

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

*Sandra Machado de Souza Lima*

*Existência de soluções para duas classes de  
problemas elípticos usando a aplicação fibração  
relacionada à Variedade de Nehari*

Juiz de Fora

2014

*Sandra Machado de Souza Lima*

*Existência de soluções para duas classes de  
problemas elípticos usando a aplicação fibração  
relacionada à Variedade de Nehari*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2014

Machado de Souza Lima, Sandra.

Existência de soluções para duas classes de problemas elípticos usando a aplicação fibração relacionada à Variedade de Nehari / Sandra Machado de Souza Lima - 2014. 90f.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Variedade de Nehari. 2. Aplicação Fbração. 3. Problema elíptico semilinear.  
I. Miyagaki, O.H.. II. Existência de solução para duas classes de problemas elípticos usando a aplicação fibração.

*Dedico aos meus pais Lorival e Regina, à minha família querida e  
ao Fábio, meu marido e melhor amigo.*

# *AGRADECIMENTOS*

À Deus, meu grande motivador e alimento. Dentre os inúmeros favores, ressalto minha gratidão pela Tua misericórdia e providência na minha vida. À Virgem Maria e ao meu Anjo da guarda, meus grandes amigos, obrigada pelo carinho, auxílio e presença constante.

Aos meus pais, pelo exemplo de vida, por estarem sempre ao meu lado em cada momento e principalmente serem uma manifestação tão viva do amor de Deus para mim.

Ao Fábio, meu amigo, marido e presente de Deus. Agradeço por me ajudar em cada decisão e também por estar ao meu lado na hora de assumir cada consequência, por ficar comigo nas intermináveis noites de estudo e compreender minhas ausências. Te amo!

Aos meus familiares em especial Fatinha, Ricardo, Marcelo, Clarice, Davi, Júnior, Viliv e Vítor sempre me escutando, aconselhando e incentivando.

Aos amigos que torceram de coração por mim, meu muito obrigado. Agradeço de forma especial aos amigos do ErACe que há tanto tempo caminham do meu lado, agradeço de coração pela amizade! À Tita e à Pri, por tudo o que vivenciamos juntas, obrigada pelo carinho e incentivo.

Ao Olímpio, por acreditar em mim, me incentivar com suas palavras e principalmente com seu exemplo. Certamente seus ensinamentos foram muito além da Matemática.

Aos professores da graduação e do mestrado pelo exemplo e dedicação. Aos professores Carlos e Fábio, por terem aceitado o convite de fazer parte da minha banca.

Aos colegas de mestrado, obrigada pelo apoio e paciência, vocês tornaram este caminho árduo, bem mais agradável de se percorrer. Em especial, Wesley e Mariana que estão comigo desde o início. Ronaro, Bruno e Helena por me incentivarem a vir para a matemática. Eliza, Pavel, Vladimir, Juan, Julio e Yúlia por todo aprendizado e descontração. Yamashita, Gisele, Wilker, Gladston, Erasmo, Taís e Livia, levo todos em meu coração.

À Sandrinha, à quem devo vários "dez mil reais", meu muito obrigada!

Aos funcionários do departamento de matemática, obrigada por sempre estarem dis-

postos a ajudar. Em especial à Laura pela torcida e amizade.

À Fapemig e à UFJF pelo apoio financeiro.

“ Tudo posso naquEle que me fortalece”.

*(Filipenses 4.13 )*

# *RESUMO*

A variedade de Nehari para a equação

$$-\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x)^q + b(x)u(x)^p,$$

com  $x \in \Omega$ , junto com a condição de fronteira de Dirichlet é investigada no caso em que  $a(x) = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $q = 1$  e  $0 < p < 1$ , e também no caso em que  $\lambda > 0$  e  $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ . Explorando a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração (isto é, aplicações da forma  $t \rightarrow J(tu)$  onde  $J$  é o funcional de Euler associado ao problema em questão), iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções não negativas.

Palavras-Chave: Variedade de Nehari; Aplicação Fibração; Problema elíptico semilinear.



# ***ABSTRACT***

The Nehari Manifold for the equation

$$-\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x)^q + b(x)u(x)^p,$$

for  $x \in \Omega$  together with Dirichlet boundary conditions is investigated in which case  $a(x) = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $q = 1$  and  $0 < p < 1$ , and also in the case that  $\lambda > 0$  and  $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ . Exploring the relationship between the Nehari manifold and fibering maps (i.e., maps of the form  $t \rightarrow J(tu)$  where  $J$  is the Euler functional associated to the above equation), we will discuss the existence and multiplicity of non negative solutions.

Key-words: Nehari manifold; Fiberring map; Semilinear elliptic problems.

# ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$\rightarrow$  : convergência forte;

$u_n \rightarrow u$  :  $u_n$  converge forte para  $u$  quando  $n \rightarrow \infty$ ;

$\rightharpoonup$  : convergência fraca;

$u_n \rightharpoonup u$  :  $u_n$  converge fraco para  $u$  quando  $n \rightarrow \infty$ ; q.t.p. : quase todo ponto;

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right);$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

$\partial\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ ;

$\bar{\Omega}$  é o fecho de  $\Omega$ ;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\}$ ;

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |u(x)|^p dx)^{1/p} < \infty\}$ ;

$W^{k,p}(\Omega)$  é o espaço de todas as funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que para cada multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ ,  $D^\alpha u$  existe no sentido fraco e pertence a  $L^p(\Omega)$ ;

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} u D^\alpha u = \int_{\Omega} g \phi, \forall \phi \in C_c^1(\Omega)\}$ ;

$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$  : Munido da norma  $\|u\| = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$ , denota o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ .

# *SUMÁRIO*

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1 O PROBLEMA (<math>P_1</math>)</b>	<b>15</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	15
1.2 O MÉTODO DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO E A VARIEDADE DE NEHARI	16
1.2.1 <b>Definições</b> . . . . .	16
1.2.2 <b>Variedade de Nehari</b> . . . . .	18
1.2.3 <b>Aplicação Fibração</b> . . . . .	20
1.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO . . . . .	23
1.3.1 <b>Descrição da função <math>m_u</math></b> . . . . .	23
1.3.2 <b>Descrição da função <math>\phi_u</math></b> . . . . .	27
1.4 PROPRIEDADES DA VARIEDADE DE NEHARI . . . . .	32
1.5 A EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES . . . . .	37
1.6 BIFURCAÇÃO DO INFINITO . . . . .	40
1.7 O CASO DA NÃO EXISTÊNCIA . . . . .	44
1.8 O FUNCIONAL $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ . . . . .	47
1.9 REGULARIDADE DA SOLUÇÃO FRACA DO PROBLEMA ( $P_1$ ) . . . . .	53
<b>2 O PROBLEMA (<math>P_2</math>)</b>	<b>57</b>
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	57
2.2 O MÉTODO DA APLICAÇÃO E A VARIEDADE DE NEHARI . . . . .	57
2.2.1 <b>Definições</b> . . . . .	58

2.2.2	<b>Variedade de Nehari</b> . . . . .	59
2.2.3	<b>Aplicação Fibrção</b> . . . . .	60
2.3	<b>ANÁLISE DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO</b> . . . . .	62
2.3.1	<b>Descrição da função <math>m_u</math></b> . . . . .	62
2.3.2	<b>Descrição da função <math>\varphi_u</math></b> . . . . .	66
2.4	<b>EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NÃO NEGATIVAS</b> . . . . .	75
2.4.1	<b>Existência de minimizadores para <math>I_\lambda</math></b> . . . . .	75
2.4.2	<b>Existência de soluções para um problema elíptico (P)</b> . . .	81
2.5	<b>O FUNCIONAL <math>I_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})</math></b> . . . . .	82
<b>3</b>	<b>RESULTADOS BÁSICOS</b>	<b>83</b>
3.1	RESULTADOS DE GEOMETRIA RIEMANIANA . . . . .	83
3.2	RESULTADOS DA TEORIA DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO . . . . .	83
3.3	DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL . . . . .	84
3.4	RESULTADOS DA TEORIA CLÁSSICA DE EDP E DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV . . . . .	85
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>89</b>

# *INTRODUÇÃO*

Explorando a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções não triviais e não negativas para duas classes de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais (EDP) os quais foram estudadas por Brown (2004) e por Brown (2007). Essas classes de problemas elípticos modelam vários problemas da física matemática e da dinâmica das populações, como pode ser visto no artigo de Chen (2009).

No início dos anos 1960 Nehari introduziu um método que se tornou muito útil na teoria de pontos críticos e que atualmente recebe o nome de método das variedades de Nehari. A idéia original de Nehari consiste em estudar um problema de valor de fronteira para certas equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem em um intervalo aberto  $(a, b)$  e mostrar que a equação possui uma solução não trivial que pode ser obtida através de um problema de minimização com vínculo.

O método da aplicação fibração introduzido por Drabek e Pohozaev (1997) e discutida por Brown e Zhang (2003) relaciona o funcional de Euler Lagrange com uma função real. As informações sobre esta função nos levam à uma demonstração simples do resultado que buscamos.

No capítulo 1, iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções não triviais e não negativas do seguinte problema:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é uma região limitada do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira suave, e  $b : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função regular que pode mudar de sinal em  $\Omega$ . Vamos considerar  $\lambda$  um parâmetro real e assumir  $\gamma$  como sendo um número real tal que  $1 < \gamma < 2$ .

Problemas semelhantes foram estudados por Binding, Drábek e Huang (1997) e Binding, Drábek e Huang (2000), usando métodos variacionais, e por Amann e Lopez-Gomez (1998) usando a teoria de bifurcação global. Em um trabalho anterior, Brown e Zhang (2003) consideraram um problema semelhante, no caso em que  $\gamma > 2$ . A mudança neste

parâmetro altera completamente a natureza da solução do problema  $(P_1)$ . Quando  $\gamma > 2$ , a curva da solução positiva bifurca da solução nula até  $\lambda = \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o autovalor principal do problema linear

$$(P_0) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A direção da bifurcação é determinada pelo sinal de  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx$ , onde  $\phi_1$  é a autofunção positiva associada ao principal autovalor positivo  $\lambda_1$  do operador  $-\Delta$ . Quando  $1 < \gamma < 2$  o problema  $(P_1)$  se torna assintoticamente linear, e neste caso, a bifurcação no infinito ocorre quando  $\lambda = \lambda_1$ . Iremos mostrar exatamente como isso acontece e o importante papel desempenhado por  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx$ , investigando como a variedade de Nehari varia com  $\lambda$ .

No capítulo 2, iremos estudar como utilizar o Método da aplicação fibração, para outra classe de problemas elípticos, isto é, mostraremos a existência de soluções para

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é uma região limitada do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira suave,  $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ,  $\lambda > 0$  e  $a, b : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções regulares que podem mudar de sinal em  $\Omega$ .

O problema  $(P_2)$  tem sido recentemente estudado por Figueiredo, Gossez e Ubilla (2003) usando o Teorema do Passo da Montanha, e por Il'yasov (2005) e Wu (2009) com a Variedade de Nehari. Drabek e Pohozaev (1997) e Brown e Zhang (2003), demonstraram para uma equação tal como em  $(P_2)$  que a variedade de Nehari está intimamente relacionado com as aplicações Fibração para o problema. Neste trabalho vamos mostrar como uma análise completa das aplicações Fibração nos levam à resultados semelhantes aos de Il'yasov (2005) e de Wu (2009).

Ao longo do capítulo 2, discutiremos as propriedades da aplicação fibração e da Variedade de Nehari. Faremos uma descrição completa dessa aplicação associada à  $(P_2)$  e usaremos essas informações para provar a existência de, pelo menos, duas soluções não triviais e não negativas de  $(P_2)$ , para valores de  $\lambda$  suficientemente pequenos.

Podemos observar que os dois problemas trabalhados são similares. Olhando para a equação

$$-\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x)^q + b(x)u(x)^p,$$

com  $x \in \Omega$ , junto com a condição nula de fronteira de Dirichlet, tratamos em  $(P_1)$  o caso

em que  $a(x) = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $q = 1$  e  $0 < p < 1$ , e em  $(P_2)$  o caso em que  $\lambda > 0$  e  $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ . Definiremos para cada caso, o funcional  $J_\lambda$  associado ao problema inicial de cada capítulo, bem como a variedade de Nehari e veremos como eles se relacionam. Mostraremos como o funcional é melhor comportado sobre a variedade de Nehari, mas não é limitado em geral sobre seu domínio todo  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Trabalharemos a relação entre a variedade de Nehari e o comportamento das funções na forma  $\phi_u : t \rightarrow J_\lambda(tu)$ ; ( $t > 0$ ). Por fim, usando a teoria de regularidade Gilbard e Trudinger (1983), provaremos que as soluções fracas são, de fato, soluções clássicas do problema em questão.

# 1 O PROBLEMA $(P_1)$

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Iremos discutir neste capítulo a existência e multiplicidade de soluções não negativas para a seguinte classe de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x), & \text{se } x \in \Omega; \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é uma região limitada do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira suave e  $b : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função regular, que pode mudar de sinal em  $\Omega$ . Vamos considerar  $\lambda$  um parâmetro real e assumir  $\gamma$  como sendo um número real tal que  $1 < \gamma < 2$ .

Inicialmente iremos definir a variedade de Nehari e a Aplicação Fibrção a partir do funcional  $J_\lambda$  associado ao problema  $(P_1)$ . Na segunda parte, mostraremos a importância da condição  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  na determinação da natureza da variedade de Nehari. Na terceira seção, provaremos a existência de minimizadores sobre a variedade de Nehari e em seguida discutiremos como todos esses resultados nos dão informações sobre as soluções não negativas de  $(P_1)$  com as variações de  $\lambda$  e em particular sobre a bifurcação no infinito. Na seção seguinte, investigaremos a natureza da variedade de Nehari nos casos onde não há soluções não negativas e não triviais de  $(P_1)$ . Por fim, iremos observar que nossos resultados são assegurados somente no caso onde a não linearidade é a função homogênea. Isto assegura que a Aplicação Fibrção envolve somente atribuições a  $t$  e a simplicidade das nossas provas dependem fortemente deste fato.



## 1.2 O MÉTODO DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO E A VARIEDADE DE NEHARI

Nesta seção definiremos o funcional  $J_\lambda$  associado ao problema  $(P_1)$  mostraremos sua relação com e a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração.

### 1.2.1 Definições

O Funcional de Euler  $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado ao problema  $(P_1)$  é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \quad (1.1)$$

Mostraremos em 1.8 que o funcional  $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$  e que sua derivada de Gateaux é dada por

$$J'_\lambda(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Omega} b|u|^{\gamma-2} uv dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

e em particular

$$J'_\lambda(u)u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx.$$

**Afirmção:**  $J_\lambda$  está bem definido.

*Prova:* De fato, sejam

$$J_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

$$J_2(u) = \int_{\Omega} |u|^2 dx \text{ e}$$

$$J_3(u) = \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx.$$

Iremos mostrar que cada um dos termos de  $J_\lambda$  está bem definido.

i)  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2 < \infty$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

ii) Consideremos  $\lambda_1$  o autovalor principal do problema linear

$$(P_0) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{se } x \in \Omega; \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}; \text{ para } u \neq 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

iii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx &\leq \left| \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \right| \leq \int_{\Omega} |b(x)||u|^\gamma dx \leq \\ &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |b(x)| \int_{\Omega} |u|^\gamma dx < \infty \end{aligned}$$

já que  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . De fato, pelas imersões contínuas de Sobolev como em 3.10 ,  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ , com  $r \in [1, 2^*]$ , segue que  $u \in L^\gamma(\Omega)$ .

Assim,  $J_\lambda$  está bem definido para toda  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

Podemos observar que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \geq (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u^2 dx, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (1.2)$$

e ainda

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{\bar{b}}{\gamma} \int_{\Omega} |u|^\gamma dx, \text{ onde } \bar{b} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} b(x)$$

Tomando  $p = \frac{2}{\gamma} < 1$  e  $p' = \frac{2}{2-\gamma}$ , segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{\bar{b}}{\gamma} \left( \int_{\Omega} |1|^{\frac{2}{2-\gamma}} dx \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left( \int_{\Omega} |u|^{\frac{2}{\gamma}} dx \right)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{\bar{b}}{\gamma} |\Omega|^{1-\frac{\gamma}{2}} \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{b} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} b(x)$ .

Assim,  $J_\lambda$  é limitado inferiormente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  quando  $\lambda < \lambda_1$  e  $1 < \gamma < 2$ . Entretanto, se  $\lambda > \lambda_1$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} J_\lambda(t\phi_1) = -\infty$ . De fato, quando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$J_\lambda(t\phi_1) = t^2 \left( \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} |\phi_1|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\phi_1|^2 dx - \frac{1}{\gamma t^{2-\gamma}} \int_{\Omega} b|\phi_1|^\gamma dx \right) \rightarrow -\infty.$$

Assim  $J_\lambda$  não é limitado inferiormente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , se  $\lambda > \lambda_1$ . Estamos procurando um subconjunto de  $W_0^{1,2}(\Omega)$  onde o funcional  $J_\lambda$  seja melhor comportado, mais especifi-

camente, onde este funcional seja, em geral, limitado inferiormente.

## 1.2.2 Variedade de Nehari

Para obter resultados de existência neste caso, introduzimos a variedade de Nehari:

$$S(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0\}$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a dualidade usual.

Vamos mostrar que  $S(\lambda)$  é de fato uma variedade.

**Proposição 1.1.** *A variedade de Nehari  $S(\lambda)$  é não vazia e é uma subvariedade de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

**Prova:** Seja  $\psi : W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\psi(u) = \langle J'_\lambda(u), u \rangle.$$

Assim

$$\psi(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx.$$

Como veremos na seção 1.8, fazendo

$$J_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

$$J_2 = \int_{\Omega} u^2 dx \text{ e}$$

$$J_3 = \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx,$$

temos que cada um destes termos são de classe  $C^1(\Omega)$ , e por conseguinte observa-se que são também de classe  $C^2(\Omega)$ , logo temos que  $\psi \in C^1(\Omega)$ . Além disso,

$$\psi'(u)v = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - 2\lambda \int_{\Omega} uv dx - \gamma \int_{\Omega} b|u|^{\gamma-2} uv dx.$$

Seja  $v \neq 0; v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e considere a função

$$t \mapsto \psi(tv); t \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\psi(tv) &= t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - t^2 \lambda \int_{\Omega} v^2 dx - t^\gamma \int_{\Omega} b|v|^\gamma dx \\ &= t^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} v^2 dx \right) - t^\gamma \left( \int_{\Omega} b|v|^\gamma dx \right).\end{aligned}$$

Se  $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} v^2 dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b|v|^\gamma dx > 0$ , como  $1 < \gamma < 2$ , segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(tv) = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(tv) = 0, \quad \text{por valores menores que zero.}$$

Com isso, para algum  $\bar{t} > 0$  a função  $\psi(\bar{t}v)$  é igual a zero, ou seja,  $\bar{t}v \in S(\lambda)$ . Dessa forma mostramos que  $S(\lambda) \neq \emptyset$ .

Vejamos agora que  $\psi$  não possui ponto crítico em  $S(\lambda)$ .

Observe que

$$\psi'(u)u = 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2\lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \gamma \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \quad (1.3)$$

Para  $u \in S(\lambda)$  com  $u \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned}\psi(u) = 0 &\Rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx = \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Substituindo em (1.3), segue que

$$\psi'(u)u = (2 - \gamma) \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx.$$

Portanto, como  $1 < \gamma < 2$  e  $b \neq 0$ , obtemos que  $\psi'(u) \neq 0$  para todo  $u \neq 0$  em  $S(\lambda)$ .

Seja  $M = W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ . Como  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx > 0$ , vemos que 0 é o único ponto crítico em  $\psi^{-1}(0)$  e  $0 \notin M$ . Logo, 0 é um valor regular de  $\psi|_M$ . Pelo Teorema 3.1, segue que  $\psi^{-1}|_M(0)$  é uma subvariedade de  $M$ . Portanto,  $S(\lambda)$  é uma  $C^1$  subvariedade de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

**Observação 1.1.** *Temos que  $u \in S(\lambda)$  se e somente se*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx = 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} u \in S(\lambda) &\Leftrightarrow J'_\lambda(u)u = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx = 0 \end{aligned}$$

Podemos perceber que  $S(\lambda) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  e que  $S(\lambda)$  é um conjunto mais restrito que  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , deste modo iremos estudar nosso funcional  $J_\lambda$  restrito a  $S(\lambda)$ .

Note que em  $S(\lambda)$  temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \quad (1.4)$$

Substituindo em (1.1) ficamos com

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \end{aligned}$$

### 1.2.3 Aplicação Fibrção

Apresentaremos agora as funções da forma  $\phi_u : t \rightarrow J_\lambda(tu)$ ; ( $t > 0$ ), analisaremos seu comportamento e mostraremos sua relação com a variedade de Nehari.

Se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx, \quad (1.5)$$

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) dx - t^{\gamma-1} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx, \quad (1.6)$$

$$\phi''_u(t) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) dx - (\gamma - 1)t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \quad (1.7)$$

A proposição abaixo relaciona a variedade de Nehari e a Aplicação Fibrção.

**Proposição 1.2.** *Seja  $\phi_u$  a aplicação definida acima e  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , então:*

(i)  $u \in S(\lambda)$  se, e somente se,  $\phi'_u(1) = 0$ ;

(ii) *Mais geralmente*  $tu \in S(\lambda)$  se, e somente se,  $\phi'_u(t) = 0$ .

**Prova:** (i) Note que

$$\phi'_u(1) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx - \int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma} dx = J'_\lambda(u)u.$$

(ii) ( $\Leftarrow$ )

$$0 = \phi'_u(t) = t \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx - t^{\gamma-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma} dx.$$

Multiplicando esta equação por  $t$ ,

$$0 = t^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx - t^{\gamma} \int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma} dx = J'_\lambda(tu)tu.$$

( $\Rightarrow$ )

Como  $tu \in S(\lambda)$ , temos

$$0 = J'_\lambda(tu)tu = t^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx - t^{\gamma} \int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma} dx,$$

dividindo esta equação por  $t > 0$ ,

$$0 = t \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx - t^{\gamma-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma} dx = \phi'_u(t).$$

■

Desta forma, os elementos em  $S(\lambda)$ , correspondem aos pontos estacionários da Aplicação Fibrção. Assim é natural subdividir  $S(\lambda)$  em subconjuntos, onde para cada  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  fixada, o número 1 é um ponto crítico de  $\phi_u$ .

Segue de (1.6) e (1.7) que se  $\phi'_u(t) = 0$  então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx &= t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi''_u(t) &= t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx (2 - \gamma), \end{aligned} \tag{1.8}$$

e como  $t > 0$  e  $1 < \gamma < 2$ , temos

$$\phi''_u(t) > 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx > 0,$$

$$\phi''_u(t) < 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx < 0 \text{ e}$$

$$\phi''_u(t) = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Podemos agora definir os subconjuntos de  $S(\lambda)$ :

$$S^+(\lambda) = \{u \in S(\lambda); \phi_u''(1) > 0\}$$

$$S^-(\lambda) = \{u \in S(\lambda); \phi_u''(1) < 0\}$$

$$S^0(\lambda) = \{u \in S(\lambda); \phi_u''(1) = 0\}.$$

Assim,  $S^+$ ,  $S^-$  e  $S^0$  correspondem ao conjunto de pontos de mínimo local, máximo local e de inflexão, respectivamente.

**Observação 1.2.** Note que se  $u \in S(\lambda)$ , isto é,  $\phi_u'(1) = 0$  então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx &= \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \text{ e} \\ \Rightarrow \phi_u''(1) &= (2 - \gamma) \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Iremos mostrar a existência de soluções de  $(P_1)$  investigando a existência de minimizadores em  $S(\lambda)$ . Entretanto,  $S(\lambda)$  é apenas um pequeno subconjunto de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , mas verifica-se que os minimizadores de  $J_\lambda$  em  $S(\lambda)$  são também pontos críticos de  $J_\lambda$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . De fato, como provado em Binding, Drábek e Huang (1997) ou em Brown e Zhang (2003), temos o resultado a seguir.

**Lema 1.1.** *Suponhamos que  $u_0$  é um mínimo ou máximo local para  $J_\lambda$  em  $S(\lambda)$ , então se  $u_0$  não pertence a  $S^0(\lambda)$ ,  $u_0$  é um ponto crítico de  $J_\lambda$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

**Prova:** Seja  $u_0$  um ponto de máximo ou de mínimo local de  $J_\lambda$  em  $S(\lambda)$ . Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver apêndice, Teorema 3.6), existe  $\delta \in \mathbb{R}$  verificando

$$J'_\lambda(u) = \delta F'(u), \tag{1.10}$$

onde

$$F(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx = J'_\lambda(u)u = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx = \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \tag{1.11}$$

Derivando  $F$  temos

$$F'(u)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t}.$$

Tomando  $h = u_0$  e usando L'Hospital, obtemos

$$F'(u_0)u_0 = 2 \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2) dx - \gamma \int_{\Omega} b|u_0|^\gamma dx.$$

Substituindo em (1.11)

$$F'(u_0)u_0 = (2 - \gamma) \int_{\Omega} b|u_0|^\gamma dx = \phi_u''(1).$$

Como  $u_0 \in S(\lambda)$ , por (1.10) obtemos

$$0 = J'_\lambda(u_0)u_0 = \delta F'(u_0)u_0.$$

Como  $u_0$  não pertence à  $S^0(\lambda)$  então  $\phi_u''(1) \neq 0$ . Daí  $F'(u_0)u_0 \neq 0$ , nos dando que  $\delta = 0$  e assim  $J'_\lambda(u_0) = 0$ . Portanto,  $u_0$  é ponto crítico de  $J_\lambda$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

## 1.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO

Faremos nesta seção uma descrição da Aplicação Fibração associada ao problema elíptico ( $P_1$ ).

### 1.3.1 Descrição da função $m_u$

Veremos que a natureza essencial da Aplicação Fibração  $\phi_u$  é determinada pelo sinal de  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx$  e de  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx$ . Para isso, vamos definir

$$m_u(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \quad (1.12)$$

**Observação 1.3.** *Note que, para  $t > 0$ ,  $tu \in S(\lambda)$  se, e somente se,  $t$  é solução de*

$$m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (1.13)$$

De fato, pela equação (1.13),

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por  $t^2$

$$t^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t^\gamma \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx = 0,$$



ou equivalentemente

$$J'_\lambda(tu)tu = 0,$$

logo

$$tu \in S(\lambda).$$

Derivando (1.12) ficamos com

$$m'_u(t) = (2 - \gamma)t^{\gamma-3} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx. \quad (1.14)$$

E ainda

$$m''_u(t) = (2 - \gamma)(\gamma - 3)t^{\gamma-4} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx.$$

Podemos observar que  $m'$  e  $m''$  não estão definidas para  $t = 0$ , já que  $-3 < \gamma - 4 < \gamma - 3 < -1$ .

Vejamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} m'_u(t) = \pm\infty;$$

dependendo do sinal de  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx$ , e além disso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m'_u(t) = 0.$$

Para construir um esboço de  $m_u$  dividiremos em dois casos.

(i) Se  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx > 0$ , sendo  $t > 0$  e  $1 < \gamma < 2$ , teremos que  $m_u$  é uma função estritamente crescente.

De fato, se  $t = 0$  então  $m'_u(0)$  não está definida, mas se  $t > 0$ , então

$$m'_u(t) = (2 - \gamma)t^{\gamma-3} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \geq 0,$$

e ainda

$$m''_u(t) = (2 - \gamma)(\gamma - 3)t^{\gamma-4} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \leq 0.$$

Com  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} m_u(t) = -\infty$ ,  $m_u$  tem o gráfico como na figura 1, onde  $A = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ .

Se  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ , então  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx < 0$ . Assim não há nenhum valor de  $t$  que satisfaça (1.13). Neste caso observamos que os sinais de  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx$  e de  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$  são opostos.

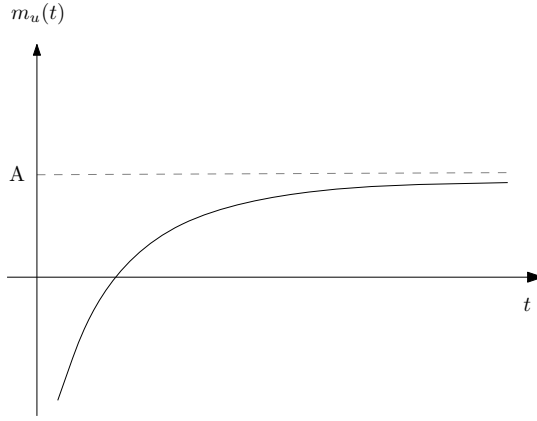


Figura 1: Possível forma de  $m_u$  quando  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma}dx > 0$

Já no caso em que  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ , temos que  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx > 0$  e assim há um único valor de  $t$  que satisfaz (1.13). Neste caso observamos que  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx$  e  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$  tem sinais positivos.

(ii) Se  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx < 0$ , sendo  $t > 0$  e  $1 < \gamma < 2$ , teremos que  $m_u$  é uma função estritamente decrescente.

De fato, se  $t = 0$  então  $m'_u(0)$  não está definida, mas se  $t > 0$ , então

$$m'_u(t) = (2 - \gamma)t^{\gamma-3} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx \leq 0,$$

e ainda

$$m''_u(t) = (2 - \gamma)(\gamma - 3)t^{\gamma-4} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx \geq 0.$$

Analogamente ao caso anterior,  $m_u$  tem o gráfico como na figura 2, onde  $A = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ .

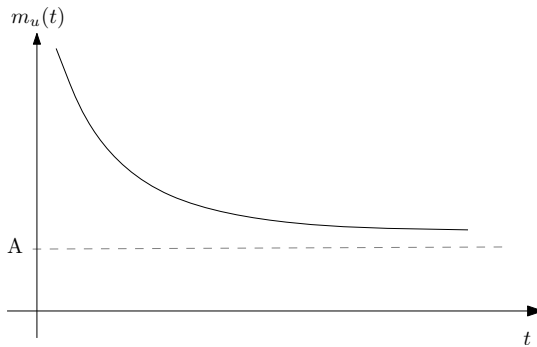


Figura 2: Possível forma de  $m_u$  quando  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma}dx < 0$

Se  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ , então  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx < 0$ . Assim há um único

valor de  $t$  que satisfaz (1.13). Neste caso observamos que  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx$  e  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx$  tem o mesmo sinal.

Se  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ , então  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx > 0$  e assim não há nenhum valor de  $t$  que satisfaça (1.13). Neste caso observamos que os sinais de  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx$  e de  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx$  são opostos.

A partir das observações feitas acima, para  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , podemos concluir que:

(I) Se  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx$  tem o mesmo sinal,  $\phi_u$  tem um único ponto crítico em

$$t_u = \left[ \frac{\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx}{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}};$$

assim, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $tu \in S(\lambda)$ ;

(II) Se  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx$  tem sinais diferentes, então  $\phi_u$  não possui pontos críticos e assim, pela proposição 1.2, nenhum múltiplo de  $u$  pertence à  $S(\lambda)$ .

**Observação 1.4.** Se  $tu \in S(\lambda)$ , segue de (1.9) e (1.14) que

$$\phi_{tu}''(1) = t^3 m'_u(t).$$

De fato

$$\phi_{tu}''(t) = (2 - \gamma)t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|tu|^{\gamma} dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \phi_{tu}''(1) &= (2 - \gamma)1^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|tu|^{\gamma} dx \\ &= (2 - \gamma)t^{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} m'_u(t) &= (2 - \gamma)t^{\gamma-3} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx \Rightarrow \\ t^3 m'_u(t) &= (2 - \gamma)t^{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma}; \end{aligned}$$

então

$$t^3 m'_u(t) = \phi_{tu}''(1).$$

Esta observação tem uma grande importância para este capítulo, pois se conhecermos o sinal de  $m'_u(t)$ , conheceremos o sinal de  $\phi_{tu}''(1)$ , e assim poderemos saber se  $\phi_{tu}$  tem um ponto de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

Resumidamente:

$$\begin{cases} tu \in S^+(\lambda) & \text{se } m'_u(t) > 0 \\ tu \in S^-(\lambda) & \text{se } m'_u(t) < 0. \end{cases}$$

### 1.3.2 Descrição da função $\phi_u$

Iremos analisar a natureza da Aplicação Fibração para todos os possíveis sinais de  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx$  e de  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx$ .

(i) Quando  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx < 0$ .

Relembrando que

$$\phi'_u(t) = t^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx,$$

temos

$$\phi'_u(t) > 0,$$

pois  $t > 0$ . Logo,  $\phi_u$  é crescente e como  $\phi'_u(t) > 0$ , pela Proposição 1.2 concluímos que nenhum múltiplo de  $u$  está em  $S(\lambda)$ . Daí, o gráfico  $\phi_u$  tem uma forma mostrada na figura 3.

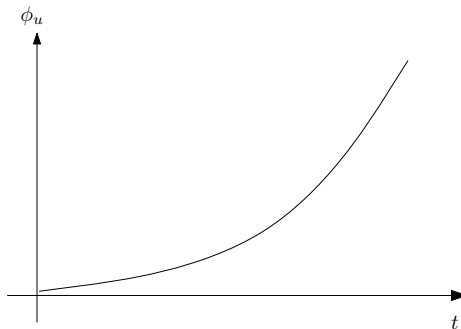


Figura 3: Possível forma de  $\phi_u$  quando  $\int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx < 0$

(ii) Quando  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx < 0$ .

Olhando para a figura 2, podemos observar que teremos um único ponto crítico de  $\phi_u$  no caso em que  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx < 0$ . Vamos mostrar que nestas condições a equação (1.13) tem uma única solução.

Como  $m_u$  é contínua e  $\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = +\infty$ , então, para  $t_1$  suficientemente pequeno

$$m_u(t_1) > \lambda \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Além disso,  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ , então, existe  $t_2$  suficientemente grande tal que

$$m_u(t_2) < \lambda \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Definindo  $m_u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , e sendo  $m_u$  uma função contínua com

$$m_u(t_1) < \lambda \int_{\Omega} u^2 dx < m_u(t_2),$$

então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $t_u \in (t_1, t_2)$  tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Além disso,

$$m'_u(t) = (2 - \gamma)t^{\gamma-3} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx,$$

logo,

$$m'_u(t) < 0$$

pois  $t > 0$  e  $1 < \gamma < 2$ . Portanto  $m_u$  é uma função estritamente decrescente. Daí concluímos que  $t_u$  é único, ou seja, a equação  $m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$  tem única solução  $t_u$ .

Desta forma, existe exatamente uma única solução de (1.13).

Agora vamos mostrar que  $t_u u \in S(\lambda)$ .

Como  $m_u$  tem uma única solução, substituindo (1.13) em (1.12), ficamos com

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t_u^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx,$$

daí

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - t_u^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por  $t_u^2$  obtemos

$$t_u^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0,$$

o que é o mesmo que  $J'_{\lambda}(t_u u)t_u u = 0$ . Consequentemente  $t_u u \in S(\lambda)$ .

Como  $t_u u \in S(\lambda)$ ,  $m'_u(t_u) < 0$  e  $t > 0$ , pela observação 1.4

$$\phi''_{t_u u}(1) = t^3 m'_u(t_u) < 0$$

isto é,  $t_u u \in S^-(\lambda)$ .

Note também que  $\phi'_u(t_u) = 0$ , ou seja, a aplicação  $\phi_u$  tem um único ponto crítico em  $t = t_u$  que é um ponto de máximo local. De fato,

$$t_u^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Dividindo a equação acima por  $t_u \neq 0$  ficamos com

$$t_u \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma-1} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^{\gamma}}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = -\infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^{\gamma}}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Do que foi observado acima, segue que  $\phi_u$ , tem seu gráfico como na figura 4.

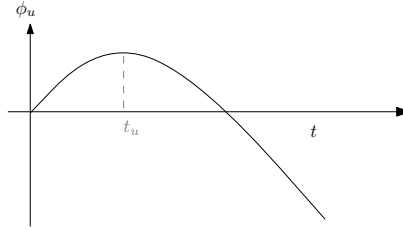


Figura 4: Possível forma de  $\phi_u$  quando  $\int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx < 0$

(iii) Quando  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx > 0$ .

Neste caso,  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx > 0$ . Desse modo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$$

e ainda

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} m_u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = -\infty.$$

Como  $m_u$  é uma função contínua com

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} m_u(t) < \lambda \int_{\Omega} u^2 dx < \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t),$$

pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $t_u \in (0, +\infty)$  tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Além disso,

$$m'_u(t) = (2 - \gamma)t^{\gamma-3} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx,$$

logo,

$$m'_u(t) > 0,$$

pois  $t > 0$  e  $1 < \gamma < 2$ . Desse modo  $m_u$  é uma função estritamente crescente. Daí, concluímos que  $t_u$  é único, ou seja, a equação  $m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$  tem única solução  $t_u$ . Assim, existe exatamente uma única solução de (1.13).

Por resultados análogos aos anteriores vemos que  $t_u u \in S(\lambda)$ .

Como  $m_u$  tem uma única solução, substituindo (1.13) em (1.12),

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t_u^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx,$$

daí

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - t_u^{\gamma-2} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por  $t_u^2$  ficamos com

$$t_u^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0,$$

o que é o mesmo que  $J'_\lambda(t_u u)t_u u = 0$ . Consequentemente  $t_u u \in S(\lambda)$ .

Como  $t_u u \in S(\lambda)$ ,  $m'_u(t_u) > 0$  e  $t > 0$ ,

$$\phi''_{t_u u}(1) = t^3 m'_u(t_u) > 0,$$

isto é,  $t_u u \in S^+(\lambda)$ .

Note também que  $\phi'_u(t_u) = 0$ , ou seja, a aplicação  $\phi_u$  tem um único ponto crítico em  $t = t_u$  que é um ponto de mínimo local. De fato,

$$t_u^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0.$$

Dividindo a equação acima por  $t_u$ , segue que

$$t_u \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - t_u^{\gamma-1} \int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx = 0 \Rightarrow \phi'_u(t_u) = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \right) = \infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \right) = 0,$$

com  $\phi_u(t)$  se aproximando de zero por valores negativos.

Do que foi observado acima, concluímos que  $\phi_u$ , tem seu gráfico como na figura 5.

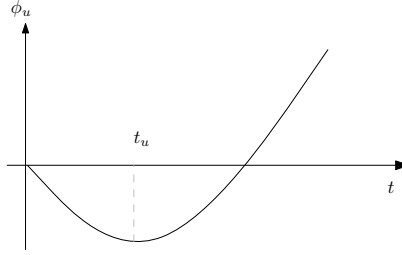


Figura 5: Possível forma de  $\phi_u$  quando  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx > 0$

(iv) Quando  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx > 0$ .

Neste caso,  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2 dx < 0$  e deste modo

$$\phi'_u(t) = t^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx < 0,$$

pois  $t > 0$ , logo  $\phi_u$  é decrescente e como  $\phi'_u(t) > 0$  pela Proposição 1.2, concluímos que  $tu \notin S(\lambda)$ . E o gráfico  $\phi_u$  tem sua forma mostrada na figura 6.

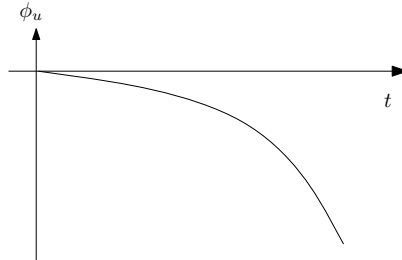


Figura 6: Possível forma de  $\phi_u$  quando  $\lambda \int_{\Omega} u^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx > 0$

Do que vimos acima, podemos definir:

$$L_+(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \|u\| = 1 \text{ e } \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx > 0\}$$



$$B_+ = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \|u\| = 1 \text{ e } \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx > 0\}.$$

E analogamente definimos  $L_-(\lambda), L_0(\lambda), B_-$  e  $B_0$ , substituindo  $(> 0)$  por  $(< 0)$  ou  $(= 0)$  como for apropriado. Segue que:

- (i) Se  $u \in L_+(\lambda) \cap B_+$ , então  $t \rightarrow \phi_u(t)$  tem um mínimo local em  $t = t_u$  e  $t_u u \in S(\lambda)$ ;
- (ii) Se  $u \in L_-(\lambda) \cap B_-$ , então  $t \rightarrow \phi_u(t)$  tem um máximo local em  $t = t_u$  e  $t_u u \in S(\lambda)$ ;
- (iii) Se  $u \in L_+(\lambda) \cap B_-$ , então  $t \rightarrow \phi_u(t)$  é estritamente crescente e nenhum múltiplo de  $u$  está em  $S(\lambda)$ ;
- (iv) Se  $u \in L_-(\lambda) \cap B_+$ , então  $t \rightarrow \phi_u(t)$  é estritamente decrescente e nenhum múltiplo de  $u$  está em  $S(\lambda)$ .

## 1.4 PROPRIEDADES DA VARIEDADE DE NEHARI

Nesta seção vamos discutir o papel importante desempenhado pela condição de  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  na determinação da natureza da variedade de Nehari.

Quando  $\lambda < \lambda_1$ , por (1.2) temos que  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx > 0$ , para todo  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Assim

$$L_+(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|u\| = 1\}$$

$$, L_-(\lambda) = \emptyset \text{ e } L_0(\lambda) = \emptyset.$$

Quando  $\lambda = \lambda_1$ , temos que  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \geq 0$  e assim  $L_-(\lambda) = \emptyset$  e  $L_0(\lambda) = \{\pm \phi_1\}$  e quando  $\lambda > \lambda_1$ ,  $L_-(\lambda)$  passa a ser não-vazio e se torna maior à medida que  $\lambda$  aumenta.

Tendo em vista as considerações anteriores, veremos que a condição  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  é sempre satisfeita quando  $\lambda < \lambda_1$ , já que neste caso o conjunto  $L_-(\lambda) = \emptyset$ . Além disso, esta condição pode ou não, ser satisfeita quando  $\lambda > \lambda_1$  e é cada vez mais provável a ser violada à medida que  $\lambda$  aumenta.

**Teorema 1.1.** *Suponhamos que exista  $\hat{\lambda}$  tal que para todo  $\lambda < \hat{\lambda}$ ,  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ . Então, para todo  $\lambda < \hat{\lambda}$  temos:*

- (i)  $L_0(\lambda) \subseteq B_-$  e assim  $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$ ;
- (ii)  $S^+(\lambda)$  é limitado ;
- (iii)  $0 \notin \overline{S^-(\lambda)}$  e  $S^-(\lambda)$  é fechado ;

$$(iv) \overline{S^+(\lambda)} \cap S^-(\lambda) = \emptyset.$$

**Prova:** (i) Suponhamos por contradição que  $L_0(\lambda) \not\subseteq B_-$ . Então existe  $u \in L_0(\lambda)$  tal que  $u \notin B_-$ . Assim,

$$u \in L_0(\lambda) \Rightarrow u \in W_0^{1,2}(\Omega); \quad \|u\| = 1 \text{ e } \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx = 0$$

e

$$u \notin B_- \Rightarrow \int_{\Omega} b \left( \frac{|u|}{\|u\|} \right)^{\gamma} dx \geq 0.$$

Se  $\lambda < \mu < \hat{\lambda}$ , então

$$0 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx > \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \mu u^2) dx \Rightarrow u \in L_-(\mu),$$

de modo que  $L_-(\mu) \not\subseteq B_-$ , o que nos dá uma contradição à hipótese do teorema.

Logo  $L_0(\lambda) \subseteq B_-$  e sendo  $B_- \cap B_0 = \emptyset$  temos  $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$ .

(ii) Suponhamos que  $S^+(\lambda)$  seja ilimitado. Então existe  $\{u_n\} \subseteq S^+(\lambda)$ , tal que  $\|u_n\| \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Seja  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ . Desse modo temos que  $\{v_n\}$  é limitada e por 3.10 podemos supor, sem perda de generalidade, que  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Assim  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^2(\Omega)$  e em  $L^\gamma(\Omega)$ , já que  $1 < \gamma < 2$ . Como  $u_n \in S^+(\lambda)$ ,

$$\int_{\Omega} b|v_n|^{\gamma} dx = \frac{1}{\|u_n\|^{\gamma}} \int_{\Omega} b|u_n|^{\gamma} dx > 0,$$

logo,

$$\int_{\Omega} b|v_0|^{\gamma} dx \geq 0. \tag{1.15}$$

Além disso, em  $S(\lambda)$

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx = \int_{\Omega} b|u_n|^{\gamma} dx,$$

daí,

$$\int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx = \int_{\Omega} b|v_n|^{\gamma} \frac{1}{\|u_n\|^{2-\gamma}} dx \rightarrow 0,$$

em  $L^2(\Omega)$  já que  $b|v_n|^{\gamma}$  é limitado em  $L^\gamma(\Omega)$  e  $\|u_n\|^{2-\gamma} \rightarrow \infty$ .

Suponhamos agora que  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Por 3.5 temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx,$$

logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2 dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2 dx = 0,$$

e assim,  $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda)$ .

Pela hipótese do teorema temos  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  e isso nos dá que  $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in B_-$ , o que é impossível por (1.15).

Agora, suponhamos que  $v_n \rightarrow v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Desse modo  $\|v_0\| = 1$  e

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2 dx = 0.$$

Assim,  $v_0 \in L_0(\lambda)$  e por (i),  $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ , nos dando  $v_0 \in B_-$  que é novamente impossível. Portanto,  $S^+(\lambda)$  é limitado.

(iii) Suponhamos que  $0 \in \overline{S^-(\lambda)}$ . Então existe  $\{u_n\} \subseteq S^-(\lambda)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$ . Tomando  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ , temos que  $\{v_n\}$  é limitada e por 3.10 podemos supor, sem perda de generalidade, que  $v_n \rightarrow v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Assim  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^2(\Omega)$ .

Como  $u_n \in S^-(\lambda)$ , temos

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx = \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx < 0.$$

Multiplicando a equação acima por  $\|u_n\|^{-\gamma}$ , ficamos com

$$\|u_n\|^{2-\gamma} \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx = \int_{\Omega} b|v_n|^\gamma dx \leq 0.$$

Sabendo que  $\{v_n\}$  é limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $b$  regular em  $\overline{\Omega}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$  obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b|v_n|^\gamma dx = 0,$$

daí,

$$\int_{\Omega} b|v_0|^\gamma dx = 0, \tag{1.16}$$

já que  $b|v_n|^\gamma$  é limitado em  $\Omega$  e  $\|u_n\|^{2-\gamma} \rightarrow \infty$ .

Suponhamos agora que  $v_n \rightarrow v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , desse modo  $\|v_0\| = 1$  e

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2 dx \leq 0,$$

nos dando  $v_0 \in L_0(\lambda)$  ou  $v_0 \in L_-(\lambda)$ . Entretanto,  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  pela hipótese do teorema

e  $L_0(\lambda) \subseteq B_-$  por (i). Em ambos os casos teríamos  $v_0 \in B_-$ , o que contradiz (1.16).

Assim  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , e desse modo, por 3.5 temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx.$$

Além disso,  $\{v_n\}$  é limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e pelo Teorema da Convergência Dominada 3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_n^2 dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^2 dx,$$

daí,

$$\int_{\Omega} (|\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2) dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx \leq 0.$$

Logo,  $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda) \cap B_0$  que é novamente impossível, pois  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  e  $B_- \cap B_0 = \emptyset$ . Portanto,  $0 \notin \overline{S^-(\lambda)}$ .

Vamos agora provar que  $S^-(\lambda)$  é fechado. Mostraremos que  $\overline{S^-(\lambda)} \subset S^-(\lambda)$ . De fato, seja  $\{u_n\} \subseteq S^-(\lambda)$ , assim existe  $\{u_n\} \in \overline{S^-(\lambda)}$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Então  $u \in \overline{S^-(\lambda)}$  e como vimos acima,  $u$  não pode ser identicamente nula. Além disso, temos o resultado que segue.

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx = \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \leq 0.$$

Se ambas as integrais são iguais a 0, então  $\frac{u}{\|u_0\|} \in L_0(\lambda) \cup B_0$ , o que contradiz (i). Daí, pela expressão acima, ambas as integrais devem ser negativas, nos dando que  $u \in S^-(\lambda)$ . Assim,  $S^-(\lambda)$  é fechado.

(iv) Suponhamos que exista  $u \in \overline{S^+(\lambda)} \cap S^-(\lambda)$ . Como  $u \in S^-(\lambda)$ , por (iii), temos que  $u$  não é identicamente nula e

$$\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx < 0.$$

Além disso, por  $u \in \overline{S^+(\lambda)}$

$$\int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \geq 0,$$

o que é impossível. Concluímos que  $\overline{S^+(\lambda)} \cap S^-(\lambda) = \emptyset$ . ■

Podemos concluir outros resultados importantes sobre o comportamento de  $J_\lambda$  em  $S^+(\lambda)$  e  $S^-(\lambda)$  a partir de diferentes considerações. Ao analisar a Aplicação Fibrção, observamos que  $J_\lambda(u) > 0$  em  $S^-(\lambda)$  e  $J_\lambda(u) < 0$  em  $S^+(\lambda)$ . Além disso,

**Teorema 1.2.** *Suponhamos que as mesmas hipóteses do Teorema 1.1 sejam satisfeitas. Então*

(i)  $J_\lambda$  é limitado inferiormente em  $S^+(\lambda)$ ;

(ii)  $\inf_{u \in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) > 0$ , provando que  $S^-(\lambda)$  é não-vazio.

**Prova:** (i) É uma consequência imediata da limitação de  $S^+(\lambda)$ .

(ii) Observe que  $J_\lambda(u) \geq 0$  para  $u \in S^-(\lambda)$ . De fato, se  $u \in S^-(\lambda)$  então  $u \in S(\lambda)$  e

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \int_{\Omega} b|u|^\gamma dx \geq 0. \quad (1.17)$$

Suponhamos que  $\inf_{u \in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) = 0$ . Então existe  $\{u_n\} \subseteq S^-(\lambda)$  de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = 0$ . Por (1.21) observamos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Seja  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ . Como vimos,  $0 \notin \overline{S^-(\lambda)}$ , logo  $\{\|u_n\|\}$  é limitada fora da origem, isto é, existe um  $c > 0$  tal que  $\|u_n\| > c$ .

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b|v_n|^\gamma dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_n\|^\gamma} \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx = 0.$$

Sendo  $v_n$  limitada, por 3.10 podemos supor, sem perda de generalidade, que  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Assim  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^2(\Omega)$  e em  $L^\gamma(\Omega)$ . Sendo  $b$  uma função regular em  $\Omega$ , podemos concluir usando o Teorema da Convergência Dominada 3.3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b|v_n|^\gamma dx = \int_{\Omega} b \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|^\gamma = \int_{\Omega} b|v_0|^\gamma = 0.$$

Logo,  $\int_{\Omega} b|v_0|^\gamma dx = 0$ , ou seja,  $v_0 \in B_0$ . Se  $v_n \rightarrow v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , então  $\|v_0\| = 1$  e  $\int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx = 0$ , isto é,  $v_0 \in L_0(\lambda)$ . Enquanto que, se  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos  $\int_{\Omega} (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx < 0$ , isto é,  $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda)$ . No entanto, em ambos os casos,  $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in B_0$  e isso é uma contradição, pois como vimos  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  e  $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$ .

Daí,  $\inf_{u \in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) > 0$ . ■

Concluimos esta seção, provando um lema técnico que se aplica quando as hipótese

do teorema anterior não são válidas. Como podemos observar, dizer que  $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$ , é o mesmo que dizer que existe  $u \in L_-(\lambda)$  tal que  $u \in B_+$ . Sendo  $B_+ \cap B_- = \emptyset$ , a hipótese nos garante que  $L_-(\lambda) \not\subseteq B_-$ . O lema será usado posteriormente em nossa discussão de situações em que  $(P_1)$  não possui soluções positivas.

**Lema 1.2.** *Suponhamos que  $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$ . Então existe  $k > 0$  tal que, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $u_\epsilon \in L_+(\lambda) \cap B_+$  tal que*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_\epsilon|^2 - \lambda u_\epsilon^2) dx < \epsilon \quad e \quad \int_{\Omega} b|u_\epsilon|^\gamma dx > k.$$

*Prova:* Seja  $v \in L_-(\lambda) \cap B_+$ , de modo que

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - \lambda v^2) dx < 0; \quad \int_{\Omega} b|v|^\gamma dx > 0.$$

Podemos escolher  $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$  com a norma do sup arbitrariamente pequena, mas de tal modo que  $\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx$  seja arbitrariamente grande. Assim podemos tomar  $h$  de forma que

$$\int_{\Omega} b|v + th|^\gamma dx > \frac{1}{2} \int_{\Omega} b|v|^\gamma dx \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1,$$

e

$$\int_{\Omega} (|\nabla(v + h)|^2 - \lambda(v + h)^2) dx > 0.$$

Seja  $u_t = \frac{v+th}{\|v+th\|}$ . Então, para  $0 \leq t \leq 1$ ,  $u_t \in B_+$ ; de fato

$$\int_{\Omega} b|u_t|^\gamma dx \geq \frac{1}{(\|v\| + \|h\|)^\gamma} \frac{1}{2} \int_{\Omega} b|v|^\gamma dx.$$

Além disso,  $u_0 \in L_-(\lambda)$  e  $u_1 \in L_+(\lambda)$ . Tomando

$$\phi(t) = \int_{\Omega} (|\nabla u_t|^2 - \lambda u_t^2) dx \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Então  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $\phi(0) < 0$  e  $\phi(1) > 0$  e por isso, para qualquer  $\epsilon > 0$  dado, existem valores de  $t$  tal que  $u_t$  possui as propriedades requeridas. ■

## 1.5 A EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES

**Teorema 1.3.** *Suponhamos que  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  para todo  $\lambda < \hat{\lambda}$ . Então, para todo  $\lambda < \hat{\lambda}$ :*

(i) *existe um minimizador para  $J_\lambda$  em  $S^+(\lambda)$ ;*

(ii) existe um minimizador para  $J_\lambda$  em  $S^-(\lambda)$ , desde que  $L_-(\lambda)$  seja não-vazio.

**Prova:** (i) Pelo Teorema 1.2,  $J_\lambda$  é limitado inferiormente em  $S^+(\lambda)$ . Pela definição de ínfimo, existe  $\{u_n\} \subseteq S^+(\lambda)$ , sequência minimizante, tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u).$$

Como,

$$J_\lambda(u_n) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx,$$

com  $\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) < 0$  e  $\int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx > 0$  para todo  $n$ , temos que  $J_\lambda(u_n) < 0$ .

Além disso, pelo Teorema 1.2(ii),  $S^+(\lambda)$  é limitado, daí podemos supor que  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e por 3.10,  $u_n \rightarrow u_0$  em  $L^\gamma(\Omega)$ . Assim, segue que

$$\int_{\Omega} b|u_0|^\gamma dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx > 0$$

daí  $\frac{u_0}{\|u_0\|} \in B_+$ .

Pelo Teorema 1.1,  $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ ,  $L_-(\lambda) \subseteq B_-$  e temos também que  $B_- \cap B_+ = \emptyset$ . Assim,  $\frac{u_0}{\|u_0\|} \in L_+(\lambda) \cap B_+$  e por resultados anteriores obtemos que a Aplicação Fibração  $\phi_{u_0}$  tem um único mínimo em  $t_{u_0}$  tal que  $t_{u_0}u_0 \in S^+(\lambda)$ .

Precisamos mostrar que  $u_0$  está na variedade. Para isso, suponhamos  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2) dx &< \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx = \int_{\Omega} b|u_0|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$t_{u_0} = \left[ \frac{\int_{\Omega} b|u_0|^\gamma dx}{\int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2) dx} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}} > 1,$$

e ainda,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_0) &= \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2) dx - \int_{\Omega} b|u_0|^\gamma dx \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b|u_n|^\gamma dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Como  $\phi_{u_0}$  tem um único mínimo em  $t_{u_0}$  tal que  $t_{u_0}u_0 \in S^+(\lambda)$ , segue que  $\phi_{u_0}(t_{u_0}) = J_\lambda(t_{u_0}u_0) < \phi_{u_0}(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ , em particular vale a desigualdade para  $t = 1$ ,

$$J_\lambda(t_{u_0}u_0) < J_\lambda(u_0). \quad (1.19)$$

Por (1.18) e (1.19), temos que  $J_\lambda(t_{u_0}u_0) < J_\lambda(u_0) < \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u)$  o que é impossível, pois  $t_{u_0}u_0 \in S^+(\lambda)$ .

Daí,  $u_n \rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e assim  $u_0 \in S(\lambda)$ . Segue que  $u_0$  é um minimizador para  $J_\lambda$  em  $S^+(\lambda)$ .

(ii) Seja  $\{u_n\}$  uma sequência minimizante para  $J_\lambda$  em  $S^-(\lambda)$ . Segue, do Teorema 1.2 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in S^-(\lambda)} J_\lambda(u) > 0$ .

Suponhamos que  $\{u_n\}$  é ilimitada; desse modo  $\|u_n\| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Tomemos  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ . Sendo  $\{J_\lambda(u_n)\}$  limitada, segue que  $\{\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx\}$  e  $\{\int_\Omega b|u_n|^\gamma dx\}$  são limitadas e por isso

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega b|v_n|^\gamma dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = 0. \end{aligned}$$

Como  $\{v_n\}$  é limitada, podemos assumir que  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^\gamma(\Omega)$ , de modo que  $\int_\Omega b|v_0|^\gamma dx = 0$ .

Se  $v_n \rightarrow v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , vemos que  $v_0 \in L_0(\lambda) \cap B_0$ , o que é impossível pelo Teorema 1.1(i).

Daí,  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e assim por 3.5

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda v_0^2) dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda v_n^2) dx = 0.$$

Daí,  $v_0 \neq 0$  e  $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda) \cap B_0$  que é novamente impossível.

Assim  $u_n$  é limitada e por isso podemos assumir que  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $u_n \rightarrow u_0$  em  $L^\gamma(\Omega)$ . Suponhamos  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Então temos

$$\int_\Omega b|u_0|^\gamma dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega b|u_n|^\gamma dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) < 0$$



e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2) dx &< \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b |u_n|^\gamma dx = \int_{\Omega} b |u_0|^\gamma dx < 0. \end{aligned}$$

Daí,  $\frac{u_0}{\|u_0\|} \in L_-(\lambda) \cap B_-$  e assim  $t_{u_0} u_0 \in S^-(\lambda)$ , onde

$$t_{u_0} = \left[ \frac{\int_{\Omega} b |u_0|^\gamma dx}{\int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2) dx} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}} < 1.$$

Além disso  $t_{u_0} u_n \rightarrow t_{u_0} u_0$ , mas  $t_{u_0} u_n \not\rightarrow t_{u_0} u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , logo,

$$J_\lambda(t_{u_0} u_0) < \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(t_{u_0} u_n).$$

Como a aplicação  $t \rightarrow J_\lambda(t u_n)$  atinge seu máximo em  $t = 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(t_{u_0} u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in S^-(\lambda)} J_\lambda(u).$$

Assim  $J_\lambda(t_{u_0} u_0) < \inf_{u \in S^-(\lambda)} J_\lambda(u)$ , o que é uma contradição.

Desse modo,  $u_n \rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e segue que  $u_0$  é um minimizador para  $J_\lambda$  em  $S^-(\lambda)$ . ■

A existência dos minimizadores acima implica a existência de correspondentes soluções não-negativas de  $(P_1)$ . Suponhamos, por exemplo, que  $u_0$  é um minimizador para  $J_\lambda$  em  $S^-(\lambda)$ . Sendo  $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$ , podemos supor que  $u_0$  é não-negativo em  $\Omega$ . Além disso,  $S^-(\lambda)$  é fechado, desse modo  $u_0$  é um mínimo local para  $J_\lambda$  em  $S(\lambda)$ . Temos também, pelo Teorema 1.1 (i),  $L_0 \cap B_0 = \emptyset$ , logo,  $S^0 = \emptyset$ . Segue do lema 1.1 que  $u_0$  é um ponto crítico de  $J_\lambda$  e pelos resultados de regularidade conforme na seção 1.9,  $u_0$  é uma solução clássica de  $(P_1)$ .

Da mesma forma, se  $u_0$  é um minimizador em  $S^+(\lambda)$ ,  $J_\lambda(u_0) < 0$ . Assim  $u_0$  deve ser um mínimo local de  $J_\lambda$  em  $S(\lambda)$  e temos novamente pelos resultados de regularidade, que  $u_0$  é uma solução clássica de  $(P_1)$ .

## 1.6 BIFURCAÇÃO DO INFINITO

A equação  $(P_1)$  é assintoticamente linear (ver, por exemplo, Toland (1973)) com o correspondente problema linearizado  $(P_0)$ . Pode-se mostrar usando argumentos da

teoria da bifurcação que a bifurcação do infinito ocorre em  $\lambda = \lambda_1$  e que a direção desta bifurcação é determinada pelo sinal de  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx$ .

Nesta seção, vamos mostrar como esses fatos são relacionado com as propriedades da variedade de Nehari do problema.

Como  $L_-(\lambda)$  é vazio para  $\lambda < \lambda_1$ , resulta do Teorema 1.3, que existe um minimizador de  $J_\lambda$  em  $S^+(\lambda)$  sempre que  $\lambda < \lambda_1$ .

Nosso próximo resultado corresponde ao fato de que um ramo de soluções positivas bifurca do infinito à esquerda em  $\lambda = \lambda_1$  quando  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx > 0$ .

**Teorema 1.4.** *Suponhamos  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx > 0$ . Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u) = -\infty.$$

**Prova:** Sendo  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx > 0$  e

$$\int_{\Omega} (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx = (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} \phi_1^2 dx,$$

temos que  $\phi_1 \in L_+(\lambda) \cap B_+$  para todo  $\lambda < \lambda_1$ .

Daí  $t_{\phi_1} \phi_1 \in S^+(\lambda)$  e

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_{\phi_1} \phi_1) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) t_{\phi_1} \phi_1 \int_{\Omega} (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) \left[ \frac{\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx}{\int_{\Omega} (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx} \right]^{\frac{2}{2-\gamma}} \int_{\Omega} (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{[\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx]^{\frac{2}{2-\gamma}}}{[\int_{\Omega} (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2) dx]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}} \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}} \frac{[\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx]^{\frac{2}{2-\gamma}}}{[\int_{\Omega} \phi_1^2 dx]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}. \end{aligned}$$

Assim  $\inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u) \leq J_\lambda(t_{\phi_1} \phi_1) \rightarrow -\infty$  quando  $\lambda \rightarrow \lambda_1^-$ . ■

**Corolário 1.** *Suponhamos  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx > 0$ . Então, para cada  $\lambda < \lambda_1$  existe um minimizador  $u_\lambda$  em  $S^+(\lambda)$  de tal modo que  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \|u_\lambda\| = \infty$ .*

**Prova:** De fato, pelo Teorema anterior,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \|u_\lambda\|^2 &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \int_{\Omega} |\nabla u_\lambda|^2 dx > \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \int_{\Omega} |\nabla u_\lambda|^2 dx - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \int_{\Omega} |\lambda u^2| dx \\ &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \int_{\Omega} (|\nabla u_\lambda|^2 - \lambda u^2) dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)^{-1} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} \left\{ \inf_{u \in S^+(\lambda)} J_\lambda(u) \right\} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

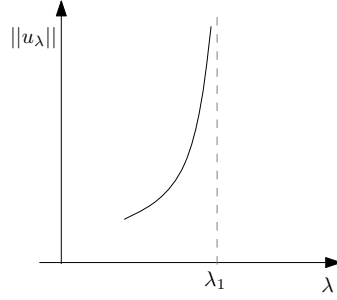


Figura 7: Bifurcação para o infinito à esquerda de  $\lambda_1$

Vamos agora voltar nossa atenção para o caso em que  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx < 0$ . Neste caso as hipóteses do Teorema 1.1 se mantêm de alguma forma, à direita de  $\lambda = \lambda_1$ . Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

**Lema 1.3.** *Suponhamos  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx < 0$ . Então existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tal que  $u \in L_-(\lambda) \Rightarrow \int_{\Omega} bu^\gamma dx \leq -\delta_2$  sempre que  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + \delta_1$ .*

**Prova:** Suponhamos por absurdo que para cada  $\delta_{1_n}, \delta_{2_n} > 0$ , existe  $u_n \in L_-(\lambda_n)$  tais que  $\int_{\Omega} bu_n^\gamma dx > -\delta_{2_n}$ , sempre que  $\lambda_1 \leq \lambda_n \leq \lambda_1 + \delta_{1_n}$ .

Tomemos  $\delta_{1_n} = \delta_{2_n} = \frac{1}{n}$  e  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$  uma sequência estritamente decrescente tal que  $\lambda_1 \leq \lambda_n \leq \lambda_1 + \frac{1}{n}$ . Desse modo, para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , existe  $u_n \in L_-(\lambda_n)$  tal que  $\int_{\Omega} bu_n^\gamma dx > -\frac{1}{n}$ .

Observe que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda_n \int_{\Omega} u^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda_{n+1} \int_{\Omega} u^2 dx < \dots < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 dx$$

Desse modo, se  $u \in L_-(\lambda_{n+1}) \Rightarrow u \in L_-(\lambda_n)$ , nos dando

$$L_-(\lambda_n) \supset L_-(\lambda_{n+1}) \supset L_-(\lambda_{n+2}) \supset \dots$$

Ainda, para todo  $\lambda > \lambda_1$  temos

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 - \lambda \phi_1^2 dx = (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} \phi_1^2 dx < 0 \Rightarrow \phi_1 \in L_-(\lambda).$$

Além disso, já foi visto que se  $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow L_0(\lambda_1) = \phi_1$ , assim

$$L_0(\lambda_1) \subset L_-(\lambda), \quad \forall \lambda > \lambda_1,$$

daí,

$$L_-(\lambda_n) \supset L_-(\lambda_{n+1}) \supset L_-(\lambda_{n+2}) \supset \dots \supset L_0(\lambda_1).$$

Observe ainda que podemos tomar a sequência  $\{u_n\} \in L_-(\lambda_n)$  tal que  $u_n \in L_-(\lambda_n)$ ,  $u_{n+1} \in L_-(\lambda_{n+1})$ ; de modo que  $u_n \rightarrow \phi_1$ . Assim

$$u_n^\gamma \rightarrow \phi_1^\gamma \Rightarrow \int_{\Omega} u_n^\gamma \rightarrow \int_{\Omega} \phi_1^\gamma \Rightarrow \int_{\Omega} b u_n^\gamma \rightarrow \int_{\Omega} b \phi_1^\gamma,$$

nos dando que  $\int_{\Omega} b \phi_1^\gamma > -\frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , o que é um absurdo, já que, pela hipótese do teorema  $\int_{\Omega} b \phi_1^\gamma < 0$ . ■

**Corolário 2.** *Suponhamos  $\int_{\Omega} b \phi_1^\gamma dx < 0$  e  $\delta_1$  seja como no lema 1.3. Então, sempre que  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + \delta_1$ , existem minimizadores  $u_\lambda$  e  $v_\lambda$  de  $J_\lambda$  em  $S^+(\lambda)$  e  $S^-(\lambda)$  respectivamente.*

**Prova:** Podemos observar que  $\phi_1 \in L_-(\lambda)$  e assim vemos que  $L_-(\lambda)$  é não-vazio sempre que  $\lambda > \lambda_1$ . Pelo lema 1.3, obtemos as hipóteses do Teorema 1.3 com  $\hat{\lambda} = \lambda_1 + \delta_1$  e por isso o resultado segue. ■

O próximo resultado mostra que, quando  $\int_{\Omega} b \phi_1^\gamma dx < 0$ , ocorre a bifurcação do infinito à direita de  $\lambda = \lambda_1$ .

**Teorema 1.5.** *Suponhamos  $\int_{\Omega} b \phi_1^\gamma dx < 0$ . Se  $\lambda \rightarrow \lambda_1^+$ ,  $v_\lambda$  torna-se ilimitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

**Prova:** Seja  $v \in S^-(\lambda)$ . Assim,  $v = t_u u$  para algum  $u \in L_-(\lambda) \cap B_-$ . Agora, pelo Lema 1.3, existem  $\delta_1 \epsilon \delta_2 > 0$ , tais que  $\int_{\Omega} b u_1^\gamma dx \leq -\delta_2$  sempre que  $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_1 + \delta_1$  e

$$0 > \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1},$$

de modo que  $|\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx| \leq \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_1}$ . Por isso

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(v) = J_{\lambda}(t_u u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) t_u^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \left[ \frac{|\int_{\Omega} b|u|^{\gamma} dx|^{\frac{2}{2-\gamma}}}{|\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2) dx|^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}} \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_1^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \delta_2^{\frac{2}{2-\gamma}}}{(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}}. \end{aligned}$$

Daí  $\inf_{v \in S^-(\lambda)} J_{\lambda}(v) \rightarrow \infty$  já que  $\lambda \rightarrow \lambda_1^+$  e assim  $v_{\lambda}$  é ilimitada quando  $\lambda \rightarrow \lambda_1^+$ .

Assim podemos construir um gráfico como segue na figura 8. ■

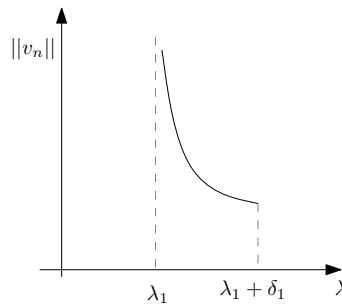


Figura 8: Bifurcação para o infinito à direita de  $\lambda_1$

## 1.7 O CASO DA NÃO EXISTÊNCIA

Finalmente, mostraremos que sob as hipóteses em que não há soluções positivas para  $(P_1)$ , teremos que  $J_{\lambda}$  não é limitado inferiormente em  $S(\lambda)$ .

**Lema 1.4.**  $J_{\lambda}$  não é limitado inferiormente em  $S(\lambda)$  quando  $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$ .

*Prova:* Suponhamos que  $u_0 \in L_-(\lambda) \cap B_+$ . Decorre do lema 1.2 que existe  $k > 0$  e uma sequência  $\{u_n\} \subseteq L_+(\lambda) \cap B_+$  tal que  $\int_{\Omega} b|u_n|^{\gamma} dx \geq k$  e  $0 < \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx < \frac{1}{n}$ .

Em seguida, utilizando o mesmo cálculo como na prova do Teorema 1.5, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(t_{u_n} u_n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) \left[ \frac{|\int_{\Omega} b|u_n|^{\gamma} dx|^{\frac{2}{2-\gamma}}}{|\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 - \lambda u_n^2) dx|^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}} \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right) n^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} k^{\frac{2}{2-\gamma}} \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daí  $J_{\lambda}$  não é limitado inferiormente em  $S(\lambda)$ . ■

Os seguintes resultados de não existência de soluções para  $(P_1)$  seguem para complementar nosso estudo.

**Teorema 1.6.** (i) Suponhamos  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx > 0$ . Então o problema  $(P_1)$  não tem soluções positivas se  $\lambda > \lambda_1$ .

(ii) A equação  $(P_1)$  não tem soluções positivas quando  $\lambda > \bar{\lambda}$ , onde  $\bar{\lambda}$  é o principal autovalor de

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x) \text{ para } x \in \Omega^+; \quad u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega^+ \quad (1.20)$$

$$\text{e } \Omega^+ = \{x \in \Omega : b(x) > 0\}.$$

**Prova:** (i) Suponhamos  $\int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx > 0$  e que  $(P_1)$  tem uma solução positiva  $u$ . Multiplicando  $(P_1)$  por  $\phi_1$ , onde  $\phi_1$  é a primeira autofunção do operador  $-\Delta$ ,  $(P_0)$  por  $u$  e subtraindo as equações resultantes obtemos

$$-\Delta u(x)\phi_1(x) + u(x)\Delta\phi_1(x) = (\lambda - \lambda_1)u(x)\phi_1(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x)\phi_1(x)$$

e assim

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u\phi_1 + u\Delta\phi_1) dx = \int_{\Omega} (\lambda - \lambda_1)\phi_1^\gamma u^{2-\gamma} dx + \int_{\Omega} b\phi_1^\gamma dx.$$

Pela identidade de Picone em Berestycki, Capuzzo-Dolcetta e Nirenberg (1995), o lado esquerdo é negativo.

De fato,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u\phi_1 + u\Delta\phi_1) dx = \\ &= \int_{\Omega} -\Delta u\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} + u\Delta\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx \\ &= \int_{\Omega} -\Delta u\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx + \int_{\Omega} u\Delta\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \left(\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1}\right) dx - \int_{\Omega} \nabla \phi_1 \nabla \left(u \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1}\right) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1 \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx + \int_{\Omega} \nabla u \phi_1 \nabla \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \phi_1 \nabla u \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx - \int_{\Omega} \nabla \phi_1 u \nabla \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $w = \phi_1^{\frac{1}{2}}$ , teremos  $\phi_1 = w^2$ . Segue que,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u \phi_1 + u \Delta \phi_1) dx = \int_{\Omega} \nabla u w^2 \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} - \nabla w^2 u \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} dx.$$

Derivando os termos com  $\nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u \phi_1 + u \Delta \phi_1) dx = \\ &= \int_{\Omega} (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} \left[ \nabla u w^2 \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} - \nabla w^2 u \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-1} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} [\nabla u w^2 - \nabla w^2 u] \nabla \left(\frac{w^2}{u}\right) dx \\ &= \int_{\Omega} (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} (\nabla u w^2 - \nabla w^2 u) \left(\frac{\nabla w^2 u - w^2 \nabla u}{u^2}\right) dx \\ &= \int_{\Omega} (\gamma-1) \left(\frac{w^2}{u}\right)^{\gamma-2} (\nabla u w^2 - \nabla w^2 u) \left(\nabla w^2 \frac{1}{u} - \left(\frac{w}{u}\right)^2 \nabla u\right) dx \\ &= \int_{\Omega} (\gamma-1) \left[ \frac{w^2}{u} \nabla u \nabla w^2 - \left(\frac{w}{u}\right)^2 |\nabla u|^2 w^2 - |\nabla w^2|^2 + \frac{w^2}{u} \nabla w^2 \nabla u \right] dx \\ &= \int_{\Omega} (\gamma-1) \left[ \frac{w^2}{u} \nabla u \nabla w^2 - \left(\frac{w^2}{u}\right)^2 |\nabla u|^2 - |\nabla w^2|^2 + \frac{w^2}{u} \nabla w^2 \nabla u \right] dx. \end{aligned}$$

Voltando com  $w^2 = \phi_1$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\phi_1}{u}\right)^{\gamma-1} (-\Delta u \phi_1 + u \Delta \phi_1) dx = \int_{\Omega} (\gamma-1) \left[ \left(-\frac{\phi_1}{u}\right)^2 |\nabla u|^2 + 2 \frac{\phi_1}{u} \nabla u \nabla \phi_1 - |\nabla \phi_1|^2 \right] dx.$$

Substituindo da identidade de Picone, segue

$$\int_{\Omega} (\gamma-1)(-1) \left[ |\nabla u|^2 - \nabla \frac{u^2}{v} \nabla v \right] dx \leq 0.$$

Por isso, devemos ter  $\lambda < \lambda_1$  e assim  $(P_1)$  não tem nenhuma solução positiva quando  $\lambda > \lambda_1$ .

(ii) Suponhamos que  $(P_1)$  tenha uma solução positiva  $u$ . Assim teremos,  $u(x) \geq 0$  em  $\Omega^+$  e

$$-\Delta u(x) = \lambda u + b(x)|u|^{\gamma-2}u \geq \lambda u \text{ em } \Omega^+; \quad u(x) \geq 0 \text{ em } \partial\Omega^+.$$

Segue do princípio do máximo que  $\lambda \leq \bar{\lambda}$ . Finalmente observa-se que em cada um dos casos acima  $J_\lambda$  não é limitada inferiormente em  $S(\lambda)$ . ■

**Teorema 1.7.**  $J_\lambda$  não é limitada inferiormente em  $S(\lambda)$  quando uma das seguintes condições acontecem:

- (i)  $\int_\Omega b\phi_1^\gamma dx > 0$  e  $\lambda > \lambda_1$ ;
- (ii)  $\lambda > \bar{\lambda}$  onde  $\bar{\lambda}$  é o mesmo definido no teorema anterior.

**Prova:** Pelo lema 1.4, é suficiente mostrar que  $L_-(\lambda) \cap B_+ \neq \emptyset$ . Se a condição (i) é satisfeita, logo,  $\phi_1 \in L_-(\lambda) \cap B_+$  e, se (ii) é satisfeita, então  $\psi \in L(\lambda) \cap B_+$ , onde

$$\psi(x) = \begin{cases} \text{principal autofunção positiva de (1.20) em } \Omega^+ \\ 0, \text{ se } x \in \Omega \setminus \Omega^+ \end{cases}$$

■

## 1.8 O FUNCIONAL $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$

O Funcional de Euler  $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado ao problema elíptico (P) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Já vimos que ele está bem definido para toda  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Iremos mostrar que ele é de classe  $\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

Para isso tomamos  $J_1, J_2, J_3 : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \\ J_2(u) &= \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 dx, \\ J_3(u) &= \frac{1}{\gamma} \int_\Omega b(x)|u|^\gamma dx. \end{aligned}$$

Mostraremos que existem as derivadas de Gateaux de  $J_1, J_2$  e  $J_3$  e que elas são contínuas.

(i) Para mostrar que  $J_1$  é Gateaux diferenciável iremos encontrar  $J_1'(u)v$ .

$$J_1'(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \|u+tv\|^2 - \frac{1}{2} \|u\|^2}{t}$$



$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\|u\|^2}{2} + t\langle u, v \rangle + \frac{t^2\|v\|^2}{2} - \frac{\|u\|^2}{2}}{t} = \langle u, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Portanto, a derivada de Gateux existe em  $u$  com

$$J_1'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v|.$$

Para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  com  $\|v\| \leq 1$  temos

$$\begin{aligned} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v| &= |J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| = |\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\| \leq \|u_n - u\|. \end{aligned}$$

Contudo,

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v| \leq \|u_n - u\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Desse modo, concluímos que  $J_1'$  é contínuo e com o resultado da proposição 3.1,  $J_1 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

(ii) Agora vamos mostrar que  $J_2$  é contínuo.

Seja  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Queremos mostrar que  $J_2(u_n) \rightarrow J_2(u)$  em  $\mathbb{R}$ . Pelo Teorema das Imersões 3.10 temos que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$ .

Logo,

$$\|u_n\|_2 \rightarrow \|u\|_2 \Rightarrow \|u_n\|_2^2 \rightarrow \|u\|_2^2.$$

Tendo que  $\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$  segue que

$$\int_{\Omega} |u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^2 dx,$$

isto é,

$$J_2(u_n) \rightarrow J_2(u).$$

Mostraremos agora que a derivada de Gateaux existe em  $u$

$$\begin{aligned} J'_2(u)v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_2(u + tv) - J_2(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\lambda}{2} \|u + tv\|_2^2 - \frac{\lambda}{2} \|u\|_2^2}{t} \\ &= \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\|u\|_2^2}{2} + t \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2 \|v\|_2^2}{2} - \frac{\|u\|_2^2}{2}}{t} = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda \int_{\Omega} uv dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$J'_2(u)v = \lambda \int_{\Omega} uv dx.$$

Em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\|J'_2(u_n) - J'_2(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_2(u_n) - J'_2(u))v|.$$

Para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  com  $\|v\| \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} |(J'_2(u_n) - J'_2(u))v| &= |J'_2(u_n)v - J'_2(u)v| = \lambda |(u_n, v) - (u, v)| = \\ &= \lambda |(u_n - u, v)| \leq \lambda \|u_n - u\| \|v\| \leq \lambda \|u_n - u\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|J'_2(u_n) - J'_2(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_2(u_n) - J'_2(u))v| \leq \lambda \|u_n - u\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Desse modo concluímos que  $J'_2$  é contínuo e pela proposição 3.1 temos que  $J_2 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

(iii) Por fim iremos mostrar que  $J_3 \in \mathcal{C}(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

Consideremos a seguinte função

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(s) = \frac{1}{\gamma} b(x) |u + stv|^\gamma,$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  é tal que  $0 < |t| < 1$  e  $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Assim,

(a)  $f(1) = \frac{1}{\gamma} b(x) |u + tv|^\gamma,$

(b)  $f(0) = \frac{1}{\gamma} b(x) |u|^\gamma,$

(c)  $f'(s) = b(x) |u + stv|^{\gamma-2} (u + stv) tv.$

Como  $f$  é diferenciável em  $(0, 1)$ , então pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\delta \in (0, 1)$  tal que,

$$f(1) - f(0) = f'(\delta)(1 - 0),$$

e segue,

$$\frac{1}{\gamma}b(x)|u + tv|^\gamma - \frac{1}{\gamma}b(x)|u|^\gamma = b(x)|u + \delta tv|^{\gamma-2}(u + \delta tv)tv.$$

Dividindo a equação acima por  $t$  (com  $0 < |t| < 1$ ), encontramos

$$\frac{1}{\gamma}b(x) \left( \frac{|u + tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t} \right) = b(x)|u + \delta tv|^{\gamma-2}(u + \delta tv)v.$$

Agora, passando ao limite, quando  $t \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma}b(x) \left( \frac{|u + tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t} \right) = b(x)|u|^{\gamma-2}uv.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\gamma}b(x) \left( \frac{|u + tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t} \right) \right| &= |b(x)||u + \delta tv|^{\gamma-1}|v| \\ &\leq |b(x)|(|u| + |\delta||t||v|)^{\gamma-1}|v| \\ &\leq k(|u| + |\delta||t||v|)^{\gamma-1}|v| \\ &\leq k(|u| + |v|)^{\gamma-1}|v|. \end{aligned}$$

Como  $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , segue que a imersão  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$  é contínua para  $1 \leq s \leq 2^*$ , onde  $2^* = \frac{2N}{N-2}$ , se  $N \geq 3$  e  $2^* = \infty$ , se  $N = 1, 2$ .

Podemos observar que a imersão é contínua para os valores de  $s = 2$  ou  $s = \gamma$ . Segue que

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega),$$

logo  $u, v \in L^\gamma(\Omega)$  e  $u + v \in L^\gamma(\Omega)$ . Assim,  $(u + v)^{\gamma-1} \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$ .

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes  $\frac{\gamma}{\gamma-1}$  e  $\gamma$  em  $k(|u| + |v|)^{\gamma-1}|v|$

$$\int_{\Omega} [(|u| + |v|)^{\gamma-1}]|v| dx \leq \left( \int_{\Omega} (|u| + |v|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( \int_{\Omega} |v|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} < \infty.$$

Assim,  $k(|u| + |v|)^{\gamma-1}|v| \in L^1(\Omega)$ . Pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue 3.3 temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} b(x) \frac{|u + tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t} dx = \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} b(x) \frac{|u + tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t} dx = \int_{\Omega} b(x)|u|^{\gamma-2}uv dx.$$

Portanto,

$$J'_3(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} b(x) \frac{|u + tv|^\gamma - |u|^\gamma}{t} dx = \int_{\Omega} b(x) |u|^{\gamma-2} uv dx.$$

Consequentemente, existe a derivada de Gateaux em  $u$ , com

$$J'_3(u)v = \int_{\Omega} b(x) |u|^{\gamma-2} uv dx.$$

Provaremos agora, a continuidade da derivada de Gateaux de  $J'_3$ . Para isso, devemos mostrar que  $J'_3(u_n) \rightarrow J'_3(u)$ , quando  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Seja  $\{u_n\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ , com  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Das imersões contínuas de Sobolev 3.10, segue que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^\gamma(\Omega)$ , já que  $\gamma \in [1, 2^*]$ . Então, pelo Teorema 3.4, existe uma subsequência, ainda denotada por  $\{u_n\}$ , e existe  $h \in L^\gamma(\Omega)$  tal que

$$u_n(x) \rightarrow u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ e,}$$

$$|u_n| \leq h(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (1.21)$$

A norma no espaço dual é dada por

$$\|J'_3(u_n) - J'_3(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_3(u_n) - J'_3(u))(v)|,$$

e, para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , com  $\|v\| \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} |(J'_3(u_n) - J'_3(u))(v)| &= \left| \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{\gamma-2} u_n v dx - \int_{\Omega} b(x) |u|^{\gamma-2} u v dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} b(x) (|u_n|^{\gamma-2} u_n - |u|^{\gamma-2} u) v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |b(x)| (|u_n|^{\gamma-2} u_n - |u|^{\gamma-2} u) |v| dx \\ &= \int_{\Omega} |b(x)| (|u_n|^{\gamma-2} u_n - |u|^{\gamma-2} u) |v| dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder 3.2 com expoentes  $\frac{\gamma}{\gamma-1}$  e  $\gamma$ , obtemos

$$|(J'_3(u_n) - J'_3(u))(v)| \leq k \left( \int_{\Omega} (|u_n|^{\gamma-2} u_n - |u|^{\gamma-2} u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( \int_{\Omega} |v|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Como  $1 < \gamma < 2^* - 1$ , temos que a imersão de  $W_0^{1,2}(\Omega)$  em  $L^\gamma(\Omega)$  é contínua. Daí

existe  $c > 0$  tal que

$$\|v\|_{L^\gamma} \leq C\|v\|, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ com } \|v\| \leq 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |(J'_3(u_n) - J'_3(u))(v)| &\leq kc \left( \int_{\Omega} (|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \|v\| \\ &\leq kc \left( \int_{\Omega} (|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Além disso, como  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ,

$$|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e observamos que

$$\begin{aligned} ((|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})^{\frac{2^*}{\gamma}} &\leq |u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\ &\leq (|u_n|^{\gamma-2}|u_n| + |u|^{\gamma-2}|u|)^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}} (|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}} (h(x)^{2^*} + |u|^{2^*}). \end{aligned}$$

Para obter a última desigualdade acima, usamos 1.21. Com isso

$$\begin{aligned} |u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} &\leq 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} (h(x)^{2^*} + |u|^{2^*})^{\frac{\gamma}{2^*}} \\ &\leq k(h(x)^\gamma + |u|^\gamma) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Convergência Dominada de Lebesgue 3.3, temos

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow 0.$$

Logo, por 1.22, temos

$$|J'_3(u_n)(v) - J'_3(u)(v)| \rightarrow 0.$$

Portanto,  $J'_3$  é contínuo e pela proposição 3.1,  $J_3 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

Por (i), (ii) e (iii) concluímos que  $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

## 1.9 REGULARIDADE DA SOLUÇÃO FRACA DO PROBLEMA $(P_1)$

Mostramos na seção 1.5 a existência de minimizadores para  $J_\lambda$  em  $S^-(\lambda)$ . Como  $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$ , podemos assumir as soluções como sendo não negativas. Se  $u_0 \in S^-(\lambda)$ , sendo  $S^-(\lambda)$  fechado, temos que  $u_0$  é um mínimo local de  $J_\lambda$  em  $S(\lambda)$ . Segue pelo Lema 1.1 que  $u_0$  é ponto crítico de  $J_\lambda$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Similarmente, se  $u_0$  é um minimizador em  $S^+(\lambda)$ ,  $J_\lambda(u_0) < 0$ . Assim  $u_0$  é minimizador em  $S(\lambda)$ .

Nesta seção iremos mostrar que os pontos críticos do nosso funcional  $J_\lambda$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , isto é, as soluções fracas do problema  $(P_1)$ , são na verdade soluções clássicas. Para isso, usaremos alguns resultados clássicos da teoria de regularidade.

Vamos escrever nosso problema  $(P_1)$  da seguinte maneira:

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde,

$$f(x, u(x)) = \lambda u(x) + b(x)|u(x)|^{\gamma-2}u(x),$$

e sendo  $f$  uma aplicação contínua obtemos

$$|f(x, u(x))| = \lambda|u(x)| + |b(x)||u(x)|^{\gamma-1}.$$

(i) Se  $|u(x)| \leq 1$  então  $|u(x)|^{\gamma-1} \leq 1$  e assim

$$|f(x, u(x))| \leq \lambda + |b(x)|. \quad (1.23)$$

(ii) Se  $|u(x)| > 1$  então  $|u(x)|^{\gamma-1} < |u(x)|^1 < |u(x)|^p$ , com  $1 < p < 2^* - 1$  se  $N \geq 3$  e  $p \in (1, +\infty)$  se  $N = 1, 2$ , onde  $2^* = \frac{2N}{N-2}$  e assim

$$|f(x, u(x))| \leq |u(x)|^p(\lambda + |b(x)|). \quad (1.24)$$

Desse modo, por (1.23) e (1.24) podemos afirmar que

$$|f(x, u(x))| \leq (\lambda + |b(x)|)(1 + |u(x)|^p).$$

Assim,  $f$  pode ser escrita como

$$|f(x, u(x))| \leq (c_0 + c_1|u(x)|^p),$$

com  $c_0, c_1 > 0$ .

O crescimento assumido na equação acima é conhecido como crescimento subcrítico.

Se considerarmos a função  $f(x) = f(x; u(x))$ , teremos

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que  $f \in L^{\frac{2^*}{p}}$ , pois

$$|f|^{\frac{2^*}{p}} \leq (c_0 + c_1|u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \leq k(c_0^{\frac{2^*}{p}} + c_1^{\frac{2^*}{p}}|u(x)|^{2^*}).$$

Desse modo

$$\int_{\Omega} |f|^{\frac{2^*}{p}} dx < \infty,$$

pois  $u \in L^{2^*}(\Omega)$ . Usando o Teorema 3.7 temos que  $u \in W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega)$ .

Se  $N = 1$  ou  $N = 2$ , como  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [2; \infty)$  e  $|u_0|^p$  pertence a  $L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [2; \infty)$ ; temos que  $f(x; u_0) \in L^q(\Omega)$  e pelo Teorema 3.7,  $u_0 \in W^{2, q}(\Omega)$ ;  $2 \leq q < \infty$ . Pelo Teorema 3.11,  $u_0 \in C^{1, \alpha}(\Omega)$ ;  $0 < \alpha < 1 - N/q = 1 - 2/q$ , para todo  $q \geq 2$ .

Para  $N \geq 3$  devemos analisar dois casos conforme pode ser visto em (ALVES, 2007).

a) Se  $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \leq 0$ ,

$$W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \forall s \in [1, +\infty).$$

Fixando  $s > Np$ , segue que  $u \in L^s(\Omega)$  e  $f \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$ . Logo por 3.7  $u_0 \in W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega)$ .  
Pelas Imersões de Sobolev 3.10

$$W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}.$$

Assim,  $u_0 \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega})$ , para algum  $0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}$ .

b) Se  $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} > 0$ , segue das Imersões de Sobolev 3.10 que

$$W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega),$$

onde  $\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$ . Desta forma,  $u_0 \in L^{t_1}(\Omega)$ . Repetindo os argumentos anteriores, vamos obter  $f \in L^{\frac{t_1}{p}}(\Omega)$  e por 3.7

$$u_0 \in W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega)$$

b.1) Se  $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} \leq 0$ , tem-se

$$W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \forall s \in [1, +\infty).$$

Fixando  $s > Np$ , segue que  $u_0 \in L^s(\Omega)$  e  $f \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$ . Logo por 3.7  $u_0 \in W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega)$ . Pelas Imersões de Sobolev 3.10

$$W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}.$$

Assim,  $u_0 \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega})$ , para algum  $0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}$ .

b.2) Se  $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} > 0$ , tem-se

$$W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega),$$

onde  $\frac{1}{t_2} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$ . Desta forma,  $u_0 \in L^{t_2}(\Omega)$ . Repetindo os argumentos anteriores, vamos obter  $f \in L^{\frac{t_2}{p}}(\Omega)$  e por 3.7

$$u_0 \in W^{2, \frac{t_2}{p}}(\Omega).$$

Para prosseguir a demonstração, teríamos que observar mais dois casos, repetindo todo o processo. Podemos mostrar que depois de um número finito de interações obtemos  $u_0 \in C^{1, \alpha}(\Omega)$ . Este argumento é conhecido como "bootstrap".

De modo geral teremos

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p}{t_{j-1}} - \frac{2}{N}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_1} &= \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}, \\ \frac{1}{t_2} &= \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2 + p + 1) \end{aligned}$$



$$\frac{1}{t_3} = \frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2}{N}(p^3 + p^2 + p + 1).$$

No caso geral iremos encontrar

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{j-1} p^k = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N} \left( \frac{p^j - 1}{p - 1} \right) = \left( \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} \right) p^j + \frac{2}{N(p-1)}. \quad (1.25)$$

Observando que

$$\frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} < 0 \Leftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2},$$

vemos que existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{p}{t_j} - \frac{2}{N} < 0$$

mostrando que a interação finaliza após um número finito de passos.

Assim, em (1.25) fixando a dimensão  $N$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{p}{t_j} - \frac{2}{N} < 0$ . Usando argumentos análogos aos de (a) concluímos que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , para algum  $0 < \alpha < 1$ .

Deste modo, conseguimos mostrar que em todos os casos que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , para algum  $0 < \alpha < 1$ . Usando os resultados da teoria clássica de Schauder podemos concluir que  $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

## 2 O PROBLEMA ( $P_2$ )

### 2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Analisaremos agora como aplicar o Método da aplicação fibração, para resolver a seguinte classe de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais, ou seja, queremos mostrar a existência e multiplicidade de possíveis soluções para

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é uma região limitada do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave, com  $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ,  $\lambda > 0$  e  $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais regulares que podem mudar de sinal em  $\Omega$ .

Seguiremos de maneira análoga ao método usado no problema ( $P_1$ ). Inicialmente iremos definir a variedade de Nehari e a aplicação fibração e recordar suas propriedades a partir do funcional  $I_\lambda$  associado à ( $P_2$ ). Na seção seguinte usamos essas informações para provar de maneira bem simples a existência de, pelo menos, duas soluções não negativas de ( $P_2$ ), para valores de  $\lambda$  suficientemente pequenos.

### 2.2 O MÉTODO DA APLICAÇÃO E A VARIEDADE DE NEHARI

Nesta seção definiremos o funcional  $I_\lambda$  associado ao problema ( $P_2$ ) e a variedade de Nehari associada à esse funcional e veremos como eles se relacionam.

Mostraremos como o funcional é bem comportado sobre a variedade de Nehari,  $M(\lambda) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ , mas não sobre seu domínio todo  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Definiremos também a aplicação fibração, e veremos sua relação com a variedade de Nehari.

### 2.2.1 Definições

O Funcional de Euler  $I_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado ao problema  $(P_2)$  é dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx,$$

para toda  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

O funcional  $I_\lambda \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ , como pode ser verificado de maneira análoga ao mostrado para o problema  $(P_1)$ , com

$$I'_\lambda(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q-1}uv dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p-1}uv dx, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Em particular

$$I'_\lambda(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx,$$

e por argumentos análogos aos usado no capítulo anterior podemos afirmar que  $I_\lambda$  está bem definido.

**Observação 2.1.** *O funcional  $I_\lambda$  não é limitado inferiormente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

**Prova:** Considerando sem perda de generalidade que  $\int_\Omega a(x)|\varphi|^{q+1} dx > 0$  e  $\int_\Omega b(x)|\varphi|^{p+1} dx > 0$ , para alguma  $\varphi \in C_0^\infty \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  com  $\varphi > 0$  em  $\Omega$  e considerando  $t > 0$ , temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(t\varphi) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla t\varphi|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|t\varphi|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|t\varphi|^{p+1} dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x)|\varphi|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega b(x)|\varphi|^{p+1} dx \\ &= t^{p+1} \left( \frac{1}{2t^{p-1}} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_\Omega a(x)|\varphi|^{q+1} dx - \frac{1}{(p+1)} \int_\Omega b(x)|\varphi|^{p+1} dx \right). \end{aligned}$$

Tomando  $t \rightarrow \infty$ , com  $0 < q < 1 < p$ , temos que  $I_\lambda(t\varphi) \rightarrow -\infty$ , isto é,  $I_\lambda$  não é limitado inferiormente em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

Queremos encontrar um subconjunto de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , onde o funcional  $I_\lambda$  seja bem comportado, ou seja, onde esse funcional seja limitado inferiormente.

## 2.2.2 Variedade de Nehari

**Definição 1.** A variedade de Nehari associada ao funcional  $I_\lambda$  é dada por

$$M(\lambda) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle I'_\lambda(u), u \rangle = 0\},$$

onde  $\langle, \rangle$  denota a dualidade usual.

Assim,

$$\begin{aligned} u \in M(\lambda) &\Leftrightarrow I'_\lambda(u)u = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0. \end{aligned}$$

Observamos que  $M(\lambda) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  e agora vamos encontrar o funcional definido sobre a variedade de Nehari.

Note que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{q+1} I'_\lambda(u)u \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

**Proposição 2.1.** O funcional  $I_\lambda$  é coercivo e limitado inferiormente em  $M(\lambda)$ .

*Prova:* Seja  $u \in M(\lambda)(\Omega)$ , temos

$$I_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx.$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq \left| \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \right| \leq \int_{\Omega} |a(x)||u|^{q+1} dx \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx.$$

Usando a desigualdade da Imersão Contínua  $\|u\|_{q+1} \leq C_2 \|u\|$  (ver teorema 3.12), com  $C_1 = \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| > 0$  e  $C_2 > 0$

$$\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \leq C_1 C_2 \|u\|^{q+1}.$$

Assim,

$$-\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \geq -C_1 C_2 \|u\|^{q+1}$$

e

$$I_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) C_1 C_2 \|u\|^{q+1} \geq \|u\|^2 (C_3 - C_4 \|u\|^{(q+1)-2}),$$

onde  $C_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} > 0$  e  $C_4 = \lambda C_1 C_2 \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)$ .

Utilizando a desigualdade acima e observando que  $0 < q < 1$ , concluímos que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} I_\lambda(u) = \infty,$$

logo,  $I_\lambda$  é coercivo.

Agora, vamos mostrar que  $I_\lambda$  é limitado inferiormente.

Como  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} I_\lambda(u) = \infty$ , então para todo  $n > 0$ , existe  $m > 0$ , tal que  $I_\lambda(u) \geq n$  para  $\|u\| \geq m$ .

Por outro lado, se  $\|u\| < n$ ,

$$\begin{aligned} -I_\lambda(u) &\leq |I_\lambda(u)| = \left| \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x) |u|^{p+1} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right| + \left| \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x) |u|^{q+1} dx \right| + \left| \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x) |u|^{p+1} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\lambda}{q+1} \max_\Omega |a| \int_\Omega |u|^{q+1} + \frac{1}{p+1} \max_\Omega |b| \int_\Omega |u|^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + c_1 \|u\|^{q+1} + c_2 \|u\|^{p+1} \leq \frac{1}{2} m^2 + c_1 m^{q+1} c_2 m^{p+1} = c, \end{aligned}$$

implicando em

$$-I_\lambda(u) \leq c,$$

ou seja,

$$I_\lambda(u) \geq -c.$$

Concluímos  $I_\lambda$  é limitado inferiormente em  $M(\lambda)$ . ■

### 2.2.3 Aplicação Fibrção

Já vimos no capítulo anterior que a variedade de Nehari está intimamente relacionada com o comportamento das funções da forma  $\varphi_u : t \rightarrow I_\lambda(tu) (t > 0)$ . Veremos agora a relação da variedade definida para o funcional  $I_\lambda$  com a aplicação fibração.

Se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned}\varphi_u(t) &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx, \\ \varphi'_u(t) &= t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \quad e \\ \varphi''_u(t) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda q t^{q-1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - p t^{p-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.\end{aligned}$$

A proposição abaixo relaciona a variedade de Nehari e a aplicação fibração.

**Proposição 2.2.** *Seja  $\varphi_u$  a aplicação definida acima e  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , então*

(i)  $u \in M(\lambda)$  se, e somente se,  $\varphi'_u(1) = 0$ .

(ii) De modo mais geral,  $tu \in M(\lambda)$  se, e somente se,  $\varphi'_u(t) = 0$ .

**Prova:** Segue de maneira análoga à proposição 1.2.

Assim, os elementos em  $M(\lambda)$ , correspondem aos pontos estacionários da aplicação fibração. Dessa forma, iremos subdividir  $M(\lambda)$  em subconjuntos, como foi feito anteriormente. Para cada  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  fixada, o número 1 é um ponto crítico de  $\varphi_u$ , ou seja, é um ponto de mínimo local, um ponto de máximo local ou um ponto de inflexão e assim definimos os subconjuntos de  $M(\lambda)$ :

$$M^+(\lambda) = \{u \in M(\lambda); \varphi''_u(1) > 0\}$$

$$M^-(\lambda) = \{u \in M(\lambda); \varphi''_u(1) < 0\}$$

$$M^0(\lambda) = \{u \in M(\lambda); \varphi''_u(1) = 0\}$$

**Observação 2.2.** *Note que se  $u \in M(\lambda)$ , isto é,  $\varphi'_u(1) = 0$ , então*

$$\begin{aligned}\varphi''_u(1) &= (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \\ &= (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx.\end{aligned}\tag{2.1}$$

**Lema 2.1.** *Suponha que  $u_0$  é um mínimo ou máximo local para  $I_\lambda$  em  $M(\lambda)$ , então se  $u_0$  não pertence a  $M^0(\lambda)$ ,  $u_0$  é um ponto crítico de  $I_\lambda$ .*

**Prova:** Segue de maneira análoga ao lema 1.1.

## 2.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO FIBRAÇÃO

### 2.3.1 Descrição da função $m_u$

Nesta parte do trabalho, veremos que a natureza essencial da aplicação fibração  $\varphi_u$  é determinada pelo sinal de  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx$  e de  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx$ .

Para isso consideremos a função

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx; \quad t > 0 \quad (2.2)$$

**Observação 2.3.** *Note que, para  $t > 0$ ,  $tu \in M(\lambda)$  se, e somente se,  $t$  é solução de*

$$m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx. \quad (2.3)$$

De fato, substituindo (2.2) em (2.3), temos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx &= t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx, \\ 0 &= t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $t^{q+1}$

$$0 = t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

ou equivalentemente

$$I'_{\lambda}(tu)tu = 0.$$

Logo,

$$tu \in M(\lambda).$$

Derivando (2.2) temos também que

$$m'_u(t) = (1-q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \quad (2.4)$$

Vamos agora analisar o comportamento de  $m_u$  para dois casos.

(i) Quando  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$ ,  $t \geq 0$  e  $0 < q < 1 < p$ , então  $m_u$  é uma função estritamente crescente.

De fato, para  $t > 0$  então

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0,$$

sempre que  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$  e  $0 < q < 1 < p$ . Assim,  $m_u$  tem o gráfico como na figura 9.

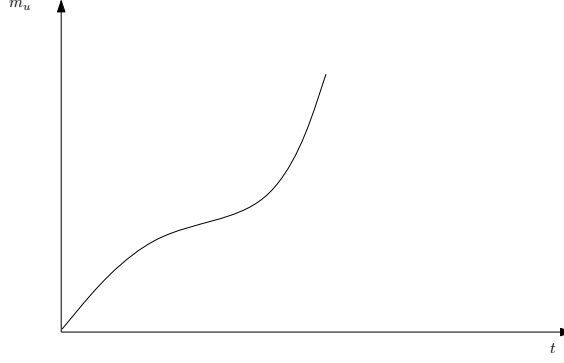


Figura 9: Possível forma de  $m_u$  quando  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$

(ii) Quando  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$ ,  $t > 0$  e  $0 < q < 1 < p$ , então  $m_u$  é uma função crescente e depois decrescente com um único ponto crítico.

De fato, fazendo  $c_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $c_2 = \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$ , por (2.2) sabemos que

$$m_u(t) = t^{1-q}c_1 - t^{p-q}c_2,$$

onde  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$ .

Derivando a expressão acima, temos

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q}c_1 - (p - q)t^{p-q-1}c_2.$$

Seja

$$m'_u(t) = t^{-q}c_3 - t^{p-q-1}c_4 \tag{2.5}$$

onde  $(1 - q)c_1 = c_3 > 0$  e  $(p - q)c_2 = c_4 > 0$ .

Queremos encontrar os intervalos onde a função  $m_u$  é crescente, onde ela é decrescente e saber se esta função tem pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão.

Fazendo  $m'_u(t) = 0$

$$t^{-q}c_3 = t^{p-q-1}c_4 \Rightarrow \frac{c_3}{c_4} = t^{p-1},$$

e assim,  $t = t_0 = \left(\frac{c_3}{c_4}\right)^{\frac{1}{p-1}}$  é o único ponto crítico de  $m_u$ .



(a) Para

$$t < t_0 = \left( \frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad (2.6)$$

temos

$$\frac{1}{t^q} > \left( \frac{c_4}{c_3} \right)^{\frac{q}{p-1}}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por  $c_3$ ,

$$\frac{c_3}{t^q} > c_3 \left( \frac{c_4}{c_3} \right)^{\frac{q}{p-1}}. \quad (2.7)$$

De (2.6) obtemos

$$t^{p-q-1} < \left( \frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{p-q-1}{p-1}},$$

multiplicando esta última por  $-c_4$

$$-c_4 t^{p-q-1} > -c_4^{\frac{q}{p-1}} c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7), (2.8) em (2.5)

$$\begin{aligned} m'_u(t) &= t^{-q} c_3 - t^{p-q-1} c_4 > c_3 \left( \frac{c_4}{c_3} \right)^{\frac{q}{p-1}} - c_4^{\frac{q}{p-1}} c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \\ &\geq c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} c_4^{\frac{q}{p-1}} - c_4^{\frac{q}{p-1}} c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} = 0, \end{aligned}$$

logo, para  $t < t_0$ , temos que  $m'_u(t) > 0$  e portanto  $m_u$  é crescente em  $(0, t_0)$ .

(b) Para

$$t > t_0 = \left( \frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad (2.9)$$

temos

$$\frac{1}{t^q} < \left( \frac{c_4}{c_3} \right)^{\frac{q}{p-1}}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por  $c_3$ , vem

$$\frac{c_3}{t^q} < c_3 \left( \frac{c_4}{c_3} \right)^{\frac{q}{p-1}}. \quad (2.10)$$

De (2.9), segue

$$t^{p-q-1} > \left( \frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{p-q-1}{p-1}}.$$

Multiplicando esta última por  $-c_4$ , ficamos com

$$-c_4 t^{p-q-1} < -c_4^{\frac{q}{p-1}} c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}}. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10), (2.11) em (2.5)

$$\begin{aligned} m'_u(t) &= t^{-q} c_3 - t^{p-q-1} c_4 < c_3 \left( \frac{c_4}{c_3} \right)^{\frac{q}{p-1}} - c_4^{\frac{q}{p-1}} c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \\ &\leq c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} c_4^{\frac{q}{p-1}} - c_4^{\frac{q}{p-1}} c_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} = 0, \end{aligned}$$

logo, para  $t > t_0$ , concluímos que  $m'_u(t) \leq 0$  e portanto  $m_u$  é decrescente em  $(t_0, +\infty)$ .

Em suma:

$$\begin{cases} m'_u(t) > 0 & \text{se } t < t_0 \\ m'_u(t) < 0 & \text{se } t > t_0, \end{cases}$$

e observando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty,$$

podemos concluir que  $m_u$  tem gráfico como na figura 10.

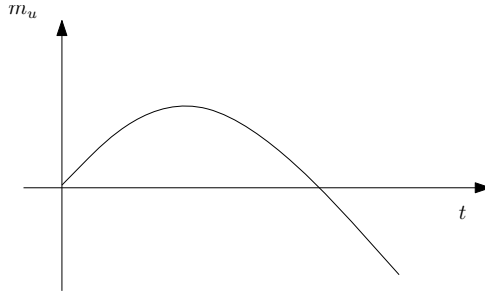


Figura 10: Possível forma de  $m_u$  quando  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$

**Observação 2.4.** É importante observar que, se  $tu \in M(\lambda)$ , por (2.1) e (2.2) temos

$$\varphi''_{tu}(1) = t^{q+2} m'_u(t).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \varphi''_{tu}(1) &= (1-q)t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \\ &= t^{q+2} \left( (1-q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right) \\ &= t^{q+2} m'_u(t). \end{aligned}$$

Esta observação é fundamental, pois se conhecermos o sinal de  $m'_u(t)$ , conheceremos

o sinal de  $\varphi''_{tu}(t)$ , e assim poderemos saber se  $\varphi_{tu}$  tem um ponto de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

Resumindo:

$$\begin{cases} tu \in M^+(\lambda), & \text{se } m'_u(t) > 0 \\ tu \in M^-(\lambda), & \text{se } m'_u(t) < 0. \end{cases}$$

### 2.3.2 Descrição da função $\varphi_u$

Veamos agora a descrição da natureza da aplicação fibração para todos os possíveis sinais de  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx$  e de  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx$ .

(i) Quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$ .

Relembrando que

$$\varphi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

assim

$$\varphi'_u(t) > 0,$$

pois  $t > 0$ , logo,  $\varphi_u$  é crescente e como  $\varphi'_u(t) > 0$  pela proposição 2.2 concluímos que  $tu \notin M(\lambda)$ . E o gráfico  $\varphi_u$  tem uma forma mostrada na figura 11.

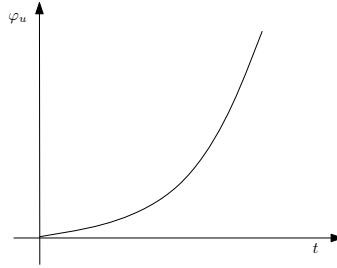


Figura 11: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$

(ii) Para  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$ .

Relembrando que

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

e

$$m'_u(t) = (1-q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

logo,

$$m'_u(t) > 0,$$

pois  $t > 0$  e  $0 < q < 1 < p$ . Desse modo,  $m_u$  é uma função crescente e observando que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \infty.$$

Concluimos que o seu gráfico tem a forma como já mostrado na figura 9.

Vamos mostrar que a equação (2.3) tem um única solução.

De fato, como  $m_u$  é contínua e  $\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0$  para  $t_1$  suficientemente pequeno temos

$$m_u(t_1) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx,$$

e como  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \infty$ , existe  $t_2$  suficientemente grande tal que

$$m_u(t_2) > \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx.$$

Sendo  $m_u$  uma função contínua com

$$m_u(t_1) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx < m_u(t_2),$$

definimos  $m_u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  e pelo teorema do valor intermediário existe  $t_u \in (t_1, t_2)$ , tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx.$$

Como  $m_u$  é uma função estritamente crescente, concluimos que  $t_u$  é único, ou seja, a equação  $m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$  tem única solução.

Desta forma, existe exatamente uma única solução de (2.3).  $\square$

Agora vamos mostrar que  $t_u u \in M(\lambda)$ .

De fato, como  $m_u$  tem uma única solução, substituindo (2.3) em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx &= t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx, \\ 0 &= t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $t_u^{q+1}$ , segue

$$t_u^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_u^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t_u^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0,$$

o que é o mesmo que  $I'_{\lambda}(t_u u)t_u u = 0$  e conseqüentemente  $t_u u \in M(\lambda)$ .  $\square$

Sendo  $t_u u \in M(\lambda)$ ,  $m'_u(t_u) > 0$  e  $t_u > 0$ , podemos afirmar que

$$\varphi''_{t_u u}(1) = t_u^{q+2} m'_u(t_u) > 0$$

isto é,  $t_u u \in M^+(\lambda)$ .

Note também que  $\varphi'_u(t_u) = 0$ , pois  $t_u - \in M(\lambda)$ , ou seja, a aplicação  $\varphi_u$  tem um único ponto crítico em  $t = t_u$  que é um ponto de mínimo local, e além disso, mais especificamente quando  $t \rightarrow 0$  a função  $\varphi_u$  se aproxima do zero, por valores negativos.

De fato,

$$\varphi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

e colocando  $t^{q+1}$  em evidência, obtemos

$$\varphi_u(t) = t^{q+1} \left( \frac{t^{1-q}}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{t^{p-q}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right).$$

Lembrando que  $0 < q < 1 < p$ , vemos pelas duas equações acima que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_u(t) = \infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_u(t) = 0.$$

Vamos supor por absurdo que  $\varphi_u(t) > 0$  para valores pequenos de  $t$ , logo,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > \frac{\lambda t^{(q+1)-2}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx + \frac{t^{(p+1)-2}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

pois  $t^2 > 0$ . Passando ao limite quando  $t \rightarrow 0$  a desigualdade acima, obtemos  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq +\infty$ , o que é um absurdo já que  $u \in L^2(\Omega)$ . Logo, para valores pequenos de  $t$ ,  $\varphi_u$  se aproxima do zero por valores negativos.

Do que foi observado acima,  $\varphi_u$  tem seu gráfico como mostrado na figura 12.

(iii) Quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$ .

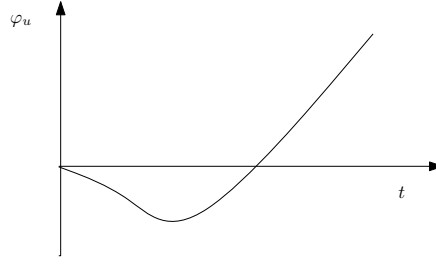


Figura 12: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$

Como  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$ , provamos no início desta seção que

$$\begin{cases} m'_u(t) > 0 & \text{se } t < t_0 \\ m'_u(t) < 0 & \text{se } t > t_0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty.$$

Assim, como pode ser observado no gráfico 10, para  $t > t_0$  temos  $m'_u(t) < 0$ , ou seja, a função  $m_u$  é decrescente à direita de  $t_0$ , e provamos também que  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty$ .

Nesse item (iii) estamos considerando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ , então

$$\lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0.$$

Sendo  $m_u$  contínua, existe um único  $t_u > 0$ , tal que  $m_u(t_u) = \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ .

Agora vamos mostrar que  $t_u u \in M(\lambda)$ .

De fato, como  $m_u$  tem uma única solução, substituindo (2.3) em (2.2), temos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx &= t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \\ 0 &= t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $t_u^{q+1}$ , ficamos com

$$t_u^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_u^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx - t_u^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx = 0,$$

o que é o mesmo que  $I'_\lambda(t_u u)t_u u = 0$  e conseqüentemente  $t_u u \in M(\lambda)$ .  $\square$

Como  $t_u u \in M(\lambda)$ ,  $m'_u(t_u) < 0$  e  $t > 0$ , podemos dizer que

$$\varphi''_{t_u u}(1) = t^{q+2} m'_u(t_u) < 0,$$

isto é,  $t_u u \in M^-(\lambda)$ .

Note também que  $\varphi'_u(t_u) = 0$ , pois  $t_u u \in M(\lambda)$ , ou seja, a aplicação  $\varphi_u$  tem um único ponto crítico  $t = t_u$  que neste caso, é um ponto de máximo local. Além disso, podemos ver que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_u(t) = -\infty$$

mais especificamente, quando  $t \rightarrow 0$  a função  $\varphi_u$  se aproxima do zero, por valores positivos.

Do que foi observado acima,  $\varphi_u$  tem seu gráfico como mostrado na figura 13.

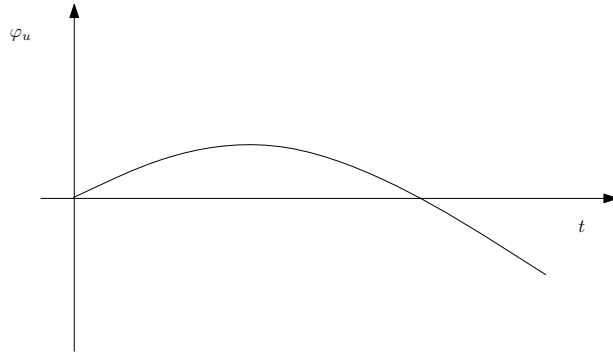


Figura 13: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$

(iv) Quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$ .

Neste caso, a situação é um pouco diferente. Como  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$ , provamos no início desta seção que

$$\begin{cases} m'_u(t) > 0 & \text{se } t < t_0 \\ m'_u(t) < 0 & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty.$$

Assim  $m_u$  tem o gráfico como na figura 10.

Para valores de  $\lambda > 0$  suficientemente grandes a equação (2.3) não tem solução e daí  $\varphi_u$  não tem ponto crítico para todo  $t > 0$ .

De fato, sendo  $\lambda > 0$  suficientemente grande, podemos tomar  $\lambda^* \leq \lambda$ , de forma que

$$m_u(t_0) = \max_{t > 0} m_u(t) < \lambda^* \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx, \quad \forall \lambda^* \leq \lambda.$$

Portanto a equação  $m_u$  não tem solução para todo  $\lambda^* \leq \lambda$ , pois

$$m_u(t) < m_u(t_0) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx, \forall \lambda^* \leq \lambda.$$

Com isso, para tais valores de  $\lambda > 0$  podemos afirmar que

$$\varphi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx < 0,$$

pois quando  $\lambda > 0$  é suficientemente grande o termo  $-\lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$  da desigualdade acima fica "muito negativo".

Neste caso  $\varphi_u$  é uma função decrescente, e como  $\varphi'_u(t) < 0$ , para todo  $t > 0$ , segue que  $t_u U \notin M(\lambda)$  pela proposição 2.2. Desse modo, nenhum múltiplo de  $u$  está em  $M(\lambda)$ .

Por outro lado, se  $\lambda > 0$  é suficientemente pequeno, existem exatamente duas soluções  $t_1(u) < t_2(u)$  para a equação (2.3), com  $m'_u(t_{1u}) > 0$  e  $m'_u(t_{2u}) < 0$ , logo,  $\varphi_u$  tem exatamente dois pontos críticos, um mínimo local em  $t = t_{1u}$  e um máximo local em  $t = t_{2u}$  e pela proposição 2.2 existem exatamente dois múltiplos de  $u$  em  $M(\lambda)$ , a saber  $tu = t_{1u}u \in M^+(\lambda)$  e  $tu = t_{2u}u \in M^-(\lambda)$ . Além disso  $\varphi_u$  é decrescente em  $(0, t_{1u})$ , crescente em  $(t_{1u}, t_{2u})$  e decrescente em  $(t_{2u}, +\infty)$ . Desse modo podemos construir um esboço do gráfico de  $\varphi$ , como na figura 14.

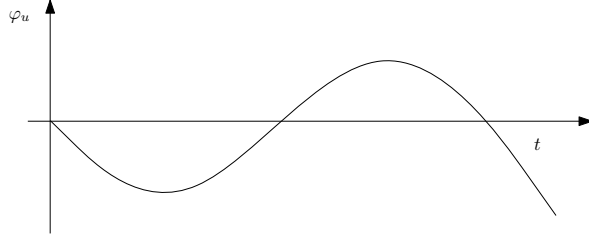


Figura 14: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

**Lema 2.2.** *Existe  $\hat{\lambda} > 0$  e  $\bar{t} > 0$ , tal que quando  $\lambda < \hat{\lambda}$ ,  $\varphi_u(\bar{t})$  assume valores positivos para toda  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  (sendo  $u$  não nula).*

**Prova:** Relembrando que

$$\varphi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

colocando  $t^{p+1}$  em evidência, temos

$$\varphi_u(t) = t^{p+1} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right).$$



(a) Se  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$ , então para  $t$  suficientemente grande  $\varphi_u(t) \geq 0$ , ou seja, existe  $\hat{t}$  tal que, para todo  $t > \hat{t}$ ,  $\varphi_u(t) \geq 0$ .

(b) Se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$ , definimos

$$g_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

como uma parte da função  $\varphi_u$ . Derivando a aplicação acima

$$g'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Vamos mostrar que o valor máximo de  $g_u$  é assumido para  $t > 0$ . Fazendo  $g'_u(t) = 0$ , ficamos com

$$t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

e,

$$t^{p-1} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx},$$

então,

$$t = \hat{t} = \left( \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

é ponto crítico de  $g_u$ .

Vamos mostrar que  $\hat{t}$  é ponto de máximo. Segue que

$$\begin{aligned} g''_u(\hat{t}) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - p\hat{t}^{p-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - p \left( \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right) \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \\ &= (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < 0, \end{aligned}$$

pois  $p > 1$ . Logo,  $\hat{t}$  é ponto de máximo para  $g_u$ .

Substituindo  $\hat{t}$  em  $g_u(t)$  encontramos

$$g_u(\hat{t}) = \left( \frac{p-1}{2(p+1)} \right) \left[ \frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx)^2} \right]^{\frac{1}{p-1}}. \quad (2.12)$$

Além disso,

$$\frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx)^2} \geq \frac{1}{S_{p+1}^{2(p+1)}},$$

onde  $S_{p+1}$  denota a constante de Sobolev da imersão contínua,  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$  (con-

forme Teorema 3.9).

Consequentemente,

$$g_u(t) \geq \frac{p-1}{2(p+1)} \left( \frac{1}{\|b^+\|_\infty^2 S_{p+1}^{2(p+1)}} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \delta,$$

onde  $\delta$  não depende de  $u$  e  $b^+(x) = \max\{b(x), 0\}$ .

Mostraremos agora que existe  $\hat{\lambda} > 0$  tal que  $\varphi_u(t) > 0$ , para todo  $\lambda < \hat{\lambda}$ , isto é,

$$\varphi_u(\hat{t}) = \frac{\hat{t}^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{\hat{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0,$$

ou seja, veremos que

$$g_u(\hat{t}) - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx > 0, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}, \quad \text{sempre que } \lambda < \hat{\lambda}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx &\leq \frac{\hat{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_\infty \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \\ &\leq \frac{\hat{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_\infty |u|_{q+1}^{q+1} \leq \frac{\hat{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} \|u\|^{q+1}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade provém da desigualdade da imersão contínua  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$  e  $S^{q+1}$  denota a constante de Sobolev desta imersão (ver Teorema 3.8).

Substituindo  $\hat{t} = \left( \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}$  na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx &\leq \frac{1}{q+1} \|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} \left[ \left( \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]^{q+1} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= \frac{1}{q+1} \|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} \left( \frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^2} \right)^{\frac{q+1}{2(p-1)}}. \end{aligned}$$

Disso e de (2.12) vem que

$$\begin{aligned} \frac{\hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx &\leq \frac{1}{q+1} \|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} \left( \frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^2} \right)^{\frac{q+1}{2(p-1)}} \\ &\leq \frac{1}{q+1} \|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} g_u(\hat{t})^{\frac{q+1}{2}} \left( \frac{2(p+1)}{p-1} \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= c g_u(\hat{t})^{\frac{q+1}{2}}, \end{aligned}$$

com

$$c = \frac{1}{q+1} \|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} \left( \frac{2(p+1)}{p-1} \right)^{\frac{q+1}{2}}.$$

Temos também,

$$\begin{aligned} \varphi_u(\hat{t}) &= g_u(\hat{t}) - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x) |u|^{q+1} dx \\ &\geq g_u(\hat{t}) - \lambda c g_u(\hat{t})^{\frac{q+1}{2}} \\ &\geq g_u(\hat{t})^{\frac{q+1}{2}} (g_u(\hat{t})^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c), \end{aligned}$$

e como  $g_u(\hat{t}) \leq \delta$ , segue que

$$\varphi_u(\hat{t}) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} (\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c).$$

Assim, tomando  $\lambda < \hat{\lambda} = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c}$ , temos que para todo  $\lambda < \hat{\lambda}$

$$\varphi_u(\hat{t}) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} (\delta^{\frac{1-q}{2}} - \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c} c) = \delta^{\frac{q+1}{2}} \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} = \frac{\delta}{2} > 0.$$

■

O lema acima garante que quando  $\lambda > 0$  é suficientemente pequeno, o gráfico de  $\varphi_u$  deve ser como mostrado na figura 14, mais especificamente,  $\varphi_u \rightarrow 0$  (quando  $t \rightarrow 0$ ), ou seja,  $\varphi_u$  se aproxima de zero por valores negativos, ou ainda,  $\varphi_u$  "sai da origem por baixo do eixo  $t$ ".

De fato, vamos supor por absurdo que  $\varphi_u(t) > 0$  para valores pequenos de  $t$ , assim

$$\varphi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega b(x) |u|^{p+1} dx > 0,$$

logo,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx > \frac{\lambda t^{(q+1)-2}}{q+1} \int_\Omega a(x) |u|^{q+1} dx + \frac{t^{(p+1)-2}}{p+1} \int_\Omega b(x) |u|^{p+1} dx,$$

pois  $t^2 > 0$ . Passando o limite quando  $t \rightarrow 0$  na desigualdade acima temos uma contradição, já que  $(q+1) < 2$  faz com que  $\frac{t^{p+1}}{t^2} \rightarrow +\infty$ .

Este lema garante que  $\varphi_u$  assume um valor máximo, por outro lado  $\varphi_u$  é contínua e se aproxima de zero por valores negativos, assim podemos garantir que  $\varphi_u$  corta o eixo  $t$  duas vezes de modo que devem existir exatamente dois pontos críticos (pois  $\varphi_u \rightarrow -\infty$ ; quando  $t \rightarrow \infty$ ), um de mínimo local em  $t = t_1(u)$  e um de máximo local em  $t = t_2(u)$ .

Contudo, quando  $\lambda \leq \hat{\lambda}$ , obtivemos um completo conhecimento do número de pontos críticos da  $\varphi_u$ , dos intervalos em que  $\varphi_u$  é crescente ou decrescente e dos múltiplos de

$u$  que estão em  $M(\lambda)$  para cada escolha possível dos sinais de  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$ .

Em particular temos o resultado a seguir.

**Corolário 3.**  $M^0(\lambda) = \emptyset$  quando  $\lambda \leq \hat{\lambda}$ .

**Prova:** Para  $\lambda \leq \hat{\lambda}$ , conhecemos completamente a aplicação fibração  $\varphi_u$ , e pela análise feita nos itens (i), (ii) e (iii) e (iv), a aplicação fibração  $\varphi_u$  não tem pontos de inflexão. Logo, não há pontos de inflexão e  $M^0(\lambda) = \emptyset$ . ■

**Corolário 4.** Se  $\lambda \leq \hat{\lambda}$ , então existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $I_{\lambda}(u) \geq \delta_1$ ,  $\forall u \in M^-(\lambda)$ .

**Prova:** Seja  $u \in M^-(\lambda)$ , assim  $\varphi_u$  tem um máximo global em  $t = 1$ . Além disso, conforme os casos estudados nessa seção e, em particular, dos casos (iii) e (iv), temos que  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$ . Assim

$$I_{\lambda}(u) = \varphi_u(1) \geq \varphi_u(\bar{t}) \geq g_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} (g_u(\bar{t})^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} (\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c).$$

Escolhendo  $\hat{\lambda} = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c}$ , ficamos com

$$I_{\lambda}(u) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} = \frac{\delta}{2} > 0, \forall \lambda \leq \hat{\lambda}.$$

■

## 2.4 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NÃO NEGATIVAS

Nesta seção usaremos a completa descrição da aplicação fibração feita na seção anterior para demonstrar de forma simples a existência de duas soluções não negativas para o problema elíptico ( $P_2$ ).

### 2.4.1 Existência de minimizadores para $I_{\lambda}$

**Teorema 2.1.** Se  $\lambda < \hat{\lambda}$  existe  $u \in M^+(\lambda)$  tal que  $I_{\lambda}(u) = \min_{v \in M^+(\lambda)} I_{\lambda}(v)$ .

**Prova:** Como  $I_{\lambda}$  é limitado inferiormente em  $M(\lambda)$  e  $M^+(\lambda) \subset M(\lambda)$ , concluímos que  $I_{\lambda}$  é limitado inferiormente em  $M^+(\lambda)$  e segue que o conjunto  $\{I_{\lambda}(u); u \in M^+(\lambda)\}$  tem ínfimo.

Pela definição de ínfimo, existe uma sequência minimizante  $\{u_n\} \subset M^+(\lambda)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M^+(\lambda)} I_\lambda(u).$$

Pela proposição 2.1, sabemos que  $I_\lambda$  é coercivo e  $I_\lambda(u_n) \geq \|u_n\|^2(C_1 - C_3\|u_n\|^{(q+1)-2})$ .

Levando-se em conta que  $I_\lambda(u_n) \rightarrow \inf_{u \in M^+(\lambda)} I_\lambda(u)$ , concluímos que  $I_\lambda(u_n)$  é convergente, logo, é limitada. Contudo concluímos que  $\{u_n\}$  é limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , e por consequência do teorema das Imersões de Rellich 3.13, existe uma subsequência ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^r, \text{ para todo } 1 < r < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Vamos mostrar que  $u_n \rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e daí concluiremos que

$$I_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M^+(\lambda)} I_\lambda(u).$$

Para isso, vamos supor por absurdo que  $u_n \not\rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Já vimos que para todo  $u \in M^+(\lambda)$ ,  $\varphi_u''(1) > 0$ , e como  $u_n \in M^+(\lambda)$ , segue que  $\varphi_{u_n}(1)'' > 0$ , ou seja,

$$\varphi_{u_n}''(1) = (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx > 0$$

logo,

$$\lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx = (p-1) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \varphi_{u_n}''(1) > 0. \quad (2.13)$$

Como  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , então segue do Teorema 3.5

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2 \quad (2.14)$$

ou seja,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

Contudo, passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ , em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx &= \liminf_{n \rightarrow \infty} [(p-1) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \varphi''_{u_n}(1)] \\ &\geq (p-1) \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \varphi''_u(1) > 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada 3.3, obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx,$$

daí,

$$\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx > 0.$$

Como temos duas possibilidades de sinal para  $\int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx > 0$  devemos analisar dois casos a seguir.

(a) Se  $\int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx \leq 0$ , então  $\varphi_{u_0}$  tem o gráfico como na figura 15.

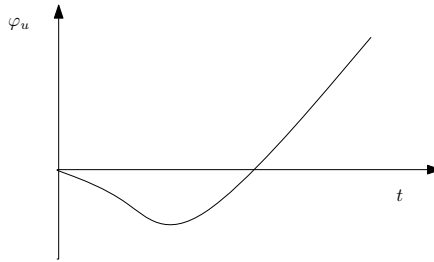


Figura 15: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$

(b) Se  $\int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx > 0$  então  $\varphi_{u_0}$  tem o gráfico como na figura 16.

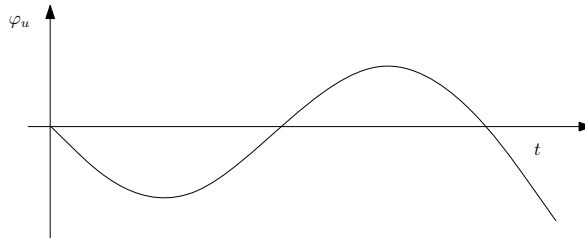


Figura 16: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$

Em ambos os casos observamos que existe  $t_0 > 0$  tal que  $t_0 u_0 \in M_{\lambda}^+(\Omega)$ , onde  $\varphi_{u_0}$  é decrescente em  $(0, t_0)$ , com  $\varphi'_{u_0}(t_0) = 0$ .

Note que  $u_n \rightharpoonup u_0$  e por (2.14)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2$  e também como  $u_n \rightharpoonup u_0$

em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos  $\|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que

$$\liminf \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 \geq \delta > 0.$$

Daí vem que para  $n$  suficientemente grande  $\|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2 + \delta$  e para tais valores de  $n$  devemos ter

$$\begin{aligned} \varphi'_{u_n}(t_0) &= t_0 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda t_0^q \int_{\Omega} a(x) |u_n|^{q+1} dx - t_0^p \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{p+1} dx \\ &\geq t_0 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda t_0^q \int_{\Omega} a(x) |u_n|^{q+1} dx - t_0^p \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{p+1} dx + t_0 \delta \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $t_0 \delta > 0$ .

Passando ao limite em (2.15), quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\varphi'_{u_n}(t_0) \geq \varphi'_{u_0}(t_0) + t_0 \delta = 0 + t_0 \delta > 0.$$

Como  $u_n \in M^+(\lambda)$ , devemos ter  $\varphi'_{u_n}(t) < 0, t \in (0, 1)$  e  $\varphi'_{u_n}(1) = 0, \forall n$ .

Por outro lado, temos  $\varphi'_{u_n}(t_0) > 0$  para  $n$  suficientemente grande, e conseqüentemente,  $t_0 > 1$ , e pelos gráficos (a) e (b),  $\varphi_{u_0}$  é decrescente em  $(0, t_0)$ , daí

$$I_{\lambda}(t_0 u_0) < I_{\lambda}(u_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda}(u_n) = \inf_{u \in M^+(\lambda)} J_{\lambda}(u),$$

o que é um absurdo pois, encontramos  $t_0 u_0 \in M^+(\lambda)$  tal que

$$I_{\lambda}(t_0 u_0) < \inf_{u \in M^+(\lambda)} I_{\lambda}(u).$$

Logo,  $u_n \rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e assim,

$$I_{\lambda}(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda}(u_n) = \inf_{u \in M^+(\lambda)} I_{\lambda}(u).$$

Portanto,  $u_0$  é um mínimo de  $J_{\lambda}$  sobre  $M^+(\lambda)$ . ■

**Teorema 2.2.** *Se  $\lambda < \hat{\lambda}$  existe  $u \in M^-(\lambda)$  tal que  $I_{\lambda}(u) = \min_{v \in M^-(\lambda)} I_{\lambda}(v)$*

**Prova:** Pelo colorário 4

$$I_{\lambda}(u) \geq \delta_1, \quad \forall u \in M^-(\lambda)$$

e,

$$\inf_{u \in M^-(\lambda)} I_\lambda(u) \geq \delta_1 > 0.$$

Pela definição de ínfimo existe uma sequência minimizante  $\{u_n\} \subset M^-(\lambda)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M^-(\lambda)} I_\lambda(u).$$

Pela proposição 2.1 sabemos que  $I_\lambda$  é limitado inferiormente e portanto a sequência  $\{u_n\}$  é limitada em  $M^-(\lambda)$ . Desse modo, em consequência do Teorema das Imersões de Rellich 3.13, existe uma subsequência ainda denotada por  $\{u_n\}$ , tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^r, \text{ para } 1 < r < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Vamos mostrar que  $u_n \rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e daí concluiremos que

$$I_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M(\lambda)^-(\lambda)} I_\lambda(u).$$

Já vimos que para todo  $u \in M^-(\lambda)$ ,  $\varphi_u''(1) < 0$ , e como  $u_n \in M^-(\lambda)$ , temos que  $\varphi_{u_n}'' < 0$ , ou seja,

$$\varphi_{u_n}''(1) = (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda(p-q) \int_{\Omega} b(x)|u_n|^{p+1} dx > 0,$$

isto é,

$$(p-q) \int_{\Omega} b(x)|u_n|^{p+1} dx = (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \varphi_{u_n}''(1).$$

Como  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  então segue do Teorema 3.5 que

$$\liminf \|u_n\|^2 > \|u_0\|^2, \tag{2.16}$$

e,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$$

logo,

$$\begin{aligned} (p-q) \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \varphi_{u_0}''(1) \\ &\geq (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \varphi_{u_0}''(1). \end{aligned}$$



Substituindo em (2.16), concluímos

$$\int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1}dx > 0.$$

Como temos duas possibilidades de sinal para  $\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1}dx > 0$  devemos analisar os dois casos que seguem.

(a) Se  $\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{p+1}dx \leq 0$  então  $\varphi_{u_0}$  tem o gráfico como visto na figura 17.

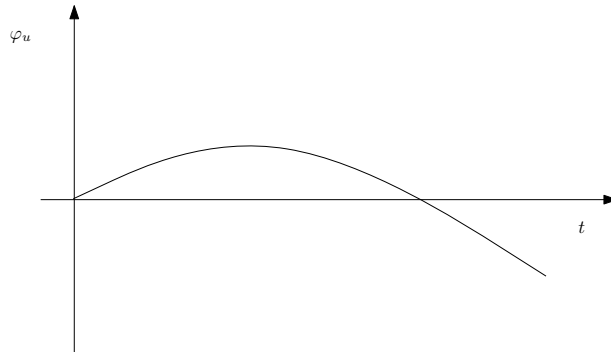


Figura 17: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

(b) Se  $\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{p+1}dx > 0$  então  $\varphi_{u_0}$  tem o gráfico como visto na figura 18.

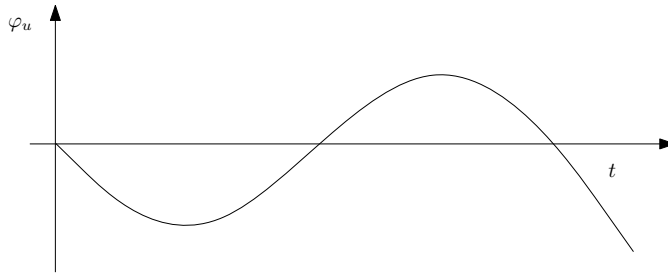


Figura 18: Possível forma de  $\varphi_u$  quando  $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$  e  $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

Em ambos os casos observamos que existe  $\hat{t}_0 > 0$  tal que  $\hat{t}_0 u_0 \in M^-(\lambda)$ .

Novamente vamos supor por absurdo que  $u_n \not\rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , de forma que  $u_{n_j} \not\rightarrow u_0$  para toda subsequência  $\{u_{n_j}\}$  de  $\{u_n\}$ , pois caso contrário, ou seja, se alguma subsequência  $u_{n_j} \rightarrow u_0$ , já teríamos o resultado. Desta forma podemos considerar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_j}|^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

Por outro lado, como  $\varphi_{u_n}$  tem um máximo global em 1, temos

$$\varphi_{u_0}(1) \geq \varphi_{u_0}(s), \quad \forall s > 0,$$

então

$$I_\lambda(u_0) \geq I_\lambda(su_0), \quad \forall s > 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_\lambda(\widehat{t}u_0) &= \frac{\widehat{t}}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda \widehat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - \frac{\widehat{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx \\ &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\widehat{t}}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_j}|^2 dx - \frac{\lambda \widehat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u_{n_j}|^{q+1} dx - \frac{\widehat{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u_{n_j}|^{p+1} dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(\widehat{t}u_{n_j}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_{n_j}) = \inf_{u \in M(\lambda)^-(\lambda)} I_\lambda(u), \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois, encontramos  $\widehat{t}u_0 \in M^-(\lambda)$  tal que  $I_\lambda(\widehat{t}u_0) < \inf_{u \in M(\lambda)^-(\lambda)} I_\lambda(u)$ .

Logo,  $u_n \rightarrow u_0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e assim,

$$I_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M(\lambda)^-(\lambda)} I_\lambda(u).$$

Portanto,  $u_0$  é um mínimo de  $I_\lambda$  sobre  $M^-(\lambda)$ . ■

## 2.4.2 Existência de soluções para um problema elíptico (P)

**Corolário 5.** *A equação  $(P_2)$  tem pelo menos duas soluções não negativas quando  $0 < \lambda < \widehat{\lambda}$ .*

**Prova:** Pelos Teoremas 2.1 e 2.2 existem  $u_1 \in M^+(\lambda)$  e  $u_2 \in M^-(\lambda)$ , tais que

$$I_\lambda(u_1) = \inf_{u \in M(\lambda)^+(\lambda)} I_\lambda(u)$$

e

$$I_\lambda(u_2) = \inf_{u \in M(\lambda)^-(\lambda)} I_\lambda(u).$$

Pelo lema 2.1,  $u_1$  e  $u_2$  são pontos críticos de  $I_\lambda$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  e portanto soluções fracas para o problema  $(P_2)$ .

Como  $I_\lambda(u_1) = I_\lambda(|u_1|)$  e  $I_\lambda(u_2) = I_\lambda(|u_2|)$ , então pelo Teorema ??, podemos consi-

derar  $u_1 \geq 0$  e  $u_2 \geq 0$ .

Finalmente, pelos resultados da seção 2.5 que tratam da teoria clássica de regularização de soluções fracas para o problema  $(P_2)$ , obtemos que  $u_1$  e  $u_2$  são soluções fortes para o problema elíptico considerado. ■

## 2.5 O FUNCIONAL $I_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$

A partir do Funcional de Euler  $I_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado ao problema elíptico  $(P_2)$  dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

queremos mostrar que ele é de classe  $\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

Tomando  $I_1, I_2, I_3 : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

$$I_2(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \quad \text{e}$$

$$I_3(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

podemos mostrar de maneira análoga ao que fizemos na seção (1.9) para o funcional  $I_\lambda$ , que existem as derivadas de Gateaux de  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , e que elas são contínuas. Assim concluímos que  $I_\lambda \in \mathcal{C}(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ .

## 3 RESULTADOS BÁSICOS

Neste apêndice enunciaremos e daremos referências para suas provas dos principais teoremas utilizados no nosso trabalho.

### 3.1 RESULTADOS DE GEOMETRIA RIEMANIANA

**Teorema 3.1.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável com  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$ ,  $m \geq n$ ,  $p \in N$ . Seja  $df(x)$  de classe  $n$  para todo  $x \in M$ , com  $f(x) = p$ . Então,  $f^{-1}(p)$  é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $m - n$ .*

Prova: cf. Jost (2011, lema 1.3.2, pag 10).

### 3.2 RESULTADOS DA TEORIA DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO

**Teorema 3.2.** *(Desigualdade de Hölder) Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^{p'}(\Omega)$ , com  $0 < p < +\infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Então  $fg \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Prova: cf. Brezis (2010, teo 4.6, pag 92).

**Teorema 3.3.** *(Teorema da Convergência Dominada) Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $L^1(\Omega)$ , satisfazendo:*

(a)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ;

(b) Existe  $g \in L^1(\Omega)$  tal que  $|f_n| \leq g$  q.t.p.  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Então  $f \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} f_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f dx$$

Prova:cf. Brezis (2010, teo4.2, pag 90).

### 3.3 DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

**Definição 2.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados, com  $x, z \in X$  e  $\phi : X \rightarrow Y$ . Dizemos que  $\phi$  é Gâteaux-diferenciável em  $x$  na direção  $z$ , se existir o limite*

$$D_u(x)z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \alpha z) - \phi(x)}{\alpha}$$

**Observação 3.1.** *O conceito de derivada de Gateaux não requer qualquer noção de convergência no espaço do domínio. Para assegurar que funções diferenciáveis sejam contínuas, introduziremos o conceito de derivada forte (que é a derivada de Fréchet).*

**Definição 3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados, e a aplicação  $\phi : X \rightarrow Y$ . Dizemos que  $\phi$  é Fréchet-diferenciável em  $x \in X$ , se existe um operador linear contínuo*

$d_\phi = X \rightarrow Y$ , dada por  $h \mapsto d_\phi(h)$  e tal que

$$d_\phi(x)h = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x+h) - \phi(x) - d_\phi(x)h\|_Y}{\|h\|_X}.$$

*Ele é chamado de diferencial de Fréchet de  $\phi$  em  $x$  com crescimento  $h$ .*

Como  $d_\phi(x) \in L(X, Y)$ , temos que se o diferencial de Fréchet existe, então existe também o diferencial de Gateaux, e ambos são iguais. Além disso, se  $\phi$  tem derivada de Fréchet em  $x$ , então  $\phi$  é contínua.

**Definição 4.** *Dizemos que o funcional  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  se a derivada de Fréchet de  $\phi$  existe e é contínua em  $X$ .*

**Proposição 3.1.** *Seja  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $A$  é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado  $X$ . Se  $\phi$  possui uma derivada de Gateaux contínua em  $A$ , então  $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$ .*

Prova:cf. Willem (1996, cap.1).

**Teorema 3.4.** *Seja  $(u_n)$  uma sequência em  $L^p(\Omega)$  e  $u \in L^p(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$ . Então existe uma subsequência  $(u_{n_k})$  tal que:*

(i)  $u_{n_k} \rightarrow u$  q.t.p. em  $\Omega$ ;

(ii)  $|u_{n_k}| \leq h(x)$ , para todo  $k$  natural e q.t.p. e com  $h \in L^p(\Omega)$ .

Prova:cf. Brezis (2010, teo 4.9, pg 94).

**Teorema 3.5.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado e  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

(i)  $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$  para todo  $f \in E^*$ ;

(ii) Se  $x_n \rightarrow x$  então  $x_n \rightharpoonup x$ ;

(iii) Se  $x_n \rightharpoonup x$ , então  $x_n$  é limitada e além disso

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Prova:cf. Brezis (2010, Prop 3.13, pg63).

### 3.4 RESULTADOS DA TEORIA CLÁSSICA DE EDP E DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

**Teorema 3.6.** *(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $J, F : X \rightarrow \mathbb{R}$  funcionais de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$  e  $M = \{x \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$  com  $F'(u) = 0$ , para todo  $u \in M$ . Se  $J$  é limitado inferiormente sobre  $M$  e existe  $u_0 \in M$  tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe  $\delta \in \mathbb{R}$  verificando

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0).$$

Prova:cf. Kavian (1993, prop 14.3, pg 55).

**Teorema 3.7.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  e  $f \in L^p(\Omega)$  com  $1 < p < \infty$ . Então existe uma única função  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova: cf. Gilbard e Trudinger (1983) .

**Teorema 3.8.** *(Teorema de Schauder) Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira suave e  $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ . Então existe  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ , solução do problema  $(P_1)$ .*

Além disso, existe  $C > 0$  (independente de  $u$ ) tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

e vale a seguinte afirmação

$$f \in C^{k;\alpha}(\Omega) \Rightarrow u \in C^{k+2;\alpha}(\Omega).$$

Prova: cf. Gilbard e Trudinger (1983)

**Teorema 3.9.** *Seja  $h \in C^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  e suponhamos que  $u \in C^\alpha(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  seja uma solução fraca do seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{se } x \in \Omega; \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

então  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ .

Prova: cf. Gilbard e Trudinger (1983)

**Teorema 3.10.** *Suponhamos  $\Omega = \mathbb{R}^N$  ou um domínio limitado com fronteira de classe  $C^1$  e sejam  $m \geq 1$  um inteiro e  $1 \leq p < \infty$ . Então*

$$\begin{aligned} \text{Se } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, & \text{ temos } W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}; \\ \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, & \text{ temos } W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, \infty); \\ \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0, & \text{ temos } W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

com injeções contínuas.

Prova: cf. Brezis (2010).

**Teorema 3.11.** *Suponhamos  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  e sejam  $m \geq 1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então para qualquer  $j \geq 0$  a imersão*

$$W^{j+m;p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j;\alpha}(\bar{\Omega}),$$

onde  $0 < \alpha < 1 - N/p$ , é compacta se  $m - 1 < N/p < m$ .

Prova: cf. Figueiredo, Gossez e Ubilla (2003, pag 103) .

**Teorema 3.12.** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com fronteira suave, as imersões*

$$H_0^1(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$$

são contínuas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3; \\ \infty, & \text{se } N = 1, 2. \end{cases}$$

e existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_{L^s} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Prova: cf. Brezis (2010)

**Teorema 3.13.** (Imersões de Rellich) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ , Suponhamos que  $r > N$ . Então vale a seguinte imersão compacta*

$$W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\mu}(\Omega),$$

para  $0 \leq \mu \leq 1 - \frac{N}{r}$ .

Prova: cf. Adams e Fournier (1975).

**Teorema 3.14.** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com fronteira suave, as imersões*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são compactas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{se } N \geq 3; \\ \infty & \text{se } N = 1, 2. \end{cases}$$

Prova: cf. Brezis (2010).

Uma consequência importante das imersões compactas é que se  $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$  e  $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  existe  $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_{n_j} \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega),$$

conforme em Brezis (2010).

**Teorema 3.15.** *Sejam  $1 \leq p \leq +\infty$  e  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^N$ . Então se  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  então*

$$|u| \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\nabla |u| = 1_{|u|>0} \nabla u - 1_{|u|<0} \nabla u$$



Prova: cf. Kavian (1993).

# ***REFERÊNCIAS***

- ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. F. Sobolev Spaces. *Academy Press*, 1975.
- ALVES, C. O. *Introdução às Equações Elípticas*. [S.l.], 2007.
- AMANN, H.; LOPEZ-GOMEZ, J. A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems. *J. Differential Equations*, v. 146, p. 336–374, 1998.
- BERESTYCKI, H.; CAPUZZO-DOLCETTA, I.; NIRENBERG, L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. *NoDEA: Nonlinear Differential Equations and Applications*, v. 2, n. 4, p. 553–572, 1995.
- BINDING, P. A.; DRÁBEK, P.; HUANG, Y. X. On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, p. 1–11, 1997.
- BINDING, P. A.; DRÁBEK, P.; HUANG, Y. X. Existence of multiple solutions of critical quasilinear elliptic Neumann problems. *Nonlinear Anal*, p. 613–629, 2000.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-New York. Math, 2010.
- BROWN, K. A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem. *J. Differential Equations*, p. 1–9, 2007.
- BROWN, K.; ZHANG, Y. The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sing changing weight function. *J Diferencial Equations*, p. 481–499, 2003.
- BROWN, K. J. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation involving a sublinear term. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 22, n. 4, p. 483–494, 2004.
- CHEN, K. J. On multiple solutions of concave e convexe nonlinearities in elliptic equation on  $\mathbb{R}^N$ . *Boundary Value Problems*, p. 1–19, 2009.
- DRABEK, P.; POHOZAEV, S. I. Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A*, p. 703–726, 1997.
- FIGUEIREDO, D. G.; GOSSEZ, J. P.; UBILLA, P. Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, p. 452–467, 2003.
- GILBARD, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, 1983.
- IL'YASOV, Y. On non-local existence results for elliptic operators with convex-concave nonlinearities. *Nonlinear Analysis*, n. 61, p. 211–236, 2005.

JOST, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. [S.l.: s.n.], 2011.

KAVIAN, O. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. *Springer-Verlag*, v. 13, 1993.

TOLAND, J. F. Asymptotic linearity and nonlinear eigenvalue problems. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Univ Press, v. 24, n. 1, p. 241–250, 1973.

WILLEM, M. Minimax theorems. *Springer*, 1996.

WU, T. F. Multiplicity results for a semilinear elliptic equation involving sign-changing weight function, to appear in Rocky Mountain. *J. Math*, p. 995–1011, 2009.