

Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Juan Carlos Torres Espinoza

*Uma Equação de Quarta Ordem Relacionada
ao Crescimento Epitaxial*

Juiz de Fora

2014

Juan Carlos Torres Espinoza

*Uma Equação de Quarta Ordem Relacionada
ao Crescimento Epitaxial*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de equações diferenciais parciais.

Orientador : Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki.

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Torres Espinoza, Juan Carlos.

Uma equação de quarta ordem relacionada ao crescimento epitaxial / Juan Carlos Torres Espinoza. -- 2014.
67 f. : il.

Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Crescimento epitaxial. 2. Equações elípticas. 3. Métodos variacionais. 4. Pontos críticos. 5. Soluções radiais. I. Hiroshi Miyagaki, Olimpio , orient. II. Título.

Juan Carlos Torres Espinoza

*Uma Equação de Quarta Ordem Relacionada
ao Crescimento Epitaxial*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)

Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF.

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Ricardo Ruviano
Universidade de Brasília-UnB.

Juiz de Fora, 28 de Fevereiro de 2014.

*A meus pais, Washington e María, a minha irmã Carolina, ao
meu tio Segundo.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Olimpio Hiroshi Miyagaki, por acreditar em mim, pela atenção, paciência, tempo e dedicação com que me orientou.

Aos membros da banca pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, aos professores, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação.

Agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que me permitiu concluir os estudos de mestrado satisfatoriamente.

A meus pais, Washington e María, pelo seus conselhos e apoio nos momentos mais difíceis da vida.

Ao meu tio Segundo Vigo Alcántara, que sempre acredita em mim e por me incentivar a continuar meus estudos.

Aos meus irmãos, Carolina e Diego, por todas as palavras de incentivo que me brindaram no percurso do mestrado.

A todos os meus familiares, primos, tios, sobrinhos. Obrigado a todos eles.

A meus colegas brasileiros, obrigado pela sua paciência e ajuda nos estudos, bem como no ensino da língua portuguesa. Muito obrigado pessoal!

A todos meus amigos peruanos, que com suas brincadeiras e conversas, fazem me esquecer quão longe estamos de nossas famílias, tornando estes anos de estudos mais leves.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a existência de soluções para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2 u) + \lambda f, & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{condições sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

a qual é um modelo matemático surgido da teoria de crescimento epitaxial.

A procura de soluções depende das condições de fronteira impostas e a classe de domínio Ω a considerar.

Palavras-chave: Crescimento epitaxial; Equações elípticas; Métodos variacionais; Pontos críticos; Soluções radiais.

ABSTRACT

In this work we will study the existence of solutions for the following class of problems:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2 u) + \lambda f, & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{conditions on } \partial\Omega, \end{cases}$$

which is a mathematical model arisen in the theory of epitaxial growth.

Finding solutions depends on the imposed boundary conditions and the class of the domain Ω to be considered.

Key-words: Epitaxial growth; Elliptic equations; Variational methods; Critical points; Radial solutions.

LISTA DE NOTAÇÕES

$ \cdot $	norma euclidiana em \mathbb{R}^n .
Ω	domínio aberto em \mathbb{R}^n .
∂A	fronteira do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.
α	multi-índice, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.
$ \alpha $	$\sum_{i=1}^n \alpha_i$, ordem do multi-índice α .
$D^\alpha u$	$\frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$.
$D^k u$	$\{D^\alpha u : \alpha = k\}$, onde k é um inteiro não negativo.
$ D^k u $	$\left(\sum_{ \alpha =k} D^\alpha u ^2\right)^{1/2}$.
∇u	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Δu	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$\Delta^2 u$	$\Delta(\Delta u)$.
$C^k(\Omega)$	espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, k -vezes continuamente diferenciáveis.
$C_0^k(\Omega)$	espaço das funções em $C^k(\Omega)$ com suporte compacto.
$C^\infty(\Omega)$	$\bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$.
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.
$C_0^k(\bar{\Omega})$	espaço das funções em $C_0^k(\Omega)$ com $D^\alpha u$ uniformemente contínua, para $\alpha \leq k$.
$L^p(\Omega)$	espaço das funções Lebesgue mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com norma $\ u\ _p = \left(\int_\Omega u ^p dx\right)^{1/p} < \infty$.
ess sup u	$\inf \{r \in \mathbb{R} \mid \nu(u > r) = 0\}$, onde ν denota a medida usual em \mathbb{R}^n .
$L^\infty(\Omega)$	espaço das funções Lebesgue mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com norma $\ u\ _\infty = \text{ess sup } u < \infty$.
$L_{loc}^p(\Omega)$	espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $u \in L^p(V)$ para cada $V \subset\subset \Omega$ ($V \subset \bar{V} \subset \Omega$).
$\ \nabla u\ _p$	$\ \ \nabla u\ \ _p$.
$\ D^2 u\ _p$	$\ \ D^2 u\ \ _p$.
$W^{k,p}(\Omega)$	espaços de Sobolev (veja Apêndice A).

$\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$	fecho das funções suaves radialmente simétricas compactamente suportadas na bola unitária do \mathbb{R}^2 com a norma de $W^{2,2}([0, 1], r dr)$.
$\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$	$\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr) \cap \mathring{W}^{1,2}([0, 1], r dr)$.
\rightarrow	convergência forte.
\rightharpoonup	convergência fraca.
E^*	espaço dual do espaço E .
$H^{-2}(\Omega)$	espaço dual do espaço $H_0^2(\Omega)$.
$A \hookrightarrow B$	imersão do espaço A no espaço B .
$f = o(g), x \rightarrow x_0$	notação de o pequeno, veja Apêndice A .
\langle, \rangle	produto de dualidade.
$f * g$	convolução de f e g .
$d(A, B)$	distância entre os conjuntos A e B .

LISTA DE FIGURAS

1.1	Gráfico da estimativa radial inferior g do funcional J_λ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.	19
1.2	Gráfico da parábola quando $a > 0$	20
1.3	Gráfico da parábola quando $a < 0$	20
1.4	Gráfico da parábola quando $c > 0$	21
1.5	Gráfico da parábola quando $c < 0$	21
1.6	Gráfico da função de corte τ	24
1.7	Gráfico da estimativa radial inferior h do funcional F_λ	24

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 SOLUÇÕES NÃO RADIAIS	14
1.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM CONDIÇÕES DE DIRICHLET . . .	14
1.1.1 Fatos variacionais	14
1.1.2 Lagrangiano para as condições de Dirichlet	14
1.1.3 A geometria do funcional J_λ	16
1.1.4 Condição de Palais-Smale para o funcional J_λ	22
1.1.5 O resultado principal	23
1.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM CONDIÇÕES DE NAVIER	27
2 SOLUÇÕES RADIAIS ESTACIONÁRIAS	32
2.1 CONDIÇÕES DE DIRICHLET	32
2.2 CONDIÇÕES DE NAVIER	41
Apêndices	46
Apêndice A – PRELIMINARES	47
A.1 ESPAÇOS DE SOBOLEV	47
A.2 CÁLCULO DAS VARIAÇÕES	49
A.2.1 Primeira variação, equação de Euler-Lagrange	49
A.2.2 Derivada de Gateaux	51
Apêndice B – RESULTADOS DE ANÁLISE	53

Apêndice C - PROVA DE RESULTADOS USADOS	57
C.1 CONTINUIDADE DO FUNCIONAL J_λ	57
C.2 CONTINUIDADE FRACA* DA DERIVADA DO FUNCIONAL J_λ . .	58
C.3 SEQUÊNCIA DE PALAIS-SMALE PARA J_λ	59
C.4 POSITIVIDADE DO VALOR MINIMAX c	63
C.5 SOLUÇÕES FRACAS AOS PROBLEMAS (1.16) e (1.17)	64
REFERÊNCIAS	66

INTRODUÇÃO

O termo “epitaxial” é aplicado a uma película crescida no topo do substrato cristalino de forma ordenada tal que o arranjo atômico da película aceita a estrutura cristalográfica do substrato [19].

O crescimento epitaxial é uma das mais importantes técnicas usadas na indústria dos semicondutores [4] os quais são utilizados para fabricar vários dispositivos eletrônicos e ópticos [19]. Os dispositivos modernos requerem estrutura muito sofisticada, que são compostas de finas camadas com diferentes composições. Qualidade, desempenho e vida útil destes dispositivos são determinados pela pureza, perfeição estrutural e homogeneidade das camadas epitaxiais [19].

Um dos modelos surgidos desta técnica é dada por uma equação diferencial parcial (EDP) elíptica de quarta ordem na seguinte forma:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = \det(D^2 u(x)) + \lambda f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \text{condições de fronteira,} \end{cases} \quad (1)$$

onde Ω é um conjunto aberto com fronteira suave, f é uma função com uma hipótese de integrabilidade adequada e $\lambda > 0$.

Neste trabalho temos por objetivo encontrar soluções para a equação (1) submetida às condições de Dirichlet e Navier, isto é

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ (condições de Dirichlet)} \quad (2)$$

e

$$u = 0, \quad \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ (condições de Navier)}. \quad (3)$$

Dependendo do domínio Ω , vamos considerar dois casos, os quais serão estudados separadamente:

- Quando Ω é qualquer subconjunto aberto com fronteira suave do \mathbb{R}^2 .
- Quando $\Omega = B(0, 1)$, isto é, a bola aberta unitária em \mathbb{R}^2 .

Para atingir o nosso objetivo, usaremos alguns resultados das EDP's, análise funcional e cálculo das variações.

Mais precisamente, o trabalho está organizado da seguinte forma:

No **Capítulo 1** abordaremos o Problema (1) com condições de Dirichlet e Navier e demonstraremos os seguintes teoremas devidos a [12]:

Teorema 1.[12]. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira suave. Consideremos $f \in L^1(\Omega)$ e $\lambda > 0$. Então existe um λ_0 tal que para $0 < \lambda < \lambda_0$ o Problema (1) com as condições de Dirichlet (2) possui pelo menos duas soluções.

Teorema 2.[12]. Com as mesmas hipóteses do Teorema 1, se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, então o Problema (1), com as condições de Navier (3) possui pelo menos uma solução.

A prova do Teorema 1 será feita usando o método variacional (teoria de pontos críticos), enquanto o Teorema 2 será demonstrado usando argumentos de ponto fixo (ponto fixo de Banach).

No **Capítulo 2** voltamos na procura de soluções ao Problema (1) submetido às condições de Dirichlet e Navier, só que agora o domínio será a bola unitária com centro na origem, onde é possível obter um funcional para ambos casos, e provaremos os seguintes teoremas devidos a [11]:

Teorema 3.[11]. Seja $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ a bola unitária com centro na origem. Sejam $f \in L^1([0,1], r dr)$ e $\lambda > 0$. Então existe um número real positivo λ_0 tal que, para $0 < \lambda < \lambda_0$, o Problema (1) com condições de Dirichlet possui pelo menos duas soluções.

Teorema 4.[11]. Com as mesmas hipóteses do Teorema 3, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \lambda_0$, o problema com condições de Navier para (1) possui pelo menos duas soluções.

As provas em ambos Teoremas serão feitas usando el método variacional (teoria de pontos críticos).

No **Apêndice A** apresentamos alguns resultados preliminares, definições e conceitos que foram utilizados no presente trabalho.

No **Apêndice B** enunciamos os principais resultados utilizados durante o nosso estudo. Estes resultados são utilizados em várias áreas tais como em análise funcional e as EDP's.

No **Apêndice C** mostramos alguns fatos assumidos como verdadeiros, que foram usados na dissertação. Também provamos existência de soluções para alguns problemas auxiliares usados no desenvolvimento do trabalho.

1 SOLUÇÕES NÃO RADIAIS

1.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM CONDIÇÕES DE DIRICHLET

1.1.1 Fatos variacionais

Vamos estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2 u) + \lambda f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

isto é, condições de fronteira de Dirichlet, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave e $f \in L^1(\Omega)$. O ambiente natural é o espaço $H_0^2(\Omega)$. Este fato é a chave para ter, neste caso, uma formulação variacional do problema.

Usaremos também o fato que a norma do espaço de Hilbert $H_0^2(\Omega)$ é equivalente a norma $\|\Delta u\|_2$ (Corolário 9.10, página 235 em[15]).

Tentamos encontrar um Lagrangiano $L(\nabla u, D^2 u)$ tal que os pontos críticos do funcional

$$\begin{cases} J_\lambda : H_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \rightarrow J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} L(\nabla u, D^2 u) dx \end{cases}$$

sejam soluções de (1.1).

1.1.2 Lagrangiano para as condições de Dirichlet

Vamos tentar obter um Lagrangiano para o qual a primeira variação de Euler-Lagrange é o determinante da matriz Hessiana. Para isso, temos a identidade variacional (ver

Apêndice B, Lema B.3)

$$\det(D^2v) = (v_{x_1}v_{x_2})_{x_1x_2} - \frac{1}{2}(v_{x_2}^2)_{x_1x_1} - \frac{1}{2}(v_{x_1}^2)_{x_2x_2},$$

e o fato de que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^2(\Omega)$.

Considerando $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det(D^2u)\phi dx &= \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2}(u_{x_2}^2)_{x_1x_1} - \frac{1}{2}(u_{x_1}^2)_{x_2x_2} + (u_{x_1}u_{x_2})_{x_1x_2} \right] \phi dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\phi_{x_1}(u_{x_2}^2)_{x_1} + \frac{1}{2}\phi_{x_2}(u_{x_1}^2)_{x_2} + u_{x_1}u_{x_2}\phi_{x_1x_2} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} [u_{x_2}u_{x_1x_2}\phi_{x_1} + u_{x_1}u_{x_1x_2}\phi_{x_2} + u_{x_1}u_{x_2}\phi_{x_1x_2}] dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} [(u_{x_1} + t\phi_{x_1})(u_{x_2} + t\phi_{x_2})(u_{x_1x_2} + t\phi_{x_1x_2}) - u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2}] dx \\ &= \frac{d}{dt} G(u + t\phi) \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

onde,

$$G(u) = \int_{\Omega} u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} dx.$$

Notemos que, pela densidade, podemos tomar $\phi \in H_0^2(\Omega)$ e por uma aplicação do Lema B.2 (ver Apêndice B), descobrimos que a primeira variação de $G(u)$ sobre $H_0^2(\Omega)$ é

$$\frac{\partial G(u)}{\partial u} = \det(D^2u).$$

Então vamos considerar o seguinte funcional de energia para o Problema (1.1)

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} dx - \lambda \int_{\Omega} f u dx, \quad (1.2)$$

definido em $H_0^2(\Omega)$.

Observação 1.1. Note que este Lagrangiano não é útil para outras condições de fronteira. Com efeito, consideremos $\phi \in \mathcal{X} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega) : \phi(x) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$ e u uma função

regular, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(u+t\phi)\Big|_{t=0} &= \int_{\Omega} [u_{x_1}u_{x_2}\phi_{x_1x_2} + u_{x_1}\phi_{x_2}u_{x_1x_2} + \phi_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2}] dx \\ &= \int_{\Omega} \det(D^2u)\phi dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_{x_1}u_{x_2}(\phi_{x_1}\eta_2 + \phi_{x_2}\eta_1) dS, \end{aligned}$$

e assim, para $\phi \in \mathcal{X}$, o termo na fronteira não se cancela.

Esta observação justifica a dependência do problema das condições de fronteira.

1.1.3 A geometria do funcional J_λ

Como

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} dx - \lambda \int_{\Omega} f u dx$$

temos para $J_\lambda^1(u) = \int_{\Omega} u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} dx$ a seguinte estimativa (ver Apêndice B, Teoremas B.4 e B.5):

$$J_\lambda^1(u) \leq \left(\int_{\Omega} |u_{x_1x_2}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_{x_1}|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |u_{x_2}|^4 dx \right)^{1/4}.$$

Agora, pela equivalência das normas em $H_0^2(\Omega)$, temos a seguinte desigualdade:

$$\left(\int_{\Omega} |u_{x_1x_2}|^2 dx \right)^{1/2} = \|u_{x_1x_2}\|_2 \leq \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq m_1 \|\Delta u\|_2, \quad (1.3)$$

para alguma constante $m_1 > 0$.

Por outro lado, notemos que $u_{x_1}^2 \in W^{1,1}(\Omega)$, e assim pelo Teorema B.6 (ver Apêndice B), temos que $u_{x_1}^2 \in L^2(\Omega)$ e existe $a > 0$ tal que

$$\|u_{x_1}^2\|_2 \leq a \|u_{x_1}^2\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Disto, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|u_{x_1}^2\|_2 &\leq a \left(\int_{\Omega} |u_{x_1}^2| dx + 2 \int_{\Omega} |u_{x_1} u_{x_1 x_1}| dx + 2 \int_{\Omega} |u_{x_1} u_{x_1 x_2}| dx \right) \\
&\leq a (\|u_{x_1}\|_2^2 + 2\|u_{x_1}\|_2 \|u_{x_1 x_1}\|_2 + 2\|u_{x_1}\|_2 \|u_{x_1 x_2}\|_2) \\
&\leq 2a \|u_{x_1}\|_2 (\|u_{x_1}\|_2 + \|u_{x_1 x_1}\|_2 + \|u_{x_1 x_2}\|_2) \\
&\leq 2a \|u_{x_1}\|_2 \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \\
&\leq m_2 \|u_{x_1}\|_4 \|\Delta u\|_2,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $m_2 = 2aC > 0$. Na última linha usamos o fato de ser a norma em $H_0^2(\Omega)$ equivalente à $\|\Delta u\|_2$.

Além disto, como

$$\|u_{x_1}^2\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u_{x_1}|^4 dx \right)^{1/2} = \|u_{x_1}\|_4^2,$$

então (1.4) fica

$$\|u_{x_1}\|_4 \leq m_2 \|\Delta u\|_2,$$

isto é,

$$\left(\int_{\Omega} |u_{x_1}|^4 dx \right)^{1/4} \leq m_2 \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Analogamente, obtemos para $u_{x_2}^2$

$$\left(\int_{\Omega} |u_{x_2}|^4 dx \right)^{1/4} \leq m_3 \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{1.6}$$

Portanto, das desigualdades (1.3), (1.5) e (1.6) obtemos:

$$J_{\lambda}^1(u) \leq c_1 \|\Delta u\|_2^3, \tag{1.7}$$

onde, $c_1 = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$.

Para $J_{\lambda}^2(u) = \lambda \int_{\Omega} f u dx$, pelo Teorema B.6 (ver Apêndice B), temos a seguinte desi-

gualdade:

$$J_\lambda^2(u) \leq \lambda \|f\|_1 \|u\|_\infty \leq \lambda c_2 \|f\|_1 \|\Delta u\|_2, \quad c_2 > 0. \quad (1.8)$$

Finalmente, das expressões (1.7) e (1.8) obtemos a seguinte estimativa para o funcional J_λ ,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - c_1 \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right)^{3/2} - \lambda c_2 \|f\|_1 \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= g(\|\Delta u\|_2), \end{aligned}$$

onde, $g(s) = \frac{1}{2}s^2 - c_1 s^3 - \lambda c_2 \|f\|_1 s$, com $c_1, c_2 > 0$.

Afirmamos que para $0 < \lambda < \lambda_0$ suficientemente pequeno, a estimativa radial inferior, dada por g , tem um mínimo local negativo e um máximo local positivo.

Com efeito:

Se $0 < k < 1$, onde $k = 12c_1c_2\lambda\|f\|_1$, então os pontos críticos de g são:

$$s_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - k}}{6c_1} \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - k}}{6c_1}.$$

Notemos que $s_1, s_2 > 0$ e $s_2 < s_1$.

Pelo critério da segunda derivada

$$g''(s_1) = 1 - 6c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k}}{6c_1} \right) = -\sqrt{1 - k} < 0$$

$$g''(s_2) = 1 - 6c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k}}{6c_1} \right) = \sqrt{1 - k} > 0,$$

e assim, s_1 é um máximo local e s_2 é mínimo local.

Ainda mais, temos

$$g(s_1) > 0 \quad \text{e} \quad g(s_2) < 0,$$

e assim a afirmação é válida se $\lambda < \frac{1}{12c_1c_2\|f\|_1}$.

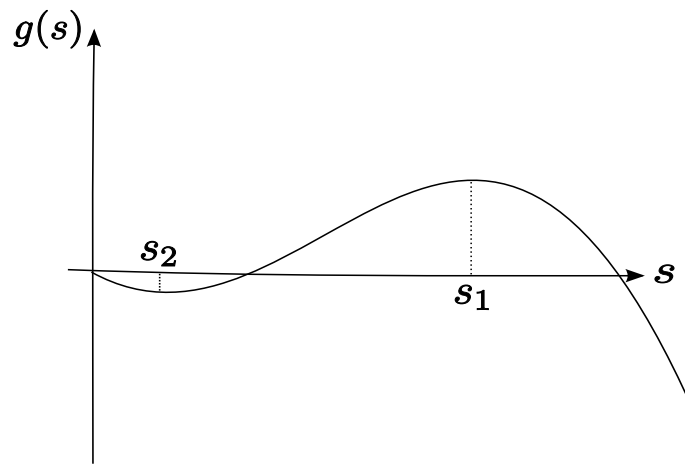


Figura 1.1: Gráfico da estimativa radial inferior g do funcional J_λ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Também, podemos verificar que:

1. Existe uma função $\phi \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} f\phi dx > 0.$$

2. Existe uma função $\psi \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \psi_{x_1} \psi_{x_2} \psi_{x_1 x_2} dx > 0.$$

De fato, para a função ϕ poderíamos considerar um regularizador local de f . Para a ψ temos a seguinte possibilidade

$$\psi(x) = [(1 - |x|^2)^+]^4,$$

onde $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$.

De acordo com a observação acima, para $t \geq 0$, obtemos

$$J_\lambda(t\phi) = -t(at^2 - bt + c) = -tF(t),$$

onde

$$a = \int_{\Omega} \phi_{x_1} \phi_{x_2} \phi_{x_1 x_2} dx, \quad b = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta\phi|^2 dx \quad \text{e} \quad c = \lambda \int_{\Omega} f\phi dx.$$

Chamando $\Delta = b^2 - 4ac$, temos dois casos:

- Se $a > 0$, obtemos os seguintes gráficos

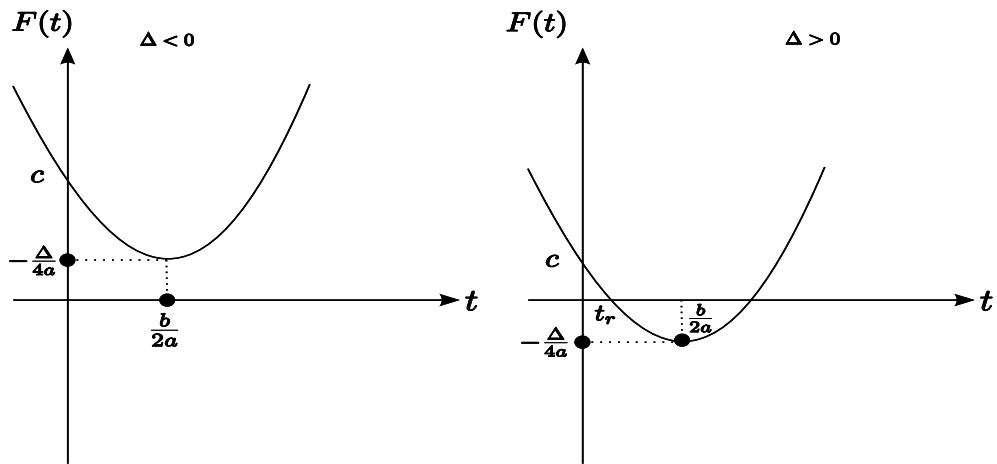


Figura 1.2: Gráfico da parábola quando $a > 0$.

- Se $a < 0$, e tomando em conta que neste caso Δ é positivo, obtemos o seguinte gráfico

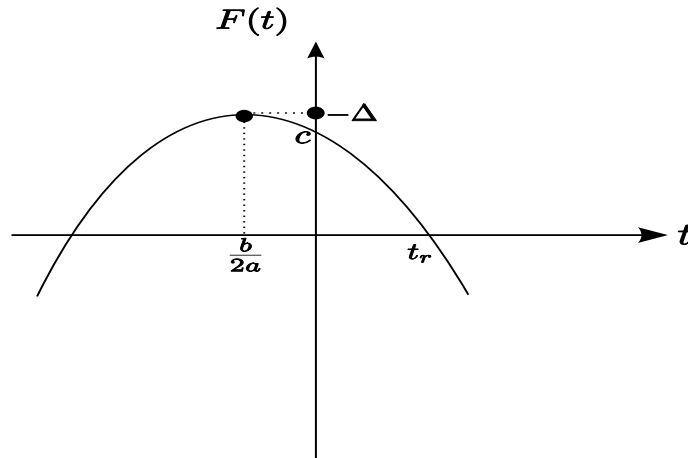


Figura 1.3: Gráfico da parábola quando $a < 0$.

Em ambos casos, existe um $t_r > 0$, suficientemente pequeno, tal que $F(t) > 0$, $t \in (0, t_r)$.

Similarmente ao acima, para $t \geq 0$, obtemos

$$J_\lambda(t\psi) = -t(at^2 - bt + c) = -tG(t),$$

onde

$$a = \int_{\Omega} \psi_{x_1} \psi_{x_2} \psi_{x_1 x_2} dx, \quad b = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta \psi|^2 dx \quad \text{e} \quad c = \lambda \int_{\Omega} f \psi dx,$$

também existem dois casos:

- Se $c > 0$, obtemos os gráficos

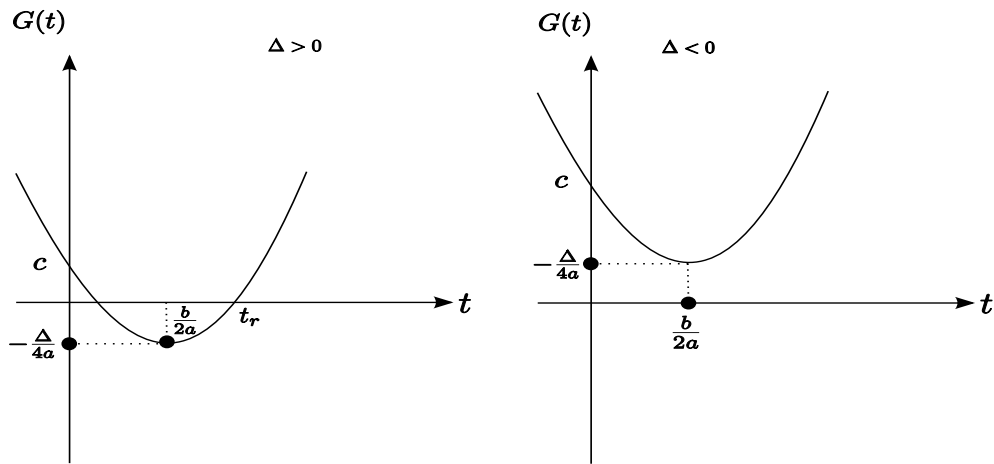


Figura 1.4: Gráfico da parábola quando $c > 0$.

- Se $c < 0$, e notando que Δ sempre é positivo, obtemos o gráfico

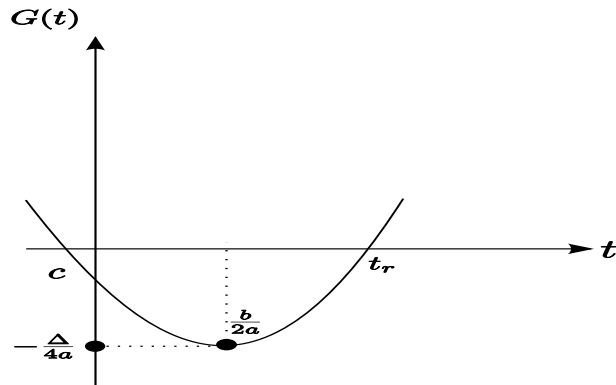


Figura 1.5: Gráfico da parábola quando $c < 0$.

Em ambos casos, existe $t_r > 0$, suficientemente grande, tal que $G(t) > 0$, $t \in (t_r, \infty)$.

Do exposto acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) &< 0 \text{ para } t \text{ suficientemente pequeno e} \\ J_\lambda(t\psi) &< 0 \text{ para } t \text{ suficientemente grande.} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Portanto, provamos a seguinte proposição.

Proposição 1.1. O funcional contínuo J_λ (ver Apêndice C Seção C.1) definido em (1.2) tem as seguintes propriedades.

1. $\exists \rho, \alpha > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq \alpha > 0$, com $\|\Delta u\|_2 = \rho$.
2. $\exists e \in H_0^2(\Omega)$ tal que $\|\Delta e\|_2 > \rho$, $J_\lambda(e) < 0$.

A proposição acima diz que o funcional J_λ possui geometria do passo da montanha.

1.1.4 Condição de Palais-Smale para o funcional J_λ

Lema 1.2. Assuma-se uma condição limitada de Palais-Smale para J_λ , isto é, para $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ limitada que verifica

- (1) $J_\lambda(u_n) \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$,
- (2) $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-2}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Então existe uma subsequência de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge em $H_0^2(\Omega)$.

Demonstração: Já que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ é limitada, passando a uma subsequência se necessário, temos que existe um $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que:

- i) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^2(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$,
- ii) $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ fortemente em $[L^p(\Omega)]^2$, $\forall p < \infty$, quando $n \rightarrow \infty$,
- iii) $u_n \rightarrow u$ uniformemente em Ω , quando $n \rightarrow \infty$.

Podemos escrever a condição $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $H_0^2(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$, como

$$\Delta^2 u_n = \det(D^2 u_n) + \lambda f + y_n, \quad u_n \in H_0^2(\Omega), \quad (1.10)$$

onde os y_n são tais que

$$y_n \rightarrow 0 \text{ em } H^{-2}(\Omega), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Notemos que multiplicando (1.10) por $(u_n - u)$, para todo n fixo, temos

$$\int_{\Omega} \Delta u_n \Delta(u_n - u) dx = \int_{\Omega} (u_n - u) \det(D^2 u_n) dx + \lambda \int_{\Omega} f(u_n - u) dx + \langle y_n, u_n - u \rangle. \quad (1.12)$$

Somando em ambos termos de (1.12) a seguinte expressão

$$- \int_{\Omega} \Delta u \Delta(u_n - u) dx = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

obtemos

$$\int_{\Omega} |\Delta(u_n - u)|^2 dx = \int_{\Omega} (u_n - u) \det(D^2 u_n) dx + \lambda \int_{\Omega} f(u_n - u) dx + \langle y_n, u_n - u \rangle - \int_{\Omega} \Delta u \Delta(u_n - u) dx.$$

Os quatro termos no lado direito vão para zero, quando $n \rightarrow \infty$, pelas propriedades de convergência i) (terceiro e quarto somando) e iii) (primeiro e segundo somandos).

Em consequência

$$\int_{\Omega} |\Delta(u_n - u)|^2 dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Isto é, J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c . ■

1.1.5 O resultado principal

Agora podemos provar a existência e multiplicidade de soluções para o Problema (1.1).

Teorema 1.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira suave. Considere $f \in L^1(\Omega)$ e $\lambda > 0$. Então existe λ_0 tal que, para $0 < \lambda < \lambda_0$, o Problema (1.1) possui pelo menos duas soluções.

Demonstração: Das seções anteriores, o funcional J_λ está bem definido em $H_0^2(\Omega)$, é contínuo (ver Apêndice C Seção C.1) e Gateaux derivável, e a sua derivada é fracamente contínua (ver Apêndice C Seção C.2).

Nosso objetivo é provar a existência de uma solução que corresponde a um mínimo local negativo de J_λ e uma segunda solução que corresponde a um nível do passo da montanha positivo de J_λ .

Passo 1: J_λ tem um mínimo local u_0 , tal que $J_\lambda(u_0) < 0$.

De fato, considere $\lambda_0 > 0$ tal que, se $0 < \lambda < \lambda_0$, g atinge seu máximo positivo em $r_{max} > 0$. Tome r_0 o menor zero positivo de g (i.e, $g(r_0) = 0$) e $r_0 < r_1 < r_{max}$ tal que $g(r_1) > 0$. Agora considere a função de “corte”

$$\tau : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1],$$

tal que τ é não crescente, $\tau \in C^\infty$ e verifica

$$\begin{cases} \tau(s) = 1, & \text{se } s \leq r_0, \\ \tau(s) = 0, & \text{se } s \geq r_1. \end{cases}$$

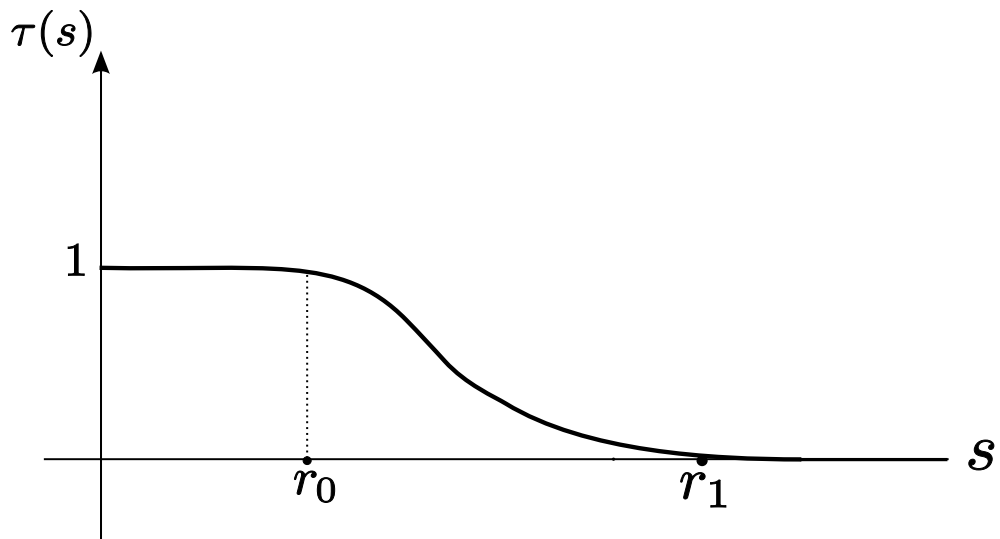


Figura 1.6: Gráfico da função de corte τ .

Seja $\Theta(u) = \tau(\|\Delta u\|_2)$. Consideremos o funcional truncado

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx - \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} \Theta(u) dx - \lambda \int_{\Omega} f u dx. \quad (1.13)$$

Como foi feito para o funcional J_λ , vemos que $F_\lambda(u) \geq h(\|\Delta u\|_2)$, onde,

$$h(s) = \frac{1}{2} s^2 - c_1 \tau(s) s^3 - \lambda \|f\|_1 c_2 s, \text{ com } c_1, c_2 > 0.$$

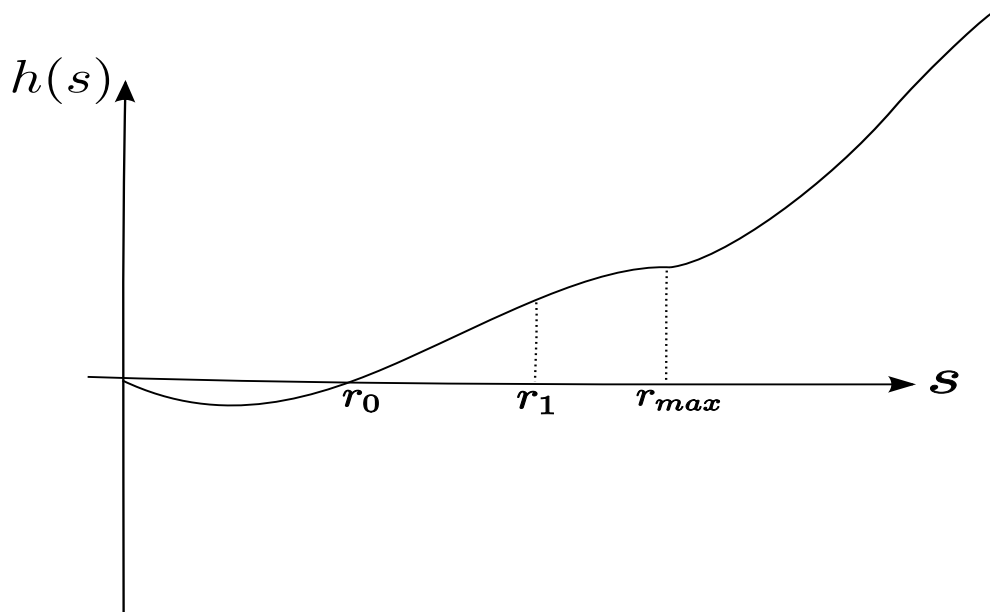


Figura 1.7: Gráfico da estimativa radial inferior h do funcional F_λ .

As principais propriedades do funcional F_λ estão listadas abaixo.

Lema 1.4. O funcional F_λ definido em (1.13) possui as seguintes propriedades:

- (1) F_λ tem a mesma regularidade do funcional J_λ .
- (2) Se $F_\lambda(u) < 0$, então $\|\Delta u\|_2 < r_0$, e $F_\lambda = J_\lambda$ se $\|\Delta u\|_2 < r_0$.
- (3) Seja m definido por $m = \inf_{v \in H_0^2(\Omega)} F_\lambda(v)$.

Então F_λ verifica uma condição local de Palais-Smale no nível m .

Demonstração: (1) é imediato. Para provar (2) notemos que para $s > r_0$, este funcional é positivo, e assim a propriedade (2) é válida.

Para provar (3), observemos que, por (1.9), $m < 0$ e que todas as seqüências minimizantes de Palais-Smale $\{u_n\}$ de F_λ cumprem $F_\lambda(u_n) \rightarrow m$, quando $n \rightarrow \infty$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\lambda(u_n) < 0$, $\forall n > n_0$. Assim, pelo item (2), $\|\Delta u_n\|_2 < r_0$, $\forall n > n_0$. Portanto, se para $n \leq n_0$, consideramos $M = \max_{1 \leq n \leq n_0} \|\Delta u_n\|_2$, a seqüência $\{u_n\}$ é limitada em H_0^2 e pelo Lema 1.2 concluímos o desejado. ■

Na prova do Lema 1.4 mostramos que o funcional F_λ é inferiormente limitado e positivo para $s > s_0$. Logo temos que m é um valor crítico negativo de F_λ , e assim de J_λ e existe u_0 mínimo local para J_λ .

Passo 2: Se λ é suficientemente pequeno, J_λ tem um ponto crítico obtido via passo da montanha, u_* , tal que $J_\lambda(u_*) > 0$.

Consideremos u_0 o mínimo local tal que $J_\lambda(u_0) < 0$ e consideremos $v \in H_0^2(\Omega)$ com $\|\Delta v\|_2 > r_{max}$ e tal que $J_\lambda(v) < J_\lambda(u_0)$. Definimos

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^2(\Omega)) : \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = v\},$$

e o valor minimax

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma(t)].$$

Aplicando o princípio variacional de Ekeland (ver Apêndices B Teorema B.11, C Seção C.3), existe uma seqüência de Palais-Smale no nível c , isto é, existe $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ tal que

- (1) $J_\lambda(u_n) \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$,
- (2) $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-2}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmação: Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ é uma sequência de Palis-Smale para J_λ no nível c , então existe $C > 0$ tal que $\|\Delta u_n\|_2 < C$.

De fato, se $u \in H_0^2(\Omega)$, integrando por partes, achamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \det(D^2 u) dx &= \int_{\Omega} u [(u_{x_1} u_{x_2 x_2})_{x_1} - (u_{x_1} u_{x_2 x_1})_{x_2}] dx - \int_{\Omega} (u_{x_1})^2 u_{x_2 x_2} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_2 x_1} u_{x_2} dx \\ &= 2 \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_1 x_2} u_{x_2} dx + \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_2 x_1} u_{x_2} dx \\ &= 3 \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_1 x_2} u_{x_2} dx. \end{aligned}$$

Então se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ é uma sequência de Palis-Smale para J_λ no nível c e chamando $\langle y_n, u_n \rangle = \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle$, temos:

$$\begin{aligned} c + o(1) &= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{3} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle + \frac{1}{3} \langle y_n, u_n \rangle \\ &\geq \frac{1}{6} \int_{\Omega} |\Delta u_n|^2 dx - \frac{1}{3} \|y_n\|_{H^{-2}} \left(\int_{\Omega} |\Delta u_n|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad - \frac{2}{3} \lambda C_s \|f\|_{L^1} \left(\int_{\Omega} |\Delta u_n|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

onde C_s é uma constante de Sobolev adequada. Esta desigualdade implica que a sequência é limitada.

Usando o Lema 1.2, J_λ satisfaz as condições de Palis-Smale no nível c .

Portanto, pelo Teorema B.14 (ver Apêndice B):

- (1) $J_\lambda(u_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = c$
- (2) $J'_\lambda(u_*) = 0$, assim

$$\Delta^2 u_* = \det(D^2 u_*) + \lambda f,$$

ou seja, u_* é uma solução do tipo passo da montanha do Problema (1.1). ■

Observação 1.2. Notemos que $c > 0$ (ver Apêndice C, Seção C.4) e $u_0 \neq u_*$, pois $J_\lambda(u_0) < 0 < J_\lambda(u_*)$.

1.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM CONDIÇÕES DE NAVIER

Vamos mostrar a existência de uma solução para o nosso problema com condições de contorno de Navier

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2 u) + \lambda f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, \quad \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.14)$$

Nesta seção vamos provar a existência de pelo menos uma solução ao Problema (1.14) usando métodos de ponto fixo.

Lema 1.5. Para quaisquer funções $v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$ e $v_3 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\int_{\Omega} \det(\nabla v_1, \nabla v_2) v_3 dx = \int_{\Omega} v_1 \nabla v_2 \cdot \nabla^{\perp} v_3 dx, \quad (1.15)$$

onde $\nabla^{\perp} v_3 = (\partial_{x_2} v_3, -\partial_{x_1} v_3)$.

Demonstração: Pelas desigualdades de Sobolev sabemos que v_3 é limitada em $L^{\infty}(\Omega)$ (ver Teorema B.6 Apêndice B) e em consequência o lado esquerdo de (1.15) está bem definido. Manipulando esta expressão:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det(\nabla v_1, \nabla v_2) v_3 dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (v_1 \partial_{x_2} v_2, -v_1 \partial_{x_1} v_2) v_3 dx \\ &= - \int_{\Omega} (v_1 \partial_{x_2} v_2, -v_1 \partial_{x_1} v_2) \cdot \nabla v_3 \\ &= \int_{\Omega} v_1 \det(\nabla v_2, \nabla v_3) dx \\ &= \int_{\Omega} v_1 \nabla v_2 \cdot \nabla^{\perp} v_3 dx. \end{aligned}$$

A primeira igualdade é obviamente correta para funções suaves, e a sua validade pode ser estendido por aproximação a funções $v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$ e $v_3 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ considerando a divergência no lado direito no sentido das distribuições. A segunda igualdade é uma consequência da definição de derivada fraca e o fato que v_3 é uma função de traço zero. Neste momento podemos concluir que as duas igualdades são válidas para $v_3 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ porque $C_0^1(\overline{\Omega})$ é denso em $H_0^1(\Omega)$. As igualdades terceira e quarta vêm de simples manipulação dos integrandos. As imersões de Sobolev garantem que os últimos três termos

nesta cadeia de igualdades estão bem definidos. ■

Observação 1.3. Por uma aplicação direta do Teorema B.9, podemos considerar em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a seguinte norma equivalente $\|\Delta u\|_2$.

Agora provaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 1.6. Se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, então existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solução do Problema (1.14).

Demonstração: Consideremos os problemas lineares

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1 = \det(D^2 \varphi_1) + \lambda f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u_1 = 0, \quad \Delta u_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.16)$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = \det(D^2 \varphi_2) + \lambda f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u_2 = 0, \quad \Delta u_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Resultados clássicos garantem a existência de soluções fracas para ambos dos problemas em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ para φ_1, φ_2 dados (ver Apêndice C Seção C.5). Subtraindo as duas equações, encontramos

$$\begin{cases} \Delta^2(u_1 - u_2) = \det(D^2 \varphi_1) - \det(D^2 \varphi_2), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u_1 - u_2 = 0, \quad \Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.18)$$

Como

$$\begin{aligned} \det\{\nabla[(\varphi_1)_{x_1}], \nabla[(\varphi_1)_{x_2} - (\varphi_2)_{x_2}]\} &= \det\{(\partial_{x_1 x_1} \varphi_1, \partial_{x_1 x_2} \varphi_1), (\partial_{x_2 x_1} \varphi_1 - \partial_{x_2 x_1} \varphi_2, \\ &\quad \partial_{x_2 x_2} \varphi_1 - \partial_{x_2 x_2} \varphi_2)\} \\ &= \partial_{x_1 x_1} \varphi_1 (\partial_{x_2 x_2} \varphi_1 - \partial_{x_2 x_2} \varphi_2) \\ &\quad - \partial_{x_1 x_2} \varphi_1 (\partial_{x_2 x_1} \varphi_1 - \partial_{x_2 x_1} \varphi_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det\{\nabla[(\varphi_1)_{x_1} - (\varphi_2)_{x_1}], \nabla(\varphi_2)_{x_2}\} &= \det\{(\partial_{x_1 x_1} \varphi_1 - \partial_{x_1 x_1} \varphi_2, \partial_{x_1 x_2} \varphi_1 - \partial_{x_1 x_2} \varphi_2), \\ &\quad (\partial_{x_2 x_1} \varphi_2, \partial_{x_2 x_2} \varphi_2)\} \\ &= \partial_{x_2 x_2} \varphi_2 (\partial_{x_1 x_1} \varphi_1 - \partial_{x_1 x_1} \varphi_2) \\ &\quad - \partial_{x_2 x_1} \varphi_2 (\partial_{x_1 x_2} \varphi_1 - \partial_{x_1 x_2} \varphi_2), \end{aligned}$$

então obtemos:

$$\begin{aligned}
& \det\{\nabla(\varphi_1)_{x_1}, \nabla[(\varphi_1)_{x_2} - (\varphi_2)_{x_2}]\} + \det\{\nabla[(\varphi_1)_{x_1} - (\varphi_2)_{x_1}], \nabla(\varphi_2)_{x_2}\} \\
&= \partial_{x_1x_1}\varphi_1\partial_{x_2x_2}\varphi_1 - \partial_{x_1x_1}\varphi_1\partial_{x_2x_2}\varphi_2 - \partial_{x_1x_2}\varphi_1\partial_{x_2x_1}\varphi_1 + \partial_{x_1x_2}\varphi_1\partial_{x_2x_1}\varphi_2 \\
&+ \partial_{x_2x_2}\varphi_2\partial_{x_1x_1}\varphi_1 - \partial_{x_2x_2}\varphi_2\partial_{x_1x_1}\varphi_2 - \partial_{x_2x_1}\varphi_2\partial_{x_1x_2}\varphi_1 + \partial_{x_2x_1}\varphi_2\partial_{x_1x_2}\varphi_2 \\
&= \partial_{x_1x_1}\varphi_1\partial_{x_2x_2}\varphi_1 - \partial_{x_1x_2}\varphi_1\partial_{x_2x_1}\varphi_1 - \partial_{x_1x_1}\varphi_2\partial_{x_2x_2}\varphi_2 + \partial_{x_1x_2}\varphi_2\partial_{x_2x_1}\varphi_2 \\
&= \det(D^2\varphi_1) - \det(D^2\varphi_2)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Agora, para qualquer $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
& \langle \det(D^2\varphi_1), w \rangle - \langle \det(D^2\varphi_2), w \rangle \\
&= \int_{\Omega} [\det(D^2\varphi_1) - \det(D^2\varphi_2)] w dx \\
&= \int_{\Omega} \det\{\nabla(\varphi_1)_{x_1}, \nabla[(\varphi_1)_{x_2} - (\varphi_2)_{x_2}]\} w dx + \int_{\Omega} \det\{\nabla[(\varphi_1)_{x_1} - (\varphi_2)_{x_1}], \nabla(\varphi_2)_{x_2}\} w dx \\
&= \int_{\Omega} [\partial_{x_1}\varphi_1 \nabla(\partial_{x_2}\varphi_1 - \partial_{x_2}\varphi_2) \cdot \nabla^\perp w] dx - \int_{\Omega} [\partial_{x_2}\varphi_2 \nabla(\partial_{x_1}\varphi_1 - \partial_{x_1}\varphi_2) \cdot \nabla^\perp w] dx \\
&= \int_{\Omega} [\partial_{x_1}\varphi_1 \nabla(\partial_{x_2}\varphi_1 - \partial_{x_2}\varphi_2) - \partial_{x_2}\varphi_2 \nabla(\partial_{x_1}\varphi_1 - \partial_{x_1}\varphi_2)] \cdot \nabla^\perp w dx,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

onde usamos a igualdade (1.19), junto com o lema 1.5. Destas igualdades seguem as seguintes cadeias de desigualdades:

$$\begin{aligned}
& |\langle \det(D^2\varphi_1), w \rangle - \langle \det(D^2\varphi_2), w \rangle| \\
&\leq \int_{\Omega} |\partial_{x_1}\varphi_1 \nabla(\partial_{x_2}\varphi_1 - \partial_{x_2}\varphi_2) - \partial_{x_2}\varphi_2 \nabla(\partial_{x_1}\varphi_1 - \partial_{x_1}\varphi_2)| |\nabla^\perp w| dx \\
&\leq \int_{\Omega} [|\partial_{x_1}\varphi_1 \nabla(\partial_{x_2}\varphi_1 - \partial_{x_2}\varphi_2)| + |\partial_{x_2}\varphi_2 \nabla(\partial_{x_1}\varphi_1 - \partial_{x_1}\varphi_2)|] |\nabla w| dx \\
&\leq \int_{\Omega} [|\partial_{x_1}\varphi_1| |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)| + |\partial_{x_2}\varphi_2| |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)|] |\nabla w| dx \\
&= \int_{\Omega} [|\partial_{x_1}\varphi_1| + |\partial_{x_2}\varphi_2|] |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)| |\nabla w| dx \\
&\leq \int_{\Omega} (|\nabla\varphi_1| + |\nabla\varphi_2|) |D^2(\varphi_1 - \varphi_2)| |\nabla w| dx \\
&\leq (\|\nabla\varphi_1\|_4 + \|\nabla\varphi_2\|_4) \|D^2(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2 \|\nabla w\|_4
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\Delta^2 u) u dx &= \int_{\Omega} (u_{x_1 x_1 x_1 x_1} + u_{x_1 x_1 x_2 x_2} + u_{x_2 x_2 x_1 x_1} + u_{x_2 x_2 x_2 x_2}) u dx \\
&= - \int_{\Omega} u_{x_1 x_1 x_1} u_{x_1} + u_{x_1 x_1 x_2} u_{x_2} + u_{x_2 x_2 x_1} u_{x_1} + u_{x_2 x_2 x_2} u_{x_2} dx \\
&= \int_{\Omega} u_{x_1 x_1} u_{x_1 x_1} + u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} + u_{x_2 x_2} u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} u_{x_2 x_2} dx \\
&= \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx = \|\Delta u\|_2^2.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Agora, se integrarmos em Ω a equação (1.18) multiplicada por $u_1 - u_2$, segue da igualdade (1.22) que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\Delta(u_1 - u_2)|^2 dx &= |\langle \det(D^2 \varphi_1) - \det(D^2 \varphi_2), u_1 - u_2 \rangle| \\
&\leq (\|\nabla \varphi_1\|_4 + \|\nabla \varphi_2\|_4) \|D^2(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2 \|\nabla(u_1 - u_2)\|_4 \\
&\leq C(\|\nabla \varphi_1\|_4 + \|\nabla \varphi_2\|_4) \|\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2 \|\Delta(u_1 - u_2)\|_2
\end{aligned} \tag{1.23}$$

onde usamos a igualdade (1.21) na segunda desigualdade e os Teoremas B.4 e B.6 (ver Apêndice B) na última. Simplificando a última cadeia de desigualdades, chegamos ao

$$\|\Delta(u_1 - u_2)\|_2 \leq C(\|\nabla \varphi_1\|_4 + \|\nabla \varphi_2\|_4) \|\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2.$$

Agora, usando a imersão $\|\nabla \varphi_i\|_4 \leq C\|\Delta \varphi_i\|_2$ para $i=1,2$ (aplicação dos Teoremas B.4 e B.6 Apêndice B), temos

$$\|\Delta(u_1 - u_2)\|_2 \leq C(\|\Delta \varphi_1\|_2 + \|\Delta \varphi_2\|_2) \|\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2. \tag{1.24}$$

Consideremos v solução do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v = \lambda f & , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ v = 0, \Delta v = 0 & , \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.25}$$

Notemos que

$$\|\Delta v\|_2 \leq \lambda \|f\|_1,$$

e então a primeira norma é pequena quando λ é pequeno.

Se $\varphi_i \in B(v, \rho) = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid \|\Delta(v - \varphi)\|_2 \leq \rho\}$, então (1.24) torna-se

$$\begin{aligned} \|\Delta(u_1 - u_2)\|_2 &\leq 2C(\rho + \|\Delta v\|_2)\|\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2 \\ &\leq 2C(\rho + \lambda\|f\|_1)\|\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\|_2, \end{aligned} \quad (1.26)$$

se $\rho + \lambda\|f\|_1 \leq \frac{1}{4C}$. Além disso, se $\varphi_i \in B(v, \rho)$ e u_i é a correspondente solução a qualquer dos Problemas (1.16) ou (1.17), descobrimos que

$$\|\Delta(u_i - v)\|_2^2 \leq \int_{\Omega} |\det(D^2\varphi_i)| |u_i - v| dx \leq S \int_{\Omega} |\det(D^2\varphi_i)| dx \|\Delta(u_i - v)\|_2,$$

isto é,

$$\|\Delta(u_i - v)\|_2 \leq S \int_{\Omega} |\det(D^2\varphi_i)| dx \leq C\|\Delta\varphi_i\|_2^2.$$

Mas podemos calcular que

$$\|\Delta\varphi_i\|_2^2 \leq 2(\|\Delta(\varphi_i - v)\|_2^2 + \|\Delta v\|_2^2) \leq 2(\rho^2 + \lambda^2\|f\|_1^2) \leq \frac{\rho}{C}$$

para ρ e λ suficientemente pequenos. Assim,

$$\|\Delta(u_i - v)\| \leq \rho. \quad (1.27)$$

Para $\varphi \in B(v, \rho)$, definimos o operador não linear

$$\begin{aligned} T : B(v, \rho) &\rightarrow B(v, \rho) \\ \varphi &\rightarrow T(\varphi) = u, \end{aligned}$$

onde u é a única solução do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2\varphi) + \lambda f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, \quad \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilizando as estimativas (1.26) e (1.27), e o teorema do ponto fixo de Banach (ver Apêndice B, Teorema B.7), temos que existe um único ponto fixo $u = T(u)$, a qual é uma solução do Problema (1.14). ■

2 SOLUÇÕES RADIAIS ESTACIONÁRIAS

2.1 CONDIÇÕES DE DIRICHLET

Começamos provando a existência de soluções radiais simétricas para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2 u) + \lambda f, & x \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial B(0, 1), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde, $f = f(r)$, r é a coordenada radial.

Estabelecemos o problema no disco unitário, isto é, procuramos soluções da forma $u = \tilde{u}(r)$, onde:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Sabemos que

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \quad (2.2)$$

assim, se $u = \tilde{u}(r)$ e denotando $' = d/dr$, então

$$u_{x_i} = \tilde{u}' \frac{x_i}{r} \text{ e } u_{x_i x_i} = \tilde{u}'' \frac{x_i^2}{r^2} + \tilde{u}' \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

Assim $\Delta u = \tilde{u}'' + \frac{\tilde{u}'}{r}$; logo $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \Delta \left(\tilde{u}'' + \frac{\tilde{u}'}{r} \right)$.

Calculando:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{u}'' + \frac{\tilde{u}'}{r} \right)_{x_i} &= \tilde{u}''' \frac{x_i}{r} + \frac{1}{r} \tilde{u}'' \frac{x_i}{r} - \tilde{u}' \frac{x_i}{r^3} \\ &= \tilde{u}''' \frac{x_i}{r} + \tilde{u}'' \frac{x_i}{r^2} - \tilde{u}' \frac{x_i}{r^3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\tilde{u}'' + \frac{\tilde{u}'}{r} \right)_{x_i x_i} &= \tilde{u}'''' \frac{x_i^2}{r^2} + \tilde{u}''' \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) + \tilde{u}'' \frac{x_i^2}{r^3} \\ &\quad - \tilde{u}'' \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x_i^2}{r^4} \right) - \tilde{u}' \frac{x_i^2}{r^4} - \tilde{u}' \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x_i^2}{r^5} \right). \end{aligned}$$

Disto:

$$\begin{aligned} &\Delta \left(\tilde{u}'' + \frac{\tilde{u}'}{r} \right) \\ &= \tilde{u}'''' + \tilde{u}''' \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{\tilde{u}''''}{r} + \tilde{u}'' \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \right) - \frac{\tilde{u}''}{r^2} - \tilde{u}' \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) \\ &= \tilde{u}'''' + 2 \frac{\tilde{u}''''}{r} - \frac{\tilde{u}''}{r^2} + \frac{\tilde{u}'}{r^3} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\tilde{u}'}{r^2} - \frac{\tilde{u}''}{r} + 2\tilde{u}'''' + r\tilde{u}'''' \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\tilde{u}'}{r^2} - \frac{\tilde{u}''}{r} + \frac{2\tilde{u}''}{r} + \tilde{u}'''' + \frac{2\tilde{u}'}{r^2} + \frac{2\tilde{u}''}{r} - \frac{2\tilde{u}''}{r} - \tilde{u}'''' - \frac{2\tilde{u}''}{r} - \tilde{u}'''' + 3\tilde{u}'''' + r\tilde{u}'''' \right) \\ &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{1}{r^2}(\tilde{u}' + r\tilde{u}'') + \frac{1}{r}(2\tilde{u}'' + r\tilde{u}''') + \frac{2}{r^2}(\tilde{u}' + r\tilde{u}'') - \frac{1}{r}(2\tilde{u}'' + r\tilde{u}''') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r}(2\tilde{u}'' + r\tilde{u}''') + (3\tilde{u}'''' + r\tilde{u}''''') \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ r \left[-\frac{1}{r^2}(\tilde{u}' + r\tilde{u}'') + \frac{1}{r}(2\tilde{u}'' + r\tilde{u}''') \right] \right\}' \\ &= \frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r}(\tilde{u}' + r\tilde{u}'') \right]' \right\}' \\ &= \frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r}(r\tilde{u}')' \right]' \right\}' \end{aligned}$$

Como

$$\det(D^2 u) = u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2} u_{x_2 x_1}, \quad (2.3)$$

calculando as derivadas mistas:

$$\begin{aligned} u_{x_1 x_2} = u_{x_2 x_1} &= \tilde{u}'' \frac{x_2}{r} \frac{x_1}{r} - \tilde{u}' \frac{x_1 x_2}{r^3} \\ &= \tilde{u}'' \frac{x_1 x_2}{r^2} - \tilde{u}' \frac{x_1 x_2}{r^3}. \end{aligned}$$

Assim, por (2.3),

$$\begin{aligned}
\det(D^2u) &= \left(\tilde{u}'' \frac{x_1^2}{r^2} + \tilde{u}' \frac{x_2^2}{r^3} \right) \left(\tilde{u}'' \frac{x_2^2}{r^2} + \tilde{u}' \frac{x_1^2}{r^3} \right) - \left(\tilde{u}'' \frac{x_1 x_2}{r^2} - \tilde{u}' \frac{x_1 x_2}{r^3} \right)^2 \\
&= (\tilde{u}'')^2 \frac{x_1^2 x_2^2}{r^4} + \tilde{u}'' \tilde{u}' \frac{x_1^4}{r^5} + \tilde{u}'' \tilde{u}' \frac{x_2^4}{r^5} + (\tilde{u}')^2 \frac{x_1^2 x_2^2}{r^6} - (\tilde{u}'')^2 \frac{x_1^2 x_2^2}{r^4} \\
&\quad + \tilde{u}'' \tilde{u}' \frac{x_1^2 x_2^2}{r^5} + \tilde{u}'' \tilde{u}' \frac{x_1^2 x_2^2}{r^5} - (\tilde{u}')^2 \frac{x_1^2 x_2^2}{r^6} \\
&= \frac{\tilde{u}'' \tilde{u}'}{r^5} (x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2) = \frac{\tilde{u}'' \tilde{u}'}{r^5} (x_1^2 + x_2^2)^2 = \frac{\tilde{u}'' \tilde{u}'}{r^5} r^4 = \frac{\tilde{u}'' \tilde{u}'}{r}.
\end{aligned}$$

Do feito acima, a equação (2.1) na sua forma radial torna-se:

$$\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r \tilde{u}')' \right]' \right\}' = \frac{\tilde{u}'' \tilde{u}'}{r} + \lambda f(r), \quad (2.4)$$

com as condições $\tilde{u}'(0) = 0$, $\tilde{u}(1) = 0$, $\tilde{u}'(1) = 0$, e $\lim_{r \rightarrow 0} r \tilde{u}'''(r) = 0$.

A primeira condição impõe a existência de um extremo na origem, a segunda e terceira condições são as condições de fronteira. A quarta condição de fronteira é técnica e impõe maior regularidade na origem. Se esta condição for removida, isso abrirá a possibilidade de construir funções $u(r)$ cuja segunda derivada tenha um pico na origem. Isto, por sua vez implicará a presença de uma medida na origem quando se calcula a quarta derivada de tal $u(r)$, de modo que, este tipo de função não pode ser considerada como uma solução aceitável de (2.4) sempre que $f(r)$ seja uma função.

Nesta seção assumiremos $f \in L^1([0, 1], r dr)$, isto é, f é uma função absolutamente integrável na medida $r dr$ no intervalo unitário, e omitimos a “tiu” na função \tilde{u} , a fim de simplificar a notação.

Agora vamos prosseguir para demonstrar a existência de pelo menos duas soluções para este problema de valor na fronteira. A partir de agora, vamos utilizar o espaço funcional $\overset{\circ}{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$, o qual é o fecho do espaço das funções suaves radialmente simétricas compactamente suportadas dentro da bola unitária de \mathbb{R}^2 com a norma de $W^{2,2}([0, 1], r dr)$. Procuramos soluções para o nosso problema dentro deste espaço funcional.

Lema 2.1. A equação diferencial (2.4) submetido às condições de fronteira de Dirichlet é a equação de Euler-Lagrange do funcional $J_\lambda : \overset{\circ}{W}^{2,2}([0, 1], r dr) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u'')^2 + \frac{(u')^2}{r^2} \right] r dr + \frac{1}{6} \int_0^1 (u')^3 dr - \lambda \int_0^1 f u r dr. \quad (2.5)$$

Demonstração: Seja $\phi \in \overset{\circ}{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$ arbitrário. Consideremos a primeira variação

de Euler-Lagrange do funcional (2.5):

$$\frac{d}{dt} J_\lambda(u + t\phi) \Big|_{t=0} = \underbrace{\int_0^1 \left[u'' \phi'' + \frac{u' \phi'}{r^2} \right] r dr}_A + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 \phi' dr - \lambda \int_0^1 f \phi r dr}_B.$$

$$A = \int_0^1 u'' \phi'' r dr + \int_0^1 \frac{u' \phi'}{r} dr = A_1 + A_2.$$

Assim, calculando A_1 e A_2 , obtemos,

$$\begin{aligned} A_1 &= u'' \phi' r \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi' (u''' r + u'') dr \\ &= - \int_0^1 u''' \phi' r dr - \int_0^1 u'' \phi' dr \\ &= - \left(u''' \phi r \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi (u'''' r + u''') dr \right) - \left(u'' \phi \Big|_0^1 - \int_0^1 u''' \phi dr \right) \\ &= \int_0^1 u'''' \phi r dr + 2 \int_0^1 u''' \phi dr \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{u' \phi}{r} \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi \left(\frac{r u'' - u'}{r^2} \right) dr \\ &= - \int_0^1 \frac{u'' \phi}{r} dr + \int_0^1 \frac{u' \phi}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(u'''' \phi r + 2u''' \phi - \frac{u'' \phi}{r} + \frac{u' \phi}{r^2} \right) dr \\ &= \int_0^1 \left(u'''' + \frac{2u'''}{r} - \frac{u''}{r^2} + \frac{u'}{r^3} \right) \phi r dr \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r u')' \right]' \right\}' \right) \phi r dr. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$B = \frac{1}{2} \left((u')^2 \phi \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 u' u'' \phi dr \right) = - \int_0^1 u' u'' \phi dr = - \int_0^1 \left(\frac{u' u''}{r} \right) \phi r dr.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_\lambda(u + t\phi) \Big|_0^1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (ru')' \right]' \right\}' \right) \phi r dr - \int_0^1 \left(\frac{u'u''}{r} \right) \phi r dr - \lambda \int_0^1 f \phi r dr \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (ru')' \right]' \right\}' - \frac{1}{r} u'u'' - \lambda f \right) \phi r dr. \end{aligned}$$

■

A existência e multiplicidade das soluções para o nosso problema de valor na fronteira serão obtidas procurando pontos críticos do funcional (2.5).

Começamos provando um resultado sobre a geometria deste funcional.

Lema 2.2. O funcional (2.5) admite o seguinte limite radial inferior:

$$J_\lambda(u) \geq g(\|u''\|_{L^2(\mu)}), \quad \text{onde} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - c_1x^3 - c_2\lambda\|f\|_{L^1(\mu)}x.$$

Aqui c_1, c_2 são constantes positivas e μ representa a medida radial bidimensional $r dr$.

Demonstração: Temos as seguintes cadeias de desigualdades:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'')^2 r dr + \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 dr + \frac{1}{6} \int_0^1 (u')^3 dr - \lambda \|f\|_{L^1(\mu)} \|u\|_{L^\infty(\mu)} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'')^2 r dr + \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 dr + \frac{1}{6} \int_0^1 (u')^3 dr - c\lambda \|f\|_{L^1(\mu)} \left[\int_0^1 (u')^2 dr \right]^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'')^2 r dr - c_1 \left[\int_0^1 (u'')^2 r dr \right]^{3/2} - c_2\lambda \|f\|_{L^1(\mu)} \left[\int_0^1 (u'')^2 r dr \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \|u''\|_{L^2(\mu)}^2 - c_1 \|u''\|_{L^2(\mu)}^3 - c_2\lambda \|f\|_{L^1(\mu)} \|u''\|_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

■

Agora provaremos o seguinte resultado de compacidade para J_λ :

Proposição 2.3. Toda sequência limitada de Palais-Smale para J_λ no nível c admite uma subsequência convergente em $\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$.

Demonstração: Já que $\{u_n\} \subset \mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$ é limitada, descobrimos que, passando para uma subsequência se necessário, para uma $u \in \mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$ as seguintes propriedades são cumpridas

- I. $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$, quando $n \rightarrow \infty$,
- II. $u'_n \rightarrow u'$ fortemente em $L^p([0, 1], r dr)$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $1 \leq p < \infty$,

III. $u_n \rightarrow u$ uniformemente em $[0, 1]$, quando $n \rightarrow \infty$.

Escrevemos a condição $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $\{\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)\}^*$, quando $n \rightarrow \infty$, como a seguir

$$\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r u'_n)' \right]' \right\}' = \frac{1}{r} u'_n u''_n + \lambda f + w_n,$$

$$u_n \in \mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr), \quad w_n \rightarrow 0 \quad \text{em } \{\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)\}^*, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde os w_n são os termos de erro. Agora multiplicamos esta equação por $u_n - u$ e integramos sobre o intervalo unitário com a medida conveniente para obter

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[u''_n (u''_n - u'') + \frac{u'_n (u'_n - u')}{r^2} \right] r dr = \\ & = \int_0^1 u'_n u''_n (u_n - u) dr + \lambda \int_0^1 f(u_n - u) r dr + \langle w_n, u_n - u \rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

após integração por partes na primeira linha. Os três termos convergem para zero pelas condições I (o terceiro somando) e III (primeiro e segundo somandos) dadas acima. Por outro lado para

$$F(v) = \int_0^1 \left[u'' v'' + \frac{u' v'}{r^2} \right] r dr \in \{\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)\}^*,$$

temos

$$F(u_n) \rightarrow F(u), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

devido à propriedade I.

Como:

$$\int_0^1 u'_n u'' dr = u'_n u' \Big|_0^1 - \int_0^1 u''_n u' dr = - \int_0^1 u''_n u' dr$$

e

$$\int_0^1 u''_n u'_n dr = \frac{1}{2} (u'_n)^2 \Big|_0^1 = 0, \quad \int_0^1 u'' u' dr = \frac{1}{2} (u')^2 \Big|_0^1 = 0$$

devido às condições de fronteira, então

$$\begin{aligned}
F(u) - F(u_n) &= \int_0^1 \left[u''u'' - u''u_n'' + \frac{u'u' - u_n'u_n'}{r^2} \right] r dr \\
&= \int_0^1 \left[\frac{u_n''u_n'}{r} - \frac{u_n'u_n''}{r} - u_n''u'' - \frac{u_n''u'}{r} + u''u'' + \frac{u'u''}{r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_n'u_n''}{r} - \frac{u_n'u'}{r^2} + \frac{u'u''}{r} + \frac{u'u'}{r^2} + \frac{u_n'u_n''}{r} - \frac{u_n''u'}{r} \right] r dr \\
&= \int_0^1 \left[(u_n'' - u'')\frac{u_n'}{r} - u_n'' \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) + u'' \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_n'}{r} \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) + \frac{u'}{r} \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) + (u_n' - u')\frac{u_n''}{r} \right] r dr \\
&= \int_0^1 \left[(u_n'' - u'')\frac{u_n'}{r} - (u_n'' - u'') \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) - \frac{(u_n' - u')}{r} \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) + (u_n' - u')\frac{u_n''}{r} \right] r dr.
\end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^1 \left[(u_n'' - u'')\frac{u_n'}{r} - (u_n'' - u'') \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) - \frac{(u_n' - u')}{r} \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) + (u_n' - u')\frac{u_n''}{r} \right] r dr \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, se somarmos a expressão (2.7) à primeira linha de (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[u_n''(u_n'' - u'') + \frac{u_n'(u_n' - u')}{r^2} \right] r dr + \\
&\int_0^1 \left[(u_n'' - u'')\frac{u_n'}{r} - (u_n'' - u'') \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) - \frac{(u_n' - u')}{r} \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) + (u_n' - u')\frac{u_n''}{r} \right] r dr \\
&= \int_0^1 \left[(u_n'' - u'') \left(u_n'' + \frac{u_n'}{r} - u'' - \frac{u'}{r} \right) + \frac{(u_n' - u')}{r} \left(\frac{u_n'}{r} - u'' - \frac{u'}{r} + u_n'' \right) \right] r dr \\
&= \int_0^1 \left[(u_n'' - u'') + \frac{(u_n' - u')}{r} \right] \left[(u_n'' - u'') + \frac{(u_n' - u')}{r} \right] r dr \\
&= \int_0^1 |\Delta(u_n - u)|^2 r dr,
\end{aligned}$$

onde $\Delta = \partial_{rr} + \frac{\partial_r}{r}$ é o Laplaciano radial, resultando assim:

$$\int_0^1 |\Delta(u_n - u)|^2 r dr \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

a qual é a conclusão desejada. ■

Seja a função “corte” $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, a qual assumimos não crescente, suave e dada por

$$\begin{cases} \gamma(t) = 1, & \text{se } t \leq l \\ \gamma(t) = 0, & \text{se } t \geq l^* \end{cases}$$

para dois números reais $l^* > l > 0$ dados.

Lema 2.4. O funcional definido por

$$J_\lambda^0(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u'')^2 + \frac{(u')^2}{r^2} \right] r dr + \frac{1}{6} \int_0^1 (u')^3 \gamma(\|\Delta u\|_2) dr - \lambda \int_0^1 f u r dr \quad (2.8)$$

satisfaz as seguintes propriedades para valores adequados de l, l^* e λ :

- (i) Se $\|\Delta u\|_2 < l$ então $J_\lambda^0 = J_\lambda$.
- (ii) Se $J_\lambda^0(u) < 0$ então $\|\Delta u\|_2 < l$.
- (iii) Se $\mathbf{m} = \inf_{u \in \overset{\circ}{W}^{2,2}([0,1], r dr)} J_\lambda^0(u)$ então J_λ^0 verifica uma condição local de Palais-Smale no nível \mathbf{m} .

Demonstração: A propriedade (i) é óbvia. Para $\lambda_c > 0$ suficientemente pequena, o limite radial inferior g de J_λ atinge um máximo num nível positivo de “energia” para $0 < \lambda < \lambda_c$. Denotamos como x_0 a menor raiz de $g(x)$ e como x_m a posição do máximo. Agora escolhemos $l = x_0$ e $l^* = x_m$.

O funcional J_λ^0 admite o seguinte limite radial inferior:

$$J_\lambda^0(u) \geq h(\|u''\|_{L^2(\mu)}), \quad \text{onde} \quad h(x) = \frac{1}{2}x^2 - c_1 x^3 \gamma(x) - c_2 \lambda \|f\|_{L^1(\mu)} x,$$

onde c_1 e c_2 são as mesmas constantes do Lema 2.2. Assim, este funcional é limitado inferiormente e positivo para $x > x_0$. Por conseguinte, a propriedade (ii) é cumprida.

A propriedade (iii) decorre do fato que todas as sequências de Palais-Smale de minimizadores deste funcional são limitadas desde que $\mathbf{m} < 0$, juntamente com uma aplicação da Proposição 2.3. ■

Agora provaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.5. Existe um número real positivo λ_c tal que, para $0 < \lambda < \lambda_c$, o problema de Dirichlet (2.4) possui pelo menos duas soluções.

Demonstração: Pelos teoremas de imersão de sobolev já usados na demonstração do Lema 2.2, o funcional J_λ está bem definido em $\overset{\circ}{W}^{2,2}([0,1], r dr)$, é contínuo e Gateaux diferenciável, e a sua derivada é fracamente contínua.

Provaremos a existência de duas soluções para o nosso problema de valor na fronteira encontrando dois pontos críticos para o funcional J_λ , um deles é um mínimo local negativo e o outro, é um ponto crítico do tipo passo da montanha de nível positivo.

Começamos provando a existência do mínimo local num nível de “energia” negativo.

Para $\lambda_c > 0$ suficientemente pequeno, a estimativa radial inferior g atinge um máximo num nível de “energia” positivo para $0 < \lambda < \lambda_c$. Na prova do Lema 2.4, nós mostramos que o funcional J_λ^0 é limitado inferiormente e positivo para $x > x_0$. Por conseguinte, \mathfrak{m} é um valor crítico negativo de J_λ^0 , e portanto de J_λ , a partir de onde se conclui a existência de um mínimo local.

A seguir, passamos a provar a existência de um ponto crítico do tipo passo da manta- nha positivo. Já provamos a existência de um mínimo local negativo, o qual será denotado $u^{(0)}$ a partir de agora. Sabemos que $J_\lambda(u^{(0)}) < 0$ e da existência de $u^{(2)}$ com $\| [u^{(2)}]'' \|_{L^2(\mu)}$ suficientemente grande tal que $J_\lambda(u^{(2)}) < J_\lambda(u^{(0)})$.

Introduzimos o conjunto de caminhos no espaço de Banach

$$\Theta = \left\{ \theta \in C\left([0, 1], \mathring{W}^{2,2}([0, 1]rdr)\right) \mid \theta(0) = u^{(0)}, \theta(1) = u^{(2)} \right\}.$$

Consideremos o valor minimax:

$$\mathfrak{p} = \inf_{\theta \in \Theta} \max_{s \in [0, 1]} J_\lambda[\theta(s)],$$

e aplicamos o princípio variacional de Ekeland (ver Apêndice B Teorema B.11) para provar a existência de uma sequência de Palais-Smale nesse valor.

Isto significa que existe uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathring{W}^{2,2}([0, 1], rdr)$, tal que

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow \mathfrak{p}, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } \{\mathring{W}^{2,2}([0, 1], rdr)\}^*, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Devemos provar que esta sequência de Palais-Smale é limitada.

Para $u \in \mathring{W}^{2,2}([0, 1]rdr)$ verifica-se a seguinte igualdade:

$$-\int_0^1 u'u''udr = -\frac{1}{2}(u')^2u \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^3 dr.$$

Escolhemos $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathring{W}^{2,2}([0, 1], rdr)$ uma sequência de Palais-Smale para J_λ no

nível \mathfrak{p} e denotamos $\langle z_n, u_n \rangle = \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle$, então:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} + o(1) &= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{3} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle + \frac{1}{3} \langle z_n, u_n \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u_n'')^2 + \frac{(u_n')^2}{r^2} \right] r dr + \frac{1}{6} \int_0^1 (u_n')^3 dr - \lambda \int_0^1 f u_n r dr \\
&\quad - \frac{1}{3} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r u_n')' \right]' \right\} - \frac{1}{r} u_n' u_n'' - \lambda f \right) u_n r dr \right) + \frac{1}{3} \langle z_n, u_n \rangle \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 \left[(u_n'')^2 + \frac{(u_n')^2}{r^2} \right] r dr - \frac{2\lambda}{3} \int_0^1 f u_n r dr + \frac{1}{3} \langle z_n, u_n \rangle \\
&\geq \tilde{c} \|u_n''\|_{L^2(\mu)} - \frac{2}{3} c_2 \lambda \|f\|_{L^1(\mu)} \|u_n''\|_{L^2(\nu)} + \frac{1}{3} \langle z_n, u_n \rangle \\
&\geq C \|u_n''\|_{L^2(\mu)},
\end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$, n suficientemente grande e λ suficientemente pequeno.

Em consequência, a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$.

Sabemos, pela Proposição 2.3, que J_λ satisfaz uma condição local de Palais-Smale no nível \mathfrak{p} , assim temos para algum $u^{(1)} \in \mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$,

$$J_\lambda(u^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \mathfrak{p}.$$

Assim, $u^{(1)}$ é um ponto crítico obtido via passo da montanha, e consequentemente

$$J'_\lambda(u^{(1)}) = 0,$$

portanto, a nossa equação diferencial é cumprida em $\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$. ■

2.2 CONDIÇÕES DE NAVIER

Consideremos novamente o Problema (2.4) no intervalo unitário, mas agora, submetido às condições de fronteira de Navier. No caso radial, estas condições se traduzem em $u(1) = 0$ e $u''(1) + u'(1) = 0$, e assumimos também a condição $u'(0) = 0$ na origem por razões de simetria. Novamente assumimos $f \in L^1([0, 1], r dr)$.

Como na seção anterior, vamos provar a existência de pelo menos duas soluções deste problema de valor na fronteira.

A nossa estrutura funcional será dada pelo espaço $\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$, o qual definimos como a interseção $\mathring{W}^{2,2}([0, 1], r dr) \cap \mathring{W}^{1,2}([0, 1], r dr)$.

Provaremos a existência de soluções para o nosso problema pertencentes a este espaço funcional.

Neste caso, as soluções para a equação diferencial correspondem aos pontos críticos de um funcional ligeiramente diferente.

Lema 2.6. A equação diferencial (2.4) submetida às condições de fronteira de Navier é a equação de Euler-Lagrange do funcional $I_\lambda : \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(u'' + \frac{u'}{r} \right)^2 r dr + \frac{1}{6} \int_0^1 (u')^3 dr - \lambda \int_0^1 f u r dr \quad (2.9)$$

Demonstração: Consideremos a primeira variação de Euler-Lagrange do funcional (??)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_\lambda(u + t\phi) \Big|_{t=0} &= \int_0^1 \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) \left(\phi'' + \frac{\phi'}{r} \right) r dr + \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 \phi' dr - \lambda \int_0^1 f \phi r dr \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r u')' \right]' \right\} - \frac{1}{r} u' u'' - \lambda f \right) \phi r dr \end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida argumentando como na seção anterior, integrando por partes e usando as condições de fronteira, e usando o fato de que ϕ é arbitrário e pertence a $\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$. ■

Agora vamos provar um resultado em relação à geometria do funcional I_λ .

Primeiro tome em conta que ambos funcionais J_λ e I_λ estão bem definidos em $W^{2,2}([0, 1], r dr)$.

Lema 2.7. Seja $u \in W^{2,2}([0, 1], r dr)$. Então $I_\lambda(u) \geq J_\lambda(u)$.

Demonstração: É suficiente provar

$$\int_0^1 \left(u'' + \frac{u'}{r} \right)^2 r dr \geq \int_0^1 \left[(u'')^2 + \frac{(u')^2}{r^2} \right] r dr. \quad (2.10)$$

Mas

$$\int_0^1 \left(u'' + \frac{u'}{r} \right)^2 r dr = \int_0^1 \left[(u'')^2 + \frac{(u')^2}{r^2} \right] r dr + 2 \int_0^1 \left(u'' \frac{u'}{r} \right) r dr. \quad (2.11)$$

Assim (2.10) é válido se, e só se,

$$\int_0^1 \left(u'' \frac{u'}{r} \right) r dr \geq 0.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(u'' \frac{u'}{r} \right) r dr &= \int_0^1 u'' u' dr = \frac{1}{2} \int_0^1 [(u')^2]' dr \\ &= \frac{1}{2} (u'(1))^2 - \frac{1}{2} (u'(0))^2 = \frac{1}{2} (u'(1))^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pois $u'(0) = 0$. ■

Observação 2.1. Notemos que este resultado implica que a geometria de I_λ corresponde à mesma forma do passo da montanha de J_λ .

A seguir, vamos provar a existência de pelo menos duas soluções para o problema com condições de Navier.

Proposição 2.8. Toda sequência limitada de Palais-Smale para I_λ no nível c admite uma subsequência fortemente convergente em $\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$.

Demonstração: Como $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$ é limitada, descobrimos que, passando a uma subsequência se necessário, se cumprem as seguintes propriedades:

- I. $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$, quando $n \rightarrow \infty$,
- II. $u'_n \rightarrow u'$ fortemente em $L^p([0, 1], r dr)$, quando $n \rightarrow \infty$, para $1 \leq p < \infty$,
- III. $u_n \rightarrow u$ uniformemente em $[0, 1]$, quando $n \rightarrow \infty$,

para alguma $u \in \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$.

Escrevemos a condição de convergência $I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ em $\{\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)\}^*$ como a seguir:

$$\frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r u'_n)' \right]' \right\}' = \frac{1}{r} u'_n u''_n + \lambda f + w_n,$$

$$u_n \in \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr), \quad w_n \rightarrow 0 \quad \text{em } \{\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)\}^*, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde os w_n são os termos de erro.

Se multiplicarmos a equação acima por $u_n - u$ e integrarmos sobre o intervalo unitário com a medida adequada, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left\{ \left(u''_n + \frac{u'_n}{r} \right) \left[(u_n - u)'' + \frac{(u_n - u)'}{r} \right] \right\} r dr \\ &= \int_0^1 u'_n u''_n (u_n - u) dr + \lambda \int_0^1 f(u_n - u) r dr + \langle w_n, u_n - u \rangle, \end{aligned} \tag{2.12}$$

após a integração por partes na primeira linha.

Os três termos na segunda linha convergem para zero pelas propriedades I (o terceiro somando) e III (o primeiro e segundo somandos) dadas acima. Por outro lado, temos

$$\int_0^1 \left\{ \left(u'' + \frac{u'}{r} \right) \left[(u_n - u)'' + \frac{(u_n - u)'}{r} \right] \right\} r dr \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

devido à propriedade I.

Agora, subtraindo (2.13) da primeira linha de (2.12), obtemos

$$\int_0^1 |\Delta(u_n - u)|^2 r dr \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde $\Delta = \partial_{rr} + \frac{\partial_r}{r}$ é, como na seção anterior, o Laplaciano radial, concluindo assim a prova. ■

Agora anunciaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.9. Existe um número real positivo λ_c tal que, para $0 < \lambda < \lambda_c$, o problema de Navier para (2.4) possui pelo menos duas soluções.

Demonstração: Argumentando como na seção prévia, mostraremos a existência de duas soluções para o nosso problema encontrando dois pontos críticos do funcional I_λ , um deles é um mínimo local negativo e o outro é um ponto crítico obtido via passo da montanha de nível positivo.

A prova de existência do mínimo é idêntica ao caso anterior.

Aplicaremos a mesma técnica minimax como na seção prévia e portanto, concluímos a existência de uma sequência de Palais-Smale $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$ tal que $J_\lambda(u_n) \rightarrow \mathfrak{p}$ e $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ em $\{\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)\}^*$, onde \mathfrak{p} é o nível crítico do passo da montanha.

Devemos provar que esta sequência de Palais-Smale é limitada.

Para $u \in \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$, verificam-se as seguintes igualdades:

$$-\int_0^1 u' u'' u dr = -\frac{1}{2} (u')^2 u \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 dr = \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 dr.$$

Escolhemos $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$ uma sequência de Palais-Smale para I_λ no

nível \mathfrak{p} e denotamos $\langle z_n, u_n \rangle = \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle$, então:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} + o(1) &= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{3} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle + \frac{1}{3} \langle z_n, u_n \rangle \\ &\geq \frac{1}{6} \int_0^1 \left(u_n'' + \frac{u_n'}{r} \right)^2 r dr - \frac{2}{3} c_2 \lambda \|f\|_{L^1(\mu)} \|u_n''\|_{L^2(\mu)} + \frac{1}{3} \langle z_n, u_n \rangle \\ &\geq C \|u_n''\|_{L^2(\mu)}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, n suficientemente grande e λ suficientemente pequeno.

Em consequência, a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$.

Sabemos pela Proposição 2.8, que I_λ satisfaz uma condição local de Palais-Smale no nível \mathfrak{p} , assim temos

$$I_\lambda(u_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = \mathfrak{p} > 0.$$

Também, u_* é um ponto crítico de passo da montanha, assim

$$I_\lambda(u_*) = 0,$$

e a nossa equação diferencial é satisfeita em $\hat{W}^{2,2}([0, 1], r dr)$. ■

Apêndices

APÊNDICE A – PRELIMINARES

Neste capítulo, iremos apresentar alguns conceitos que foram utilizados ao longo deste trabalho. Durante todo este apêndice, o conjunto Ω será um conjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave de \mathbb{R}^n .

A.1 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição A.1. Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; onde cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado um multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Definição A.2. Dado um multi-índice α e uma função u , definimos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

Definição A.3. Se k é um inteiro não negativo,

$$D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\},$$

é o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k . Atribuindo alguma ordem para as derivadas parciais, podemos também considerar $D^k u(x)$ como um ponto em \mathbb{R}^{n^k} .

Definição A.4. $|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}$.

Definição A.5. Suponha $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α^{th} -derivada parcial fraca de u , denotada

$$D^\alpha u = v,$$

definida por

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx$$

para todas as funções teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Fixemos $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro não negativo.

Definição A.6. O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas as funções localmente integráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α , com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence ao $L^p(\Omega)$.

Observação A.1. Se $p = 2$, escrevemos usualmente

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Note que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definição A.7. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos sua norma como sendo

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty, \end{cases}$$

onde, $\text{ess sup } f = \inf \{r \in \mathbb{R} \mid \nu(f > r) = 0\}$ e ν denota a medida usual em \mathbb{R}^n .

Definição A.8. Convergência em espaços de Sobolev.

- a) Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência, e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que u_n converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado $u_n \rightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

- b) Denotamos por

$$u_n \rightarrow u \text{ em } W_{loc}^{k,p}(\Omega), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

quando

$$u_n \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(V), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para cada $V \subset\subset \Omega$ ($V \subset \bar{V} \subset \Omega$).

Definição A.9. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ se define como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Observação A.2. $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e só se, existe uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty$, tal que, $u_n \rightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observação A.3. Vamos interpretar $W_0^{k,p}(\Omega)$ como aquelas funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que

$$D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ para toda } |\alpha| \leq k - 1,$$

(ver [16] página 245,259).

Definição A.10 (Notação de o pequeno). Escrevemos $f = o(g)$, quando $x \rightarrow x_0$, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

A.2 CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

Se escrevemos uma EDP na forma abstrata:

$$A(u) = 0, \tag{A.1}$$

onde A representa, posivelmente, um operador diferencial parcial não linear e u é a incógnita. Não existe uma teoria geral para resolver tais EDP's.

O cálculo das variações identifica uma classe importante de tais problemas não lineares que podem ser resolvidos usando técnicas relativamente simples da análise funcional não linear. Esta é a classe de problemas variacionais, isto é, EDP da forma (A.1), onde o operador não linear A é a “derivada” de um funcional de “energia” adequado I . Simbolicamente escrevemos

$$A = I'. \tag{A.2}$$

Então o problema (A.1) fica

$$I'(u) = 0. \tag{A.3}$$

A vantagem desta nova formulação é que agora podemos reconhecer soluções de (A.1) como sendo pontos críticos de I .

A.2.1 Primeira variação, equação de Euler-Lagrange

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, e seja dada uma função suave

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Chamamos L de Lagrangiano.

Notação A.1. Escrevemos

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n),$$

para $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$. Assim p é o nome da variável para a qual substituímos $\nabla w(x)$ acima, e z é a variável para a qual substituímos $w(x)$. Também estabelecemos

$$\begin{cases} D_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}) \\ D_z L = L_z \\ D_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}). \end{cases}$$

Vamos precisar as ideias acima assumindo que I tem a forma explícita

$$I(w) = \int_{\Omega} L(\nabla w(x), w(x), x) dx \quad (\text{A.4})$$

para funções suaves $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, por exemplo, a condição de contorno

$$w = g \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (\text{A.5})$$

Suponhamos adicionalmente que para uma função particular u , a qual satisfaz a condição $u = g$ sobre $\partial\Omega$, seja um minimizante de I entre todas as funções w que satisfazem (A.5). Então u é solução de uma certa equação diferencial parcial não linear. Escolhamos qualquer função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e consideremos a função de valor real

$$i(t) = I(u + t\phi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como u é um minimizador de I e $u + t\phi = u = g$ sobre $\partial\Omega$, observamos que i tem um mínimo em $t = 0$. Portanto

$$i'(0) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Explicitamente calculamos esta derivada (chamada a primeira variação)

$$i(t) = \int_{\Omega} L(\nabla u + t\nabla\phi, u + t\phi, x) dx.$$

Assim

$$i'(t) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + t\nabla\phi, u + t\phi, x) \phi_{x_i} + L_z(\nabla u + t\nabla\phi, u + t\phi, x) \phi dx.$$

Se $t = 0$, deduzimos de (A.6) que

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) \phi_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \phi dx.$$

Agora, como ϕ tem suporte compacto, podemos integrar por partes e obter

$$0 = \int_{\Omega} \left[- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \right] \phi dx.$$

Como esta igualdade verifica-se para toda função teste ϕ , concluímos que u resolve a EDP não linear

$$- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional de energia I definido por (A.4). Para mais detalhes veja [16].

A.2.2 Derivada de Gateaux

Consideremos um funcional $I : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach H .

O funcional I tem uma derivada de Gateaux $f \in H^*$ em $u \in U$ se, para cada $v \in H$, I admite a expansão

$$I(u + tv) = I(u) + t\langle f, v \rangle + o(t) \tag{A.7}$$

com $t \in \mathbb{R}$.

A derivada de Gateaux de I em u é denotada por $I'(u)$. Se a derivada de Gateaux existe para todo $u \in U$, então I é dito Gateaux diferenciável.

Observação A.4. Se $I(u)$ está definido e se $I(u + tv)$ está definido para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, então

$$\langle I'(u), v \rangle = \left. \frac{d}{dt} I(u + tv) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(u + tv) - I(u)].$$

Definição A.11. Dizemos que $u \in U$ é um ponto crítico de I , se $I'(u) = 0$.

Notação A.2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, introduzimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} K &= \{u \in U : I'(u) = 0\}, & K_c &= \{u \in K : I(u) = c\}, \\ I^c &= \{u \in U : I(u) \leq c\}, & I_c &= \{u \in U : I(u) \geq c\}, \\ I_a^b &= \{u \in U : a \leq I(u) \leq b\}. \end{aligned}$$

Definição A.12. Uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ é dita uma sequência de Palais-Smale para I no nível c se

- i) $I(u_n) \rightarrow c$, quando $n \rightarrow \infty$.
- ii) $I'(u_n) \rightarrow 0$ em H^* .

Definição A.13. Dizemos que I satisfaz a condição local de Palais-Smale no nível c se cada sequência de Palais-Smale no nível c , admite uma subsequência fortemente convergente em H .

Para mais detalhes veja [16] ou [20].

APÊNDICE B - RESULTADOS DE ANÁLISE

Neste apêndice serão apresentados alguns resultados de análise funcional e teoria das EDP's utilizados neste trabalho.

Definição B.1 (Espaço de Hardy). O espaço de Hardy no \mathbb{R}^n é definido como:

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \sup_x |f * h_t(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

onde

$$h_t(x) = \frac{1}{t^n} h\left(\frac{x}{t}\right), \quad \text{tal que } h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), h(x) \geq 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} h dx = 1.$$

Lema B.2. Seja $v \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Então, as seguintes expressões

$$\begin{aligned} & \det(D^2v), \\ & (v_{x_1} v_{x_2 x_2})_{x_1} - (v_{x_1} v_{x_2 x_1})_{x_2}, \\ & (v_{x_1} v_{x_2})_{x_1 x_2} - \frac{1}{2} (v_{x_2}^2)_{x_1 x_1} - \frac{1}{2} (v_{x_1}^2)_{x_2 x_2}, \end{aligned}$$

pertencem ao espaço $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ e são iguais nele, onde $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ é o espaço de Hardy.

Prova: Veja [5].

Lema B.3. Seja $u \in H_0^2(\Omega)$. Então

$$\det(D^2u) = (u_{x_1} u_{x_2})_{x_1 x_2} - \frac{1}{2} (u_{x_2}^2)_{x_1 x_1} - \frac{1}{2} (u_{x_1}^2)_{x_2 x_2}$$

em $L^1(\Omega) \cap h_r^1(\Omega)$. Aqui $h_r^1(\Omega)$ é a classe de funções restrição de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ao Ω .

Prova: Veja [5].

Teorema B.4 (Rellich-Kondrachov). Seja Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave do \mathbb{R}^n . Então as seguintes imersões são compactas:

- i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$; $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$, se $p < n$.
- ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$; $1 \leq q < \infty$, se $p = n$.
- iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$; se $p > n$.

Prova: Veja [3].

Teorema B.5 (Desigualdade de Hölder). Assuma $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Prova: Veja [2].

Teorema B.6. Seja $k \geq 1$ um inteiro e seja p com $1 \leq p < \infty$. Temos as seguintes imersões contínuas:

- i) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, se $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$.
- ii) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $p \leq q < \infty$ se $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} = 0$.
- iii) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0$.

Prova: Veja [2].

Teorema B.7 (Ponto fixo de Banach). Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $S : X \rightarrow X$ um operador contração, isto é

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \text{ com } k < 1.$$

Então S tem um único ponto fixo, $u = Su$.

Prova: Veja [2].

Definição B.8. Seja o operador L na forma

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}(u) + b^i(x)D_i(u) + c(x)u \tag{B.1}$$

definido num espaço de funções adequado; com a^{ij} , b^i , c funções definidas sob um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \dots, n$. Dizemos que o operador L da forma (B.1) é estritamente elíptico

no domínio Ω se:

$$a^{ij}(x)y_i y_j \geq \lambda |y|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

para alguma constante positiva λ .

Teorema B.9. Seja Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave de \mathbb{R}^n e seja o operador L na forma (B.1) estritamente elíptico em Ω com coeficientes $a^{ij} \in C(\bar{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty$, com $i, j = 1, \dots, n$ e $c \leq 0$. Então existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Prova: Veja [15].

Teorema B.10 (Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear que satisfaz:

- i) existe $\alpha > 0$, tal que, $|a(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$, $\forall u, v \in H$ (continuidade),
- ii) existe $\beta > 0$, tal que $a(u, u) \geq \beta \|u\|^2$, $\forall u \in H$ (coercividade).

Então, para cada $f \in H^*$, existe um único $u \in H$ tal que:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Prova: Veja [8].

Teorema B.11 (Princípio Variacional de Ekeland-forma fraca). Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferior (ver Apêndice C). Assuma ainda que Φ é limitado inferiormente e seja $c = \inf_{x \in X} \Phi(x)$. Então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u_\varepsilon \in X$ tal que

$$c \leq \Phi(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \tag{B.2}$$

e

$$\Phi(x) - \Phi(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in X, \quad x \neq u_\varepsilon. \tag{B.3}$$

Prova: Veja [6], [9].

Definição B.12. Um subconjunto fechado F de um espaço de Banach \mathcal{B} separa dois pontos u e v em \mathcal{B} se u e v pertencem a componentes conexas disjuntas de $\mathcal{B} \setminus F$.

Definição B.13. O funcional diferenciável $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição $(PS)_{G,c}$ em torno de um conjunto G no nível c se toda sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{B} tal que

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, G) = 0$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = c$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi'(x_n)\| = 0$,

possui uma subsequência convergente.

Teorema B.14 (Ghoussoub & Preiss). Seja $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Gateaux diferenciável tal que $\Phi' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ é contínuo em \mathcal{B} , com a topologia da norma, em \mathcal{B}^* com a topologia fraca*. Fixe $u \neq 0$ e defina

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi[\gamma(t)],$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], \mathcal{B}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u\}.$$

Seja F um subconjunto fechado tal que $F \cap \Phi_c$ separa 0 e u . Assuma que Φ satisfaz a condição $(PS)_{F,c}$. Então existe $u_* \in F$ tal que $\Phi(u_*) = c$ e $\Phi'(u_*) = 0$.

Prova: Veja [14].

APÊNDICE C - PROVA DE RESULTADOS USADOS

C.1 CONTINUIDADE DO FUNCIONAL J_λ

Como

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 - \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} dx - \lambda \int_{\Omega} f u dx \\ &= J_\lambda^1(u) + J_\lambda^2(u) + J_\lambda^3(u), \end{aligned}$$

e J_λ^1 , J_λ^3 são contínuos, assim só devemos provar que

$$J_\lambda^2(u) = - \int_{\Omega} u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} dx$$

é contínuo.

Com efeito: Sejam $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ e $u \in H_0^2(\Omega)$, tais que $u_n \rightarrow u$ em $H_0^2(\Omega)$. Então temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} u_n \partial_{x_2} u_n \partial_{x_1 x_2} u_n - \partial_{x_1} u \partial_{x_2} u \partial_{x_1 x_2} u &= \partial_{x_1} (u_n - u) \partial_{x_2} (u_n - u) \partial_{x_1 x_2} (u_n - u) \\ &\quad + \partial_{x_1 x_2} u \partial_{x_1} u_n \partial_{x_2} (u_n - u) + \partial_{x_1 x_2} u_n \partial_{x_2} u \partial_{x_1} (u_n - u) \\ &\quad + \partial_{x_2} u_n \partial_{x_1} u \partial_{x_1 x_2} (u_n - u). \end{aligned}$$

Disto

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1} u_n \partial_{x_2} u_n \partial_{x_1 x_2} u_n - \partial_{x_1} u \partial_{x_2} u \partial_{x_1 x_2} u| &\leq |\partial_{x_1} (u_n - u) \partial_{x_2} (u_n - u) \partial_{x_1 x_2} (u_n - u)| \\ &\quad + |\partial_{x_1 x_2} u \partial_{x_1} u_n \partial_{x_2} (u_n - u)| + |\partial_{x_1 x_2} u_n \partial_{x_2} u \partial_{x_1} (u_n - u)| \\ &\quad + |\partial_{x_2} u_n \partial_{x_1} u \partial_{x_1 x_2} (u_n - u)|. \end{aligned}$$

Temos assim

$$\begin{aligned}
|J_\lambda^2(u_n) - J_\lambda^2(u)| &\leq \int_{\Omega} |\partial_{x_1}(u_n - u)\partial_{x_2}(u_n - u)\partial_{x_1x_2}(u_n - u)|dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |\partial_{x_1x_2}u\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}(u_n - u)|dx + \int_{\Omega} |\partial_{x_1x_2}u_n\partial_{x_2}u\partial_{x_1}(u_n - u)|dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |\partial_{x_2}u_n\partial_{x_1}u\partial_{x_1x_2}(u_n - u)|dx.
\end{aligned}$$

Agora, os três somandos do lado direito convergem para zero, quando $n \rightarrow \infty$, devido aos Teoremas B.4, B.5, B.6 (análogo ao que foi feito no Capítulo 1).

Por tanto, J_λ^2 é contínuo, o qual implica a continuidade do funcional J_λ .

C.2 CONTINUIDADE FRACA* DA DERIVADA DO FUNCIONAL J_λ

Sejam $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ e $u \in H_0^2(\Omega)$, tais que $u_n \rightarrow u$ em $H_0^2(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$. Seja $v \in H_0^2(\Omega)$ arbitrário.

$$\begin{aligned}
|\langle J'_\lambda(u_n), v \rangle - \langle J'_\lambda(u), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} [(\Delta u_n)(\Delta v) - \det(D^2 u_n)v - \lambda f v dx] \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} [(\Delta u)(\Delta v) - \det(D^2 u)v - \lambda f v dx] \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\Delta u_n - \Delta u)\Delta v dx - \int_{\Omega} [\det(D^2 u_n) - \det(D^2 u)]v dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\Delta(u_n - u)||\Delta v| dx + \int_{\Omega} |\det(D^2 u_n) - \det(D^2 u)||v| dx \\
&\leq \|\Delta(u_n - u)\|_2 \|\Delta v\|_2 + C(\|\nabla u_n\|_4 + \|\nabla u\|_4) \|\Delta(u_n - u)\|_2 \|\Delta v\|_2 \quad (C.1)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade foi obtida utilizando a desigualdade de Hölder (ver Apêndice B Teorema B.5) (primeiro somando) e os resultados do Capítulo 1 Seção 1.2 (segundo somando), junto com o fato $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Como os dois últimos termos da desigualdade (C.1) convergem para zero quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que a derivada $J'_\lambda : H_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega)$ é fraca* contínuo.

C.3 SEQUÊNCIA DE PALAIS-SMALE PARA J_λ

A prova necessitará de alguns fatos da análise convexa, os quais só serão expostos sem demonstração. Para mais detalhes veja [6], [10], [13].

Definição C.1. Seja \mathcal{V} um espaço vetorial topológico. Um conjunto $C \subset \mathcal{V}$ é dito convexo se para todo $x, y \in C$ e para todo $\xi \in [0, 1]$ tem-se

$$\xi x + (1 - \xi)y \in C.$$

Definição C.2. Dizemos que uma função $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa se para todos $x, y \in \mathcal{V}$ e para todo $\xi \in [0, 1]$,

$$\Phi(\xi x + (1 - \xi)y) \leq \xi\Phi(x) + (1 - \xi)\Phi(y).$$

Definição C.3. Seja \mathcal{X} um espaço topológico de Hausdorff.

Um funcional $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dito semicontínuo inferior se para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathcal{X} : \Phi(x) > a\}$ é aberto.

Definição C.4. O conjunto

$$\text{epi } \Phi = \{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} : \Phi(x) \leq a\},$$

é chamado o epígrafo do funcional $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposição C.5. Um funcional $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínuo inferior, se e somente se, seu epígrafo é fechado.

Para uma demonstração ver [10], pág. 10.

Definição C.6 (subdiferencial de uma função convexa). Seja \mathcal{B} um espaço de Banach e $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional convexo semicontínuo inferior, com $\Phi(x) \not\equiv \infty$. Vamos denotar o domínio da Φ por $\text{dom}\Phi = \{x \in \mathcal{B} : \Phi(x) < +\infty\}$. Definimos a subdiferencial de Φ , $\partial\Phi : \mathcal{B} \rightarrow 2^{\mathcal{B}^*}$, por

$$\partial\Phi(x) = \{\mu \in \mathcal{B}^* : \Phi(y) \geq \Phi(x) + \langle \mu, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathcal{B}\}. \quad (\text{C.2})$$

Proposição C.7. Seja $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e contínua. Então para cada $x, y \in \mathcal{B}$ tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + ty) - \Phi(x)}{t} = \max_{\mu \in \partial\Phi(x)} \langle \mu, y \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Para uma demonstração ver [6], pág. 42.

Seja K um espaço métrico compacto e $C(K, \mathbb{R})$ o espaço de Banach das funções contínuas com valores reais, $x : K \rightarrow \mathbb{R}$, munido com a norma $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in K\}$.

Denotemos $B = C(K, \mathbb{R})$. Pelo teorema da representação de Riesz o dual B^* de B é isometricamente isomorfo ao espaço de Banach

$$\mathcal{M}(K, \mathbb{R}) = \{\mu : \mathfrak{B}_K \rightarrow \mathbb{R} : \mu \text{ é medida regular, contavelmente aditiva}\},$$

munido da norma

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |\mu(E_i)| : \bigcup_{i=1}^k E_i \subset E, E_i \cap E_j = \emptyset, \forall k = 1, 2, \dots \right\},$$

onde, \mathfrak{B}_K é a σ -álgebra dos conjuntos de Borel em K .

Uma tal medida $\mu \in \mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ é dita uma medida de Radon.

Definição C.8. Para uma medida de Radon, temos as seguintes definições:

1. Uma medida de Radon μ é positiva se $\langle \mu, x \rangle \geq 0 \forall x \in B$ tal que $x(t) \geq 0 \forall t \in K$. Denotemos uma tal medida como $\mu \geq 0$.
2. Dizemos que uma medida de Radon μ tem massa um se $\langle \mu, \pi \rangle = 1$, onde $\pi \in B$ é a função definida por $\pi(t) = 1 \forall t \in K$.
3. Dizemos que uma medida de Radon μ se anula num conjunto aberto $U \subset K$ se $\langle \mu, x \rangle = 0 \forall x \in B$ tal que o suporte de x é um conjunto compacto K_0 contido em U .
4. Usando partição da unidade, pode se provar que se μ se anula numa coleção de abertos U_α , então μ também se anula na união $\bigcup U_\alpha$. Assim existe o maior conjunto aberto \tilde{U} onde μ se anula. O suporte de uma medida de Radon μ , denotado por $\text{supp } \mu$ é definido por $\text{supp } \mu = K \setminus \tilde{U}$.

Proposição C.9. Usando a notação acima, considere o funcional $\Theta : B \rightarrow \mathbb{R}$ definido

$$\Theta(x) = \max_{t \in K} x(t).$$

Então Θ é contínuo e convexo. Além disso; para cada $x \in B$

$$\mu \in \partial\Theta(x) \Leftrightarrow \mu \geq 0, \langle \mu, \pi \rangle = 1, \text{supp } \mu \subset \{t \in K : x(t) = \Theta(x)\}.$$

Para uma demonstração veja [6], pág. 44.

Agora vamos provar que existe uma sequência de Palais-Smale no nível c para o nosso funcional J_λ .

Lembremos que u_0 é mínimo local de J_λ tal que $J_\lambda(u_0) < 0$ e $v \in H_0^2(\Omega)$ com $\|\Delta v\|_2 > r_{max} > 0$ tal que $J_\lambda(v) < J_\lambda(u_0)$.

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^2(\Omega)) \mid \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = v\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma(t)].$$

Seja $\overline{B}(u_0, \sigma) = \{u \in H_0^2(\Omega) \mid \|\Delta(u - u_0)\| \leq \sigma\}$, para algum $\sigma > 0$.

Como u_0 é mínimo local, existe σ , suficientemente pequeno, tal que

$$\inf_{u \in \overline{B}(u_0, \sigma)} J_\lambda(u) > J_\lambda(u_0) = \max\{J_\lambda(u_0), J_\lambda(v)\}.$$

Seja (Γ, d) o espaço métrico completo, com $d(\gamma, \theta) = \max_{t \in [0, 1]} \|\Delta(\gamma(t) - \theta(t))\|$.

Definamos o funcional $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $\psi(\gamma) = \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma(t)]$.

- ψ é semicontínuo inferior.

Com efeito :

Seja $(\gamma, a) \in \overline{\text{epi } \psi}$, logo existe uma sequência $\{(\gamma_n, a_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{epi } \psi$, tal que

$$(\gamma_n, a_n) \rightarrow (\gamma, a), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim temos $\psi(\gamma_n) \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Disto

$$\max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma_n(t)] \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \implies J_\lambda[\gamma_n(t)] \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

e assim, pela continuidade do funcional J_λ (ver Seção C.1), obtemos

$$J_\lambda[\gamma(t)] \leq a, \forall t \in [0, 1] \implies \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma(t)] \leq a.$$

Isto último prova que $(\gamma, a) \in \text{epi } \psi$, e pela Proposição C.5, concluímos que o funcional ψ é semicontínuo inferior.

- ψ é limitado inferiormente.

Com efeito:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma(t)] \geq \max\{J_\lambda(u_0), J_\lambda(v)\}.$$

Aplicando o princípio variacional de Ekeland (ver Teorema B.11 no Apêndice B), temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma_\varepsilon \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \psi(\gamma_\varepsilon) \leq c + \varepsilon \quad (\text{C.4})$$

e

$$\psi(\gamma) \geq \psi(\gamma_\varepsilon) - \varepsilon d(\gamma, \gamma_\varepsilon), \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{C.5})$$

Se $\delta \in C([0, 1], H_0^2(\Omega))$ tal que $\delta(0) = \delta(1) = 0$, então, pela equação (C.5), temos para $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$

$$\psi(\gamma_\varepsilon + h\delta) \geq \psi(\gamma_\varepsilon) - \varepsilon d(\gamma_\varepsilon + h\delta, \gamma_\varepsilon),$$

isto é,

$$\frac{1}{|h|} \left[\psi(\gamma_\varepsilon + h\delta) - \psi(\gamma_\varepsilon) \right] \geq -\varepsilon \max_{t \in [0, 1]} \|\Delta \gamma(t)\|_2. \quad (\text{C.6})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \psi(\gamma_\varepsilon + h\delta) - \psi(\gamma_\varepsilon) &= \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma_\varepsilon(t) + h\delta(t)] - \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma_\varepsilon(t)] \\ &= \max_{t \in [0, 1]} \left[J_\lambda(\gamma_\varepsilon) + h \langle J'_\lambda(\gamma_\varepsilon(t)), \delta(t) \rangle + o(h) \right] - \max_{t \in [0, 1]} J_\lambda[\gamma_\varepsilon(t)]. \end{aligned}$$

Sejam $J_\lambda[\gamma_\varepsilon(t)] = p(t)$ e $\langle J'_\lambda[\gamma_\varepsilon(t)], \gamma(t) \rangle = q(t)$, vemos que p e q pertencem ao $C([0, 1])$. Introduzimos o funcional $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\Phi(\varphi) = \max_{t \in [0, 1]} \varphi(t),$$

para $\varphi \in C([0, 1])$. Pela Proposição C.9 o funcional Φ é convexo e a subdiferencial $\partial\Phi$ é dada por

$$\begin{aligned} \partial\Phi(\varphi) &= \{ \mu \in C([0, 1])^* : \Phi(\theta) \geq \Phi(\varphi) + \langle \mu, \theta - \varphi \rangle, \quad \forall \theta \in C([0, 1]) \} \\ &= \{ \mu : \mu \geq 0, \langle \mu, \pi \rangle = 1, \text{ supp } \mu \subset M(\varphi) \}, \end{aligned}$$

onde $M(\varphi) = \{ t \in [0, 1] : \varphi(t) = \Phi(\varphi) \}$.

Pela equação (C.6), obtemos

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \max_{t \in [0,1]} \|\Delta \delta(t)\|_2 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} [\psi(\gamma_\varepsilon + h\delta) - \psi(\gamma_\varepsilon)] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} [\Phi(p + hq) - \Phi(p)] \\
&= \max_{\mu \in \partial \Phi(p)} \{\langle \mu, q \rangle\} \text{ (pela Proposição C.7)} \\
&= \max \left\{ \int \langle J'_\lambda(\gamma_\varepsilon(t)), \delta(t) \rangle d\mu : \mu \in \partial \Phi(p) \right\}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Tomando $\delta \in C([0, 1], H_0^2(\Omega))$, tal que $\|\delta\| \leq 1$, $\delta(0) = \delta(1) = 0$ e por (C.6) temos

$$-\varepsilon \leq \inf_{\delta} \max_{\mu} \left\{ \begin{array}{l} \int \langle J'_\lambda(\gamma_\varepsilon(t)), \delta(t) \rangle d\mu : \\ \mu \in \Phi(p) \\ \|\delta\| \leq 1 \\ \delta(0) = \delta(1) = 0 \end{array} \right\}$$

e então

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &\leq \max_{\mu} \inf_{\delta} \left\{ \begin{array}{l} \int \langle J'_\lambda(\gamma_\varepsilon(t)), \delta(t) \rangle d\mu : \\ \mu \in \Phi(p) \\ \|\delta\| \leq 1 \\ \delta(0) = \delta(1) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \max_{\mu} \left\{ - \int \|J'_\lambda(\gamma_\varepsilon)\| d\mu : \mu \in \partial \Phi(p) \right\} \\
&= - \min \left\{ \|J'_\lambda(\gamma_\varepsilon)\| : t \in M(J_\lambda \circ \gamma_\varepsilon) \right\}.
\end{aligned}$$

Assim, existe t_ε tal que

$$J_\lambda[\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon)] = \max_{t \in [0,1]} J_\lambda[\gamma_\varepsilon(t)]$$

e

$$\|J'_\lambda[\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon)]\| \leq \varepsilon.$$

Se tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $\gamma_n(t_n) = u_n$ obtemos a sequência de Palais-Smale desejada.

C.4 POSITIVIDADE DO VALOR MINIMAX c

Da estimativa radial sabemos que

$$J_\lambda(u) \geq g(\|\Delta u\|_2), \quad \forall u \in H_0^2(\Omega).$$

Se $\|\Delta u\|_2 = r_1$, temos que:

$$J_\lambda(u) \geq g(\|\Delta u\|_2) = g(r_1) > 0,$$

isto é

$$J_\lambda|_{\partial B(0,r_1)} > 0. \quad (\text{C.8})$$

Seja $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \|\Delta \gamma(t)\|_2.$$

Como

$$h(0) = \|\Delta \gamma(0)\|_2 = \|\Delta u_0\|_2 < r_0 < r_1,$$

$$h(1) = \|\Delta \gamma(1)\|_2 = \|\Delta v\|_2 > r_{max} > r_1,$$

logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $t_1 \in [0, 1]$ tal que

$$h(t_1) = r_1,$$

isto é $\|\Delta \gamma(t_1)\|_2 = r_1$, e assim, por (C.8), temos:

$$\max_{t \in [0,1]} J_\lambda[\gamma(t)] \geq J_\lambda[\gamma(t_1)] > 0.$$

Consequentemente, $c > 0$.

C.5 SOLUÇÕES FRACAS AOS PROBLEMAS (1.16) e (1.17)

Seja $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ dado e seja o problema linear

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \det(D^2 \varphi) + \lambda f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, \quad \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Proposição C.10. Se $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\lambda > 0$, então o Problema (C.9) possui uma solução fraca em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Demonstração: Multiplicando a equação (C.9) por um $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, integrando

por partes e usando as condições de fronteira, obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \int_{\Omega} [\det(D^2\varphi) + \lambda f] v dx.$$

Sejam

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx$$

e

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} [\det(D^2\varphi) + \lambda f] v dx.$$

Temos que

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \right| \leq \|\Delta u\|_2 \|\Delta v\|_2$$

e

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx = \|\Delta v\|_2^2.$$

Assim, a é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Além disso, pelo fato $\det(D^2\varphi) \in L^1(\Omega)$, temos que F é um funcional linear contínuo.

Agora, usando o Lema de Lax-Milgram (veja Teorema B.10 Apêndice B), existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \int_{\Omega} [\det(D^2\varphi) + \lambda f] v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Portanto, u é solução fraca de (C.9). ■

Observação C.1. Os fatos provados para o funcional no caso não radial, continuam sendo válidos no caso radial, as demonstrações são semelhantes e foram omitidas.

REFERÊNCIAS

- [1] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14(1973) p. 349-381.
- [2] BRÉZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010.
- [3] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS, V. N. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Universidade Estadual de Maringá, 2009.
- [4] CHENG, K. Y. Molecular beam epitaxy technology of III-V compound semiconductors for optoelectronic applications. *IEEE*, vol. 85, n. 11, 1997.
- [5] COIFMAN, R.; LIONS, P. L.; MEYER, Y.; SEMMES, S. Compensated compactness and Hardy spaces. *Journal of Mathematics Pures and Applied*, 72 (1993), p. 247-286.
- [6] DE FIGUEIREDO, D. G. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. *Tata Institute of Fundamental Research, Lectures on Mathematics and Physics*, 81, 1989.
- [7] DE FIGUEIREDO, D. G.; DOS SANTOS, E. M.; MIYAGAKI, O. H. Sobolev spaces of symmetric functions and applications. *Journal of Functional Analysis*, 261 (2011), p. 3735-3770.
- [8] DE OLIVEIRA, C. R. *Introdução à análise funcional*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [9] EKELAND, I. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47 (1974), p. 324-353.
- [10] EKELAND, I.; TÉMAM, R. *Convex analysis and variational problems*. Siam, Philadelphia, 1999.
- [11] ESCUDERO, C.; HAKL, R.; PERAL, I.; TORRES, P. J. On the radial stationary solutions to a model of nonequilibrium growth. *European Journal of Applied Mathematics*, (2013), p. 1-17.
- [12] ESCUDERO, C.; PERAL, I. Some fourth order nonlinear elliptic problems related to epitaxial growth. *Journal of Differential Equations*, 254 (2013), p. 2515-2531.
- [13] GHADERI, H. *Mountain pass theorems with Ekeland's variational principle and a application to the semilinear Dirichlet problem*. Bachelor thesis-Department of Mathematics, Uppsala University, Uppsala, Sweden, 2011.
- [14] GHOUSSOUB, M.; PREISS, D. A general mountain pass principle for locating and classifying critical points. *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Analyse non linéaire*, section C, tome 6, n. 5 (1989), p. 321-330.

- [15] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, 1998.
- [16] LAWRENCE, C. E. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1997.
- [17] MARTÍN, J. *Apuntes: Análisis funcional y optimización*. Universidad de Sevilla, Sevilla , España, 2010.
- [18] ORTIZ, A. *Tópicos sobre ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú, 2004.
- [19] PALISAITIS, J.; VASILIAUSKAS, R. Epitaxial growth of thin films. *Physics of Advance Material*, Linköping University, Sweden, 2008.
- [20] WILLEM, M. *Minimax theorems*. Birkhäuser, 1996.