses (2.38), (2.39), (2.40). O sistema (2.43) pode ser redistribuído como:

$$\frac{dv}{dt} = G(v), \quad (2.44)$$

onde  $v = (w, p)$  e  $G(v) = (p, (-cp - F(w))/A)$ .

Na Equação (2.44),  $(w_+, 0)$  e  $(w_-, 0)$  são pontos singulares, para provar a existência de ondas viajantes, só bastaria demonstrar que estes pontos singulares sejam conectados no plano de fase  $(w, p)$ . Este método é usado no artigo [21] para demonstrar a existência de ondas viajantes, no capítulo 4.

### 3 TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos fundamentais da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, os quais serão muito importantes, pois serão ferramentas que garantem os resultados que apresentaremos mais ao adiante.

#### 3.1 PRELIMINARES

Seja  $\Omega$  um subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ , onde  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  um espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Cada ponto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  é denotado por  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}$ , a norma em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ :  $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$  onde  $|x|$  denota uma norma em  $\mathbb{E}$ . O subconjunto  $I$  de  $\mathbb{R}$ , vai denotar um intervalo não degenerado.

**Definição 3.1.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  uma aplicação contínua, a equação:*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (3.1)$$

*chama-se **equação diferencial ordinária de primeiro ordem** e é denotado abreviadamente por:  $x' = f(t, x)$ .*

**Definição 3.2.** *Uma função diferencial  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$  chama-se **solução da Equação (3.1)** no intervalo  $I$  se satisfaz as seguintes condições:*

- i) O gráfico de  $\varphi$  em  $I$ , isto é  $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$  esta contido em  $\Omega$ , e*
- ii)  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ , para todo  $t \in I$ .*

**Definição 3.3.** *Seja a Equação (3.1) com dado inicial da seguinte forma:*

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

*onde  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , este tipo de problema chama-se **problema de Cauchy**.*

#### 3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Seguimos com a mesma notação da seção anterior, salvo menção o contrario.

**Teorema 3.1** (Teorema de Picard). *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  uma função contínua e lipchitziana em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ .*

*Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , então existe uma única solução de:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

*em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .*

**Teorema 3.2** (Teorema de Peano). *Seja  $f$  uma função contínua em  $\Omega = I_a \times B_b$ , como no teorema de Picard. Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ , a equação (3.2) tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , onde:  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .*

As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [35].

### 3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Aqui apresentaremos algumas definições e teoremas sobre sistemas lineares que serão utilizados mais adiante. Sejam,  $I$  um intervalo e  $a_{ij}, b_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $I$ , reais ou complexas,  $i, j = 1, \dots, n$ . Um sistema de  $n$  equações da forma:

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (3.4)$$

onde  $A(t)$  é a matriz de ordem  $n \times n$  cujas coordenadas são as funções  $a_{ij}(t)$  e  $b(t)$  é o vetor coluna cujas coordenadas são as funções  $b_i(t)$ . O sistema (3.4) chama-se **linear**; se  $b_i(t) = 0$  chama-se **linear homogênea**.

**Teorema 3.3.** *Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}$  existe uma única solução  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$  de (3.4) definida em  $I$  tal que:  $\varphi(t_0) = x_0$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [35].

#### 3.3.1 Equações lineares com coeficientes constantes

Consideremos agora a equação linear homogênea.

$$x' = Ax, \quad (3.5)$$

onde  $A$  é uma matriz real ou complexa constante de ordem  $n \times n$ .

**Teorema 3.4** (Teorema Fundamental para Sistemas Lineares). *Seja  $A$  uma matriz constante de ordem  $n \times n$ . O sistema (3.5) com  $x(0) = x_0$  possui uma única solução, dada por:  $x(t) = e^{At}x_0$ , definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Para a demonstração ver [35].

A aplicação  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ou  $C^{n \times n}$ ,  $\Phi(t) = e^{tA}$  é definida como uma série  $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ , cujas propriedades não serão estudados nesta parte, mas podem ser revisadas em [35] na Seção 3.3.

**Definição 3.4.** *Uma aplicação  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  de classe  $C^1$  é dita um **fluxo** se:*

*i)  $\varphi(0, x) = x$ .*

$$ii) \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Na seguinte seção estudaremos a importância do fluxo das equações diferenciais não lineares, para estudar o comportamento das soluções.

### 3.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES

Nesta seção são apresentadas definições e alguns resultados como o teorema de Hartman-Grobman e da Variedade Estável, que são peças chave na ligação entre sistemas lineares e não lineares.

#### 3.4.1 Campos vetoriais e fluxos

De aqui para frente,  $\Delta$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.5.** *Um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  em  $\Delta$  é uma aplicação  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .*

Ao campo vetorial  $X$  associamos a equação diferencial

$$x' = X(x), \tag{3.6}$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .

**Definição 3.6.** *As soluções da equação (3.6), são funções  $\varphi : I \rightarrow \Delta$ ,  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$  são chamadas trajetórias ou curvas integrais do campo  $X$ , ou da equação diferencial (3.6).*

**Definição 3.7.** *Um ponto  $x \in \Delta$  é dito **ponto singular** do campo  $X$  se  $X(x) = 0$  e **ponto não singular** se  $X(x) \neq 0$ .*

**Definição 3.8.** *Uma curva integral  $\varphi : I \rightarrow \Delta$  do campo  $X$  chama-se **máxima** se para toda curva integral  $\psi : J \rightarrow \Delta$  tal que  $I \subset J$  e  $\varphi = \psi|_I$  então  $I = J$ .  $I$  é chamado **intervalo máximo**.*

**Teorema 3.5.** *Para a equação (3.6) temos que:*

a) *(Existência e unicidade de soluções máximas)*

*Para cada  $x \in \Delta$  existe um intervalo  $I_x$ , onde está definida a única solução máxima  $\varphi_x$ , tal que  $\varphi_x(0) = x$ .*

b) *(Propriedade de grupo)*

*Se  $y = \varphi_x(t)$  e  $t \in I_x$ , então  $I_y = I_x - t = \{r - t; r \in I_x\}$  e  $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$  para todo  $s \in I_x$ .*

c) (Diferenciabilidade em relação às condições iniciais)

O conjunto  $D = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(x, t) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^r$ . Mais ainda,  $\varphi$  satisfaz à equação

$$\partial_1(\partial_2\varphi(t, x)) = DX(\varphi(t, x)) \cdot \partial_2\varphi(t, x),$$

para todo  $(t, x) \in D$ . O significado de cada notação é:  $\partial_1 = \frac{d}{dt}$ ,  $\partial_2$  : derivada respeito a  $x$  e  $DX(p)$  : derivada de  $X$  em  $p$ .

Para consultar a demonstração do teorema, ver [35]. Deste teorema o **fluxo** gerado por  $X$ ,  $\varphi : D \rightarrow \Delta$  é de classe  $C^r$  e satisfaz as condições da definição, isto é  $\varphi(0, x) = x$  e  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ .

**Definição 3.9.** O conjunto  $\gamma_p = \{\varphi(t, p); t \in I_p\}$ , é a imagem da curva integral de  $X$  que passa pelo ponto  $p$ , chama-se **órbita de  $X$  pelo ponto  $p$** .

**Observação 3.1.** O conjunto  $\Delta$  fica decomposto por uma união disjunta de orbitas, podemos cada uma ser:

- a) Imagem biunívoca de um intervalo de  $\mathbf{R}$ .
- b) Um ponto, ou
- c) Difeomorfo a um círculo.

No caso b)  $\gamma_p = \{p\}$ , a órbita chama-se **ponto singular** e no caso c)  $\gamma_p$  chama-se órbita **fechada** ou **periódica**.

### 3.4.2 Conjugação de campos vetoriais

**Definição 3.10.** Sejam  $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  os fluxos gerados pelos campos  $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  respectivamente. Diz-se que  $X_1$  é **topologicamente conjugado** a  $X_2$  quando existe um homeomorfismo  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  tal que:  $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in D_1$ .

**Observação 3.2.** Pode-se mostrar que a relação de conjugação é uma relação de equivalência.

**Definição 3.11.** Seja um campo vetorial  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , um ponto singular  $p \in \Delta$ , chama-se **hiperbólico** se todos os autovalores de  $DX(p)$  (matriz jacobiana do campo  $X$  em  $p$ ) têm parte real diferente de zero.

**Observação 3.3.** Pode-se ver que esta definição não depende da conjugação local de classe  $C^2$  (i.e. uma conjugação topológica leva pontos singulares hiperbólicos em pontos singulares hiperbólicos).

**Definição 3.12.** Com a notação da definição 3.11, o número de autovalores de  $DX(p)$  que tem parte real menor de zero chama-se **índice de estabilidade** em torno a um ponto hiperbólico.

Pela observação 3.3, temos que uma conjugação de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 2$ , preserva o índice de estabilidade em torno a um ponto hiperbólico.

**Teorema 3.6** (Hartman-Grobman). *Seja  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças  $V$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X|_V$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_W$ .*

A demonstração deste teorema é extensa e não é apresentado neste trabalho, mas pode ser consultado no capítulo IX de [35].

O teorema de Hartman-Grobman nos permite encontrar uma interpretação do comportamento local em torno de um ponto singular hiperbólico, pela existência da conjugação topológica e o estudo de sistemas lineares.

Antes de apresentar o seguinte teorema se precisa dar o conceito de variedade diferenciável e de conjunto estável e instável local para um ponto singular hiperbólico.

**Definição 3.13.** *Uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional é um conjunto  $M$  com uma família de aplicações biunívocas  $h_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , tais que:*

1.  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} h_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. Para todo  $\alpha, \beta$ , com  $h_\alpha(U_\alpha) \cap h_\beta(U_\beta) = E \neq \emptyset$ , os conjuntos  $h_\alpha^{-1}(E)$  e  $h_\beta^{-1}(E)$  abertos de  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$  são diferenciáveis.
3. A família  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  é máxima relativa às condições (1) e (2).

O par  $(U_\alpha, h_\alpha)$  com  $p \in h_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma parametrização de  $M$  em  $p$ ;  $h_\alpha(U_\alpha)$  é chamada uma vizinhança coordenada em  $p$ .

**Definição 3.14** (Conjunto Invariante). *Seja  $S \subset \Delta$  chama-se conjunto invariante pelo campo  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se para cada  $x \in S$  tem-se que  $\varphi(t, x) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\varphi$  denota o fluxo de  $X$ .*

**Definição 3.15** (Conjunto estável e instável). *Seja o conjunto:*

$$W_S^s = W_S^s(X) = \{x \in \Delta; \varphi(t, x) \rightarrow S \text{ quando } t \rightarrow \infty\},$$

ou seja  $d(\varphi(t, x), S) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  ( $d$  métrica em  $\mathbb{R}^n$ ).  $W_S^s$  chama-se **conjunto estável** de  $S$ . Analogamente, define-se  $W_S^u = W_S^u$  o **conjunto instável** de  $S$ , tomando  $t \rightarrow -\infty$ .

Se  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  é uma conjugação topológica entres os campos  $X_1$  e  $X_2$ , então para todo conjunto  $S_1$  invariante por  $X$ ,  $h(S_1) = S_2$  é invariante por  $X_2$ . Mais ainda,

$$h(W_{S_1}^s) = W_{S_2}^s, \quad h(W_{S_1}^u) = W_{S_2}^u.$$

**Observação 3.4.** *Para sistemas lineares hiperbólicos o conjunto estável do ponto singular  $0 \in \mathbb{R}^n$  coincide com o subespaço vetorial estável  $E^s$ . Analogamente para  $W_0^u$  de  $E^u$ .*

Por tanto pelo Teorema de Hartman-Grobman, os conjuntos  $W_p^s$  e  $W_p^u$ , do campo  $X|_V$  são imagens homeomorfas de abertos dos subespaços euclidianos  $E^s$  e  $E^u$ . Logo  $W_p^s$  e  $W_p^u$  para um ponto singular hiperbólico, são variedades topológicas de dimensão iguais ao índice de estabilidade  $i(p)$  de  $DX(p)$  e  $n - i(p)$ , respectivamente. O teorema seguinte, estabelece que estas variedades topológicas são de fato subvariedades diferenciáveis.

**Teorema 3.7** (Variedade estável para pontos hiperbólicos). *Seja  $p$  um ponto singular hiperbólico de um campo vetorial  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  num aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ . Então existem uma vizinhança  $V$  de  $p$ , tal que:*

1.  $W_p^s(X|_V) = \{x \in V / \varphi(t, x) \in V, \text{ para todo } t \geq 0\}$ .
2.  $W_p^u(X|_V) = \{x \in V / \varphi(t, x) \in V, \text{ para todo } t \leq 0\}$ .
3.  $W_p^s(X|_V)$  é uma subvariedade de classe  $C^r$  e dimensão igual ao índice  $i(p)$  de estabilidade  $p$ . O espaço tangente de  $W_p^s(X|_V)$  em  $p$  coincide com  $E^s$ , espaço estável de  $A = DX(p)$ .
4.  $W_p^u(X|_V)$  é uma subvariedade de classe  $C^r$  e dimensão igual ao índice  $n - i(p)$ . O espaço tangente de  $W_p^u(X|_V)$  em  $p$  coincide com  $E^u$ , espaço instável de  $A = DX(p)$ .

A demonstração deste teorema é extensa, não é apresentada neste trabalho, mas pode-se consultar em [35] seção IX.7. O teorema nos mostra que próximo a um ponto singular hiperbólico o sistema  $x' = X(x)$  possui  $W_p^s$  e  $W_p^u$ , que são tangentes em  $p$ , aos subespaços  $E^s$  e  $E^u$  do sistema linear  $x' = DX(p)x$ . Além disso  $W_p^s$  e  $W_p^u$  tem os mesmos índices de  $E^s$  e  $E^u$ .

Estes teoremas serão de utilidade para determinar a existência e comportamento das ondas viajantes do modelo de espuma, que é desenvolvido no seguinte capítulo.

## 4 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA ESPUMA DENTRO DE UM MEIO POROSO POR ONDAS VIAJANTES

Neste capítulo, vamos desenvolver o feito em [21] que mostra o comportamento da espuma dentro de um meio poroso, usando dois modelos; um modelo de balanço de massa do água e outro de balanço de população da espuma. Para começar descreveremos as hipóteses feitas sobre estes modelos, logo resolveremos estas EDP's por meio de uma transformação de coordenadas a EDO's que serão resolvidas numericamente, para finalmente mostrar simulações destes modelos.

### 4.1 PRELIMINARES

A **espuma** é definida como a dispersão de um gás dentro de um líquido contínuo. A espuma é usada como agente para o controle da mobilidade na EOR [1, 2, 4, 21, 36].

O modelagem da espuma usará um modelo de balanço de população, e também consideraremos para este modelo o caso onde a espuma está em equilíbrio local (EL) (igual taxa de geração e destruição de bolhas de espuma).

No modelo de balanço de população, a textura de espuma é definida como o número de lamelas por unidade de volume (proporcional ao tamanho das bolhas de espuma) é modelado explicitamente, usando a equação de balanço para as lamelas (filme líquido) que separa as bolhas. Esta equação é similar ao balanço de água. A Figura 4.1 mostra as lamelas dentro do meio poroso.

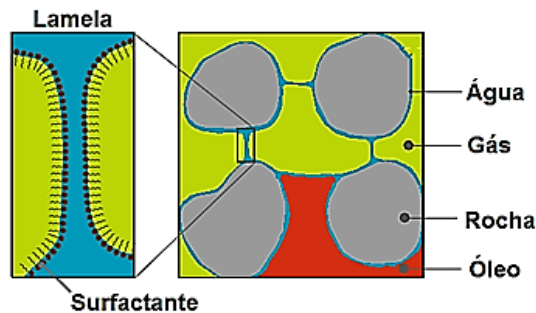


Figura 8 – A espuma evidenciando a lamela, [24].

O mecanismo para geração e destruição de lamelas são representados explicitamente no balanço da textura das bolhas de espuma. Um modelo alternativo para o balanço de população é supor EL em todas as locações de formação de espuma.

O **método do fluxo fracionário** baseado sobre modelos em EL é uma aproximação que inclui algumas hipóteses simplificadoras: fase incompressível; mobilidade newtoniana; fluxo unidimensional; ausência de dispersão, gradiente de pressão capilar, e dedilhado viscoso (viscous fingering); obtenção instantânea de equilíbrio local.



Um **choque** é uma descontinuidade na saturação e outras propriedades em escala grande (escala de laboratório); a representação na escala pequena desta transição é da forma de uma **onda viajante**. Resolver por ondas viajantes pode ser útil por algumas razões: Se a onda é grande sobre a escala dos experimentos de laboratório, então tais experimentos do laboratório não seriam apropriados para representar a dinâmica da espuma na escala grande.

Em alguns processos de espuma, o maior controle da mobilidade ocorre dentro do mesmo choque [3]; em tal caso, o sucesso sobre a escala do campo vai depender da largura e concentração da espuma dentro da onda viajante.

Aplica-se o EL em todas partes exceto no choque e na região de entrada [20]. Só nos concentraremos em choques. Os choques podem também originar-se desde os saltos na concentração de surfactante [22], mas não tomaremos em conta estes saltos.

Os dois modelos para a espuma são:

1. Um simples modelo cinético de primeira ordem.
2. Um modelo de balanço de população com múltiplos estados estacionários [10].

Também pesquisaremos resultados dos efeitos das taxas cinéticas de espuma sobre o comportamento da onda viajante para diferentes estados  $-$  e  $+$ : a traz do fluxo e a frente do fluxo do choque respectivamente.

## 4.2 FORMAÇÃO DO FRENTE DE CHOQUE EM PROCESSO DE ESPUMA

A equação para duas fases (água-gás) imiscíveis, dois componentes incompressíveis (surfactante e óleo) deslocando-se em um fluxo retilíneo através de um meio poroso é dada pela equação de Rapoport-Leas (balanço de massa):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

ou equivalentemente,

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \frac{\partial f_w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( k \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_w + \lambda_g} \frac{dP_c}{dS_w} \right) \frac{\partial S_w}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.2)$$

onde,  $S_w$  e  $f_w$  são a saturação e fluxo fracionário de água,  $\phi$  porosidade,  $u$  velocidade superficial total,  $x$  posição,  $t$  tempo, e  $\lambda_w$ ,  $\lambda_g$  são a mobilidade de água e gás respectivamente.

A função  $f_w$  em fluxo normal de água-gás depende de  $S_w$ , mas em processo de espuma  $f_w$  e  $\lambda_g$  também dependem da **textura da espuma** o tamanho das bolhas, definida por  $(n_f)$ . Assim:  $\lambda_g = \lambda_g(S_w, n_f)$  e  $f_w = f_w(S_w, n_f)$ ; também podem ser dependentes da

concentração de surfactante presente, mas por simplicidade a concentração será considerada em seu valor máximo, na fase aquosa, em todas partes, isto, por exemplo, ocorre quando se faz um fluxo grande de surfactante antes da co-injeção de gás e surfactante. Por tanto, não é necessário um balanço de massa aparte para o surfactante. Esta hipótese feita em [21], pode implicar fazer um maior custo na recuperação de óleo e não repara em detalhes do comportamento do surfactante dentro do meio poroso, isso motiva formular um modelo, na qual é considerada a concentração do surfactante como variável, assim no seguinte capítulo desenvolvemos um novo modelo com a concentração de surfactante como uma variável.

O último termo da Equação (4.2) é chamada velocidade água de deslocamentos pelas forças capilares (capillarity-driven water velocity). Em um deslocamento de escala grande, o gradiente de pressão capilar  $\frac{\partial P_c}{\partial x}$  é negligenciável [12], exceto em um frente de choque, por tanto exceto no frente de choque o deslocamento satisfaz:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0. \quad (4.3)$$

Para uma condição inicial dada, a Equação (4.3) pelo Capítulo 2.1.5 pode ter três tipos de soluções: ondas rarefação ou de contato, estados constantes ( $S_w$  constante) e choques. Exceto em choques, a *textura de espuma está em EL*, e  $f_w$  depende só de  $S_w$ , logo para a Equação (4.3), temos que:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \left( \frac{\partial f_w}{\partial x} \right)^{EL} = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)^{EL} \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0.$$

Então, a Equação (4.3), fica transformada em:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \left( \frac{\partial f_w}{\partial x} \right)^{EL} \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

Assim, as linhas características da equação (4.4) em uma onda rarefação para uma saturação de água  $S_w$ , avançam através do meio poroso com velocidade,

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{S_w} = \frac{u}{\phi} \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)^{EL}, \quad (4.5)$$

onde EL indica função de fluxo fracionário em equilíbrio local. Se temos que a inclinação de  $f_w$  em EL, como função de  $S_w$  não é monótona crescente desde o estado de injeção  $J$  para o estado inicial  $I$ , então porções da função de  $S_w$  tem saltos (descontinuidades), o qual avança o meio com velocidade,

$$v = \frac{u}{\phi} v_s = \frac{u}{\phi} \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-}, \quad (4.6)$$

onde  $v_s$  representa a inclinação da linha de choque sobre o gráfico em EL de  $f_w - S_w$  e os  $-$  e  $+$  são os estados a traz e a frente do choque respectivamente. Na escala de deslocamento, os choques ocorrem em descontinuidades na saturação. Por tanto, o deslocamento é governado pelo fluxo fracionário entre a saturação de água a traz e frente do choque.

### 4.2.1 Modelo de população para a textura de espuma

Em processos de espuma a textura da espuma depende do gás e também da saturação de água [17], [18]. Por tanto a modelagem requer, aparte da equação do balanço de massa de água (4.2), outra equação para a espuma, chamada balanço de população:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(S_g n_D) + \frac{\partial}{\partial x}(u_g n_D) = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c), \quad (4.7)$$

onde  $n_D = \frac{n_f}{n_{\max}}$  é a textura adimensional da espuma e  $n_{\max}$  é o limite superior da textura de espuma.

No resto deste trabalho, usaremos  $n_D$  em lugar de  $n_f$ . Este modelo de população (4.7) é um caso simplificado de outro apresentado em [1], [4], que por simplicidade assumimos que  $n_D$  possui o mesmo valor para porções de espuma fluindo ou em estado estacionário, além disso, que não exista fontes ou sumidouros. O termo do lado direito da equação (4.7) descreve a taxa de produção de espuma:  $r_g$  e  $r_c$  denota a taxa de geração e coalescência de bolhas de espuma respectivamente.

Suponhamos que ao longo do deslocamento da espuma sobre a escala do campo aplica-se o equilíbrio local, exceto no **frente de choque, onde a saturação de água e a textura de espuma mudam de valor abruptamente**. Neste caso, a Equação (4.7) é importante somente dentro da onda viajante que descreve a estrutura interna do frente de choque. Em outro lugar,  $r_g = r_c$ . Desta igualdade e pelo apêndice A e B, para os dois modelos apresentados, temos que:

$$r_g(S_w) = r_c(n_D, S_w), \quad (4.8)$$

em EL, assim,  $n_D$  pode ser expressado implicitamente ou explicitamente como função de  $S_w$ .

Pelo mostrado em (4.8), pode-se ter múltiplos valores de equilíbrio local de  $n_D$  para um valor dado de  $S_w$ .

### 4.2.2 Estudo do frente de choque

Na escala grande um **choque** é uma descontinuidade na saturação de água e a textura de espuma. Sobre a escala pequena uma descontinuidade é substituída por uma região onde o gradiente de pressão viscoso que promove o choque entra em balanço com as propriedades dispersivas da pressão capilar para formar um perfil de saturação contínuo que se desloca em pura traslação, sem perda de forma [12], [13]. Assim, obtemos uma onda viajante para a saturação de água e a textura de espuma na escala pequena, este resultado permite definir um novo sistema de coordenadas da seguinte forma:

$$\eta = x - vt, \quad (4.9)$$

chamada, coordenadas de onda viajante. Nesta equação  $v$  é a velocidade do choque definida em (4.6).

A mudança de coordenadas permite transformar as equações (4.2) e (4.7) em EDO's, isto facilita o estudo para determinar a simulação da saturação de água e a textura de espuma. Mostramos este resultado nas seguintes proposições.

**Proposição 4.1.** *A Equação (4.2) em coordenadas de ondas viajantes, fica expressada por uma EDO.*

*Demonstração.* Fazendo a mudança de variáveis da saturação de água  $S_w$  em coordenadas de ondas viajantes (4.9),

$$S_w(x, t) = S_w(\eta),$$

obtemos que:

$$\frac{S_w}{\partial t} = \frac{dS_w}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{S_w}{\partial x} = \frac{dS_w}{d\eta} \frac{d\eta}{dx}.$$

Então:

$$\frac{S_w}{\partial t} = -v \frac{dS_w}{d\eta}, \quad (4.10)$$

e,

$$\frac{S_w}{\partial x} = \frac{dS_w}{d\eta}. \quad (4.11)$$

Substituindo as equações (4.10) e (4.11) na equação (4.2), temos que:

$$-v\phi \frac{dS_w}{d\eta} + u \frac{df_w}{dS_w} \frac{dS_w}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left[ k \left( \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_w + \lambda_g} \frac{dP_c}{dS_w} \right) \frac{dS_w}{d\eta} \right] = 0.$$

Desta última equação, se observa que cada termo do lado esquerdo estão derivados respeito a  $\eta$ , logo podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ -v\phi S_w + u f_w + k \left( \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_w + \lambda_g} \frac{dP_c}{dS_w} \right) \frac{dS_w}{d\eta} \right] = 0. \quad (4.12)$$

Como  $S_w$  é uma onda viajante, e a derivada respeito a  $\eta$  é constante na Equação (4.12), então a expressão dentro do colchete tem o mesmo valor que qualquer estado de equilíbrio, por exemplo o estado  $S_w^-$  assim,

$$-\phi v S_w + u f_w + k \left( \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_w + \lambda_g} \frac{dP_c}{dS_w} \right) \frac{dS_w}{d\eta} = -\phi v S_w^- + u f_w^- + k \left( \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_w + \lambda_g} \frac{dP_c}{dS_w} \right)^- \frac{dS_w^-}{d\eta}, \quad (4.13)$$

onde o  $-$  indica o estado a traz da onda viajante.

Pela definição de onda viajante da seção 2.3,  $\left( \frac{dS_w}{d\eta} \right)^- = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \frac{dS_w}{d\eta} = 0$ , então a equação (4.13) fica de uma forma mais simples, além disso, as funções de mobilidade  $\lambda_w$ ,

$\lambda_g$  são positivas e o gradiente de pressão capilar  $\frac{dP_c}{dS_w}$  é não nulo, logo conseguimos escrever  $\frac{dS_w}{d\eta}$  em função dos outros termos da seguinte forma:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{-\phi v(S_w^- - S_w) + u(f_w^- - f_w)}{k \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_w + \lambda_g} \frac{dP_c}{dS_w}}.$$

Pela equação (4.6),  $v = \frac{u}{\phi} v_s$ , e da definição de fluxo fracionário,  $f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_g}$ , a equação de acima torna-se.

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{u [f_w - v_s S_w - (f_w - v_s S_w)^-]}{-k f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w}}. \quad (4.14)$$

Por tanto, mostramos que a Equação (4.2) transforma-se em uma EDO, a Equação (4.14).  $\square$

Podemos também, mostrar um resultado similar à Equação (4.14), usando o estado frente da onda viajante. Lembrando que o fluxo fracionário  $f_w$ , quando não está em EL é uma função de  $n_D$  e  $S_w$  ( $f_w = f_w(S_w, n_D)$ ), e também a mobilidade do gás ( $\lambda_g = \lambda(S_w, n_D)$ ), assim podemos afirmar que a Equação (4.14) está em função de  $S_w$  e  $n_D$ , fazendo possível expressar esta equação como:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = F(S_w, n_D). \quad (4.15)$$

Escrevendo a Equação (4.1) em coordenadas de onda viajante, temos que:  $-\phi v \frac{dS_w}{d\eta} + \frac{du_w}{d\eta} = 0$ . Então,  $\frac{d}{d\eta} [-\phi v S_w + u_w] = 0$ .

Observamos que a expressão dentro do colchete é constante, logo esta deve ser igual ao estado de equilíbrio – da onda viajante, obtendo,

$$-\phi v S_w + u_w = -\phi v S_w^- + u_w^-.$$

Assim:

$$u_w = -\phi v_s (S_w^- - S_w) + u_w^-. \quad (4.16)$$

Como:  $u_w + u_g = u$  e  $S_w + S_g = 1$ , então:

$$u_g = -\phi v_s (S_g^- - S_g) + u_g^-. \quad (4.17)$$

Lembrando que no estado de equilíbrio o gradiente de pressão capilar é nulo, teremos que:  $u_i = u f_i$ , onde  $i = w, g$ , por tanto:

$$u_g^- = u f_g^- = u(1 - f_w^-). \quad (4.18)$$

Esta última igualdade será de utilidade para demonstrar o seguinte resultado.

**Proposição 4.2.** *A Equação (4.7) em coordenadas de ondas viajantes, fica expressada em uma EDO.*

*Demonstração.* Fazendo uma mudança de variáveis, como na prova da proposição 4.1, a equação (4.7) fica da seguinte forma:

$$-\phi v \frac{d}{d\eta}(S_g n_D) + \frac{d}{d\eta}(u_g n_D) = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c). \quad (4.19)$$

Substituindo a equação (4.17) em (4.19) obtemos que,

$$-\phi v \frac{d}{d\eta}(S_g n_D) + \frac{d}{d\eta} [(uv_s(S_g - S_g^-) + u_g^-) n_D] = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c),$$

ao lado esquerdo desta equação a  $\frac{d}{d\eta}$  é aplicada em cada termo, então, está pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\eta} [-\phi v (S_g n_D) + (uv_s(S_g - S_g^-) + u_g^-) n_D] = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c),$$

como  $v = \frac{u}{\phi} v_s$ , conseguimos reduzir termos comuns, obtendo,

$$\frac{d}{d\eta} [(-uv_s S_g^- + u_g^-) n_D] = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c).$$

De (4.18),  $u_g^- = u(1 - f_w^-)$ , além disso  $S_g^- = 1 - S_w^-$ . Substituindo na equação de acima,

$$\frac{d}{d\eta} [(-uv_s(1 - S_w^-) + u - u f_w^-) n_D] = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c).$$

Então:

$$\frac{d}{d\eta} [u(1 - f_w^- - v_s(1 - S_w^-)) n_D] = \frac{\phi}{n_{\max}} S_g (r_g - r_c). \quad (4.20)$$

Como na Equação (4.20) o termo ao lado esquerdo possui fatores constantes e não nulos, então podemos escrever a equação (4.20) de forma mais simples,

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{\phi(1 - S_w)(r_g - r_c)}{n_{\max} u [1 - f_w^- - v_s(1 - S_w^-)]}. \quad (4.21)$$

Portanto, a Equação (4.7) é expressada em uma EDO.  $\square$

As equações (4.14) e (4.21) representam a saturação de água e a textura de espuma dentro da onda viajante.

No cálculo do perfil da onda viajante, é essencial encontrar a solução das equações  $S_w$  e  $n_D$ , onde seus valores se aproximam assintoticamente, aos valores dos lados opostos do choque.

$$\begin{cases} \eta \rightarrow +\infty \Rightarrow S_w \rightarrow S_w^+, & n_D \rightarrow n_D^+ \\ \eta \rightarrow -\infty \Rightarrow S_w \rightarrow S_w^-, & n_D \rightarrow n_D^- \end{cases}. \quad (4.22)$$

Todos os exemplos que vamos estudar, possuem estados  $-$  e  $+$  do frente do choque, os quais são os estados de injeção (J) e inicial (I) respectivamente. O estado de injeção satisfaz o EL correspondente ao  $f_w$  injetado. No artigo [20] discute como os fluidos injetados que podem não estar em EL, vão para o equilíbrio local dentro da região de entrada perto do lado de injeção.

### 4.3 SIMULAÇÃO DA ONDA VIAJANTE

Nesta seção, se fará o estudo da aproximação da onda viajante (frente de choque) do modelo de espuma apresentado na seção anterior, para conseguir isto, usaremos ferramentas matemáticas do capítulo 3.

#### 4.3.1 Aproximação da onda viajante

Pelas equações (4.14) e (4.21), tem-se um sistema linear de EDO's não linear, o qual pode-se representar como:

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = F(S_w, n_D) \\ \frac{dn_D}{d\eta} = G(S_w, n_D) \end{cases} \quad (4.23)$$

Antes de fazer a aproximação deste sistema, lembre-se que os estados  $-$  e  $+$  da onda viajante, possuem a seguinte propriedade,

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{dS_w}{d\eta} = 0 \quad , \quad \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{dn_D}{d\eta} = 0. \quad (4.24)$$

Além disto, substituindo (4.21) no sistema (4.23) pode-se mostrar que os estados  $-$  e  $+$  da onda viajante são pontos singulares deste sistema. De fato; para o estado  $(S_w^-, n_D^-)$ , tomando limite  $\eta \rightarrow -\infty$  em 4.23, tem-se de 4.24 que:

$$\begin{cases} 0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F(S_w, n_D) \\ 0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} G(S_w, n_D) \end{cases}.$$

Considerando que  $F$  e  $G$  são ao menos funções contínuas, então os limites passam dentro para  $S_w$  e  $n_D$ , sendo obtido:

$$\begin{cases} 0 = F(S_w^-, n_D^-) \\ 0 = G(S_w^-, n_D^-) \end{cases}.$$

Assim,  $(S_w^-, n_D^-)$  é um ponto de singular do sistema (4.23). Analogamente, para o estado  $(S_w^+, n_D^+)$ .

Sem perda de generalidade, denote aos estados  $-$  e  $+$  por  $(S_w^0, n_D^0)$ , a continuação faz-se uma aproximação de Taylor de primeira ordem de  $F$  e  $G$ , respeito a este ponto. Sejam  $S_w = S_w^0 + \Delta S_w$  e  $n_D = n_D^0 + \Delta n_D$ , então as funções  $F$  e  $G$  tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} F(S_w, n_D) = F(S_w^0, n_D^0) + \nabla F(S_w^0, n_D^0) \cdot (\Delta S_w, \Delta n_D) \\ G(S_w, n_D) = G(S_w^0, n_D^0) + \nabla G(S_w^0, n_D^0) \cdot (\Delta S_w, \Delta n_D) \end{cases}.$$

Logo, substituindo está igualdade em (4.23) e usando que  $(S_w^0, n_D^0)$  é ponto singular, tem-se o seguinte sistema.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\eta}(S_w^0 + \Delta S_w) = \nabla F(S_w^0, n_D^0) \cdot (\Delta S_w, \Delta n_D) \\ \frac{d}{d\eta}(n_D^0 + \Delta n_D) = \nabla G(S_w^0, n_D^0) \cdot (\Delta S_w, \Delta n_D) \end{cases}.$$

Este sistema é simplificado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{d\eta} \Delta S_w \\ \frac{d}{d\eta} \Delta n_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S_w}(S_w^0, n_D^0) & \frac{\partial F}{\partial n_D}(S_w^0, n_D^0) \\ \frac{\partial G}{\partial S_w}(S_w^0, n_D^0) & \frac{\partial G}{\partial n_D}(S_w^0, n_D^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_w \\ \Delta n_D \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

O sistema linear (4.25) é uma aproximação do sistema não linear (4.23) (matriz jacobiana do campo  $(F, G)$ ) em torno dos estados  $-$  e  $+$ , no cálculo de soluções analíticas de sistemas como (4.25) deve ser calculado os autovalores e autovetores deste sistema. Se supor que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são autovalores, e  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são autovetores, então a solução é dado por:

$$\begin{pmatrix} \Delta S_w \\ \Delta n_D \end{pmatrix} = c_1 \gamma_1 e^{\alpha_1 \eta} + c_2 \gamma_2 e^{\alpha_2 \eta}, \quad (4.26)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes determinadas pela condição inicial para o sistema. Outro método é por aproximação numérica usando um software matemático e aplicar um método numérico para resolução de EDO, por exemplo: o método de Runge Kutta.

**Observação 4.1.** *O estudo local do sistema (4.23) também pode ser feito fazendo uso do teorema de Hartman-Grobman, mas para aplicar este teorema, precisamos primeiro ter certeza que os estados  $-$  e  $+$  sejam pontos singulares hiperbólicos.*

#### 4.3.2 Construção da onda viajante

Construir o perfil da onda viajante é encontrar uma solução do sistema (4.23) que conecte os estados equilíbrio ( $-$  e  $+$ ) por uma orbita, isto se determinará fazendo estudo local das orbitas do sistema (4.25) para cada estado de equilíbrio.

O sistema linear (4.25) possui uma matriz de entradas constantes, de ordem  $2 \times 2$ , o comportamento de suas orbitas depende do valores de seus autovalores. Em cada estado de equilíbrio pode-se encontrar os seguintes casos:



- Dois autovalores negativos, chamado atrator.
- Dois autovalores positivos, chamado repulsor.
- Autovalores reais de diferentes sinais, chamado sela.
- Autovalores complexos, chamado atrator ou repulsor dependendo do sinais da parte real do autovalor, negativo ou positivo respectivamente.

Se os dois estados  $-$  e  $+$  são repulsores então não existe orbita que conecte os pontos de equilíbrio do sistema (4.23), isto também ocorre para atratores. Por tanto, nem sempre é possível construir uma solução entre dois estados de equilíbrio. Um caso favorável pode ser que um estado de equilíbrio seja repulsor e outro seja sela.

Supondo que o estado  $(S_w^-, n_D^-)$  seja repulsor e o estado  $(S_w^+, n_D^+)$  seja uma sela para o Sistema (4.25), então pelo Teorema de Hartman-Grobman para o Sistema (4.23) as orbitas localmente em cada estado de equilíbrio se comportam de forma semelhante a um repulsor e sela respectivamente. Assim, se existe uma orbita que liga os dois estados de equilíbrio, deve sair do estado  $-$  e chegar ao estado  $+$ .

Do Teorema da Variedade estável no estado  $+$ , a Variedade estável é tangente ao Espaço estável do sistema linear (4.25) no estado  $+$ . Este fato permite concluir que as orbitas que convergem para o estado  $+$  devem estar na direção do Espaço estável.

Para construir a orbita que liga os estados  $-$  e  $+$  do sistema (4.23), fazemos o seguinte; escolhemos  $x_0 = D + \Delta D$ , onde  $\Delta D = \varepsilon\gamma^1$  ou  $\Delta D = -\varepsilon\gamma^1$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma^1$  é o autovetor do autovalor de parte real negativa; logo resolvemos o sistema (4.23) com a condição inicial  $x_0$ , usando um método numérico.

Este procedimento é aplicado na seguinte seção.

#### 4.3.2.1 Modelo cinético de primeira ordem

A continuação mostramos resultados determinados para o modelo cinético de Primeira ordem do Apêndice A. Para fazer isto substituindo as funções na Equação (4.21), temos que:

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{K_c\phi}{u[1 - f_w^- - v_s(1 - S_w^-)]}(1 - S_w)(n_D^{EL} - n_D). \quad (4.27)$$

A simulação é feita com a Equação (4.14) e esta última, para três casos do parâmetro cinético da espuma  $K_c = 200, 1$  e  $0.01$  com os estados de equilíbrio  $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$  e  $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ .

Da Tabela 1, tem-se que o estado  $+$  é uma sela então este estado vai ser escolhido como o ponto  $D$  e na direção do autovetor  $\gamma^1 = (1, 0)$  toma-se o valor inicial do sistema

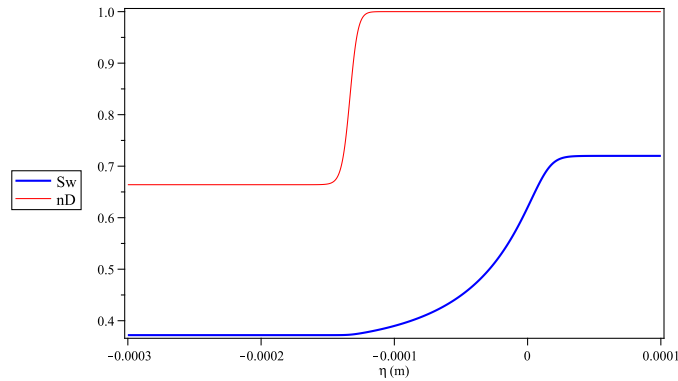


Figura 9 – Ondas viajantes do Sistema (4.23) dos estados  $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$  e  $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ , para  $K_c = 200$ .

Tabela 1 – Autovalores para cada estado equilíbrio, com  $K_c = 200$ .

Estado de equilíbrio	$\lambda_1$	$\lambda_2$	Tipo
–	328939.047	1516588.516	repulsor
+	–202003.1779	817137.649	sela

Tabela 2 – Autovalores para cada estado equilíbrio, com  $K_c = 1$ .

Estado de equilíbrio	$\lambda_1$	$\lambda_2$	Tipo
–	$10984.081 - 48720.384i$	$10984.081 + 48720.384i$	repulsor
+	–202003.178	4085.68825	sela

(4.23):  $(S_w, n_D)(0) = D - \epsilon\gamma^1$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. A Figura 9 mostra a onda viajante para este caso.

Para os seguintes casos das tabelas 2 e 3 os resultados são similares, encontra-se que o estado + é uma sela e o estado – é um repulsor, assim seguindo o mesmo procedimento explicado acima, pode-se obter as figuras 10 e 11, respectivamente.

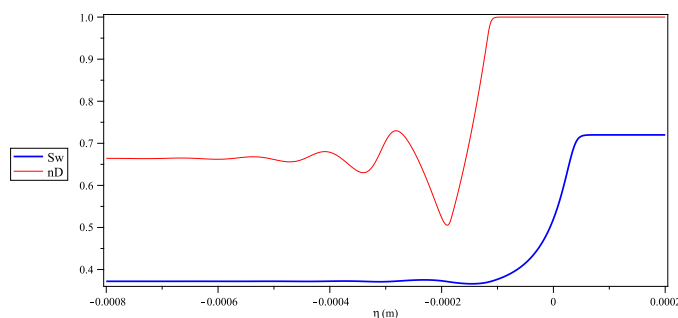


Figura 10 – Ondas viajantes do Sistema (4.23) dos estados  $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$  e  $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ , para  $K_c = 1$ .

Segundo as figuras 9 – 11, observamos que a medida que o parâmetro cinético

$K_c$  diminui, a largura das ondas viajantes se incrementa. Na Fig. 9 para  $K_c = 200$ ,  $S_w$  tem aproximadamente uma largura de  $0.2mm$  e  $n_D$  de  $0.1mm$ ; na Fig. 10 para  $K_c = 1$ ,  $S_w$  é aproximadamente  $0.6mm$  e  $n_D$  de  $0.7mm$ ; e na Fig. 11 para  $K_c = 0.01$ ,  $S_w$  e  $n_D$  experimentam um incremento grande a diferença dos outros casos com uma largura aproximada de  $5mm$  e  $6mm$  respectivamente. Podemos concluir que a medida que diminui a cinética da espuma, a textura de espuma tarda mais para alcançar o estado de equilíbrio.

Tabela 3 – Autovalores para cada estado equilíbrio, com  $K_c = 0.01$ .

Estado de equilíbrio	$\lambda_1$	$\lambda_2$	Tipo
–	10526.6498	2369.5344	repulsor
+	-202003.178	40.8568825	sela

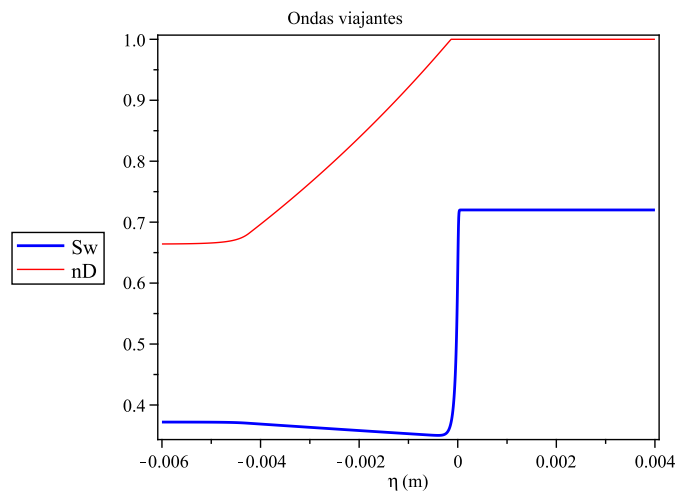


Figura 11 – Ondas viajantes do Sistema (4.23) dos estados  $(S_w, n_D)^- = (0.372, 0.664)$  e  $(S_w, n_D)^+ = (0.72, 1)$ , para  $K_c = 0.01$ .

#### 4.3.2.2 Modelo de Kam

Este é um modelo de geração de bolhas de espuma, apresentado no Apêndice B, a diferença do modelo cinético neste caso pode-se ter múltiplos estados estacionários, como podemos observar na Figura 12, para o fluxo fracionário  $f_w$  definido em (B.5), nesta seção apresentaremos alguns resultados mostrados em [21]. As funções de geração e coalescência de espuma, (B.1) e (B.2) respectivamente, define a Equação para a EDO (4.21) ficando na seguinte equação,

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{\phi(1 - S_w)}{un_{\max}[1 - f_w^- - v_s(1 - S_w^-)]} \left( \frac{C_g}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\nabla p - \nabla p_0}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{-\nabla p_0}{\sqrt{2}} \right) \right) - C_c n_{\max} n_D \left( \frac{S_w}{S_w - S_w^*} \right)^n \right), \quad (4.28)$$

respeito a um estado de equilíbrio, pode ser obtido  $\nabla p$  pela Equação (4.16) e a lei de Darcy (B.4) para a fase líquida,

$$\nabla p = \frac{u(v_s S_w + (f_w - v_s S_w)^-)\mu_w}{kk_{rw}}, \quad (4.29)$$

assim, o sistema de EDO's (4.23) para este modelo fica dependente de  $S_w$  e  $n_D$  na forma de um sistema autônomo. Em EL a função de textura de espuma pela Equação (4.29) é expressado como uma função de  $S_w$ . Na Figura 12 mostra-se as curvas de fluxo fracionário em diferentes valores de  $n_D$  e em EL para os estados injeção e inicial  $(S_w, n_D, f_w)^J = (0.0585849073, 0.65217855, 0.05000000)$  (estado  $-$ ) e  $(S_w, n_D, f_w)^I = (0.9, 0.00388337, 0.9967123)$  (estado  $+$ ) respectivamente.

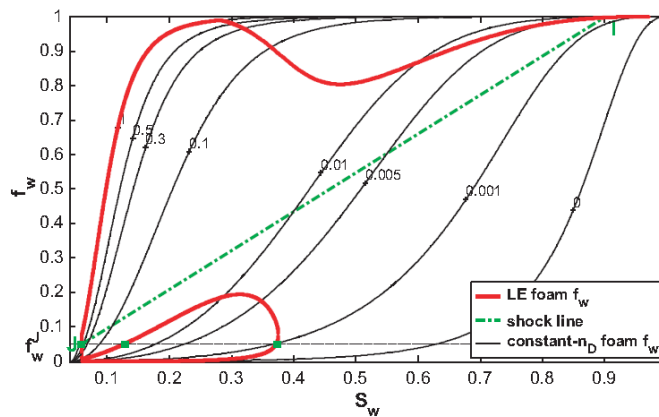


Figura 12 – Para  $u = 5.29 \times 10^{-5} m s^{-1}$ , curva de fluxo fracionário em EL (linha vermelha). As curvas solidas de cor preto representam curvas de fluxo fracionário com textura de espuma constante; os números sobre a curva são a textura adimensional da espuma. A linha horizontal indica a injeção do fluxo fracionário de água de 0.05. Os pontos  $I$  e  $J$  correspondem as condições inicial e de injeção (casos  $C_c = 1$ ,  $C_c = 0.001$ ). A linha pontilhada verde é a solução fluxo fracionário para o choque, ver [21], Fig. 8.

Em [21] se apresenta o estudo do modelo Kam para diferentes velocidades de injeção  $u$ , a sensibilidade dos parâmetros de geração e coalescência  $C_c$  e  $C_g$  respectivamente ( $C_c/C_g$  fixo). Também foi mostrado que o estado  $-$  é um repulsor e o estado  $+$  uma sela, sendo possível a existência de uma onda viajante que liga estes estados. A Figura 13 mostra a onda viajante para a saturação de água sem e com EL, para os estados  $-$  e  $+$  apresentados acima. Aparentemente a transição ocorre numa distância de 0.45m para  $S_w$  e 0.15m para  $n_D$  (não mostrado). Na Figura 14 tem-se a curva de fluxo fracionário atual a qual é determinada substituindo  $S_w$  e  $n_D$  calculado na onda viajante da Figura 13 dentro da Equação B.3, com  $u_g$  substituído da Equação (4.17), logo usar estes na função de fluxo fracionário convencional B.5. Em EL o procedimento é parecido exceto que primeiro deve-se calcular o  $n_D^{EL}$  dentro da onda viajante usando a Equação (B.6) e (4.29).

Na Figura 13 e 14 mostra-se que na onda viajante calculada, o comportamento com ou sem EL são quase idênticos. Isto implica que não tem efeito o parâmetro  $C_c = 1$

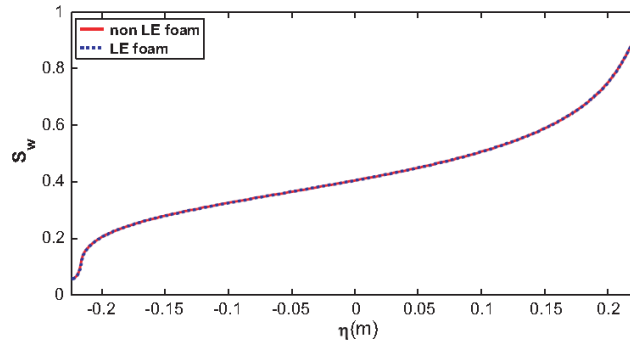


Figura 13 – Saturação de água vs coordenadas onda viajante  $\eta$  para o caso  $C_c = 1$ , ver [21] Figura 9.

sobre a largura da onda viajante, isto é principalmente pela dispersão capilar e a onda viajante pode ser determinada de forma exata supondo EL. Também pode-se ver uma diferença do  $f_w$  com  $S_w$  da Fig. 14 com a mostrada na Fig. 12, porque  $f_w$  depende sobre  $\nabla p$ , a qual é afetado pela pressão capilar na Fig. 14.

Em [21] tem-se estudado outros casos para diferentes parâmetros  $C_c = 0.01$  e  $C_c = 0.001$ , com igual velocidade como na Figura 12; o primeiro não tem alteração, no segundo tem-se uma alteração pelo comportamento em espiral do estado -, igual ao modelo cinético para  $K_c = 1$ . Este resultado é mostrado em [21]. Além disso, em [21] pode-se encontrar o estudo da onda viajante numa velocidade mais baixa  $u = 2.798 \times 10^{-5} m s^{-1}$ ,  $2.42 m/d$ , como também se mostra, a alteração da onda viajante para diferentes valores do parâmetro  $C_c$ , mostradas nas figuras 13 e 15 de [21]; nestas se observa que as ondas viajantes aumentam de largura, que a textura de espuma é pouco observável por ter uma largura muito pequena a diferença da saturação de água.

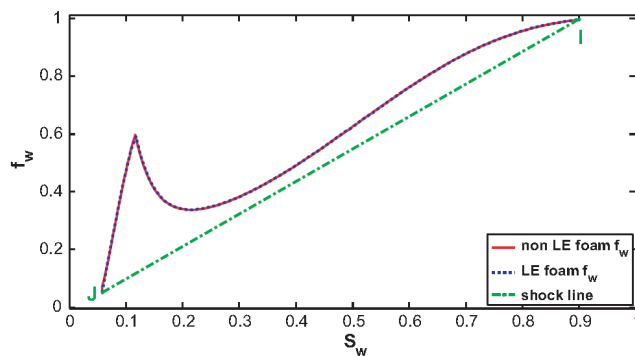


Figura 14 – Fluxo fracionário de água vs saturação de água coordenadas onda viajante  $\eta$  para o caso na Figura 13, ver [21] Fig. 10.

## 5 MODELO DE INJEÇÃO DE ESPUMA

Em vários modelos de injeção de espuma como em [21, 36], se considera a concentração do surfactante constante. Esta condição permite desprezar a concentração do surfactante dentro do modelo, mas este está presente no meio poroso e é um responsável pela criação das bolas de espuma; como pode-se encontrar no artigo [2].

Por tanto, é importante ter um modelo que simule a injeção de espuma que considere a concentração do surfactante dentro deste, por isto neste capítulo se apresenta um modelo que simule a injeção de espuma considerando como variável a concentração de surfactante.

Este modelo é conformado por três equações que são tomadas de maneira semelhantes a outras equações encontradas nos artigos de [21, 36, 2]. O modelo é da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w C_s) + \frac{\partial}{\partial x} (u_w C_s) = -C_s q_w, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) + \frac{\partial}{\partial x} u_w = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_g n_D) + \frac{\partial}{\partial x} (u_g n_D) = C_s q_w, \quad (5.3)$$

onde:  $u_w = u_w(S_w, n_D)$  e  $q_w = q_w(S_w, n_D)$ .  $S_w$ ,  $n_D$  e  $C_s$  são respectivamente saturação de água, textura de espuma e concentração do surfactante, cada uma delas estão em função das variáveis independentes  $x$  e  $t$ , variável espacial e de tempo respectivamente.

O significado físico de cada equação é explicado a seguir. A Equação (5.1) indica o balanço de massa do surfactante similar à equação de balanço do massa do surfactante no artigo [2], as equações (5.2)-(5.3) são similares aos modelos apresentados em [21, 36], onde a Equação (5.3) é o balanço de população para a textura de espuma (dinâmica das lamelas por unidade de volume do gás), com a concentração de surfactante como um termo fonte na equação; e a Equação (5.2) expressa o balanço de massa da água.

Aqui temos que fazer a observação da relação entre as equações (5.1) e (5.3) sobre os termos da produção total (lado direito da equação), onde temos uma relação inversa entre estes, justificado que o balanço de surfactante seja igual e oposto à produção total da espuma, isto é porque o surfactante é consumido para produzir espuma; também tem-se que a produção total da espuma é proporcional à concentração do surfactante na Equação (5.3).

### 5.1 RESOLUÇÃO DO MODELO POR ONDAS VIAJANTES

Nesta seção fazemos a resolução do modelo apresentado pelas equações (5.1)-(5.3), procurando soluções na forma de ondas viajantes. Para fazer isto começamos com uma mudança de variáveis da forma  $\eta = x - vt$ , como é explicado no Capítulo 4, assim as

equações (5.1)-(5.3) ficam seguinte forma:

$$-v \frac{d}{d\eta} (\phi S_w C_s) + \frac{d}{d\eta} (u_w C_s) = -C_s q_w, \quad (5.4)$$

$$-v \frac{d}{d\eta} (\phi S_w) + \frac{d}{d\eta} u_w = 0, \quad (5.5)$$

$$-v \frac{d}{d\eta} (\phi S_g n_D) + \frac{d}{d\eta} (u_g n_D) = C_s q_w. \quad (5.6)$$

Desenvolvendo as derivadas na equação (5.4), obtém-se,

$$\left( -v \frac{d}{d\eta} (\phi S_w) + \frac{d u_w}{d\eta} \right) C_s + (-v \phi S_w + u_w) \frac{d C_s}{d\eta} = -C_s q_w,$$

da Equação (5.5), tem-se que o primeiro termo é zero logo,

$$(-v \phi S_w + u_w) \frac{d C_s}{d\eta} = -C_s q_w. \quad (5.7)$$

Analogamente, desenvolvendo as derivadas na Equação (5.6), obtém-se,

$$\left( -v \frac{d}{d\eta} (\phi S_g) + \frac{d u_g}{d\eta} \right) n_D + (-v \phi S_g + u_g) \frac{d n_D}{d\eta} = C_s q_w.$$

Da Equação (5.5) tem-se que o primeiro termo é zero, logo

$$(-v \phi S_g + u_g) \frac{d n_D}{d\eta} = C_s q_w. \quad (5.8)$$

Como estamos procurando soluções da forma onda viajante, vamos supor que existem os estados  $-$  e  $+$ , que são os estados de equilíbrio para o sistema de EDO's (5.4-5.6). Na Equação (5.5) pode-se ver que respeito a  $\eta$ , a equação é invariante, assim com respeito aos estados  $-$  e  $+$ , tem-se a seguinte igualdade.

$$-v \phi S_w + u_w = -v \phi S_w^- + u_w^- = -v \phi S_w^+ + u_w^+, \quad (5.9)$$

logo, de aqui obtém-se que:

$$v = \frac{u \ f_w^- - f_w^+}{\phi \ S_w^- - S_w^+}, \quad (5.10)$$

isto pode ser escrito de uma forma mais simples,

$$v = \frac{u}{\phi} v_s, \quad (5.11)$$

$$\text{onde } v_s = \frac{f_w^- - f_w^+}{S_w^- - S_w^+}.$$

Tomando respeito ao estado  $-$  para determinar  $u_w$  em (5.9), tem-se:

$$u_w = v \phi (S_w - S_w^-) + u_w^-. \quad (5.12)$$

Como,  $u_g = u - u_w = u - v\phi(S_w - S_w^-) - u_w^-$ , então:

$$u_g = u - u_w^- - v\phi(S_w - S_w^-). \quad (5.13)$$

Para duas fases imiscíveis e incompressíveis num fluxo retilíneo, [8] pp. 25, sabe-se que:

$$u_w = uf_w + k\lambda_g f_w \frac{\partial P_c}{\partial x}, \quad (5.14)$$

como no estado  $-$ , a onda viajante está em EL,  $\frac{\partial P_c^-}{\partial x} = 0$ , então da Equação (5.14),

$$u_w^- = uf_w^-, \quad (5.15)$$

logo, juntando (5.12) e (5.14) em coordenadas de onda viajante e substituindo (5.15), tem-se que:

$$uf_w + k\lambda_g f_w \frac{dP_c}{dS_w} \frac{dS_w}{d\eta} = v\phi(S_w - S_w^-) + uf_w^-,$$

assim, substituindo (5.11), obtêm-se uma EDO para  $S_w$  igual que em (4.14),

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{u[(f_w - v_s S_w) - (f_w - v_s S_w)^-]}{-k\lambda_g f_w \frac{dP_c}{dS_w}}. \quad (5.16)$$

Também, pode-se determinar uma EDO para  $C_s$ , substituindo (5.11), (5.12) e (5.15) na Equação (5.7), assim:

$$\frac{dC_s}{d\eta} = -\frac{C_s q_w}{u(-v_s S_w^- + f_w^-)}. \quad (5.17)$$

Analogamente, na Equação (5.8), substituindo (5.11), (5.13) e (5.15), têm-se uma EDO para  $n_D$  similar a (4.21), da seguinte forma:

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{C_s q_w}{u(-v_s \phi(1 - S_w^-) + 1 - f_w^-)}. \quad (5.18)$$

Das equações (5.16-5.18) obtêm-se um sistema de EDO's autônomo, onde as condições de fronteira são os estados  $-$  e  $+$ ,

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = \frac{u[(f_w - v_s S_w) - (f_w - v_s S_w)^-]}{-k\lambda_g f_w \frac{dP_c}{dS_w}}, \\ \frac{dC_s}{d\eta} = -\frac{C_s q_w}{u(-v_s S_w^- + f_w^-)}, \\ \frac{dn_D}{d\eta} = \frac{C_s q_w}{u(-v_s(1 - S_w^-) + 1 - f_w^-)}. \end{cases} \quad (5.19)$$

com as condições de fronteira,

$$\begin{cases} \eta \rightarrow -\infty, & S_w \rightarrow S_w^-, & n_D \rightarrow n_D^-, & C_s \rightarrow C_s^-, \\ \eta \rightarrow \infty, & S_w \rightarrow S_w^+, & n_D \rightarrow n_D^+, & C_s \rightarrow C_s^+. \end{cases} \quad (5.20)$$



No Sistema (5.19) a segunda e terceira equação podem formar uma equação invariante respeito a  $\eta$ ,

$$\frac{d}{d\eta} \left( (-v\phi S_w^- + u_w^-)C_s + (-v\phi(1 - S_w^-) + u - u_w^-)n_D \right) = 0,$$

logo, com respeito ao estado  $-$  tem-se a seguinte igualdade:

$$(-v\phi S_w^- + u_w^-)C_s + (-v\phi(1 - S_w^-) + u - u_w^-)n_D = (-v\phi S_w^- + u_w^-)C_s^- + (-v\phi(1 - S_w^-) + u - u_w^-)n_D^-. \quad (5.21)$$

Da Expressão (5.21), pode-se concluir que a  $C_s$  e  $n_D$  tem uma relação linear, o que implica, que basta obter um deles para determinar o comportamento do outro. Além disso, também pode-se obter o mesmo resultado com o estado  $+$ .

Para concluir esta seção, observe que das equações (5.9) e (5.14) se consegui mostrar a EDO (5.16), e fazer simplificações nas equações (5.7) e (5.8) para determinar o Sistema (5.19). Por isto consideraremos um novo sistema de equações,

$$\begin{cases} -v\phi S_w + u_w &= -v\phi S_w^- + u_w^- = -v\phi S_w^+ + u_w^+, \\ (-v\phi S_w^- + u_w^-)C_s + (-v\phi S_g^- + u_g^-)n_D &= (-v\phi S_w^- + u_w^-)C_s^- + (-v\phi S_g^- + u_g^-)n_D^-. \end{cases} \quad (5.22)$$

onde, os estados  $+$  e  $-$  são parâmetros do modelo.

### 5.1.1 Ondas viajantes para o modelo cinético sem capilaridade

Nesta subseção, faz-se o estudo da aplicação do modelo de injeção e espuma para o modelo apresentado no Apêndice A, modelo cinético de primeiro ordem. No modelo a mobilidade do gás se reduz, devido à redução da permeabilidade do gás por um fator que depende de forma linear da textura de espuma. Para determinar soluções na forma de onda viajante consideraremos o gradiente de pressão capilar desprezível, está hipótese permite simplificar a primeira equação do sistema (5.22) e obter uma expressão mais simples.

Seja a hipótese de  $\frac{\partial P_c}{\partial x} = 0$ , na Equação (5.14) tem-se que:  $u_w = u f_w$ , logo substituindo (A.7) em  $f_w$  e depois em (5.14), obtém-se a igualdade,

$$u \frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \frac{k_{rg}^0}{\mu_g MFR(n_D)}} = v\phi(S_w - S_w^-) + u_w^-, \quad (5.23)$$

como  $v = \frac{u}{\phi} v_s$  e  $u_w^- = u f_w^-$ , então (5.23) fica da seguinte forma:

$$\frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \frac{k_{rg}^0}{\mu_g MFR(n_D)}} = v_s(S_w - S_w^-) + f_w^-. \quad (5.24)$$

Logo, da Equação (5.24) pode-se obter que:

$$MFR(n_D) = \frac{\mu_w k_{rg}^0}{k_{rw} \mu_g} \left( \frac{v_s(S_w - S_w^-) + f_w^-}{1 - f_w^- - v_s(S_w - S_w^-)} \right). \quad (5.25)$$

Do Apêndice A, a Equação (A.3) define a aplicação  $MFR(n_D) = 18500n_D + 1$ , então disto pode-se substituir em (5.25) e determinar  $n_D$  em função de  $S_w$ , já que  $k_{rw}$  e  $k_{rg}^0$  são definidas por  $S_w$  (equações A.5 e A.6 respectivamente). Por tanto:

$$n_D(S_w) = \frac{1}{18500} \left[ -1 + \frac{\mu_w k_{rg}^0}{k_{rw} \mu_g} \left( \frac{v_s(S_w - S_w^-) + f_w^-}{1 - f_w^- - v_s(S_w - S_w^-)} \right) \right]. \quad (5.26)$$

Assim, pela segunda equação de (5.22), pode-se expressar  $C_s$  em função de  $S_w$ ,

$$C_s(S_w) = - \left( \frac{-v_s S_g^- + f_g^-}{-v_s S_w^- + f_w^-} \right) (n_D(S_w) - n_D^-) + C_s^-, \quad (5.27)$$

onde  $S_g^- = 1 - S_w^-$ , e  $f_g^- = 1 - f_w^-$ .

De as equações (5.26) e (5.27), pode-se concluir que somente se precisa resolver  $S_w$ , para determinar as soluções de  $C_s$  e  $n_D$ . Para determinar a solução de  $S_w$ , observe da Equação (5.26) que:  $\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{dn_D}{dS_w} \frac{dS_w}{d\eta}$ , depois substituindo na Equação (5.18) tem-se:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{C_s q_w}{(-v\phi S_g^- + u_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}}, \quad (5.28)$$

assim, pode-se obter uma EDO não linear autônoma em função de  $S_w$ . Agora, do Apêndice A, das equações (A.2) e de (5.26) obtém-se que:

$$q_w(S_w) = q_w(S_w, n_D(S_w)) = \frac{\phi}{n_{max}} S_g [r_g - r_c] = \phi K_c (1 - S_w) (n_D^{EL}(S_w) - n_D(S_w)). \quad (5.29)$$

#### 5.1.1.1 Determinação dos estados de equilíbrio

Nesta seção determinamos valores dos estados  $-$  e  $+$ , para demonstrar a existência de solução na forma de onda viajante, para a Equação (5.28). Para isto fazemos testes de valores dos estados  $+$  e  $-$ , mas pelo termo  $\frac{dn_D}{dS_w}$  encontramos descontinuidades entre os estados de equilíbrio. Também, temos o caso de que exista outro estado de equilíbrio, pelo termo  $q_w$ .

Começamos com os cálculos para determinar os estados  $-$  e  $+$ , os quais devem satisfazer o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = \frac{C_s q_w}{(-v\phi S_g^- + u_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}}, \\ (-v_s S_g^- + f_g^-)(n_D - n_D^-) = (-v_s S_w^- + f_w^-)(C_s - C_s^-). \end{cases} \quad (5.30)$$

Deste Sistema (5.30) os estados de equilíbrio devem satisfazer que:

1.  $C_s = 0$  ou  $q_w = 0$ , de (5.29) implica que:  $C_s = 0$  ou  $n_D(S_w) = n_D^{EL}(S_w)$ .
2.  $\frac{dn_D}{dS_w} \neq 0$  a igualdade fornece pontos de descontinuidade.

De forma geral desenvolvendo  $\frac{dn_D}{dS_w} = 0$  para os estados + e -, que vamos supor que existem, obtém-se a seguinte equação:

$$(1 - S)^{0.3} S^{3.2} \left( \frac{(v_s S_w + \tilde{K})(1 - \tilde{K} - v_s S_w)(2.9S - 4.2)}{1 - S_{gr} - S_{wc}} + v_s S(1 - S) \right) = 0, \quad (5.31)$$

onde:  $S = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{gr} - S_{wc}}$ ,  $\tilde{K} = -v_s S_w^- + f_w^-$  e  $v_s$  definida em (5.11) de aqui tem-se que:

$$S_w = S_{wc} \text{ e } S_w = 1 - S_{gr},$$

são pontos de descontinuidades, substituindo os valores da tabela 4 na Equação (5.31) e simplificando fatores comuns diferentes de zero, obtém-se que:

$$\begin{aligned} -2.9v_s S_w^3 + (2.9 - 5.8\tilde{K} + 3.184v_s - 1)S_w^2 + \left( \frac{2.9\tilde{K}(1 - \tilde{K})}{v_s} + 6.368\tilde{K} - 2.164 \right) S_w \\ + \left( \frac{-3.184\tilde{K}(1 - \tilde{K})}{v_s} - 0.164 \right) = 0, \end{aligned}$$

logo, resulta uma equação cúbica da forma:

$$\begin{aligned} S_w^3 + \left( \frac{1.9 - 5.8\tilde{K} + 3.184v_s}{-2.9v_s} \right) S_w^2 + \left( \frac{2.9\tilde{K}(1 - \tilde{K})/v_s + 6.368\tilde{K} - 2.164}{-2.9v_s} \right) S_w \\ + \left( \frac{-3.184\tilde{K}(1 - \tilde{K})/v_s - 0.164}{-2.9v_s} \right) = 0. \quad (5.32) \end{aligned}$$

Resolve-se esta última equação para dois estados cujos valores são dados e, consequentemente, obtém-se as raízes. Para saber que par de estados são corretos verificamos se estas raízes estão entre os estados dados. Para terminar, fazemos um análise se existe outro estado de equilíbrio entres os estados dados. Consideraremos os seguintes 3 exemplos que mostram o sinal do campo da EDO (5.30) para alguns valores de estados de equilíbrio obtidos numericamente.

**Exemplo 5.1.** *Sejam os seguintes estados  $(S_w, n_D, C_s) = (0.31, 0, 0.001)$  e  $(S_w, n_D, C_s) = (0.41, 1, -1.67642)$ , substituindo na equação cubica (5.32) estes estados obtém-se raízes que estão entre os estados de  $S_w$  como mostra-se na figura 15 que são indicados por pontos brancos, além disso temos um ponto de equilíbrio de  $q_w$  entre os estados de  $S_w$  indicado por um ponto preto. Assim podemos concluir que para este caso não é possível a existência de uma onda viajante que ligue os pontos de equilíbrio.*

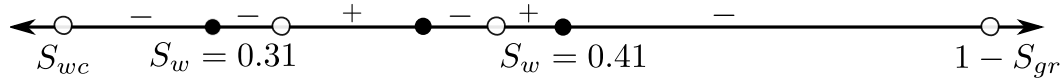


Figura 15 – Figura que mostra o sinal do campo da EDO do sistema (5.30), para os estados de  $S_w = 0.31$  e  $S_w = 0.41$ , aqui indica-se os pontos de equilíbrio por pontos pretos e as descontinuidades por pontos brancos.

**Exemplo 5.2.** *Sejam os seguintes estados  $(S_w, n_D, C_s) = (0.34, 0, 0.001)$  e  $(S_w, n_D, C_s) = (0.5, 1, -1.41623)$ , substituindo na equação cubica (5.32) estes estados, obtém-se raízes que estão fora dos estados  $S_w$  como mostra-se na figura 16, mas tem-se um ponto de equilíbrio de  $q_w$  entre estes estados indicado por um ponto preto.*

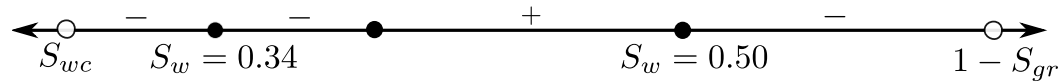


Figura 16 – Figura que mostra o sinal do campo da EDO do sistema (5.30), para os estados  $S_w = 0.34$  e  $S_w = 0.5$ , aqui indica-se os pontos de equilíbrio por pontos pretos e as descontinuidades por pontos brancos.

**Exemplo 5.3.** *Sejam os seguintes estados  $(S_w, n_D, C_s) = (0.37, 0, 0)$  e  $(S_w, n_D, C_s) = (0.566, 1, -1.153691)$ , substituindo na equação cubica (5.32) estes estados, obtém-se raízes que estão fora dos estados  $S_w$ , como mostra-se na figura 17, também tem-se que não existem pontos de equilíbrio de  $q_w$  entre eles. Assim, pode-se concluir que existe uma onda viajante que liga os estados dados.*

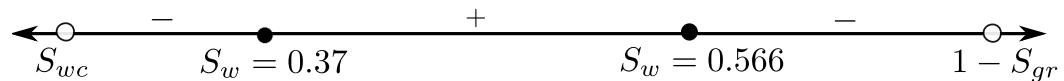


Figura 17 – Figura que mostra o sinal do campo da EDO do sistema (5.30), para os estados  $S_w = 0.37$  e  $S_w = 0.566$ , aqui indica-se os pontos de equilíbrio por pontos pretos e as descontinuidades por pontos brancos.

Todos os cálculos foi feito com MAPLE. A seguir mostramos o seguinte teorema que demonstra a existência de uma orbita que liga os estados de equilíbrio do Exemplo 5.3.

**Teorema 5.1.** *Seja a EDO:*

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{C_s K_c \phi(1 - S_w)(n_D^{EL}(S_w) - n_D)}{u(-v_s S_w^- + f_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}(S_w)}, \quad (5.33)$$

com os estados de equilíbrio  $S_w^- = 0.37$  e  $S_w^+ = 0.566$ , então existe uma orbita que liga os estados  $-$  e  $+$ .

*Demonstração.* Das equações (5.26) e (5.27) temos que:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = - \frac{(n_D(S_w) - A/(-v_s S_g^- + f_g^-))K_c \phi(1 - S_w)(n_D^{EL}(S_w) - n_D(S_w))}{u(-v_s S_w^- + f_w^-) \frac{dn_D}{dS_w}(S_w)}, \quad (5.34)$$

onde  $A = (-v_s S_g^- + f_g^-)n_D^- + (-v_s S_w^- + f_w^-)C_s^-$ .

Fazendo o análise dos valores de descontinuidades de  $\frac{dn_D}{dS_w} = 0$ , como já calculamos nas equações (5.31) e (5.32) as descontinuidades são:

$$S_w = S_{wc} \text{ ou } S_w = 1 - S_{gr},$$

e as raízes da equação cubica (5.32) para os estados  $-$  e  $+$ , está equação é da forma:

$$S_w^3 - 1.917102S_w^2 + 1.176104S_w - 0.221337 = 0,$$

então as raízes são:  $S_w = 1.055268114$ ,  $S_w = 0.457873 + 0.009852i$ ,  $S_w = 0.457873 - 0.009852i$ .

Como os estados  $S_w^-$  e  $S_w^+$  pertencem ao intervalo  $(S_{wc}, 1 - S_{gr})$  e a raiz real é maior que 1, então não existem descontinuidades em  $(S_w^-, S_w^+)$ . Também pode-se mostrar que  $\frac{dn_D}{dS_w} > 0$ , para todo  $S_w \in (S_w^-, S_w^+)$ .

Entre os estados  $S_w^-$  e  $S_w^+$  não existem outros estados de equilíbrio da EDO (5.33) para  $C_s^- = 0$ , em efeito seja:

$$\begin{aligned} \frac{dS_w}{d\eta} = 0 &\Leftrightarrow n_D(S_w) = A/(-v_s S_g^- + f_g^-) \text{ ou } S_w = 1 \text{ ou } n_D(S_w) = n_D^{EL}(S_w), \\ &\Leftrightarrow n_D(S_w) = n_D^- + \frac{-v_s S_w^- + f_w^-}{-v_s S_g^- + f_g^-} C_s^- \text{ ou } S_w = 1 \text{ ou } n_D(S_w) = n_D^{EL}(S_w), \end{aligned}$$

por (5.27) temos  $n_D(S_w) = 0$  para  $S_w = S_w^-$ ,  $n_D(S_w) > 0$  e  $n_D(S_w) > n_D^{EL}(S_w)$ , para  $S_w \in (S_w^-, S_w^+)$ ; além disso sabe-se que  $S_w < 1$ ,  $n_D^- = n_D^{EL}(S_w^-)$  e  $n_D^+ = n_D^{EL}(S_w^+)$ . Assim não existem estados de equilíbrio em  $(S_w^-, S_w^+)$ .

A  $\frac{dS_w}{d\eta} > 0$ , de fato, para a EDO (5.33) o sinal só depende dos fatores  $n_D(S_w)$  e  $(n_D(S_w) - n_D^{EL}(S_w))$ , pela definições destas funções tem-se que,

$$n_D(S_w) > 0 \quad \text{e} \quad (n_D^{EL} - n_D(S_w)) > 0, \quad \text{para todo } S_w \in (S_w^-, S_w^+),$$

assim, o sinal é positivo. Isto observa-se na Figura 17.

Com este último fato tem-se que se uma condição inicial  $S_{w0} = S_w(\eta_0) \in (S_w^-, S_w^+)$ , então

$$S_w(\eta) > S_{w0}, \quad \text{para } \eta > \eta_0, \text{ e, } S_w(\eta) < S_{w0}, \quad \text{para } \eta < \eta_0,$$

se,  $I = (\alpha, \beta)$  é o intervalo maximal, pode-se concluir que  $\lim_{\eta \rightarrow \beta} S_w(\eta) = S_w^+$ , analogamente para o estado  $-$ .

Assim, toda orbita que tem como condição inicial  $S_{w0} = S_w(\eta) \in (S_w^-, S_w^+)$ , tem como extremos abertos  $S_w^-$  e  $S_w^+$ .  $\square$

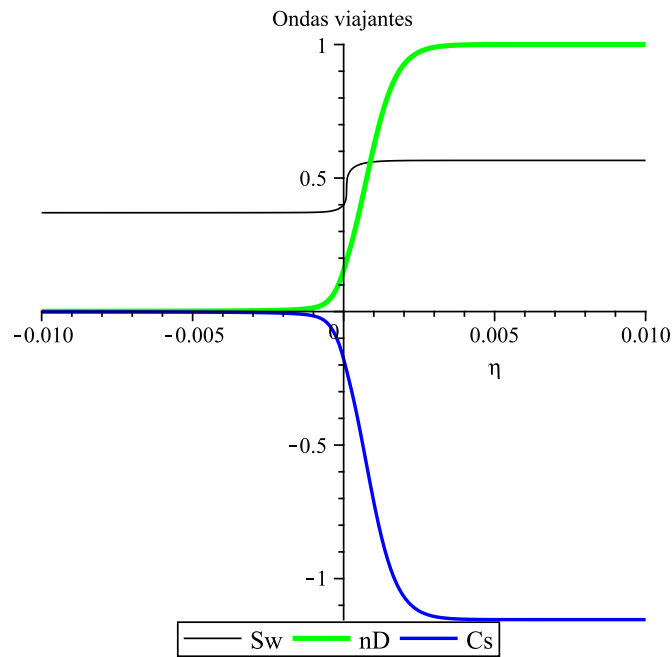


Figura 18 – Ondas viajantes do sistema (5.30) para o estados  $(S_w, n_D, C_s)^- = (0.37, 0, 0)$  e  $(S_w, n_D, C_s)^+ = (0.566, 1, -1.153691)$ , para  $K_c = 1$ .

A Figura 18 mostra as soluções em forma onda viajante para o modelo (5.1 – 5.3), mas esta solução não é fisicamente possível, pelo comportamento da onda de  $C_s$  que toma valores negativos.

### 5.1.2 Ondas viajantes para o modelo cinético com capilaridade

Nesta seção desenvolvemos o modelo cinético do Apêndice A considerando a capilaridade a diferença da seção anterior, também se usará fatos encontrados na seção 5.1, para determinar de maneira simples a solução na forma de onda viajante. Todos os cálculos são feitos supondo que existem os estados + e –.

Da Equação (5.21), obtém-se que:

$$C_s = - \left( \frac{-v_s S_g^- + f_g^-}{-v_s S_w^- + f_w^-} \right) (n_D - n_D^-) + C_s^-. \quad (5.35)$$

Derivando a Equação (5.35) respeito a  $\eta$  tem-se que:

$$\frac{dC_s}{d\eta} = - \left( \frac{-v_s S_g^- + f_g^-}{-v_s S_w^- + f_w^-} \right) \frac{dn_D}{d\eta}, \quad (5.36)$$

esta equação relaciona as derivadas de  $C_s$  e  $n_D$ , conseguindo que o sistema de EDO's (5.19) seja simplificado para um sistema de ordem 2, para demonstrar isto, os cálculos serão

feitos em função de  $n_D$  e  $S_w$ . Começamos substituindo (5.35) em  $\frac{dn_D}{d\eta}$  do sistema (5.19),

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{(-n_D + A/(-v_s S_g^- + f_g^-))q_w}{u(-v_s S_w^- + f_w^-)}, \quad (5.37)$$

onde,  $A = (-v_s S_g^- + f_g^-)n_D^- + (-v_s S_w^- + f_w^-)C_s^-$ .

Agora, tomando a EDO de  $\frac{dS_w}{d\eta}$  do sistema (5.19) e juntando com a Equação (5.37) conseguimos o sistema de ordem 2 procurado,

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = \frac{u[(f_w - f_w^-) - v_s(S_w - S_w^-)]}{-k\lambda_g f_w \frac{dP_c}{dS_w}} \\ \frac{dn_D}{d\eta} = \frac{-[n_D - A/(-v_s S_g^- + f_g^-)]q_w}{u(-v_s S_w^- + f_w^-)} \end{cases} \quad (5.38)$$

### 5.1.2.1 Determinação dos pontos de equilíbrio

Para demonstrar que existe uma solução na forma de onda viajante para o sistema 5.38, vamos começar procurando os estados de equilíbrio, sejam as equações,

$$\frac{dS_w}{d\eta} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{dn_D}{d\eta} = 0,$$

na primeira igualdade deve satisfazer:  $f_w = v_s(S_w - S_w^-) + f_w^-$ , a parte do denominador não gera descontinuidades porque estas expressões não mudam de sinal no domínio de  $S_w \in [S_{wc}, 1 - S_{gr}]$  e são contínuas. Para a segunda igualdade tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{dn_D}{d\eta} = 0 &\Leftrightarrow n_D = \frac{A}{(-v_s S_g^- + f_g^-)} \quad \text{ou} \quad q_w = 0, \\ &\Leftrightarrow n_D = n_D^- + \frac{-v_s S_w^- + f_w^-}{-v_s S_g^- + f_g^-} C_s^- \quad \text{ou} \quad n_D = n_D^{EL}(S_w). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Das equações (5.39) pode-se ver na primeira equação que  $n_D \neq n_D^-$  ou  $n_D^+$  se  $C_s^-$  ou  $C_s^+$  seja diferente de zero, respectivamente, também  $n_D = n_D^-$  ou  $n_D^+$  se  $C_s^-$  ou  $C_s^+$  é zero respectivamente. Da segunda Equação  $n_D = n_D^{EL}(S_w)$  temos a opção de definir os estados  $-$  e  $+$  para  $n_D$  em função de  $S_w^-$  e  $S_w^+$ .

### 5.1.2.2 Determinação da onda viajante

Nesta seção mostraremos numericamente a existência de uma onda viajante que liga dois estados de equilíbrio dados, usando o programa Maple. Os estados de equilíbrio para  $S_w$  e  $n_D$  são tomados de [21].

Sejam os estados de equilíbrio  $(S_w, n_D, C_s)^- = (0.372, 0.66403, 0)$  e  $(S_w, n_D, C_s)^+ = (0.72, 1, -0.38335)$ , tomando o estado  $-$ , e dado um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno para

o sistema 5.38 escolhemos um dado inicial da forma:  $S_w(0) = S_w^- + \epsilon$  e  $n_D(0) = n_D^- + \epsilon$ , obtém-se o seguinte problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = \frac{u[(f_w - f_w^-) - v_s(S_w - S_w^-)]}{-k\lambda_g f_w \frac{dP_c}{dS_w}} \\ \frac{dn_D}{d\eta} = \frac{-[n_D - A/(-v_s S_w^- + f_g^-)]q_w}{u(-v_s S_w^- + f_w^-)} \end{cases}, \quad \begin{cases} S_w(0) = S_w^- + \epsilon \\ n_D(0) = n_D^- + \epsilon. \end{cases}, \quad (5.40)$$

resolvendo numericamente (5.40) temos o seguinte resultado mostrado na Figura 19

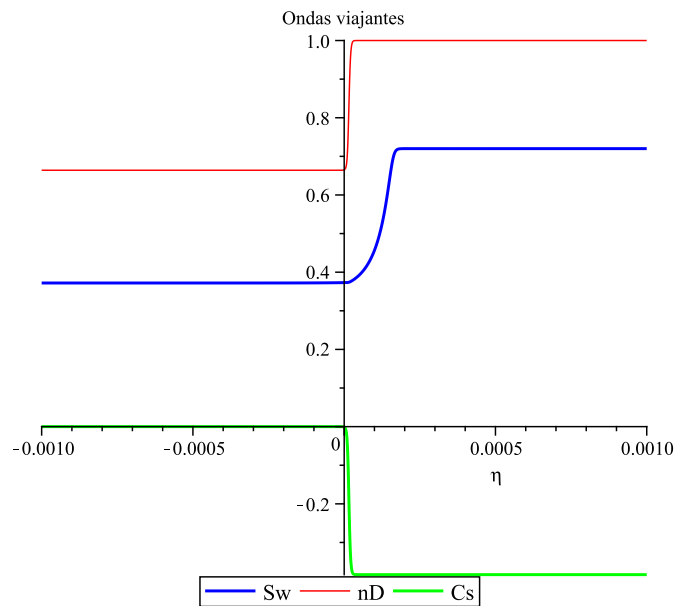


Figura 19 – Ondas viajantes do sistema (5.40) para o estados  $(S_w, n_D, C_s)^- = (0.372, 0.66403, 0)$  e  $(S_w, n_D, C_s)^+ = (0.72, 1, -0.38335)$ , para  $K_c = 200$ .

Por tanto, na Figura 19 observa-se que é possível encontrar ondas viajantes para o sistema (5.40), também ve-se que para  $S_w$  e  $n_D$  as ondas viajantes são fisicamente corretas e tem um comportamento similar ao mostrado em [21], ver Figura 9; mas em  $C_s$  não é fisicamente correta pelos valores negativos.



## 6 DISCUSSÃO

Neste trabalho propomos um novo modelo para a injeção de Espuma (5.1)-(5.3), que considera a concentração do surfactante ( $C_s$ ), supondo que a geração total de bolhas de espuma depende proporcionalmente da concentração do surfactante e que o balanço de ( $C_s$ ) é igual em quantidade mas com sinal contrario pelo consumo do surfactante para a geração de espuma. Todo este modelo é feito usando os parâmetros e funções do modelo de geração de espuma do Apêndice A.

No Capítulo 4 é desenvolvido, o modelo de injeção de espuma apresentado em [21], o qual está conformado por duas equações: uma para o balanço de massa e a outra de balanço da textura de espuma. Conseguimos fazer as simulações e obter soluções na forma de onda viajante para  $S_w$  e  $n_D$ . Mostrando resultados similares aos obtidos em [21] para o modelo cinético de primeira ordem do Apêndice A. Observamos que diminuindo o parâmetro cinético  $K_c$ , aumento a largura das ondas viajantes.

Procurar a existência de ondas viajantes que ligam dois estados de equilíbrio dado, fazendo uma mudança de variáveis transforma o modelo de injeção de espuma em um sistema de EDO's autônoma (4.23). O análise local dos estados de equilíbrio deste sistema, pelo teorema de Hartman-Grobman se demonstra que o estado  $+$  se comporta como um repulsor e o estado  $-$  uma sela. Se existe solução na forma de onda viajante, pelo teorema da Variedade estável, a solução deve convergir ao estado  $-$  na direção da Variedade estável deste estado. Este análise melhora o apresentado em [21] para construir as ondas viajantes de uma maneira mais geral.

No Capítulo 5 o modelo de injeção de espuma (5.1)-(5.3), generaliza o apresentado em outros modelos [21, 36], este é resolvido procurando ondas viajantes (5.38). Supondo que o gradiente de pressão capilar é desprezível, nos leva expressar a textura de espuma  $n_D$  e a concentração do surfactante  $C_s$  em função de  $S_w$ , e obter uma EDO para  $S_w$  definida de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ . A Equação (5.33) é resolvida numericamente para dois estados de equilíbrio dados, assim  $n_D$  e  $C_s$  estão determinadas numericamente; o Teorema 5.33 demonstra a existência da onda viajante. Com capilaridade o modelo se simplifica num sistema de EDO's com duas equações (5.38), que é resolvida numericamente para dois estados equilíbrios. Em cada caso se mostrou as soluções nas figuras 18 e 19, mas em  $C_s$  o resultado não é físico.

Todos os cálculos numéricos foi feito com o programa Maple.

## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Existe uma dependência inversa da largura da onda viajante com o parâmetro cinético  $K_c$  para o modelo cinético de primeira ordem. Assim, podemos saber que valor é ótimo para a simulação ou experimentação em laboratório.

Pelo análise local nos estados de equilíbrio de um sistema de EDO's de ordem 2, podemos conseguir uma representação geométrica do comportamento local das orbitas, garantido pelos teoremas de Hartman-Grobman e Variedade estável. Em dois estados de equilíbrio, repulsor e sela, foi mostrado que a construção de uma orbita que liga estes estados é possível, determinando a orbita usando métodos numéricos.

O modelo de injeção de espuma (5.1)-(5.3) generaliza o apresentado em [21] para o modelo cinético de primeira ordem, mostrando o comportamento da concentração do surfactante. Com a hipótese, gradiente capilar desprezível conseguimos reduzir o análise para determinar as soluções do sistema de EDO's. Foi possível mostrar soluções em forma de ondas viajantes, mas com um comportamento não físico para a concentração de surfactante.

Para trabalhos futuros se procurará soluções físicas para este novo modelo, fazer o estudo analítico da existência de ondas viajantes no Sistema (5.40). Também, resolver o modelo (5.1)-(5.3) como uma lei de conservação, para um problema de Riemann. Determinar a recuperação de óleo, relacionando-o com o modelo novo. Estudar soluções em forma de onda viajante para outros termo fonte de geração de espuma.

## REFERÊNCIAS

- [1] FALLS, A. H.; HIRASAKI, G. J.; PATZEK, T. W.; GAUGLITZ, P. A.; MILLER, D. D.; RATULOWSKI, J. *Development of a mechanism foam simulator: the population balance and generation by snap-off*, SPERE 3, p. 884-892, 1988.
- [2] FRIEDMANN, FRANCOIS; CHEN, W. H.; GAUGLITZ, P. A. *Experimental and simulation study of high-temperature foam displacement in porous media*, SPE , 1991.
- [3] SHAN, D.; ROSSEN, W. R. *Optimal Injection Strategies for Foam IOR*, SPEJ 9, p. 132-150, 2004.
- [4] KOVSCEK, A. R.; PATZEK, T. W.; RADKE, C. J. *A mechanistic population balance model for transient and steady-state foam in boise sandstone*, Chem. Eng. Sci. 50, p. 3783-3799, 1995.
- [5] THORAT, RAHUL; BRUINING, HANS *Foam Flow Experiments. I. Estimation of the Bubble Generation-Coalescence Function* Transp. Porous Med., p. 53-76, 2016.
- [6] LAKE, LARRY W. *Enhanced Oil Recovery*, New Jersey, Prentice Hall, 1989.
- [7] DAKE, L. P. *Fundamentals of Reservoir Engineering*, ELSEVIER, 1983.
- [8] CHEN, ZHANGXIN; HUAN, GUANREN; MA, YUANLE *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Philadelphia, SIAM, 2006.
- [9] KLEPPE, J. *Notas de aula: Reservoir Recovery Techniques*, [www.ipt.ntnu.no/kleppe/TPG4150](http://www.ipt.ntnu.no/kleppe/TPG4150), Fall semester, 2015.
- [10] KAM, S. I. *Improved mechanistic foam simulation with foam catastrophe theory*, Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects 318, p. 62-77, 2008.
- [11] CHENG, L.; REME, A. B.; SHAN, D.; COOMBE, D. A.; ROSSEN, W. R. *Simulating foam processes at high and low foam qualities*, Paper SPE 59287 Presented at the SPE/DOE Enhanced Oil Recovery Symposium, Tulsa OK, abr. 2000.
- [12] ROSSEN, W. R.; BRUINING J. *Foam displacements with multiple steady states*, SPEJ 12, p. 5-18, 2007.
- [13] COURANT, R.; FRIEDRICHS K. *Supersonics Flow and Shock Waves*, New York: John Wiley, 1948.
- [14] GELFAND I. M. *Some problems in the theory of quasi-linear equations*, Usp. Mat. Nauk 14, p 87-158, 1963, Eng. transl. in Amer. Math. Soc. Trans. n. 29, p. 295-381.
- [15] VASSEMDEN, F.; HOLT, T. *Experimental foundation for relative permeability modeling of foam*, SPERE 3 , p. 179-185, 2000.
- [16] ROSSEN, W. R.; ZEILINGER, S. C.; SHI, J. L.; LIM, M. T. *Simplified mechanistic simulation of foam processes in porous media*, SPEJ 4, p. 279-287, 1999.
- [17] KOVSCEK, C. J.; RADKE, C. J. *Fundamentals of foam transport in porous media*, in: Schramm(Ed.), *Foams: Fundamentals and Applications in the Petroleum Industry*, ACS Symposium Series No. 242, American Chemical Society, Washington, DC, 1994, pp. 115-163.

- [18] ROSSEN, W. R. *Foams in enhanced oil recovery*, in: Prud'homme R. K.; Khan S.(Eds.), *Foams: Theory, Measurements and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1996.
- [19] CHEN, Q.; GERRITSEN, M. G.; KOVSCEK, A. R. *Modeling foam displacement with the local-equilibrium approximation: theory and experimental verification*, SPEJ 15, p. 171-183, 2010.
- [20] ASHOORI, E.; MARCHESIN, D.; ROSSEN, W. R. *Dynamic foam behavior in the entrance region of a porous medium*, Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects 377, p. 217-227, 2011.
- [21] ASHOORI, E.; MARCHESIN, D.; ROSSEN W. R. *Roles of transient and local equilibrium foam behavior in porous media: Traveling wave*, Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects 377, p. 228-242, 2011.
- [22] ZHOU, Z. H.; ROSSEN, W. R. *Applying fractional-flow theory to foam processes at the limiting capillary pressure*, SPE Adv. Technol. 3, p. 154-162, 1995.
- [23] KHATIB, Z. J.; HIRASAKI G. J.; FALLS A. H. *Effects of capillary pressure on coalescence and phase mobilities in foams flowing through porous media*, SPERE 3, 1998, p. 919-926.
- [24] FEJOLI, R. F.; ROMERO, O. O. *Modelagem computacional da injeção de espuma em reservatórios de petróleo*, LAJER, 2014.
- [25] PERSOFF, P.; RADKE, C. J.; PRUESS, K.; BENSON, S. M.; WITHERSPOON, P. A. *A laboratory investigation of foam flow in sandstone at elevated pressure*, SPERE 6, p. 365-372, 1991.
- [26] CHAPIRO, G.; MAILYBAEV, A. A.; DE SOUZA A. J.; MARCHESIN, D.; BRUINING, J. *Asymptotic approximation of long-time solution for low temperature filtration combustion*, Computational Geosciences 16, no. 3, p. 799-808, 2012.
- [27] CHAPIRO, G.; BRUINING, J. *Combustion enhance recovery of shale gas*, Journal of Petroleum Science and Engineering, v. 127, p. 179-189, 2015.
- [28] CHOU, S. I. *Conditions for generating foam in porous media*, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, oct. 1991.
- [29] EVANS, LAWRENCE C. *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 2010.
- [30] LEVEQUE, RANDALL J. *Numerical Methods for Conservation Laws*, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1999.
- [31] VAN DUIJN, C. J. *Introduction to Conservation Laws: Theory and Applications to Multi-Phase Flow*, The Netherlands: Eindhoven University of Technology, 2003.
- [32] VOLPERT, A. I.; VOLPERT, V. A.; VOLPERT V. A. *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1994.
- [33] SMOLLER, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Second Edition, 1994.

- [34] SEJAS PAZ, P. Z. *Estudo analítico da injeção de água com aquecimento eletromagnético em um meio poroso contendo óleo*, Tese(Mestrado)- Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- [35] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [36] ZITHA, P. L. J. *A new stochastic bubble population model for foam flow in porous media*, Transport in Porous Media, 603-621, 2010.

## APÊNDICE A – MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM

Este modelo de espuma considera o bem conhecido comportamento em estado estável da espuma num meio poroso: especificamente uma grande e quase constante redução na mobilidade do gás em elevadas saturações de água e um enfraquecimento abrupto ou colapso da espuma para uma pressão capilar limite ou saturação limite [22, 15, 23, 11]. A textura da espuma em EL é denotado por  $n_f^{EL}$  e está dado pela seguinte função em saturação de água  $S_w$ :

$$\begin{cases} n_D^{EL}(S_w) = \frac{n_f^{EL}}{n_{\max}} = \tanh(A(S_w - S_w^*)) & S_w > S_w^* \\ n_D^{EL}(S_w) = 0 & S_w \leq S_w^* \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

Aqui:

$n_D^{EL}$ : Textura adimensional da textura de espuma em EL.

$S_w^*$ : Saturação de água limite na qual a espuma colapsa.

$n_{\max}$ : Limite superior da textura da espuma (refletindo um limite inferior do tamanho da bolha).

$A$ : Constante.

A tabela 4 mostra os parâmetros e propriedades dos fluidos usados neste modelo, com  $n_D = n_f/n_{\max}$  em vez de  $n_f$ .

Tabela 4 – Valores dos parâmetros para o modelo cinético de primeiro ordem.

Parâmetro	Valor
$S_{wc}$	0.2
$S_{gr}$	0.18
$\mu_w$	0.001 Pa.s
$\mu_g^0$	0.00002 Pa.s
$k$	$1 \times 10^{-12} m^2$
$\phi$	0.25
$u$	$2.93 \times 10^{-5} m s^{-1}$
$n_{\max}$	$8 \times 10^{13} m^{-3}$
$S_w^*$	0.37
$A$	400

Para a dinâmica da textura de espuma, tem-se uma aproximação de primeiro ordem para a textura de espuma em EL para qualquer saturação, com tempo constante  $1/K_c$ :

$$[r_g - r_c] = K_c n_{\max} \left( n_D^{EL}(S_w) - \max\{n_D, 1\} \right), \quad (\text{A.2})$$

onde,  $K_c$ : parâmetro cinético da espuma. O parâmetro  $K_c$  expressa a proporção que cresce a textura de espuma.

Como a permeabilidade relativa e a viscosidade de gás são inseparáveis em presença de espuma, por simplicidade vamos a representar o efeito em conjunto na espuma como uma redução em a  $k_{rg}$  e deixar a viscosidade do gás  $\mu_g$  constante.

Vamos supor que o maior fator de redução da mobilidade ( $MRF$ ) seja  $MRF = 18,500$  para a espuma mais forte [22] e  $MRF = 1$  sem espuma. Finalmente interpolamos  $MRF$  como uma função linear da textura da espuma entre estes dois estados extremos:

$$MRF = 18,500n_D + 1, \quad (\text{A.3})$$

e logo,

$$k_{rg}(S_w, n_D) = \frac{k_{rg}^0(S_w)}{MRF(n_D)}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $k_{rg}^0(S_w)$  é a permeabilidade relativa de gás em ausência de espuma.

Por está definição, o fluxo fracionário  $f_w$  não é unicamente uma função de  $S_w$ , porque a dinâmica da espuma o fluxo da textura da espuma pode desviar-se desde seu valor de equilíbrio local para um valor de saturação de água dado.

As permeabilidades relativas da água e a espuma livre são dados por Zhou e Rossen [22], com base dos dados de Persoff et al. [25] para inundação de água e nitrogênio em rocha arenosa Boise:

$$k_{rw} = \begin{cases} 0.2 \left( \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{4.2} & , S_{wc} < S_w \leq 1 \\ 0 & , 0 \leq S_w \leq S_{wc} \end{cases}, \quad (\text{A.5})$$

e,

$$k_{rg}^0 = \begin{cases} 0.94 \left( \frac{1 - S_w - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{1.3} & , 0 \leq S_w < 1 - S_{gr} \\ 0 & , 1 - S_{gr} \leq S_w \leq 1 \end{cases}. \quad (\text{A.6})$$

Por definição de fluxo fracionário sabe-se que:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_g},$$

como:  $\lambda_g = \frac{k_{rg}}{\mu_g}$  e  $\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w}$  então:

$$f_w(S_w, n_D) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_g(S_w, n_D)}{\lambda_w(S_w)}} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{k_{rw}(S_w)} \frac{k_{rg}^0(S_w)}{\mu_g MRF(n_D)}}. \quad (\text{A.7})$$

A função fluxo fracionário em equilíbrio local EL é denotado por:  $f_w(S_w, n_D^{EL})$  e o fluxo fracionário livre de espuma  $f_w(S_w, 0)$ .

A função de pressão capilar é dado por:

$$P_c(S_w) = 15,000 \times \frac{0.022(1 - S_w - S_{gr})^c}{S_w - S_{wc}} \quad ; \quad c = 0.01, \quad (\text{A.8})$$

onde,  $P_c$  esta em unidades de Pa.



## APÊNDICE B – MODELO DE KAM

No modelo de Kam, ver [10], a criação de lamelas ( $r_g$ ) precisa ser maior que o gradiente de pressão mínimo ( $\nabla p_0$ ); no início, a criação de lamelas cresce rapidamente com o aumento do gradiente de pressão, refletindo com a mobilização e divisão das lamelas em altos gradientes de pressão. Isto alcança uma meseta, o qual pressupõe que a taxa de criação de lamelas deve ter uma cota superior:

$$r_g = \frac{C_g}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\nabla p - \nabla p_0}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{-\nabla p_0}{\sqrt{2}} \right) \right), \quad (\text{B.1})$$

onde  $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}$ . As equações do modelo de espuma neste apêndice requer que as quantidades sejam nas unidades especificadas na tabela 5.

Como em outros modelos de equilíbrio de população [4, 17], a taxa de destruição de lamelas ( $r_c$ ) é descrita por uma função que tende para o infinito tanto como a saturação de água ou pressão capilar aproxima-se um valor limite [23]. Nós modificamos esta função para incluir a textura adimensional da espuma  $n_D = \frac{n_f}{n_{\max}}$ , onde  $n_{\max}$  é a textura da espuma no tamanho mínimo das bolhas o qual é pensado para corresponder ao tamanho médio dos poros.

$$r_c = C_c n_{\max} n_D \left( \frac{S_w}{S_w - S_w^*} \right)^n. \quad (\text{B.2})$$

Como no modelo cinético de primeiro ordem as equações (B.1) e (B.2) aplica-se para  $n_D \leq 1$ ; se  $n_D > 1$ , este se reinicia a  $n_D = 1$  e assim as equações (B.1) e (B.2) são aplicadas.

Nas equações (B.1) e (B.2),  $\nabla p_0$ ,  $n$ ,  $C_g$  e  $C_c$  são parâmetros do modelo. Como em outros modelos de equilíbrio de população [17], a viscosidade efetiva da espuma é uma função da velocidade do gás:

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f n_{\max} n_D}{(u_g / \phi S_g)^{1/3}}, \quad (\text{B.3})$$

onde,  $\mu_g^0$  é a viscosidade do gás em ausência de espuma e  $C_f$  é um parâmetro do modelo.

O transporte de gás e líquido é governado pela lei de Darcy. As funções de permeabilidade relativa do gás e líquido, e a viscosidade da fase líquida são supostas que não são afetadas pela espuma. Assim, para deslocamentos horizontais, negligenciando os gradientes de pressão capilar, a velocidade do gás e fluxo fracionário de água são avaliadas como:

$$u_g = \frac{k k_{rg}^0}{\mu_g^f} \nabla p, \quad (\text{B.4})$$

onde:  $\nabla p = \nabla p_w = \nabla p_g$ , e

$$f_w = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu_w}{k_{rg}}\right) \left(\frac{k_{rg}^0}{\mu_g^f}\right)}. \quad (B.5)$$

As funções de pressão capilar e permeabilidade relativa e outros parâmetros do modelo e propriedades do fluido são dados na tabela 5.

A textura da espuma em equilíbrio local pode ser obtido resolvendo as equações (B.1) e (B.2) e assim obter:

$$n_D^{EL} = \begin{cases} \frac{C_g}{2C_c n_{\max}} \left(\frac{S_w - S_w^*}{S_w}\right)^n \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\nabla p - \nabla p_0}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{-\nabla p_0}{\sqrt{2}} \right) \right) & , \text{ para } 0 \leq n_D \leq 1 \\ 1 & , \text{ para outro caso} \end{cases} \quad (B.6)$$

Em estado estável, pode-se determinar  $\mu_g^f$ ,  $u_g$  e  $n_D$  resolvendo simultaneamente as equações (B.3)-(B.6), e logo construir a curva de fluxo fracionário (B.5). Como foi mostrado por Kam [10] as curvas de fluxo fracionário resultantes podem ser muito complexas.

Tabela 5 – Funções de permeabilidade relativa e de pressão capilar, valores dos parâmetros para o modelo e algumas propriedades usadas no modelo de Kam.

Funções de permeabilidade relativa	
$k_{rw}$	$0.7888 [(S_w - S_{wc}) / (1 - S_{wc} - S_{gr})]^{1.9575}$
$k_{rg}^0$	$[(1 - S_w - S_{gr}) / (1 - S_{wc} - S_{gr})]^{2.2868}$
Função de pressão capilar	
$P_c$	$\sigma (\phi/k)^{0.5} [(S_w - S_{wc}) / (1 - S_{wc} - S_{gr})]^{-0.2}$
Parâmetros do modelo de espuma	
$\nabla p_0$	$4.2 \text{ psi ft}^{-1}$
$n$	1
$C_g/C_c$	$3.6 \times 10^{16}$
$C_f$	$1.535 \times 10^{-16}$
$C_c$	1
Outros parâmetros	
$S_{wc}$	0.04
$S_{gr}$	0.0
$\mu_w$	0.001 Pa s
$\mu_g^0$	0.00002 Pa s
$k$	$30.4 \times 10^{-12} m^2$
$\phi$	0.31
$n_{\max}$	$8 \times 10^{13} m^{-3}$
$S_w^*$	0.0585
$\sigma$	0.03 N/m