

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Departamento de Matemática

*Paulo Cesar Ignácio da Silva Filho*

*Aplicações de Campos de Jacobi aos Sistemas  
Dinâmicos*

Juiz de Fora - MG

2012

*Paulo Cesar Ignácio da Silva Filho*

*Aplicações de Campos de Jacobi aos Sistemas  
Dinâmicos*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Sistemas Dinâmicos.

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora - MG

2012

Silva Filho, Paulo César Ignácio.

Aplicações de Campos de Jacobi aos sistemas dinâmicos / Paulo César Ignácio Silva Filho. – 2012.

82 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática)—Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

1. Matemática. 2. Campos de Jacobi. 3. Fluxos de Anosov. 4. Fluxo magnético. I. Título.

CDU 51

NOME DO AUTOR: Paulo Cesar Ignácio da Silva Filho

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aplicações de Campos de Jacobi aos Sistemas Dinâmicos

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. José Barbosa Gomes  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
UFJF

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sônia Pinto de Carvalho  
UFMG

Juiz de Fora, 24 de fevereiro de 2012.

# *Agradecimentos*

Eu não conseguiria agradecer à altura, ainda que conseguisse achar as palavras mais valiosas, porque todos que me cercaram nesta jornada, que está apenas começando, pois eu sinto, podem ser imperfeitos como eu, mas me trouxeram o que de melhor alguém pode sentir. A cada dia, tenho a consciência que posso chegar em qualquer lugar, basta saber dividir...integrar, derivar, demonstrar...

# *Resumo*

Esta dissertação é dedicada ao estudo de Aplicações de Campos de Jacobi aos Sistemas Dinâmicos, seguindo alguns trabalhos desenvolvidas por [6] que utilizam tais campos para caracterizar fluxos geodésicos do tipo Anosov. Em seguida foram desenvolvidas alguns conceitos envolvendo Fluxo Magnético com o trabalho de Gabriel P. Paternain e Keith Burns [2] e por último foram desenvolvidos aplicações de tais campos para a dinâmica do Bilhar [14].

Palavras-Chave: Campos de Jacobi. Fluxos de Anosov. Fluxo Magnético. Bilhares.

# *Abstract*

This dissertation treat the study of Applications of Jacobi Fields in the Dinamycal System, following some works by [6], that use these fields to characterizae geodesic flows of Anosov type. Then such aplications have been developed some concepts concerning Magnetic Flows with the work of Gabriel P. Paternain e Keith Burns [2] and were finally developed for the dynamic Billiards [14].

Key-words: Jacobi Fields. Anosov Flows. Magnetic Flows. Billiards.

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 9
<b>1 Preliminares</b>	p. 10
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	p. 10
1.2 Métricas Riemannianas . . . . .	p. 12
1.3 Tensores em Variedades Riemannianas . . . . .	p. 14
1.4 Formas Diferenciais . . . . .	p. 16
1.5 Desigualdade Isoperimétrica . . . . .	p. 19
<b>2 Caracterização de um fluxo geodésico</b>	p. 20
2.1 A Métrica de Sasaki . . . . .	p. 20
2.2 Variedades Simpléticas e Campos Hamiltonianos . . . . .	p. 26
2.3 Campos de Jacobi e equação diferencial do fluxo geodésico . . . . .	p. 30
<b>3 Fluxos geodésicos do tipo Anosov</b>	p. 34
3.1 Introdução . . . . .	p. 34
3.2 Subfibrados de Green . . . . .	p. 44
3.3 Caracterização de fluxos Anosov . . . . .	p. 46
<b>4 Fluxo Magnético</b>	p. 58
4.1 Introdução . . . . .	p. 58
4.2 Fluxo Magnético em Superfícies . . . . .	p. 60
<b>5 Bilhares e Campos de Jacobi</b>	p. 65



5.1	Aplicação Bilhar . . . . .	p. 65
5.2	A Derivada da Aplicação do Bilhar . . . . .	p. 69
5.3	Campos de Jacobi e o fluxo do bilhar . . . . .	p. 70
5.4	Teorema de Rychlik . . . . .	p. 73
5.5	O Teorema de Bialy . . . . .	p. 78

<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 82
-----------------------------------	-------

# *Introdução*

O objetivo dessa dissertação é estudar como aplicamos Campos de Jacobi aos Sistemas Dinâmicos.

No Capítulo 1 são apresentados alguns conceitos básicos de Variedades Diferenciáveis, Aplicações entre Variedades, conceitos necessários ao desenvolvimentos de todo o texto. Conceitos de Métrica Riemanniana e Variedade Riemanniana, que nada mais é do que uma Variedade Diferenciável, munida de uma métrica Riemanniana. O conceito de conexão Riemanniana também é apresentado, e para finalizar apresentamos o que é uma Forma Diferencial.

No Capítulo 2, é apresentada a métrica de Sasaki, que é uma métrica no fibrado tangente TM. Essa métrica nos ajuda a caracterizar a diferencial de um fluxo geodésico. Apresentamos o que é uma variedade simplética definindo a 2-forma simplética  $\omega$ , e definimos a estrutura simplética do fibrado tangente TM. Também é caracterizado a equação diferencial para Campos de Jacobi, que é nosso objeto de estudo central, com a caracterização da equação diferencial do fluxo geodésico.

No Capítulo 3, é apresentada a primeira aplicação de Campos de Jacobi, usando [6], que é caracterizar Fluxos Geodésicos do tipo Anosov, em variedades sem pontos conjugados. Apresentamos o Teorema de Anosov para variedades de curvatura Gaussiana negativa.

No Capítulo 4, mostramos o Fluxo Magnético, usando [2], no qual a 2-forma simplética tem uma nova definição. Com isso a equação do Campo de Jacobi se altera e o mesmo resultado do Teorema de Anosov que é garantido para o caso geodésico é garantido para o Magnético.

No Capítulo 5, usamos Campos de Jacobi para aplicação da dinâmica do Bilhar, usando [14]. Foram apresentadas versões mais dinâmicas dos Teorema de Rychlik que versa sobre problemas de medidas das órbitas bilhar e do Teorema de Bialy que versa sobre folheações de cáusticas suaves.

# 1 Preliminares

Neste capítulo inicial, iremos introduzir alguns conceitos necessários para a leitura do texto.

## 1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma referência para esta seção é [10].

Seja  $M$  um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e conexo.

**Definição 1.1.** Um *sistema de coordenadas locais* ou *carta local* em  $M$  é um homeomorfismo  $x : U \rightarrow x(U)$  de um aberto  $U \subset M$  em  $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n$  é a dimensão de  $x : U \rightarrow x(U)$ .

Para cada  $p \in M$ , tem-se  $x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$  no qual os números  $x_i(p) = x_i$  são chamados coordenadas do ponto  $p \in M$  no sistema  $x$ .

**Definição 1.2.** Um *atlas* de dimensão  $n$  sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção  $\Sigma = \{x_\alpha\}$  de cartas locais  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  no qual a união dos domínios  $U_\alpha$  são tais que  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ . Os domínios  $U_\alpha$  são chamados vizinhanças coordenadas de  $\Sigma$ .

Um espaço topológico  $M$  no qual existe um atlas de dimensão  $n$  chama-se variedade topológica de dimensão  $n$ .

**Teorema 1.3.**  $M$  é uma variedade topológica de dimensão  $m$  se, e somente se, cada ponto de  $M$  tem uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{R}^m$ .

Dadas cartas locais  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  no espaço topológico  $M$ , tal que, para cada  $p \in U \cap V$ ,  $p$  tem as coordenadas  $x_i = x_i(p)$  e  $y_j = y_j(p)$ , relativos aos sistemas  $x$  e  $y$ , respectivamente com  $i, j = 1, \dots, m$ . A correspondência  $(x_1(p), \dots, x_m(p)) \leftrightarrow (y_1(p), \dots, y_m(p))$  estabelece um homeomorfismo  $\phi_{xy} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  chamado mudança de coordenadas  $\phi_{xy} = y \circ x^{-1}$ .

Se  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  é outro sistema de coordenadas locais tal que  $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ , então:

$$\phi_{xz} = \phi_{yz} \circ \phi_{xy} = x(U \cap V \cap W) \rightarrow z(U \cap V \cap W)$$

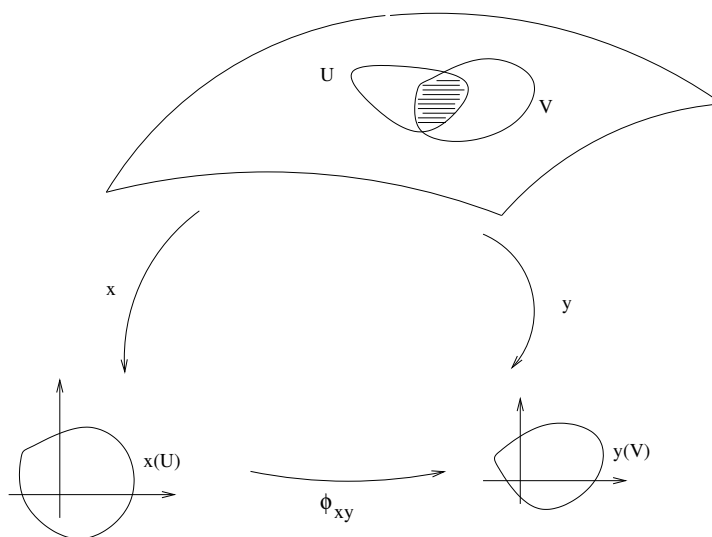


Figura 1.1: Mudança de coordenadas

Observemos que:  $\phi_{xx} = id_{x(U)}$  e  $\phi_{xy} = (\phi_{yx})^{-1}$ . Um atlas  $\Sigma$  sobre um espaço topológico  $M$  diz-se diferenciável de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) se todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{xy}$ , tais que  $x, y \in \Sigma$  são de classe  $C^k$ . Observemos que como  $\phi_{xy} = (\phi_{yx})^{-1}$ , então as aplicações de mudanças de coordenadas são difeomorfismos de classe  $C^k$ .

**Definição 1.4.** Um sistema de coordenadas  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $M$  diz-se *admissível* relativamente ao atlas  $\Sigma$  se para todo sistema de coordenadas locais  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in \Sigma$ , com  $U \cap W \neq \emptyset$ , as mudanças de coordenadas  $\phi_{xz}$  e  $\phi_{zx}$  são de classe  $C^k$ , isto é,  $\Sigma \cup \{z\}$  é ainda um atlas de classe  $C^k$  em  $M$ .

**Definição 1.5.** Um atlas é *máximo* quando possui todas as cartas admissíveis.

**Definição 1.6.** Uma *variedade diferenciável* de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  é um par ordenado  $(M, \Sigma)$ , no qual  $M$  é um espaço de Hausdorff com base enumerável e  $\Sigma$  um atlas máximo de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$ .

Para mostrar que  $(M, \Sigma)$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$ , precisamos verificar se:

1.  $M$  é um espaço de Hausdorff com base enumerável.
2.  $\Sigma$  é uma coleção de homeomorfismos  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$  de conjuntos abertos  $U_\alpha \subset M$  sobre  $x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ .
3. Os domínios  $U$  dos homeomorfismos  $x_\alpha \in \Sigma$  cobrem  $M$ , ou seja

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M.$$

4. Dados  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $x_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^m$ , pertencentes a  $\Sigma$  com  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , então  $\phi_{x_\alpha x_\beta} : x_\alpha(U \cap V) \rightarrow x_\beta(U \cap V)$  é um homeomorfismo de classe  $C^k$ .
5. Dado um homeomorfismo  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  de um aberto  $W \subset M$  sobre  $z(W) \subset \mathbb{R}^m$  também aberto, tal que  $\phi_{zx}$  e  $\phi_{xz}$  são de classe  $C^k$  para cada  $x \in \Sigma$ , implica que  $z \in \Sigma$ .

**Definição 1.7. (Aplicações Diferenciáveis entre variedades)** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ). Dizemos que  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável no ponto  $p \in M$ , se existem sistemas de coordenadas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que:  $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $x(p)$ .

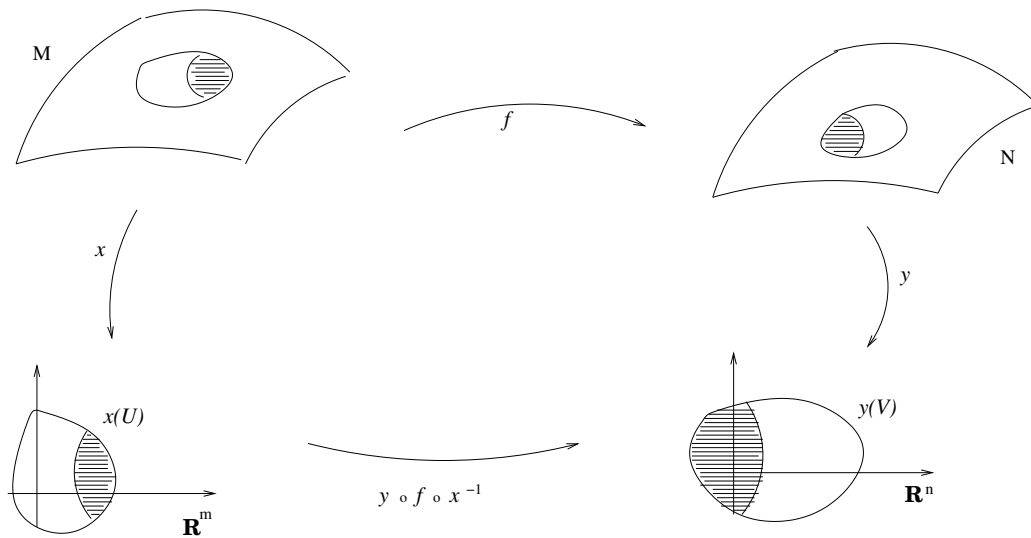


Figura 1.2: Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

A noção de diferenciabilidade independe dos sistemas de coordenadas.  $x, y$ .

**Definição 1.8. (Fibrado Tangente)** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$ . Então,  $TM$  com uma estrutura diferenciável é chamado fibrado tangente.

**Definição 1.9.** Definimos a aplicação projeção por

$$\pi : TM \rightarrow M$$

no qual  $\pi(p, v) = p$ .

## 1.2 Métricas Riemannianas

As referências para esta seção são [4] e [13].

**Definição 1.10. (Métrica Riemanniana)** Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$ , um produto interno  $\langle \cdot; \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p M$  que varia no seguinte sentido.

Se  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $x(x_1 \dots x_n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q); \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em  $U$ ,  $g_{ij}$  é a expressão da métrica Riemanniana.

**Definição 1.11.** Uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma métrica Riemanniana é chamada *variedade Riemanniana*.

**Definição 1.12.** Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$ , associa um vetor  $X(p) \in T_p M$ .

Sejam agora  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos vetoriais em  $M$ , e  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

**Definição 1.13.** Uma *conexão afim*  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2.  $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

Esta definição não deixa claro como a conexão age sobre um campo de vetores em uma variedade  $M$ . Com a proposição a seguir teremos uma idéia sobre o assunto.

**Proposição 1.14.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  um campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha$ , chamado de *derivada covariante* de  $V$  ao longo de  $\alpha$ , tal que, se  $W$  é um campo ao longo de  $\alpha$  e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então:

1.  $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

$$2. \frac{DfV}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$$

$$3. \text{ Se dado um campo } Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ tal que } Y(\alpha(t)) = V(t) \text{ então: } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$$

A conexão é dita *compatível* com a métrica quando para quaisquer campos de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  a equação

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

é sempre válida. A conexão é dita **simétrica**, quando para quaisquer campos de vetores  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  acontece

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

sendo que  $[X, Y] = XY - YX$ .

**Teorema 1.15. (Levi-Civita)** Dada uma variedade  $M$  existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  que satisfaz:

1.  $\nabla$  é simétrica
2.  $\nabla$  é compatível com a métrica

A única conexão afim  $\nabla$  que satisfaz o teorema anterior chama-se *conexão de Levi-Civita*.

### 1.3 Tensores em Variedades Riemannianas

As referências para esta seção são [4] e [13].

Nesta seção apresentaremos uma rápida noção de tensores em uma variedade Riemanniana.

Observemos que  $\mathfrak{X}(M)$  é um módulo sobre  $\mathcal{D}(M)$ , ou seja, tem estrutura linear quando tomamos como "escalares" os elementos de  $\mathcal{D}(M)$ .

**Definição 1.16.** Um *tensor*  $T$  de ordem  $r$  em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-vezes}} \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

Isto quer dizer que, dados  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $T(Y_1, \dots, Y_r)$ , é uma função diferenciável em  $M$ , e que  $T$  é linear em cada argumento, isto é:

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

Com essa definição, podemos estender a definição de derivada covariante aos tensores com a seguinte definição.

**Definição 1.17.** Seja  $T$  um tensor de ordem  $r$ . A diferencial covariante  $\nabla T$  de  $T$  é um tensor de ordem  $(r+1)$  dada por:

$$\begin{aligned} \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) &= Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \\ &\quad - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r) \end{aligned}$$

Para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , a derivada covariante  $\nabla_Z T$  de  $T$  em relação a  $Z$  é um tensor de ordem  $r$  dado por:

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z)$$

Ela satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\nabla_X f = X(f)$  (derivada direcional de  $f$  na direção  $X$ )
2.  $\nabla_X Y$  é o campo dado pela conexão  $\nabla$
3.  $A \mapsto \nabla_X A$  é linear sobre  $\mathbb{R}$
4.  $\nabla_X(A \otimes B) = \nabla_X A \otimes B + A \otimes \nabla_X B$
5. para uma contração  $C$ , temos:

$$\nabla_X \circ C = C \circ \nabla_X$$

6. além disso  $\nabla_X A$  é linear sobre funções  $C^\infty$  no argumento  $X$

- $\nabla_{X+X'} A = \nabla_X A + \nabla_{X'} A$
- $\nabla_{aX} A = a \nabla_X A$

**Definição 1.18.** O *tensor de curvatura*  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}$  uma aplicação  $R(X, Y)Z : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

$Z \in \mathfrak{X}(M)$  onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Definição 1.19.** Dados um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \in T_p M$  o número real  $K(x, y) = K(\sigma)$  dado por

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\|x \wedge y\|^2}$$

no qual  $\|x \wedge y\|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2$  é chamado de *tensor curvatura seccional* de  $\sigma$  em  $p$ .



## 1.4 Formas Diferenciais

As referências desta seção são [8] e [13].

**Definição 1.20.** Uma *forma diferencial de grau 1* ou, simplesmente uma *1-forma* em um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $\omega : X \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  que associa a cada ponto  $x \in X$  um funcional linear  $\omega(x)$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

O espaço dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  possui uma base canônica  $(dx_1, \dots, dx_n)$  formada pelos funcionais lineares definidos por  $dx_i \cdot v = \alpha_i$  se  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ; todo funcional linear sobre  $\mathbb{R}^n$  se exprime, de modo único, como combinação linear  $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ . Assim, dar uma 1-forma  $\omega$  num subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  equivale a definir  $n$  funções reais  $a_1, \dots, a_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que para cada  $x \in X$ , se tenha:

$$\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$$

Para cada conjunto  $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ , escrevemos

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

As formas  $r$ -lineares alternadas  $dx_I$  constituem a base canônica do espaço vetorial  $\mathcal{A}_r(\mathbb{R}^m)$ . Dada uma lista de  $r$  vetores  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$ , obtemos uma matriz  $a = (a_{ij})$ , com  $m$  linhas e  $r$  colunas, na qual a  $j$ -ésima coluna é o vetor  $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ . Neste caso,

$$dx_I(v_1, \dots, v_r) = \det(a_I)$$

com  $a_I$  a matriz  $r \times r$  obtida de  $a$  selecionando-se as linhas cujos índices pertencem ao conjunto  $I$ . Geometricamente,  $dx_I(v_1, \dots, v_r)$  é o volume do paralelepípedo  $r$ -dimensional orientado da projeção do paralelepípedo  $[v_1, \dots, v_r]$  sobre o subespaço  $r$ -dimensional de  $\mathbb{R}^m$  que tem  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}$  como base positiva.

**Definição 1.21.** Uma *1-forma diferencial* em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $\alpha : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $\alpha_{p_0}$  é linear
- $\alpha_{v_0}$  é diferenciável

Sejam  $\{e_1, e_2, e_3\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , e  $v \in \mathbb{R}^3$  um vetor, então  $v = (a_1, a_2, a_3)$  pode ser escrito como:

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

E pelo parágrafo anterior, temos que:

$$\begin{aligned} dx_i(v) &= a_i \\ \alpha_{p_0}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) &= \sum_{i=1}^3 a_i \alpha_{p_0}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_{p_0}(e_i) dx_i(v) = \sum_{i=1}^3 a_i(p_0) dx_i(v) \\ \alpha &= \sum_{i=1}^3 a_i dx_i \end{aligned}$$

**Definição 1.22.** Uma 2-forma diferencial em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $\alpha : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- $\alpha_{p_0}$  é bilinear alternada, isto é,  $\alpha(p, v, w) = -\alpha(p, w, v)$
- $\alpha_{(v_0, w_0)}$  é diferenciável

$$dx_i \wedge dx_j \left( \sum_{i=1}^3 a_i e_i, \sum_{i=1}^3 b_i e_i \right) = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i$$

$$dx_i \wedge dx_j(e_i, e_j) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1, \text{ se } i \neq j$$

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\alpha = a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3$$

Então em  $\mathbb{R}^3$ , temos:

Para a 1-forma temos a base:  $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ .

Para a 2-forma temos a base:  $\{dx_1 \wedge dx_2, dx_2 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_3\}$ .

Para a 3-forma temos a base:  $\{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\}$ .

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são duas 1-formas então  $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ . Com isso temos que  $\alpha \wedge \alpha = 0$ .

Com essas ferramentas temos a seguinte definição, para o caso geral:

**Definição 1.23.** Uma forma diferencial de grau  $r$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  é uma aplicação  $\omega : U \rightarrow \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^m)$ , que a cada ponto  $x \in U$ ,  $\omega$  faz corresponder a forma  $r$ -linear alternada  $\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$ .

Assim, a forma diferencial  $\omega$  determina e é determinada por funções  $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ , chamadas coordenadas de  $\omega$ . Para cada subconjunto  $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ , e cada ponto  $x \in U$ , temos  $a_I(x) = \omega(x) \cdot (e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ .

Toda aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ , de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) induz uma transformação linear  $\omega \mapsto f^* \omega$ , que leva formas de grau  $r$  na superfície  $N$  em formas de grau  $r$  na superfície  $M$ . Dada a forma  $\omega$ , de grau  $r$  sobre  $N$ , definimos a forma  $f^* \omega$ , de grau  $r$  sobre  $M$ , da seguinte maneira: Para cada  $x \in M$  e cada  $r$ -lista de vetores  $w_1, \dots, w_r \in T_x M$ ,

$$[(f^* \omega)(x)](w_1, \dots, w_r) = \omega(f(x)) \cdot (f'(x)w_1, \dots, f'(x)w_r)$$

Se  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função, temos  $f^*(g) = g \circ f$ .

**Definição 1.24.** Uma forma diferencial de grau  $r$  em uma superfície  $m$ -dimensional  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação

$$\omega : x \in M \rightarrow \omega(x) \in \mathcal{A}_r(T_x M)$$

que associa a cada ponto  $x \in M$  uma forma  $r$ -linear alternada  $\omega(x)$  no espaço vetorial tangente  $T_x M$ .

Se  $r = 0$ , uma forma diferencial de grau zero em  $M$  é simplesmente uma função real  $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Seja  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  uma parametrização de um aberto  $U \subset M$ . Em cada ponto  $x = \varphi(u) \in U$ , temos a base

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m}(u) \right\} \subset T_x M.$$

Usaremos a notação  $\{du_1, \dots, du_m\} \subset (T_x M)^*$  para indicar a base dual. Na realidade  $du_1, \dots, du_m$  são formas diferenciais de grau 1 em  $U$ .

Em cada ponto  $x = \varphi(u) \in U$ , as  $r$ -formas  $du_I = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$ , com  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ , constituem uma base de  $\mathcal{A}_r(T_x M)$ . Dada uma forma diferencial  $\omega$ , de grau  $r$  em  $M$ , podemos escrever, para cada ponto  $x = \varphi(u) \in U$ :

$$\omega(x) = \omega(\varphi(u)) = \sum_I a_I(u) du_I$$

Assim, a forma  $\omega$  define, para cada parametrização  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  em  $M$ , as funções  $a_I : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  em um número de  $\binom{m}{r}$ . Elas são chamadas as *coordenadas* da forma  $\omega$  relativamente a parametrização  $\varphi$ .

**Teorema 1.25.** Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $n$ . Então,  $M$  é orientável se, e somente se, existe uma  $n$ -forma  $\omega$  em  $M$  que nunca se anula.

*Demonstração.* A prova está em [8] ou [13]. □

Tal  $n$ -forma é chamada uma *forma de volume*. No caso de uma superfície, também dizemos *forma de área*.

**Lema 1.26.** Se  $M$  é uma superfície orientável, qualquer 2-forma em  $M$  é um múltiplo da forma de área.

*Demonstração.* Para a demonstração podemos consultar [8] ou [13]. □

## 1.5 Desigualdade Isoperimétrica

**Teorema 1.27.** (Desigualdade Isoperimétrica) Seja  $C$  uma curva plana simples e fechada com comprimento  $p$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então:

$$p^2 - 4\pi A \geq 0$$

e verifica-se a igualdade se, e somente se,  $C$  é um círculo.

*Demonstração.* A prova está em [3] □

## 2 Caracterização de um fluxo geodésico

O nosso objetivo neste capítulo é caracterizar a diferencial de um fluxo geodésico em função dos campos de Jacobi. De agora em diante,  $M$  será sempre uma variedade Riemanniana compacta e  $\pi : TM \rightarrow M$  será a projeção canônica. Nosso primeiro passo é definir um fibrado cujas fibras são tangentes às fibras de  $TM$ .

### 2.1 A Métrica de Sasaki

**Definição 2.1.**  $T(TM)$  possui um subfibrado chamado *subespaço vertical* que é dado por vetores da forma  $\sigma'(0)$  sendo que  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ ,  $\sigma(t) = (x, v + tw) \in TM$  e  $v, w \in T_xM$ . Em outras palavras

$$V = \bigcup_{\theta \in TM} V(\theta)$$

$$V(\theta) = \ker(d_\theta \pi).$$

**Observação 2.2.** Se  $M$  possui dimensão  $n$  então  $V(\theta)$  possui dimensão  $n$ .

**Definição 2.3.** Seja  $N$  uma variedade Riemanniana. Uma curva  $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  é *adaptada* a  $\theta \in TN$  e  $\xi \in T_\theta TN$  quando  $h(0) = \theta$  e  $h'(0) = \xi$ .

**Definição 2.4.** Definimos a aplicação  $K : TTM \rightarrow TM$  da seguinte maneira dados  $\xi \in T_\theta TM$ , e  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  uma curva adaptada a  $\theta \in TM$  e  $\xi \in T_\theta TM$  fazemos:

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0), \text{ sendo que: } h(t) = (\alpha(t), Z(t))$$

Portanto, definimos o *subespaço horizontal* como

$$H = \bigcup_{\theta \in TM} H(\theta)$$

$$\text{tal que } H(\theta) = \ker(K_\theta).$$

De acordo com a definição anterior, não está claro como se comporta  $K$ , nem mesmo se ela está bem definida. O próximo lema esclarece essas dúvidas.

**Lema 2.5.** 1.  $K_\theta$  está bem definida, isto é, não depende da curva escolhida  $z$ ;

2.  $K_\theta$  é linear.

*Demonstração.* 1. Sejam  $\xi \in T_\theta$  e  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  uma curva adaptada a  $\theta \in TM$  e  $\xi \in T_\theta TM$ . Por definição, temos que:

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0)$$

Sendo que  $h(t) = (\alpha(t), Z(t))$ . Considere agora uma outra curva  $u : J \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  adaptada a  $\theta \in TM$  e  $\xi \in T_\theta TM$ , no qual  $u(s) = (\beta(s), B(s))$ . Temos assim que:  $\pi \circ u(s) = \beta(s)$ . Então:

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= (\pi \circ u)'(0) \\ &= d_\theta \pi(u'(0)) \\ &= d_\theta \pi(\xi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por outro lado,  $\pi \circ h(t) = \alpha(t)$ . Então:

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= (\pi \circ h)'(0) \\ &= d_\theta \pi(h'(0)) \\ &= d_\theta \pi(\xi) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim comparando 2.1 e 2.2, temos que:

$$\alpha'(0) = \beta'(0)$$

E,  $h(0) = \theta = (\alpha(0), Z(0))$ . Por outro lado,  $u(0) = \theta = (\beta(0), B(0))$  Pela definição, temos que:

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0) = \nabla_{\beta'} B(0)$$

Logo  $K_\theta$  não depende da escolha da curva  $z$ .

2. Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  uma curva adaptada a  $\theta \in TM$  e  $\xi \in T_\theta TM$ . Então:

$$\lambda K(\xi) = \lambda \nabla_{\alpha'} Z(0)$$

com  $h(t) = (\alpha(t), Z(t))$  Agora, considere  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  uma curva adaptada a  $\theta \in TM$  e  $\lambda \xi \in T_\theta TM$  com  $u(t) = (\beta(t), B(t))$ . Assim:

$$u(0) = \theta = z(0)$$

$$(\beta(0), B(0)) = (\alpha(0), Z(0))$$

o que implica que:  $\beta(0) = \alpha(0)$  e  $B(0) = Z(0)$ . E  $u'(0) = \lambda \xi = \lambda z'(0)$ ,

$$(\beta'(0), B'(0)) = \lambda(\alpha'(0), Z'(0)) = (\lambda \alpha'(0), \lambda Z'(0))$$

Assim:

$$K_\theta(\lambda \xi) = \nabla_{\beta'} B(0) = \nabla_{\lambda \alpha'} Z(0) = \lambda \nabla_{\alpha'} Z(0) = \lambda K_\theta(\xi)$$

E sejam agora  $h$  e  $u$  curvas adaptadas ambas a  $\xi \in T_\theta TM$  e  $\eta \in T_\theta TM$ , respectivamente.

Então

$$K_\theta(\xi) + K_\theta(\eta) = \nabla_{\alpha'} Z(0) + \nabla_{\beta'} B(0)$$

no qual:  $h(t) = (\alpha(t), Z(t))$  e  $u(t) = (\beta(t), B(t))$ . Agora considere  $v$  uma curva adaptada a  $\xi + \eta \in T_\theta TM$  então:

$$K_\theta(\xi + \eta) = \nabla_{\gamma'} C(0)$$

no qual  $v(t) = (\gamma(t), C(t))$ , como

$$v(0) = \theta = z(0) = u(0)$$

$$(\gamma(0), C(0)) = (\alpha(0), Z(0)) = (\beta(0), B(0))$$

o que implica que  $C(0) = Z(0) = B(0)$ . Porém  $v'(0) = \xi + \eta = z'(0) + u'(0)$

$$(\gamma'(0), C'(0)) = (\alpha'(0), Z'(0)) + (\beta'(0), B'(0))$$

$$(\gamma'(0), C'(0)) = (\alpha'(0) + \beta'(0), Z'(0) + B'(0))$$

o que implica que:  $\gamma'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0)$ . Assim:

$$K_\theta(\xi + \eta) = \nabla_{\gamma'} C(0)$$

$$= \nabla_{\alpha' + \beta'} C(0)$$

$$= \nabla_{\alpha'} C(0) + \nabla_{\beta'} C(0)$$

$$= \nabla_{\alpha'} Z(0) + \nabla_{\beta'} B(0)$$

$$= K_\theta(\xi) + K_\theta(\eta)$$

□

**Definição 2.6.** Definimos  $L_\theta : T_x M \rightarrow T_\theta TM$ , sendo que  $\theta = (x, v) \in TM$ , da seguinte forma: dado  $v' \in T_x M$ , considere a curva  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  adaptada a  $x \in M$  e  $v' \in T_x M$  e  $Z(t)$  o transporte

paralelo de  $v'$  ao longo de  $\beta$ . Sendo assim, se  $\sigma(t) = (\beta(t), Z(t))$

$$L_\theta(v') = \sigma'(0) \in T_\theta TM$$

O operador  $L_\theta$  dá uma nova maneira de definir o espaço horizontal.

**Observação 2.7.** Como o campo  $Z$  é obtido através do transporte paralelo de  $v'$  ao longo de  $\beta$ ,  $K_\theta(L_\theta(v')) = \nabla_{\beta'} Z(0) = 0$ . Assim,  $Im(L_\theta) \subset H(\theta) = ker(K_\theta)$  e o lema seguinte mostrará a igualdade.

**Lema 2.8.** 1.  $L_\theta$  está bem definido

2.  $L_\theta$  é linear
3.  $ker(K_\theta) = Im(L_\theta)$
4.  $d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_x M}$
5.  $d_\theta \pi|_{H(\theta)} : H(\theta) \rightarrow T_x M$  e  $K(\theta)|_{V(\theta)} : V(\theta) \rightarrow T_x M$  são isomorfismos lineares

*Demonstração.* 1. Mostrar que  $L_\theta$  está bem definido é mostrar que  $L_\theta(v')$  não depende da curva escolhida  $\beta$ . Como  $Z$  é o transporte paralelo de  $v'$  ao longo de  $\beta$ , então  $\nabla_{\beta'} Z = 0$ , o que corresponde em coordenadas locais a  $\beta' = \sum_i \beta'_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Z = \sum_j z_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta'} Z &= \sum_i \beta'_i x_i \nabla_{\beta'_i} \left( \sum_j z_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{ij} \beta'_i z_j \nabla_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{ij} \beta'_i x_i (z_j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

Fazendo  $\nabla_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , temos que:

$$\nabla_{\beta'} Z = \sum_k \left( \frac{dz_k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k z_j \beta'_i \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

Logo  $\sigma'(0) = (v', Z'(0))$  está determinado por  $\Gamma_{ij}^k(0)$ ,  $z_j(0)$  e  $\beta'_i$ , pois

$$\frac{dz_k}{dt}(0) = -(\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k z_j \beta'_i)(0)$$

Mas  $\Gamma_{ij}^k(0)$  dependem apenas da métrica e  $z_j(0) = \beta'_j(0) = v'_j$ . Portanto  $L_\theta(v')$  não depende da curva escolhida, pois qualquer outra curva adaptada a  $x \in M$  e  $v' \in T_x M$ ,  $L_\theta(v')$  está definido.

2. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda L_\theta(v') = \lambda \sigma'(0) = (\lambda v', \lambda Z'(0)) \tag{2.3}$$



Em coordenadas locais, temos que:

$$Z'(0) = \sum_j \frac{dz_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j}(0)$$

assim:

$$\begin{aligned} \lambda Z'(0) &= \lambda \sum_j \frac{dz_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j}(0) = \sum_j \lambda \frac{dz_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j}(0) \\ &= \sum_j \frac{d\lambda z_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$L_\theta(\lambda v') = L_\theta((\lambda v)') = ((\lambda v)', (\lambda Z(0))') = (\lambda v', \lambda Z'(0)) \quad (2.4)$$

Comparando (2.3) e (2.4), concluímos que  $\lambda L_\theta(v') = L_\theta(\lambda v')$

Sejam  $\sigma$  e  $\mu$ , curvas tais que  $L_\theta(v') = \sigma'(0)$  e  $L_\theta(u') = \mu'(0)$ . Dessa forma

$$\begin{aligned} L_\theta(v') + L_\theta(u') &= \sigma'(0) + \mu'(0) \\ &= (v', Z'(0)) + (u', U'(0)) \\ &= (v' + u', Z'(0) + U'(0)) \\ &= ((v + u)', (Z + U)'(0)) \\ &= L_\theta(v' + u') \end{aligned}$$

3. Vimos que  $Im(L_\theta) \subset \ker K_\theta$ . Seja  $v \in Ker K_\theta$ , então:

$$K_\theta(v) = 0$$

$$\nabla_{\alpha'} Z(0) = 0$$

Pela definição de transporte paralelo implica que  $Z$  é o transporte paralelo de  $v$  ao longo  $\alpha$  que é a definição de  $L_\theta$ . Logo  $v$  está na  $Im(L_\theta)$ , o que conclui a outra inclusão e a igualdade.

4. Temos que  $\sigma(t) = (\beta(t), Z(t)) \Rightarrow \pi \circ \sigma = \beta(t)$ , logo  $d_\theta \pi(\sigma'(0)) = \beta'(0) = v'$ , assim:

$$d_\theta \pi \circ L_\theta(v') = d_\theta \pi \circ \sigma'(0) = v'$$

$$\Rightarrow d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_x M}$$

5. Pelo item (4), temos:

$$d_\theta \pi \underbrace{(\mathbf{H}(\theta))}_{L_\theta} = d_\theta \pi \circ (L_\theta) \Rightarrow d_\theta \pi L_\theta(\mathbf{T}_x \mathbf{M}) = \mathbf{T}_x \mathbf{M}$$

logo é sobrejetiva.

Seja  $v \in \ker(d_\theta \pi|_{\mathbf{H}(\theta)})$ , então  $v \in \mathbf{H}(\theta) = \ker(\mathbf{K}(\theta)) = \text{Im}(L_\theta) \Rightarrow d_\theta \pi(v) = 0 \Rightarrow v = L_\theta(w)$ ,  $w \in \mathbf{T}_p \mathbf{M} \Rightarrow d_\theta \pi \circ L_\theta(w) = w = 0 \Rightarrow v = L_\theta(0) \underbrace{=}_2 0 \Rightarrow v = 0$ .

Para  $\mathbf{K}_\theta|_{\mathbf{V}(\theta)} : \mathbf{V}(\theta) \rightarrow \mathbf{T}_x \mathbf{M}$ , tomemos  $v \in \mathbf{T}_x \mathbf{M}$ , considere  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}$  uma curva tal que  $\gamma(0) = x$ .

Seja  $V$  um campo ao longo de  $\gamma$ , tal que a derivada covariante de  $V$  no ponto  $x$  é  $v$ , então  $\frac{DV}{dt}(x) = v$ . Definindo  $z : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{TM}$  por  $z(t) = (\gamma(t), V(t))$ , então

$$\mathbf{K}_\theta(z'(0)) = \nabla_\gamma V(0) = v$$

logo  $\mathbf{K}_\theta$  é sobrejetiva.

Seja  $v \in \ker(\mathbf{K}_\theta|_{\mathbf{V}(\theta)}) \Rightarrow v \in \mathbf{V}(\theta) = \ker(d_\theta \pi) \Rightarrow d_\theta \pi(v) = 0$ . Logo, usando que  $\ker(\mathbf{K}_\theta) = \text{Im}(L_\theta)$  e o raciocínio anterior temos que  $v = 0$ . Assim temos que  $\ker(\mathbf{K}_\theta|_{\mathbf{V}(\theta)}) = 0$ , com isso concluímos que a aplicação é injetora.

□

Com isso vemos que  $\mathbf{T}_\theta \mathbf{TM} = \mathbf{H}(\theta) \oplus \mathbf{V}(\theta)$ . A aplicação

$$j_\theta : \mathbf{T}_\theta \mathbf{TM} \rightarrow \mathbf{T}_x \mathbf{M} \times \mathbf{T}_x \mathbf{M}$$

$$j_\theta(\xi) = (d_\theta \pi(\xi), \mathbf{K}_\theta(\xi))$$

decompõe o espaço  $\mathbf{T}_\theta \mathbf{TM}$ .

Assim daqui para frente o vetor  $\xi$  será da forma  $\xi = (\xi_h, \xi_v)$  que está identificado pela aplicação  $j_\theta(\xi)$ . Vamos agora com isso definir uma métrica em  $\mathbf{T}_\theta \mathbf{TM}$  que fará com que  $\mathbf{H}(\theta)$  e  $\mathbf{V}(\theta)$  sejam perpendiculares. Usando a decomposição  $\mathbf{T}_\theta \mathbf{TM} = \mathbf{H}(\theta) \oplus \mathbf{V}(\theta)$ , definimos:

$$\langle \langle \xi, \eta \rangle \rangle_\theta = \langle d_\theta \pi(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle \mathbf{K}_\theta(\xi), \mathbf{K}_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)}$$

Isto define uma métrica em  $\mathbf{TM}$ , chamada *métrica de Sasaki*.

**Observação 2.9.** A partir da identificação  $j_\theta$ , o campo geodésico  $G : \mathbf{TM} \rightarrow \mathbf{TTM}$  é dado por:

$$G(\theta) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \phi_t(\theta) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t))$$

sendo que  $\gamma_\theta$ , com  $\theta = (x, v)$  é a geodésica que em  $t = 0$  passa pelo ponto  $x$  com velocidade  $v$ . Pela definição de geodésica, seu campo tangente  $t \mapsto \gamma'_\theta(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma_\theta$ , portanto  $G(\theta) = L_\theta(v)$  e, pela identificação  $j_\theta$ ,

$$G(\theta) = L_\theta(v) = (d_\theta \pi(L_\theta(v)), K_\theta(L_\theta(v))) = (v, 0).$$

## 2.2 Variedades Simpléticas e Campos Hamiltonianos

Uma referência para esta seção é [11].

**Definição 2.10.** Uma 2-forma  $\omega$  é dita simplética se  $\omega$  é

1. fechada, isto é  $d\omega = 0$
2. não degenerada, isto é, se  $\omega_p(X, Y) = 0$  para todo  $Y \in T_pM$ , então  $X = 0$
3. anti-simétrica, isto é,  $\omega_p(X, Y) = -\omega_p(Y, X)$

O par  $(M, \omega)$  de uma variedade suave e uma forma simplética é chamada *variedade simplética*.

**Observação 2.11.** A existência de uma forma simplética em  $M$  implica que  $M$  é bi-dimensional.

**Definição 2.12.** Se  $(M, \omega)$  é uma variedade simplética e  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^r$ , o campo  $X_H$  definido pela relação

$$dH(Y) = \omega(X_H, Y)$$

ou

$$i_{X_H} \omega = dH$$

é chamado *campo Hamiltoniano* ou *gradiente simplético* de  $H$ , o fluxo  $\phi_t$  de  $X_H$  é chamado *fluxo Hamiltoniano*.  $\omega$  não-degenerada implica a existência de  $X_H$  que é um campo de vetores  $C^{r-1}$

Denotamos por  $L_{X_H} \omega$  a derivada de Lie de  $\omega$  com respeito a  $X_H$ :

$$L_{X_H} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_h^* \omega - \omega}{h}$$

**Lema 2.13.**  $\omega$  é preservada por  $\phi_t$ , sendo que  $\phi_t$  é o fluxo gerado por  $X_H$ , isto é,  $L_{X_H} \omega = 0$

*Demonstração.* Considere a fórmula de Cartan

$$L_{X_H} \omega = i_{X_H} d\omega + di_{X_H} \omega$$

Como  $\omega$  é fechada,  $d\omega = 0$ , e  $i_{X_H}\omega = dH$ , conclui-se que  $L_{X_H}\omega = 0$ . Vamos agora mostrar que  $\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = 0$ , pois se isso acontece  $\phi_t^*\omega$  não depende de  $t$  e, então,  $\phi_t^*\omega = \phi_0^*\omega = \omega$ , que é o que queremos. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_{t+h}^*\omega - \phi_t^*\omega}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* \circ \phi_h^*\omega - \phi_t^*\omega}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \phi_t^* \left( \frac{\phi_h^*\omega - \omega}{h} \right) \\ &= \phi_t^* \circ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_h^*\omega - \omega}{h} \\ &= \phi_t^* \circ L_{X_H}\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Vimos que o espaço tangente TM no ponto  $\theta$  pode ser escrito como  $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$ .

Defina

$$J_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_\theta TM$$

por

$$J_\theta = (-\xi_v, \xi_h)$$

**Definição 2.14.** Defina a 2-forma  $\Omega$  por:

$$\Omega_\theta(\xi, \eta) = \langle \langle J_\theta(\xi), \eta \rangle \rangle_\theta$$

Segue da definição acima que:

$$\begin{aligned} \Omega_\theta(\xi, \eta) &= \langle d_\theta \pi(J_\theta(\xi)), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(J_\theta(\xi)), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} \\ &= \langle -K_\theta(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\eta) \rangle. \end{aligned}$$

$\Omega$  é uma 2-forma simplética. O campo geodésico pode ser visto como o campo Hamiltoniano da função  $H(x, v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_x$ , conforme a proposição abaixo.

**Proposição 2.15.**  $dH = i_G\Omega$ , ou da mesma forma para qualquer  $\theta = (x, v) \in TM$  e qualquer  $\xi \in T_\theta TM$ ,

$$d_\theta H(\xi) = \Omega_\theta(G(\theta), \xi)$$

*Demonstração.* Seja  $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{TM}$  uma curva adaptada a  $\xi$  e façamos  $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$ . Então  $\mathbf{K}_\theta(\xi) = \nabla_{\alpha'} Z(0)$  e assim:

$$\begin{aligned} d_\theta \mathbf{H}(\xi) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\mathbf{H} \circ z) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \langle Z(t), Z(t) \rangle_{\alpha(t)} \\ &= \langle \nabla_{\alpha'} Z, Z \rangle_{\alpha(0)} \\ &= \langle \mathbf{K}_\theta(\xi), v \rangle_x \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Omega_\theta(G(\theta), \xi) &= \langle d_\theta \pi(G(\theta)), \mathbf{K}_\theta(\xi) \rangle - \langle \underbrace{\mathbf{K}_\theta(G(\theta))}_{L_\theta(v)}, d_\theta \pi(\xi) \rangle \\ &= \langle d_\theta \pi(G(\theta)), \mathbf{K}_\theta(\xi) \rangle \\ &= \langle d_\theta \pi(v, 0), \mathbf{K}_\theta(\xi) \rangle \\ &= \langle v, \mathbf{K}_\theta(\xi) \rangle \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.16.** O fluxo geodésico preserva a forma simplética  $\Omega$

*Demonstração.* Segue do Lema (2.13) e da proposição (2.15)

□

**Definição 2.17.** Definimos a 1-forma  $\alpha$  de TM por:

$$\alpha_\theta := \langle \langle \xi, G(\theta) \rangle \rangle_\theta = \langle d_\theta \pi(\xi), v \rangle_x$$

Observemos que  $V(\theta)$  anula  $\alpha_\theta$ . A forma simplética  $\Omega$  e a forma  $\alpha$  estão relacionadas na proposição seguinte.

**Proposição 2.18.**  $\Omega = -d\alpha$ .

**Definição 2.19.** Para  $\theta \in \text{SM}$  definimos  $S(\theta) := \ker \alpha_\theta$ . Observamos que  $S(\theta)$  é o complemento ortogonal em  $T_\theta \text{SM}$  de  $G(\theta)$  com respeito à métrica de Sasaki, no qual SM é o fibrado tangente unitário, ou seja:

$$\text{SM} = \{(x, v) \in \text{TM}; x \in \text{M}, v \in T_x \text{M}, \|v\| = 1\}$$

**Lema 2.20.** Dado  $\theta = (x, v)$ , temos:

1. Um vetor  $\xi \in T_\theta \text{SM}$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{K}_\theta(\xi), v \rangle = 0$

2.  $\Omega_\theta(\xi, G(\theta)) = 0$  para todo  $\xi \in T_\theta SM$
3.  $\Omega_\theta(\xi, J_\theta G(\theta)) = 0$  para todo  $\xi \in S(\theta) \subset T_\theta SM$
4. O complemento ortogonal de  $S(\theta)$  em  $T_\theta TM$  é dado pelos subespaços gerados por  $G(\theta)$  e  $J_\theta G(\theta)$ . Portanto  $S(\theta)$  e seu complemento ortogonal são invariantes por  $J(\theta)$
5. Seja  $E \subset T_\theta SM$  complementar ao subespaço gerado por  $G(\theta)$ . Então  $\Omega_\theta|_{E \times E}$  é não degenerado

*Demonstração.* 1. Pela identificação  $T_\theta SM = H(\theta) \oplus S(\theta)$ , e usando que  $d_\theta \pi|_{H(\theta)} : H(\theta) \rightarrow T_x M$  e  $K(\theta)|_{V(\theta)} : V(\theta) \rightarrow T_x M$  são isomorfismos lineares e pela métrica de Sasaki, temos:

$$T_\theta SM = H(\theta) \oplus V(\theta) \simeq T_x M \times \{\omega \in T_x M / \omega \perp v\}$$

$$(\Rightarrow) \xi \in T_\theta SM \Rightarrow \langle K_\theta(\xi), v \rangle = \Omega_\theta(G(\theta), \xi) = \langle d_\theta \pi(G(\theta)), K_\theta(\xi) \rangle$$

$$= \langle d_\theta \pi(L_\theta(v)), K_\theta(\xi) \rangle = 0$$

$$(\Leftarrow) \langle K_\theta(\xi), v \rangle = \langle K_\theta(\xi), d_\theta \pi(L_\theta(v)) \rangle = 0 \text{ e pela identificação temos que: } \xi \in T_\theta SM$$

2. Dado  $\xi \in T_\theta SM$ , temos que:

$$\Omega_\theta(\xi, G(\theta)) = \langle d_\theta \pi(\xi), K_\theta(G(\theta)) \rangle - \langle K_\theta(\xi), d_\theta \pi(G(\theta)) \rangle$$

mas,  $K_\theta(G(\theta)) = 0$  e

$$\langle K_\theta(\xi), d_\theta \pi(G(\theta)) \rangle \underset{\text{por(1)}}{=} \langle K_\theta(\xi), v \rangle = 0$$

3. Observe que  $\xi \in S(\theta)$  é o mesmo que dizer que  $\xi \in \ker \alpha_\theta$ , e assim  $\langle d_\theta \pi(\xi), v \rangle = 0$ , calculando  $\Omega_\theta$ , temos que:

$$\Omega_\theta(\xi, J_\theta G(\theta)) = \langle d_\theta \pi(\xi), K_\theta(J_\theta G(\theta)) \rangle - \langle K_\theta(\xi), d_\theta \pi(J_\theta G(\theta)) \rangle$$

$$= \langle d_\theta \pi(\xi), v \rangle$$

$$= 0$$

4. Por definição  $G(\theta)$  é ortogonal a  $S(\theta)$  em  $T_\theta TM$ . Assim dado um vetor  $\xi \in S(\theta)$ , temos:

$$\langle \langle J_\theta G(\theta), \xi \rangle \rangle = \langle v, K_\theta(\xi) \rangle$$

Logo  $J_\theta G(\theta)$  é ortogonal a  $S(\theta)$  pois como  $\xi \in S(\theta) \subset T_\theta SM$ , obtém-se à partir do item (1) que  $\langle K_\theta(\xi), v \rangle = 0$

5. Pelo item (2),  $G(\theta)$  é uma direção nula em  $T_\theta SM$  e esta é a única direção nula, pois se houvesse outra então a forma  $\Omega$  deixaria de ser degenerada em  $T_\theta TM$ . De fato,

$$T_\theta TM = J_\theta G(\theta) \oplus T_\theta SM,$$

com  $\Omega$  é simplética,

$$\Omega_\theta(G(\theta), \eta) \neq 0$$

quando  $\eta \in J_\theta G(\theta)$ . Suponhamos que  $\Omega$  possui uma direção nula  $U \subset T_\theta SM$ , complementar a  $G(\theta)$ . Portanto pelo fato de  $\Omega$  ser simplética deve haver um subespaço de  $T_\theta TM$  tal que  $\Omega_\theta(U, \cdot)$  não se anule, provavelmente este espaço não contido em  $T_\theta SM$ . Com isso, supondo que este subespaço é  $J_\theta G(\theta)$ , conclui-se que o espaço  $U$  é o mesmo que o gerado por  $G(\theta)$ , uma contradição, o que prova o que queríamos

□

## 2.3 Campos de Jacobi e equação diferencial do fluxo geodésico

**Definição 2.21.** Seja  $\gamma_\theta$  uma geodésica. Um campo  $J$  ao longo de  $\gamma_\theta$  é dito um campo de Jacobi se satisfaz a seguinte equação:

$$J'' + R(\gamma'_\theta, J)\gamma'_\theta = 0$$

no qual  $R$  é o tensor de curvatura Riemanniana de  $M$  e  $J' = \frac{DJ}{dt}$  é a derivada covariante de  $J$  ao longo de  $\gamma_\theta$

**Observação 2.22.** Notemos que  $\gamma'(t)$  e  $t\gamma'(t)$  são campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , que só nos dão informações sobre a própria geodésica  $\gamma$ . Por isso ao estudarmos fluxos geodésicos só nos interessamos por campos de Jacobi perpendiculares a  $\gamma'$ .

**Definição 2.23.** Uma *variação por geodésicas* de uma geodésica  $\gamma$  é uma função contínua

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

tal que:

1.  $f(0, t) = \gamma(t)$
2.  $f_s(t) = f(s, t)$  é uma geodésica para cada  $s$  fixado
3.  $f$  é diferenciável em  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  para alguma partição  $a = a_0 < \dots < a_r = b$  de  $[a, b]$

**Proposição 2.24.** Se  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  é uma variação por geodésicas de  $\gamma$  então:

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$$

é um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é uma variação por geodésicas, temos

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Entretanto:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) &= \mathbf{R} \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ \underbrace{\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)}_{=0} &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \mathbf{R} \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ 0 &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \mathbf{R} \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

consequentemente:  $J'' + \mathbf{R}(\gamma', J)\gamma' = 0$  □

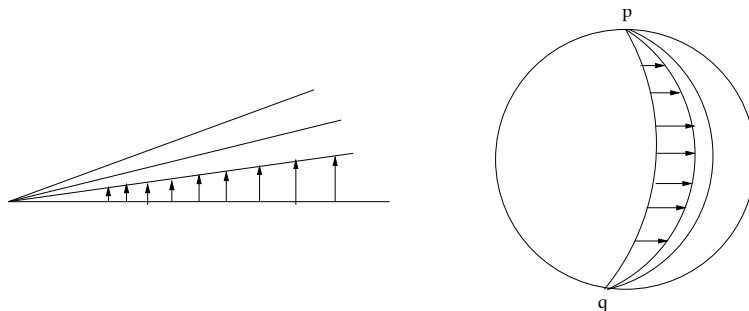


Figura 2.1: Campos de Jacobi e variações por geodésicas

Vale também a recíproca.

Como os campos de Jacobi satisfazem a uma equação diferencial de segunda ordem, cada campo fica completamente determinado pelas condições iniciais  $J(0)$  e  $J'(0)$ . O conjunto de todos os campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$  forma um espaço vetorial cuja dimensão é  $2n$  se  $\dim(M) = n$ , pois cada campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais  $J(0)$ ,  $J'(0) \in T_{\gamma(0)}M$ . Seja  $\xi \in T_{\theta}TM$  e  $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$  uma curva adaptada a  $\xi$ , isto é,  $z'(0) = \xi$  e  $z(0) = \theta = (p, v)$ . Definimos:

$$f(s, t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$$

uma variação da geodésica  $\gamma_{\theta}(t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$ . Então:  $J_{\xi}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$  é um campo de Jacobi ao



longo de  $\gamma_\theta$ . Como

$$\begin{aligned} J_\xi(t) &= \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d\pi(\phi_t(z(s))) \cdot d\phi_t(z(s)) \cdot z'(s) \Big|_{s=0} \\ &= d\pi(\phi_t(\theta)) \cdot d\phi_t(\theta) \cdot z'(0) \end{aligned}$$

Assim

$$J_\xi(0) = d\pi(\phi_0(\theta)) \cdot d\phi_0(\theta) \cdot \xi = d_\theta \pi(\xi)$$

e temos também que

$$\begin{aligned} J'_\xi(0) &= \frac{D}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} f(s, t) = \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \pi \circ \phi_t(z(s)) \\ &= \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} z(0) = \nabla_{\alpha'} Z(0) = K_\theta(\xi) \end{aligned}$$

Considerando  $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$ .

Seja  $J(\gamma_\theta)$  o espaço de todos os campos de Jacobi sobre  $\gamma_\theta$ , que pelas considerações anteriores possui dimensão  $2 \cdot \dim(M)$ . Consideremos a aplicação

$$i_\theta : T_\theta TM \rightarrow J(\gamma_\theta)$$

$$i_\theta(\xi) = J_\xi$$

Segundo a equação anterior, dado  $\xi \in T_\theta TM$ , existe um campo de Jacobi e, assim,  $i_\theta$  é um isomorfismo linear. De fato,

1. Sejam  $\xi, \eta \in T_\theta TM$ , tal que:  $i_\theta(\xi) = J_\xi$  e  $i_\theta(\eta) = J_\eta$ . Sejam as curvas  $h_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$  e  $h_2 : (-\delta, \delta) \rightarrow TM$  curvas adaptadas a  $\xi, \eta \in T_\theta TM$ , respectivamente defina  $f(s, t) = \pi \circ \phi_t(h_1(s))$  a variação da geodésica  $\gamma_\theta(t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$  e  $g(s, t) = \pi \circ \phi_t(h_2(s))$  a variação da mesma geodésica, então:

$$J_\xi(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d_{\phi_t(\theta)} \pi \cdot d_\theta \phi_t \cdot h'_1(0) = d_{\phi_t(\theta)} d_\theta \phi_t \xi$$

Da mesma forma,

$$J_\eta(t) = \frac{\partial g}{\partial s}(0, t) = d_{\phi_t(\theta)} \pi \cdot d_\theta \phi_t \cdot h'_2(0) = d_{\phi_t(\theta)} d_\theta \phi_t \eta$$

$\Rightarrow J_\xi(t) + J_\eta(t) = d_{\phi_t(\theta)} d_\theta \phi_t (\xi + \eta) = J_{\xi+\eta}(t)$ , assim:

$$i_\theta(\xi) + i_\theta(\eta) = i_\theta(\xi + \eta)$$

2. Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e considerando as mesmas condições anteriores, temos:

$$\begin{aligned} \lambda i_\theta(\xi) &= \lambda J_\xi(t) = \lambda d_{\phi_t(\theta)} d_\theta \phi_t \xi = d_{\phi_t(\theta)} d_\theta \phi_t(\lambda \xi) = \\ &= J_{\lambda \xi}(t) = i_\theta(\lambda \xi) \end{aligned}$$

Assim pelos itens anteriores concluímos que  $i_\theta$  é uma aplicação linear. Considerando também as condições anteriores, para todo  $\xi \in T_\theta \text{TM}$ , existe um único campo de  $J_\xi \in J(\gamma_\theta)$ , com isso  $i_\theta$  é um isomorfismo linear como queríamos.

Propriedades dinâmicas do fluxo geodésico decorrem do estudo de sua linearização, isto é, da ação do fluxo no espaço tangente

$$d\phi_t(\theta) : T_\theta \text{TM} \rightarrow T_{\phi_t(\theta)} \text{TM}$$

O lema a seguir mostra a relação desta ação e os campos de Jacobi.

**Lema 2.25.** Dado  $\theta \in \text{TM}$ ,  $\xi \in T_\theta \text{TM}$  e  $t \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$d_\theta \phi_t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t))$$

*Demonstração.* Vimos que  $J_\xi(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, t)$  com  $f(s, t) = \pi \circ \phi_t(z(s))$  a variação da geodésica  $\gamma_\theta(t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_\xi(t) &= d\pi(\phi_t(\theta)) d\phi_t(\theta) \xi = d_{\phi_t(\theta)} \pi \circ d_\theta \phi_t(\xi) \\ J'_\xi(t) &= \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \phi_t(z(s))) = \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \phi_t(z(s))) \\ &= \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi_t(z(s)) = K_{\phi_t(z(0))}(d\phi_t(z'(0))) = K_{\phi_t(\theta)}(d\phi_t(\xi)) \end{aligned}$$

Pela identificação  $j_\theta(\xi) = (d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\xi))$ , conclui-se que:

$$\begin{aligned} d_\theta \phi_t(\xi) &= (d_{\phi_t(\theta)} \circ d_\theta \phi_t(\xi), K_{\phi_t(\theta)}(d\phi_t(\xi))) \\ &= (J_\xi(t), J'_\xi(t)) \end{aligned}$$

□

### 3 *Fluxos geodésicos do tipo Anosov*

Consideraremos todas as geodésicas de agora em diante com velocidade unitária, isto é,  $|\gamma'(t)| = 1$ .

Será provado que se  $M$  é uma superfície compacta com curvatura Gaussiana negativa, então o fluxo geodésico é do tipo Anosov.

Será provado também neste capítulo que o fluxo geodésico de uma variedade compacta sem pontos conjugados é Anosov, se e somente se, não existe um campo de Jacobi  $J$ , não nulo, perpendicular a uma geodésica  $\gamma$ , tal que  $\|J(t)\|$  é limitado para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se  $M$  denota uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n \geq 2$  sem pontos conjugados, então para  $\theta \in SM$ , com  $SM$  o fibrado tangente unitário, existe uma definição natural de um par de subespaços  $(n-1)$ -dimensionais  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  de  $T_\theta SM$ .

Provaremos que se  $M$  é compacta, então o fluxo geodésico em  $SM$  é do tipo Anosov se e somente se  $X_s(\theta) \cap X_u(\theta) = \{0\}$  para todo vetor  $\theta \in SM$ , no caso em que os espaços  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  são subespaços de  $T_\theta SM$ , que de acordo com as condições de Anosov são contráteis e expansíveis exponencialmente.

#### 3.1 Introdução

Uma referência para este capítulo é [6].

**Definição 3.1.** Seja  $\gamma$  uma geodésica em uma variedade  $M$ . O ponto  $\gamma(t_0)$  é *conjugado* a  $\gamma(t_1)$  ao longo de  $\gamma$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não nulo com  $J(t_0) = 0 = J(t_1)$ . Observemos que a relação "ser conjugado a" é uma relação simétrica, isto é, se  $\gamma(t_0)$  é conjugado a  $\gamma(t_1)$ , então  $\gamma(t_1)$  é conjugado a  $\gamma(t_0)$ .

**Definição 3.2.** Dizemos que  $M$  *não tem pontos conjugados* se nenhuma geodésica de  $M$  possui pontos conjugados.

**Definição 3.3.** Seja  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma sequência de geodésicas em  $M$  e  $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma sequência de

campos de Jacobi tal que  $(J_n)$  está definido sobre  $(\gamma_n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Se  $\theta_n = \gamma'_n(0)$  seja  $\xi_n \in T_{\theta_n}TM$ , assim  $J_n = J_{\xi_n}$ . Dizemos que os campos de Jacobi  $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  convergem para o campo  $J$  na geodésica  $\gamma$  se  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow \xi$  em  $T(TM)$  no qual  $\theta = \gamma'(0)$ ,  $\xi \in T_{\theta}TM$  e  $J = J_{\xi}$

**Observação 3.4.** Vemos que na definição anterior  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow \xi$  em  $T(TM)$  se e somente se  $K_{\theta}(\xi_n) \rightarrow K_{\theta}(\xi)$  e  $d_{\theta}\pi(\xi_n) \rightarrow d_{\theta}\pi(\xi)$ . Portanto  $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow J$  se só se  $\gamma'_n(0) \rightarrow \gamma'(0)$ ,  $J_n(0) \rightarrow J(0)$  e  $J'_n(0) \rightarrow J'(0)$ .

**Definição 3.5.** Para  $t \neq 0$ , definimos a *aplicação linear*

$$T_{\theta}TM \rightarrow T_{\theta}TM : \xi \mapsto \xi_t$$

para todo  $\theta \in TM$  e  $\xi \in T_{\theta}TM$  no qual  $\xi_t \in T_{\theta}TM$  é o único vetor tal que:  $d_{\theta}\pi(\xi_t) = d_{\theta}\pi(\xi)$  e  $d_{\theta}\pi \circ d\phi_t(\xi_t) = 0$

**Definição 3.6.** Para todo  $\theta \in SM$ , definamos os *subespaços*:

$$X_s(\theta) = \{\xi \in SM_{\theta} \text{ tal que: } \langle \xi, G(\theta) \rangle = 0 \text{ e } \xi_t \rightarrow \xi \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

$$X_u(\theta) = \{\xi \in SM_{\theta} \text{ tal que: } \langle \xi, G(\theta) \rangle = 0 \text{ e } \xi_t \rightarrow \xi \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

no qual,  $G(\theta) = (\gamma_{\theta}(t), \gamma'_{\theta}(t))$  é o campo geodésico conforme observação (2.9) e  $(SM)_{\theta} = T_{\theta}SM$  para  $\theta \in SM$

**Definição 3.7.** Sejam  $\gamma_{\theta}$  uma geodésica em  $M$  com velocidade inicial  $\theta$  e  $J_s(\gamma_{\theta})$  e  $J_u(\gamma_{\theta})$  as respectivas imagens em  $J(\gamma_{\theta})$  dos conjuntos  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  pela aplicação  $i_{\theta}$ .  $J_s(\gamma_{\theta})$  pode ser caracterizado como o conjunto de todos os campos de Jacobi  $J$  sobre a geodésica  $\gamma_{\theta}$  tal que  $J_t \rightarrow J$  quando  $t \rightarrow +\infty$  (idem para  $J_u(\gamma_{\theta})$ , quando  $t \rightarrow -\infty$ ) no qual  $J_t$  é definido conforme a definição (3.3). Os conjuntos  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  são chamados de subespaços estável e instável determinados por  $\theta$  e  $J_s(\gamma_{\theta})$  e  $J_u(\gamma_{\theta})$  são chamados subespaços estável e instável do campo de Jacobi ao longo de  $\gamma_{\theta}$ .

**Observação 3.8.** Seja  $\gamma_{\theta}$  uma geodésica em uma variedade  $M$ . Se  $M$  tem curvatura seccional  $K \equiv 0$  então:  $J_s(\gamma_{\theta}) = J_u(\gamma_{\theta})$  é o espaço de todos os campos de vetores perpendiculares paralelos sobre  $\gamma_{\theta}$ . No outro extremo se  $K \equiv -1$ , então  $J_s(\gamma_{\theta}) \cap J_u(\gamma_{\theta}) = \{0\}$

**Observação 3.9.** Seja  $p : N \rightarrow M$  uma *isometria local* de uma variedade Riemanniana compacta. Definimos:

$$P = dp : TN \rightarrow TM.$$

Então  $dPX_s(\theta) = X_s(P(\theta))$  e  $dPX_u(\theta) = X_u(P(\theta))$  para todo  $\theta \in SN$ . Se  $\pi_1 : TN \rightarrow N$  e  $\pi_2 : TM \rightarrow M$  são projeções, então

$$p \circ \pi_1 = \pi_2 \circ P$$

e, com isso,  $P \circ \phi_t = \phi_t \circ P$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , com  $\phi_t$  representando o fluxo geodésico entre TN e TM. Segue-se que:

$$(dP(\xi))_t = dP(\xi_t)$$

para  $\theta \in TN$ ,  $t \neq 0$ ,  $\xi \in T_\theta TM$ . Por invariância, se  $\langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$ , então

$$\langle dP(\xi), dP(G(\theta)) \rangle = \langle dP(\xi), G(P(\theta)) \rangle = 0.$$

Logo  $dPX_s(\theta) = X_s(P(\theta))$  e  $dPX_u(\theta) = X_u(P(\theta))$ .

**Proposição 3.10.** 1. Para todo  $\theta \in SM$ ,  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  são subespaços vetoriais de  $T_\theta SM$

2. Se  $S : SM \rightarrow SM$  é uma aplicação que envia o vetor  $\theta$  em  $-\theta$ , então:

$$X_u(-\theta) = dSX_s(\theta)$$

$$X_s(-\theta) = dSX_u(\theta)$$

3. Para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $\theta \in SM$ ,

$$d\phi_t X_s(\theta) = X_s(\phi_t(\theta))$$

$$d\phi_t X_u(\theta) = X_u(\phi_t(\theta))$$

*Demonstração.* 1. Para  $\theta \in SM$ , consideremos a aplicação conforme a definição (3.5)

$$T_\theta SM \rightarrow T_\theta SM : \xi \rightarrow \xi_t.$$

Claramente  $X_s(\theta) \subset T_\theta SM$ . Dados  $\xi_1, \xi_2 \in X_s(\theta)$ , então  $\xi_1, \xi_2$  são tais que  $\langle \xi_1, G(\theta) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_2, G(\theta) \rangle = 0$ ,  $\xi_t \rightarrow \xi_1$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $\xi_{t'} \rightarrow \xi_2$  quando  $t' \rightarrow +\infty$ .  $(\xi_1 + \xi_2) \in T_\theta SM$  e

$$\langle \xi_1 + \xi_2, G(\theta) \rangle = \langle \xi_1, G(\theta) \rangle + \langle \xi_2, G(\theta) \rangle = 0$$

e  $\xi_{t+t'} \rightarrow \xi_1 + \xi_2$ , quando  $(t+t') \rightarrow +\infty$ . Assim  $(\xi_1 + \xi_2) \in X_s(\theta)$ .

Dados  $\xi \in X_s(\theta)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos que:  $\lambda \xi \in T_\theta SM$  e

$$\langle \lambda \xi, G(\theta) \rangle = \lambda \langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$$

e  $\lambda \xi_t \rightarrow \lambda \xi$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Então  $\lambda \xi \in X_s(\theta)$ . Analogamente demonstramos para  $X_u(\theta)$ . Assim  $X_u(\theta)$  e  $X_s(\theta)$  são subespaços de  $T_\theta SM$

2. Para  $\xi \in T_\theta SM$  e  $t \neq 0$

$$dS(\xi_t) = (dS(\xi))_{-t}$$

Isso é uma consequência das relações:  $\pi \circ S = \pi$

$$S \circ \phi_a = \phi_{-a} \circ S$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$

3. Para provar precisamos do seguinte lema

**Lema 3.11.** Seja  $\theta \in SM$  dado, então existem números  $b > 0$  e  $t_0 > 0$ , tais que se  $\xi \in T_\theta TM$  satisfaz a seguinte relação:  $d\pi \circ d\phi_t(\xi) = 0$  para  $t \geq t_0$ , então:

$$\|K_\theta(\xi)\| \leq b \|d_\theta \pi(\xi)\|$$

*Demonstração.* Seja  $J$  um campo de Jacobi arbitrário sobre  $\gamma_\theta$ . Podemos escrevê-lo como

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t)$$

com  $J_1(t)$  sendo a componente perpendicular do campo de Jacobi e  $J_2(t)$  a componente tangencial do respectivo campo.  $J_2(t)$  é da forma:

$$J_2(t) = (\alpha t + \beta) \gamma'(t)$$

com constantes  $\alpha, \beta$  escolhidas adequadamente. Se  $J(t) = 0$  para  $t \geq t_0$ , então:

$$J_1(t) = 0 = J_2(t)$$

e assim  $J_2(t) = (\alpha t + \beta) \gamma'(t) = 0$ . Então:

$$\alpha t + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-\beta}{t}$$

$$\|J_2(0)\| = \|(\alpha \cdot 0 + \beta) \gamma'(0)\| = |\beta| \cdot \underbrace{\|\gamma'(0)\|}_{=1} = |\beta|$$

$$J_2'(t) = \alpha \gamma'(t) + \alpha t \gamma''(t) + \beta \gamma''(t)$$

$$J_2'(0) = \alpha \gamma'(0)$$

Então:

$$\|J_2'(0)\| = |\alpha| \cdot \underbrace{\|\gamma'(0)\|}_{=1} = |\alpha|$$

Assim:

$$\|J_2'(0)\| = |\alpha| \leq |\beta| = \|J_2(0)\|.$$

Para  $b \geq 1$ , temos:  $\|J_2'(0)\| \leq b \|J_2(0)\|$ . Segue com isso que usando a identificação  $j_\theta$ ,

temos:

$$\|\mathbf{K}_\theta(\xi)\| = \|J'(0)\| \leq b\|J(0)\| = b\|d_\theta\pi(\xi)\|.$$

□

Agora completamos a prova de 3. Lembremos que

$$d_\theta\pi \circ d\phi_t(\xi_t) = 0.$$

Sejam  $\theta \in \text{SM}$  e  $\xi \in T_\theta\text{SM}$  dados, e um número  $a \in \mathbb{R}$  fixo para  $t \neq 0$

$$\begin{aligned} & \|d\phi_a(\xi) - (d\phi_a(\xi))_t\| = \\ & = \|d\phi_a(\xi) - d\phi_a(\xi_{t+a}) + d\phi_a(\xi_{t+a}) - (d\phi_a(\xi))_t\| \leq \\ & \leq \|d\phi_a(\xi - \xi_{t+a})\| + \|d\phi_a(\xi_{t+a}) - (d\phi_a(\xi))_t\|. \end{aligned}$$

Se  $\psi(t) = d\phi_a(\xi_{t+a}) - (d\phi_a(\xi))_t$ , então:

$$d_\theta\pi \circ d\phi_t(\psi(t)) = d_\theta\pi \circ d\phi_t(d\phi_a(\xi_{t+a}) - (d\phi_a(\xi))_t) = 0$$

$$d_\theta\pi \circ \psi_t = d_\theta\pi \circ d\phi_a(\xi - \xi_{t+a}).$$

Se  $t \geq t_0$ , pelo lema (3.11) temos que:

$$\|\mathbf{K}_\theta(\psi_t)\| \leq b\|d_\theta\pi(\psi_t)\|$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|^2 & = \|d_\theta\pi \circ \psi(t)\|^2 + \|\mathbf{K}_\theta \circ \psi(t)\|^2 \\ & \leq \|d_\theta\pi \circ \psi(t)\|^2 + b^2\|d_\theta\pi \circ \psi(t)\|^2 \\ & = (1 + b^2)\|d_\theta\pi \circ \psi(t)\|^2. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\| & \leq (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}\|d_\theta\pi \circ \psi(t)\| \\ & = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}\|d_\theta\pi \circ (d\phi_a(\xi_{t+a}) - (d\phi_a(\xi))_t)\| \\ & = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}\|d_\theta\pi \circ d\phi_a(\xi_t - \xi_{t+a})\| \\ & = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}\|d\phi_a(\xi - \xi_{t+a})\| \end{aligned}$$

e

$$\|d\phi_a(\xi) - (d\phi_a(\xi))_t\| \leq [1 + (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}]\|d\phi_a(\xi - \xi_{t+a})\|$$

para  $t \geq t_0$ . Se  $\langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$ , então:

$$\langle d\phi_t(\xi), G(\phi_t(\theta)) \rangle = 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em particular para  $t = a$ , para  $a \in \mathbb{R}$  fixo

$$\xi \in X_s(\theta) \Leftrightarrow d\phi_a(\xi) \in X_s(\phi_a(\theta)).$$

Analogamente também se demonstra para  $X_u(\theta)$ .

□

O lema a seguir é uma chave para a demonstração da proposição que caracteriza fluxos geodésicos do tipo Anosov.

**Lema 3.12.** Seja  $M$  uma variedade compacta sem pontos conjugados cujas curvaturas Gaussianas estão limitadas inferiormente por uma constante  $-K_0^2$ , sendo que  $K_0 \geq 0$ . Com essas condições, existe uma constante  $K_1$  tal que para toda geodésica  $\gamma$  vale o seguinte:

1.  $|u_T(t)| \leq K_1$  para todo  $|t - T| \geq 1$
2. Para todo vetor  $v \in T_{\gamma(0)}M$  perpendicular a  $\gamma'(0)$ , o limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{J}_T(t) = J_v^s(t)$$

existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e é um campo de Jacobi perpendicular que nunca se anula com  $J_v^s(0) = v$

3. Da mesma forma, o limite acima quando  $T \rightarrow -\infty$  também existe e é igual a  $J_v^u(t)$ , que é um campos de Jacobi perpendicular que nunca se anula, com  $J_v^u(0) = v$
4. Os campos de Jacobi  $J_v^s(t)$  e  $J_v^u(t)$  nunca se anulam se  $v \neq 0$ , e ainda:

$$\|(J_v^s(t))'\| \leq K_0 \|J_v^s(t)\|$$

$$\|(J_v^u(t))'\| \leq K_0 \|J_v^u(t)\|$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$

*Demonstração.* Dado  $\theta = (x, w) \in SM$ , considere a geodésica  $\gamma_\theta$  com  $\gamma_\theta(0) = x$  e  $\gamma'_\theta(0) = w$ . Seja  $J$  um campo de Jacobi perpendicular a  $\gamma_\theta$ . Se  $J(0) = v$  e seja  $V(t)$  o transporte paralelo de  $v$  ao longo de  $\gamma_\theta$ , então

$$J(t) = f(t)V(t)$$



e assim

$$\begin{aligned}
J''(t) &= f''(t)V(t) \\
K(t) &= \frac{\langle \mathbf{R}(\gamma'_\theta(t), J(t))\gamma'_\theta(t), J(t) \rangle}{\|J(t) \wedge \gamma'_\theta(t)\|^2} \\
K(t) &= \frac{\langle \mathbf{R}(\gamma'_\theta(t), J(t))\gamma'_\theta(t), f(t)V(t) \rangle}{\underbrace{|\gamma'_\theta(t)|^2}_{=1} |J(t)|^2 - \underbrace{\langle \gamma'_\theta(t), J(t) \rangle}_{=0}} \\
K(t)\|J(t)\|^2 &= \langle \mathbf{R}(\gamma'_\theta(t), J(t))\gamma'_\theta(t), f(t)V(t) \rangle \\
K(t)\langle f(t)V(t), f(t)V(t) \rangle &= \langle \mathbf{R}(\gamma'_\theta(t), J(t))\gamma'_\theta(t), f(t)V(t) \rangle
\end{aligned}$$

Assim;

$$\mathbf{R}(\gamma'_\theta(t), J(t))\gamma'_\theta(t) = K(t)f(t)V(t)$$

Substituindo na equação de Jacobi temos:

$$\begin{aligned}
f''(t)V(t) + K(t)f(t)V(t) &= 0 \\
V(t)(f''(t) + K(t)f(t)) &= 0 \\
f''(t) + K(t)f(t) &= 0 \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Em que  $K(t)$  é a curvatura Gaussiana no ponto  $\gamma_\theta(t)$

Demonstraremos primeiramente os itens 2 e 3. Como, por hipótese,  $M$  não possui pontos conjugados, para cada  $T \in \mathbb{R}$ , existe uma única solução  $f_T$  tal que  $f_T(0) = 1$  e  $f_T(T) = 0$ .

Sejam  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$  tais que  $T_1 > T_2$ . Consideramos a função dada por  $h(t) = f_{T_1}(t) - f_{T_2}(t)$ . A função  $h$  é solução da equação (3.1) pois é a diferença de soluções e  $h(0) = 0$ .  $h$  não possui outros zeros, senão ela seria nula. Logo  $h(T_1), h(T_2)$ , são ambos, positivos ou negativos. Mas,

$$h(T_2) = f_{T_1}(T_2) > 0$$

pois  $T_2 \in (0, T_1)$ . Portanto,  $h > 0$  para  $t > 0$ , implicando que

$$f_{T_1}(t) > f_{T_2}(t)$$

para  $t > 0$ , conclui-se que

$$h(t) < 0$$

para  $t < 0$ . Ou seja,

$$f_{T_1}(t) < f_{T_2}(t)$$

para  $t < 0$ . O próximo passo é mostrar que quando  $T_n \rightarrow \infty$  as soluções  $f_{T_n}$  convergem unifor-

memente a uma função  $f$ . Tal função é solução da equação diferencial e nunca se anula. Antes de mostrar que essa família de funções convergem em toda reta, consideremos apenas quando  $t \leq 0$ .

Sem perda de generalidade, seja  $T_j = j$  e consideremos o intervalo  $[-1, 0]$ , restringindo a função  $f_j$  ao intervalo  $[-1, 0]$ . Nestas condições a equação de Jacobi diz que as normas das derivadas segundas são uniformemente limitadas neste intervalo. De fato,

$$\begin{aligned} |f_j''(t)| &= |K(t)f_j(t)| \\ &\leq M \sup_{t \in [-1, 0]} |f_j(t)| \\ &\leq M \sup_{t \in [-1, 0]} |f_1(t)| \leq \infty \end{aligned}$$

sendo que  $M = \sup_{t \in [-1, 0]} K(t)$ . Portanto, as derivadas segundas de  $f_j$  são todas uniformemente limitadas pela mesma constante.

A sequência  $f_j'(0)$  é crescente e limitada superiormente. De fato, pelo Teorema do Valor Médio

$$|f_j(0) - f_j(-1)| = |f_j'(c_j)|$$

para algum  $c_j \in (-1, 0)$ . Agora, tomemos uma subsequência de  $(c_j)$  que converge para algum  $a \in [-1, 0]$ , que existe já que  $[-1, 0]$  é compacto. Dessa forma, quando  $j \rightarrow \infty$  a sequência  $f_j(-1)$  converge pois é decrescente (para  $t < 0$ ,  $f_{j+1}(t) < f_j(t)$ ) e limitada inferiormente. Assim  $f_j'(c_j)$  também converge para o mesmo limite, pois se  $f_j'(c_j) \rightarrow F$ , então

$$|f_j'(a) - F| \leq |f_j'(a) - f_j'(c_j)| + |f_j'(c_j) - F|$$

Por um lado  $|f_j'(c_j) - F| \rightarrow 0$  e por outro

$$\begin{aligned} |f_j'(a) - f_j'(c_j)| &= |f_j''(\tilde{c}_j)| \cdot |a - c_j| \\ &\leq M|a - c_j| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Portanto  $f_j'(a) \rightarrow F$  e assim  $f_j'$  é limitada em  $a$ . Dado qualquer  $x \in [-1, 0]$ , novamente pelo Teorema do Valor Médio, ocorre que:

$$|f_j'(0)| \leq M|a| + |f_j'(a)|$$

Logo, pela limitação em  $a$ , concluímos a limitação em 0.

Como foi possível obter uma limitação para a sequência estritamente crescente  $f_j'(0)$ , seja  $f$  a solução da equação de Jacobi com condições iniciais  $f(0) = 1$  e  $f'(0) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j'(0)$ . Tal

solução não se anula para  $t \geq 0$ , já que, se isto acontecer, em algum ponto irá cruzar uma das soluções  $f_j$ . Observemos também que para  $t \geq 0$  as funções  $f_j$  convergem para  $f$ , graças às condições iniciais de  $f$ . Sendo assim, para  $t \geq 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$$

Para estender a solução para todo  $t \in \mathbb{R}$ , definimos a solução da equação de Jacobi  $g_{A,B}$  tal que:

$$g_{A,B}(A) = 1 \text{ e } g_{A,B}(B) = 0$$

Como consequência, temos:

$$f_T(t) = f_T(A)g_{A,B}(t) + f_T(B)g_{B,A}(t)$$

para quaisquer  $A, B \in \mathbb{R}$ . A convergência de  $f_T$  para valores positivos de  $t$  quando  $T \rightarrow \infty$  é garantida escolhendo  $A, B$  negativos.

Resta mostrar que  $f$  não se anula. É claro que quando  $t > 0$ ,  $f(t) > f_T(t)$  para todo  $T$ , e as funções  $f_T$ 's são positivas em  $(0, T)$ . Logo, neste caso,  $f$  não se anula. Suponhamos que  $f$  se anule para algum valor  $t_0 < 0$ . Sendo assim,  $f(t) < 0$  se  $t < t_0$  já que  $f$  não se anula duas vezes, e caso se anule nunca é com derivada zero pois nesse caso seria a solução nula. O fato da sequência  $\{f_T\}$  convergir para  $f$  implica que em algum momento, a partir de um certo termo da sequência, elas teriam que ser negativas também, o que é uma contradição. Assim ficam demonstrados os itens 2 e 3.

Para o item 1, definimos  $u(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$  que é solução da equação de Riccati

$$u'(t) + u(t)^2 + K(t) = 0 \quad (3.2)$$

Consideremos

$$p_{A,B}(s) = \frac{\exp(K_0(B-s)) - \exp(K_0(s-B))}{\exp(K_0(B-A)) + \exp(K_0(B-A))}$$

solução de

$$p''(t) - K_0^2 p(t) = 0 \quad (3.3)$$

com  $p_{A,B}(A) = 1$  e  $p_{A,B}(B) = 0$ . Se  $f_T$  é solução de (3.1) e  $p_{0,T} = p_T$  é solução de (3.3), então

$$\begin{aligned} (p_T f_T' - f_T p_T')' &= p_T f_T'' - f_T p_T'' \\ &= p_T(-K f_T) - f_T(K_0^2 p_T) \\ &= -(K + K_0^2) p_T f_T \end{aligned}$$

Para  $t < T$  ocorre que  $p_T$  e  $f_T$  são positivas, como por hipótese

$$K(t) + K_0^2 \geq 0$$

então

$$(p_T f_T' - f_T p_T')' \leq 0$$

e para  $t = T$

$$p_T f_T' - f_T p_T' = 0$$

Portanto,  $p_T f_T' - f_T p_T' > 0$  quando  $t < T$ , e assim

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_T'(t)}{f_T(t)} \\ &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{q_T'(t)}{q_T(t)} \\ &= -K_0^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $p_E$ , com  $E > 0$ , é solução de (3.3), então para  $t > E$ ,  $p_E'$  e  $f_T$  serão positivos, daí:

$$\begin{aligned} p_E(t) f_T'(t) - f_T(t) p_E'(t) &< p_E(E) f_T'(E) - f_T(E) p_E'(E) \\ &= -f_T(E) p_E'(E) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Com isso temos que:

$$\frac{f_T'(t)}{f_T(t)} < \frac{p_E'(t)}{p_E(t)} < K_0$$

e quando  $E \rightarrow -\infty$  obtemos que:

$$u(t) \leq K_0$$

Dessa forma,

$$|u(t)| \leq K_0$$

o que conclui a demonstração dos itens 1 e 4 □

**Proposição 3.13.** Se a curvatura seccional de  $M$  é tal que  $K > -K_0^2$  para algum  $K_0 > 0$ , então para todo  $\theta \in SM$  e todo  $\xi \in X_s(\theta)$  ou  $\xi \in X_u(\theta)$ , temos que

$$\|K_\theta(\xi)\| \leq K_0 \|d_\theta \pi(\xi)\|$$

*Demonstração.* A demonstração desse fato é consequência direta do lema anterior, bastando usarmos a identificação  $j_\theta$ . □

**Proposição 3.14.** Se a curvatura seccional de  $M$  é tal que  $K > -K_0^2$  para  $K_0 > 0$ , dado  $\theta \in SM$  e seja  $\xi \in T_\theta SM$  tal que  $\langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$  e  $\|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\|$  é limitada superiormente para todo  $t \geq 0$  (respectivamente para  $t \leq 0$ ), então  $\xi \in X_s(\theta)$  (respectivamente  $\xi \in X_u(\theta)$ )

*Demonstração.* Consideremos o caso em que

$$\|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\| \leq A$$

para  $t \geq 0$  e  $A > 0$ .

Para  $t > 0$ ,  $\xi_t \in T_\theta SM$ , pelo Lema (2.23), item (1) então o campo de Jacobi perpendicular é perpendicular de 0 a  $t$  e em todo lugar. Assim  $(\xi - \xi_t) \in T_\theta SM$ , e o campo de Jacobi no qual  $(\xi - \xi_t)$  é perpendicular a  $\gamma_\theta$  se anula em  $t = 0$ . Finalmente  $\|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi - \xi_t)\| \leq A$

$$\|\xi - \xi_t\| = \|K_\theta(\xi - \xi_t)\| \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow +\infty$ . Analogamente se mostra para  $t \leq 0$  □

Os campos  $J_v^s(t)$  e  $J_v^u(t)$  são chamados campos de Jacobi estável e instável, respectivamente.

Em uma variedade de curvatura Gaussiana constante negativa  $-a^2$ , com  $a > 0$ , tais campos são da forma

$$J_v^s(t) = \exp(-at)V(t)$$

$$J_v^u(t) = \exp(at)V(t)$$

em que  $V(t)$  é o transporte paralelo de  $v$  ao longo da geodésica  $\gamma_\theta$ .

## 3.2 Subfibrados de Green

Dado um ponto  $\theta \in SM$  e uma geodésica  $\gamma_\theta$ , o conjunto dos campos de Jacobi estáveis e instáveis definidos anteriormente, se levantam para  $T_{\gamma_\theta(t)}SM$  usando o lema (2.25).

**Definição 3.15.** Os subespaços

$$E^s(\phi_t(\theta)) = \{(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}SM; J \text{ é um campo de Jacobi estável}\}$$

$$E^u(\phi_t(\theta)) = \{(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}SM; J \text{ é um campo de Jacobi instável}\}$$

são chamados *subfibrados de Green* sobre  $\gamma_\theta$ . Para cada  $t$  fixo, os espaços  $E^s(\phi_t(\theta))$  e  $E^u(\phi_t(\theta))$  são chamados de subespaços de Green.

**Observação 3.16.** Na definição acima é usada a identificação

$$T_{\theta}SM = H(\theta) \oplus V(\theta)$$

**Observação 3.17.** Se a dimensão da variedade  $M$  é  $n$ , isto é,  $\dim(M) = n$ , os subespaços de Green tem dimensão  $n - 1$ , pois são levantamentos do espaço dos campos de Jacobi estáveis e instáveis. O espaço dos campos de Jacobi tem dimensão  $2n$ . Restringindo-se apenas aos campos perpendiculares a dimensão cai para  $2n - 1$ . Porém, os campos em questão são limites de campos que assumem um valor qualquer escolhido em um ponto e 0 em outro, assim a dimensão final é  $n - 1$ .

Uma base de  $E^u(\phi_t(\theta))$  é dada por:

$$\{(J_{s,i}(t), J'_{s,i}(t)), i = 1, \dots, n - 1\}$$

sendo que

$$\{J_{s,1}(0) = e_1, \dots, J_{s,n-1}(0) = e_{n-1}\}$$

é uma base ortonormal do espaço perpendicular a  $\gamma'_{\theta}(0)$  em  $T_{\gamma_{\theta}(0)}M$ .

Sejam  $U_{\theta}^s$  e  $U_{\theta}^u$  soluções da equação de Riccati ao longo da geodésica  $\gamma_{\theta}$ . Os subespaços de Green em  $\theta$  ficam da seguinte forma:

$$E^s(\theta) = \{(W, U_{\theta}^s(0)W) | W \in H(\theta)\}$$

$$E^u(\theta) = \{(W, U_{\theta}^u(0)W) | W \in H(\theta)\}$$

Portanto os subespaços de Green são gráficos de funções que dependem de  $\theta$  cujo domínio é o espaço horizontal. Observemos que esta dependência é contínua ao longo das órbitas do fluxo geodésico.

Os subfibrados de Green tem papel crucial na estrutura hiperbólica do fluxo geodésico.

**Proposição 3.18.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de curvatura seccional  $K$  estritamente negativa. Nessas condições os espaços  $E^s(\theta)$  e  $E^u(\theta)$  são linearmente independentes para  $\theta \in TM$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $E^s(\theta)$  e  $E^u(\theta)$  são linearmente dependentes. Neste caso, existe um campo de Jacobi  $J$  que é estável e instável ao mesmo tempo (tal campo é a interseção dos espaços). Seja  $f(t) = \|J(t)\|^2$ . Assim, temos:

$$f(t) = \|J(t)\|^2 = \langle J(t), J(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2\langle J'(t), J(t) \rangle \\
f''(t) &= 2\langle J''(t), J(t) \rangle + 2\langle J'(t), J'(t) \rangle \\
&= 2[\langle -R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), J(t) \rangle + \|J'(t)\|^2]
\end{aligned}$$

O tensor curvatura seccional do plano gerado por  $\gamma', J$  é dado por:

$$K(\gamma', J) = \frac{\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle}{\|J \wedge \gamma'\|^2}$$

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle = K(\gamma', J)\|J \wedge \gamma'\|^2$$

Assim:

$$f''(t) = -2K(t)\|J(t)\|^2 + 2\|J'(t)\|^2 \geq 0$$

pois  $K(t) < 0$ , logo  $f$  é uma função convexa, e além disso limitada pois,

$$\|J_T(t)\| \geq \|J(t)\|$$

quando  $t > 0$  ( $T < 0$ ) e  $t < 0$  ( $T > 0$ ). Portanto,  $f$  é constante. Assim, existe  $C > 0$  tal que  $0 < \|J\|^2 = C^2$ . Logo,  $f'' = 0$ , implica que:

$$0 < \|J'\|^2 = K(t)C^2$$

Absurdo, pois por hipótese  $K(t) < 0$  e  $C^2 > 0$ . □

### 3.3 Caracterização de fluxos Anosov

Agora estamos em condições de demonstrar caracterizações de quando que um fluxo geodésico é do tipo Anosov.

Vamos primeiramente definir o que é um fluxo geodésico do tipo Anosov.

**Definição 3.19.** Seja  $\phi_t : N \rightarrow N$  um fluxo  $C^\infty$  agindo sem singularidades em uma variedade compacta  $N$  de dimensão  $n \geq 3$ , o fluxo é do tipo Anosov, se satisfaz a seguinte condição: Para cada  $p \in N$ , o espaço tangente  $T_p N$  se decompõe na soma direta:

$$T_p N = X_s^*(p) \oplus X_u^*(p) \oplus Z(p)$$

no qual  $Z(p)$  é gerado pelo fluxo, isto é, está na direção do fluxo, e existem constantes  $a, b, c > 0$  tais que

(i) para todo  $\xi \in X_s^*(p)$  e  $t \geq 0$

$$\|d\phi_t(\xi)\| \leq ae^{-ct}\|\xi\|$$

e para  $t \leq 0$

$$\|d\phi_t(\xi)\| \geq be^{-ct}\|\xi\|$$

(ii) para todo  $\eta \in X_u^*(p)$  e  $t \leq 0$

$$\|d\phi_t(\eta)\| \leq ae^{ct}\|\eta\|$$

e para  $t \geq 0$

$$\|d\phi_t(\eta)\| \geq be^{ct}\|\eta\|$$

**Observação 3.20.** Se soubermos que  $X_s^*(p)$  e  $X_u^*(p)$  são invariantes pelo fluxo, basta usarmos uma das desigualdades para  $X_u^*(p)$  e uma para  $X_s^*(p)$ . Por exemplo, para  $t \geq 0$  e  $\xi \in X_s^*(p)$  temos

$$\|\xi\| = \|d\phi_{-t} \circ d\phi_t(\xi)\| \geq be^{ct}\|d\phi_t(\xi)\|$$

e, então

$$\|d\phi_t(\xi)\| \leq \frac{1}{b}e^{-ct}\|\xi\|$$

A primeira caracterização se dá com o seguinte teorema, que chamaremos de teorema de Anosov.

**Teorema 3.21.** (O Teorema de Anosov) Seja  $M$  uma superfície Riemanniana compacta com curvatura Gaussiana negativa. Suponhamos que a curvatura esteja limitada inferiormente por  $-K_0^2$  e superiormente por  $-a^2$ , sendo que  $a, K_0 \geq 0$ . Então, o fluxo geodésico é do tipo Anosov.

Antes de demonstrarmos o teorema de Anosov, precisamos do seguinte resultado.

**Lema 3.22.** Seja  $M$  é uma superfície cuja curvatura Gaussiana satisfaz

$$-a^2 \geq K \geq -K_0^2.$$

Então a norma dos campos de Jacobi estáveis e instáveis está limitada superiormente por funções exponenciais.

*Demonstração.* Seja  $N$  uma superfície de curvatura Gaussiana negativa igual a  $-a^2$  (isso pode ser obtido, por exemplo, multiplicando a métrica do plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  por uma constante convenientemente escolhida). Consideremos as geodésicas  $\gamma$  e  $\alpha$  com equações de Jacobi de  $M$  e  $N$ , respectivamente. Sejam

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0 \tag{3.4}$$

$$g''(t) - a^2g(t) = 0 \tag{3.5}$$



as equações de Jacobi associadas a essas geodésicas. Dado  $T \neq 0$ , existem únicas soluções  $f_T$  da equação (3.4), e  $g_T$  da equação (3.5) tais que:

$$f_T(0) = 1 \text{ e } f_T(T) = 0$$

$$g_T(0) = 1 \text{ e } g_T(T) = 0$$

Suponhamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f_T(t) > g_T(t)$$

para  $\varepsilon > t > 0$ . Sendo assim

$$f'_T(0) \geq g'_T(0)$$

Suponhamos que vale a igualdade  $f'_T(0) = g'_T(0)$ . Observemos que as hipóteses do Teorema de Rauch são satisfeitas, e assim pelo teorema 2.3 do Capítulo X de [4], obtemos que que:

$$f_T(t) \geq g_T(t)$$

$\forall t \in [0, T]$ . Porém, o teorema de Rauch nos diz que como  $f_T(t) = g_T(t)$ , então

$$K(t) = -a^2$$

$\forall t \in [0, T]$ . Logo  $f_T(t) = g_T(t)$  o que é uma contradição.

Para o caso em que vale a desigualdade estrita escolhemos uma nova solução de (3.4), por exemplo  $\tilde{f}$ , tal que  $\tilde{f}(0) = 1$  e  $\tilde{f}'(0) = g'_T(0)$ . O teorema de Rauch implica que

$$\tilde{f}(t) \geq g_T(t)$$

$\forall t \in [0, T]$ . Por outro lado,  $f_T(t) \geq \tilde{f}(t)$  pois  $f'_T(0) > \tilde{f}'(0)$ . Logo  $f_T(t) \geq \tilde{f}(t) \geq g_T(t)$ , o que nos dá que  $\tilde{f}(T) = 0$ . O que novamente é uma contradição, assim  $f_T(t) = \tilde{f}(t) = g_T$ . Uma contradição.

Inicialmente supusemos que  $f_T(t) > g_T(t)$  próximo do zero, mas isso pode acontecer à partir de algum  $t_0$ . A demonstração é inteiramente análoga tomando o cuidado de trocar 0 por  $t_0$  nos lugares corretos. E, finalmente

$$\exp(-at) = \lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(t) \geq \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = f^s(t)$$

O mesmo se aplica para o caso instável quando  $T \rightarrow -\infty$

□

Agora vamos demonstrar o Teorema de Anosov.

*Demonstração.* Consideremos os espaços (ver definição 3.6 e 3.15)

$$E^s(\phi_t(\theta)) = \{(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}SM; J \text{ é um campo de Jacobi estável}\}$$

$$E^u(\phi_t(\theta)) = \{(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}SM; J \text{ é um campo de Jacobi instável}\}$$

Pelo Lema (3.12)

$$\|J'_s(t)\| \leq K_0 \|J_s(t)\|$$

$$\|J'_u(t)\| \leq K_0 \|J_u(t)\|$$

Sejam  $W^s = (W_1^s, W_2^s) \in E^s(\theta)$  e  $W^u = (W_1^u, W_2^u) \in E^u(\theta)$  dois vetores. Campos de Jacobi surgem como soluções de equações diferenciais de segunda ordem, logo obtemos  $J_{s,W^s}$  e  $J_{u,W^u}$ . Finalmente, é possível estimar a norma do fluxo geodésico usando o lema (2.25). Temos, considerando que  $\|\bullet\|_S$  é a norma da métrica de Sasaki

$$\begin{aligned} \|d_\theta \phi_t(W^s)\|_S &= \|(J_{s,W^s}(t), J'_{s,W^s}(t))\|_S \\ &\leq \sqrt{\|J_{s,W^s}(t)\|^2 + \|J'_{s,W^s}(t)\|^2} \\ &\leq \sqrt{\|J_{s,W^s}(t)\|^2 + K_0^2 \|J_{s,W^s}(t)\|^2} \\ &= \sqrt{1 + K_0^2} \|J_{s,W^s}(t)\|. \end{aligned}$$

O mesmo é válido para o caso instável, bastando apenas trocar o s por u. Pela equação acima, temos:

$$\|d_\theta \phi_t(W^u)\|_S \leq \sqrt{1 + K_0^2} \|J_{u,W^u}(t)\|$$

Consideremos agora uma nova superfície  $\tilde{M}$  de curvatura constante igual a  $-a^2$ . Tal superfície, pode ser obtida por exemplo, considerando o plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  e multiplicando a métrica por uma constante conveniente. A norma dos campos de Jacobi estáveis em  $\tilde{M}$  é dada por

$$\|J_s^{V_1}(t)\| = \|V_1\| \exp(-at)$$

sendo que  $J_s^{V_1}(0) = V_1$ , e dos instáveis dada por

$$\|J_u^{V_2}(t)\| = \|V_2\| \exp(at)$$

sendo que  $J_u^{V_2}(0) = V_2$ . Utilizando o lema (3.21), temos que

$$\|J_{s,W^s}(t)\| \leq \|W_1^s\| \exp(-at)$$

e

$$\|J_{u,W^u}(t)\| \leq \|W_1^u\| \exp(at)$$

para todo  $t \geq 0$ . Como  $\|W_1\| \leq \|W\|_S$ .

$$\|d_\theta \phi_t(W^s)\|_S \leq \sqrt{1+K_0} \|W^s\|_S \exp(-at)$$

$$\|d_\theta \phi_t(W^u)\|_S \leq \sqrt{1+K_0} \|W^u\|_S \exp(at)$$

para  $t \geq 0$ . □

**Lema 3.23.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta sem pontos conjugados. Suponhamos que exista uma geodésica  $\gamma_\theta$  e um campo de Jacobi  $J$  perpendicular sobre  $\gamma_\theta$  tal que  $\|J(t)\| \leq C$  para todo  $t \geq 0$ . Então  $J$  é um campo de Jacobi estável e o vetor  $(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)} SM$  está em  $E^s(\phi_t(\theta))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Analogamente, se  $\|J(t)\| \leq C$  para todo  $t \leq 0$ , então  $J$  é um campo de Jacobi instável e o vetor  $(J(t), J'(t)) \in T_{\phi_t(\theta)}$  está em  $E^u(\phi_t(\theta))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\|J(t)\| \leq C$  para todo  $t \geq 0$ . Consideremos os campos de Jacobi tais que  $J_T(0) = J(0)$  e  $J_T(T) = 0$ . Pelo Lema (3.12) sabemos que:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_T(t) = J_v^s(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Consideremos os campos de Jacobi  $Y_T(t) = J(t) - J_T(t)$  nos quais satisfazem:

$$Y_T(0) = 0 \text{ e } \|Y_T(t)\| = \|J(t)\| \leq C$$

Assim, temos que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} Y_T'(0) = 0$$

Logo, claramente temos que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_T'(0) = J'(0)$$

e com isso,  $J_T(0) = J(0)$  para todo  $T > 0$ . Logo, temos que  $J_T(t)$  tende uniformemente em  $t$  para  $J(t)$ . Concluimos que  $J(t)$  é um campo de Jacobi estável. O caso instável é completamente análogo. □

**Definição 3.24.** Seja  $\phi : N \rightarrow N$  um fluxo  $C^\infty$  em uma variedade Riemanniana compacta  $N$ . O fluxo  $\phi_t$  é chamado *quasi-Anosov* se para todo vetor não nulo  $v \in TN$  que é linearmente independente no campo que é tangente ao fluxo tivermos:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|d\phi_t(v)\| = +\infty$$

**Lema 3.25.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta sem pontos conjugados. Se os fibrados de Green são linearmente independentes então o fluxo geodésico é quasi-Anosov

*Demonstração.* Se o fluxo geodésico não é quasi-Anosov, pelo Lema (2.25) existe um campo de Jacobi não nulo  $J(t)$  definido em alguma geodésica  $\gamma_\theta$ , que é linearmente independente para o campo vetorial geodésico, tal que  $\|J(t)\| \leq C$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Assim campos de Jacobi dividem-se em campos de Jacobi perpendiculares a  $\gamma'_\theta(t)$  e campos de Jacobi paralelos a  $\gamma'_\theta(t)$ .

Tomamos um campo de Jacobi perpendicular  $J^\perp(t)$  no qual a norma é uniformemente limitada.

Então o Lema (3.22) implica que  $J^\perp(t)$  está na interseção dos conjuntos dos campos de Jacobi estáveis e instáveis. Assim, o vetor  $(J^\perp(0), (J^\perp)'(0)) \in T_\theta SM$  está na interseção  $E^s(\theta) \cap E^u(\theta) = \{0\}$ . Então:

$$J^\perp(0) = 0$$

Assim  $J^\perp(t)$  é perpendicular a  $\gamma'_\theta(0)$  já que  $J^\perp(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , contradizendo a hipótese em  $J(t)$ .  $\square$

**Lema 3.26.** Seja  $M$  uma variedade sem pontos conjugados tal que os subfibrados de Green são linearmente independentes. Então, se  $v \in E^s(\phi_t(\theta))$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|d\phi_t(v)\| = 0$$

e se  $w \in E^u(\phi_t(\theta))$  temos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|d\phi_t(w)\| = 0$$

*Demonstração.* Pelo Lema (2.25), é suficiente mostrar a afirmação para campos de Jacobi estáveis e instáveis. Pelo Lema (3.22) sabemos que:

$$\|J(t)\| \leq L\|J(0)\|$$

para todo  $t \geq 0$ , se  $J(t)$  é um campo de Jacobi estável.

Suponhamos por contradição que  $\|J(t)\|$  não converge para zero se  $t \rightarrow +\infty$ . Então, existe uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  e uma constante  $a > 0$  tal que:

$$\|J(t_n)\| \geq a > 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos campos de Jacobi, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$J_n(t) = \frac{1}{\|J(t_n)\|} J(t + t_n)$$

Então,

$$\|J_n(t)\| \leq \frac{L}{a} \|J(0)\|$$

para todo  $t + t_n > 0$ , ou seja, para todo  $t \geq -t_n$  e  $\|J_n(0)\| = \frac{1}{\|J(t_n)\|} \|J(t_n)\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\gamma$  a geodésica no qual  $J(t)$  é definido. Seja  $\theta_n = (\gamma(t_n), \gamma'(t_n))$  uma sequência. Usando que num conjunto compacto, toda sequência possui uma subsequência convergente para um ponto neste compacto, podemos considerar uma subsequência  $(\theta_{n_k})$  com  $\theta_{n_k} \rightarrow \theta \in SM$ . Temos então uma geodésica  $\gamma_\sigma$  e um campo de Jacobi  $J_\sigma$  sobre essa geodésica, no qual a norma é uniformemente limitada em  $t \in \mathbb{R}$ . Absurdo, pois isso contradiz o lema (3.24). Então a norma de todo campo de Jacobi estável  $J(t)$  tende a zero quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Analogamente, se demonstra para o caso instável. □

Outra caracterização de fluxos geodésicos do tipo Anosov se dá com o seguinte teorema.

**Teorema 3.27.** As seguintes condições são equivalentes:

1. O fluxo geodésico em SM é do tipo Anosov
2. Não existe campo de Jacobi perpendicular não nulo  $J$  sobre a geodésica  $\gamma$  de  $M$ , tal que  $\|J(t)\|$  é limitada superiormente para todo  $t \in \mathbb{R}$

**Proposição 3.28.** Seja o fluxo geodésico em SM do tipo Anosov, então  $M$  não admite campo de Jacobi perpendicular  $J$  sobre a geodésica  $\gamma$ , tal que  $\|J(t)\|$  é limitada acima para todo  $t \in \mathbb{R}$

Esse resultado é 1. implica 2. do teorema (3.27).

*Demonstração.* Suponhamos que exista um campo de Jacobi perpendicular  $J$  sobre a geodésica  $\gamma$  tal que  $\|J(t)\| \leq c$ , para  $c > 0$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se  $\theta = (p, v)$   $\gamma'(0) = v$ , seja  $\xi \in T_\theta SM$  correspondente em  $J$ . Escolha  $K_0 > 0$  tal que a curvatura seccional satisfaz a condição  $K > -K_0^2$  (podemos fazer essa escolha, pois estamos em uma variedade compacta, então sua curvatura seccional possui máximo e mínimo), se  $J$  é perpendicular,  $\langle \xi, G(\theta) \rangle = 0$  e

$$\xi \in X_s(\theta) \cap X_u(\theta)$$

fato que segue da proposição (3.18), pois estamos considerando para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para  $t \in \mathbb{R}$  e pela invariância do fluxo

$$d\phi_t(\xi) \in X_s(\phi_t(\theta)) \cap X_u(\phi_t(\theta))$$

e pela proposição (3.13)

$$\|K \circ d\phi_t(\xi)\| \leq K_0 \|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\| \leq K_0 c$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|d\phi_t(\xi)\|^2 &= \|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 + \|K \circ d\phi_t(\xi)\|^2 \\ &\leq \|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 + K_0^2 \|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 \\ &= (1 + K_0^2) \|d_\theta \pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 \leq c^2 (1 + K_0^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$\|d\phi_t(\xi)\| \leq c(1 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Pela definição do fluxo Anosov, podemos escrever  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ , com  $\xi_1 \in X_s^*(\theta)$ ,  $\xi_2 \in X_u^*(\theta)$  e  $\xi_3 \in G(\theta)$ .

Assim  $d\phi_t G(w) = G(\phi_t(w))$  e  $\|G(w)\| = 1$ . Pela propriedade dos espaços  $X_s^*(\theta)$  e  $X_u^*(\theta)$  segue que se  $\xi_1 \neq 0$ , então  $\|d\phi_t(\xi)\| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$  enquanto que se  $\xi_2 \neq 0$ , então  $\|d\phi_t(\xi)\| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Com isso, como  $\|d\phi_t(\xi)\|$  é limitado, segue que  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . Mas isso é uma contradição, pois a única componente que restaria é  $\xi_3$ , que está na direção de  $\gamma$ , logo contraria o fato de que o campo de Jacobi  $J$  é perpendicular à geodésica  $\gamma$ .  $\square$

A recíproca da proposição acima se encontra abaixo

**Proposição 3.29.** Se  $M$  não admite um campo de Jacobi  $J$  sobre a geodésica  $\gamma$ , tal que  $\|J(t)\|$  é limitada superiormente para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então o fluxo geodésico é do tipo Anosov.

Esse resultado é 2. implica 1. do teorema (3.27).

Para demonstrarmos esse teorema precisamos de alguns resultados preliminares.

**Lema 3.30.** São equivalentes:

1. Para todo  $\theta \in SM$ ,  $X_s(\theta) \cap X_u(\theta) = \{0\}$ , no qual  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  são os subespaços da definição (3.6).
2. Para todo  $\theta \in SM$ ,

$$T_\theta SM = X_s(\theta) \oplus X_u(\theta) \oplus Z(\theta)$$

no qual  $Z(\theta)$  é o subespaço unidimensional gerado por  $G(\theta)$

*Demonstração.* Para qualquer  $\theta \in SM$ , temos que

$$T_{\theta}SM = G(\theta)^{\perp} \oplus Z(\theta)$$

com  $G(\theta)^{\perp}$  o complemento ortogonal a  $G(\theta)$ . Se  $\dim M = n$  então a dimensão de  $G(\theta)^{\perp}$  é  $2n - 2$  e,  $X_s(\theta)$  e  $X_u(\theta)$  são subespaços  $(n - 1)$ -dimensionais de  $G(\theta)^{\perp}$ . E como  $X_s(\theta) \cap X_u(\theta) = \{0\}$ , temos que:

$$G(\theta)^{\perp} = X_s(\theta) \oplus X_u(\theta).$$

Assim,

$$T_{\theta}SM = X_s(\theta) \oplus X_u(\theta) \oplus Z(\theta)$$

Segue-se assim que as condições são equivalentes.  $\square$

**Lema 3.31.** Seja  $M$  uma variedade sem pontos conjugados no qual a curvatura seccional  $K > -K_0^2$  para  $K_0 > 0$ , Suponhamos que exista uma constante  $A > 0$  e  $s_0 \geq 0$ , tal que para todo campo de Jacobi perpendicular  $J$  com  $J(0) = 0$  e para quaisquer números  $t \geq s \geq s_0$ , temos que  $\|J(t)\| \geq A\|J(s)\|$ . Seja

$$\varphi(s) = \sup\{\|d\phi_s(\xi)\|; \xi \in A_s, \|\xi\| = 1\}$$

1. Existe uma constante  $B > 0$ , tal que  $0 \leq \varphi(s) \leq B$  para todo  $s \geq 0$
2.  $\varphi(t+s) \leq \varphi(s) \cdot \varphi(t)$  para todo  $s \geq 0, t \geq 0$
3.  $\varphi(s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$

*Demonstração.* 1. Temos que

$$\begin{aligned} \|d\phi_t(\xi)\|^2 &= \|d_{\theta}\pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 + \|K \circ d\phi_t(\xi)\|^2 \\ &\leq \|d_{\theta}\pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 + K_0^2 \|d_{\theta}\pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 \\ &= (1 + K_0^2) \|d\pi \circ d\phi_t(\xi)\|^2 \\ &\leq \frac{(1 + K_0^2)}{A^2} \|d_{\theta}\pi \circ d\phi_s(\xi)\|^2 \end{aligned}$$

pois por hipótese,  $\|J(s)\| \leq (\frac{1}{A})\|J(t)\|$  para  $t \geq s$ . Logo:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|d\phi_t(\xi)\|^2 &\leq \frac{1 + K_0^2}{A^2} \|d_{\theta}\pi \circ d\phi_s(\xi)\|^2 \\ 0 \leq \|d\phi_t(\xi)\| &\leq \left[\frac{1 + K_0^2}{A^2}\right]^{1/2} \underbrace{\|\xi\|}_{=1} = \left(\frac{1 + K_0^2}{A^2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Fazendo  $B = \left(\frac{1 + K_0^2}{A^2}\right)^{1/2}$ , então  $0 \leq \|d\phi_t(\xi)\| \leq \varphi(s) \leq \left(\frac{1 + K_0^2}{A^2}\right)$  Assim,  $0 \leq \varphi(s) \leq B$

2. Para  $\xi \in A_s = \bigcup_{\theta \in \text{SM}} X_s(\theta)$  e  $s \geq 0$

$$\|d\phi_t(\xi)\| \leq \varphi(t)\|\xi\|$$

por definição.

Seja  $\xi \in A_s$ , tal que  $\|\xi\| = 1$  dados, e sejam  $s \geq 0$  e  $t \geq 0$  números arbitrários dados.

Então:

$$\|d\phi_{t+s}(\xi)\| = \|d\phi_t(d\phi_s(\xi))\| \leq \varphi(t)\|d\phi_s(\xi)\|$$

e

$$\|d\phi_{t+s}(\xi)\| \leq \varphi(t+s) \leq \varphi(t)\|d\phi_s(\xi)\| \leq \varphi(t) \cdot \varphi(s)$$

Assim,  $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) \cdot \varphi(s)$  como queríamos

3. Consequência direta do Lema (3.26)

□

**Lema 3.32.** Seja  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  uma função satisfazendo as propriedades 1., 2. e 3. do lema (3.30), então existem números  $a > 0$  e  $c > 0$ , tais que:

$$\varphi(s) \leq ae^{-cs}$$

para todo  $s \geq 0$

*Demonstração.* Pela propriedade 2. do lema (3.31):

$$\varphi(\underbrace{s + \dots + s}_{n\text{-vezes}}) = \varphi(ns) \leq \underbrace{\varphi(s) \cdot \dots \cdot \varphi(s)}_{n\text{-vezes}} = \varphi(s)^n$$

Por 3. do lema (3.31) podemos escolher  $s_0 > 0$  tal que  $\varphi(s) \leq 1/2$  para  $s \geq s_0$ .

Dado um número  $s \geq s_0$ , podemos escolher um elemento  $n \geq 1$  tal que  $s_0 \leq s/n \leq 2s_0$ . Então:

$$\frac{\ln \varphi(s)}{s} = \frac{[\ln \varphi(\frac{s}{n} \cdot n)]}{s \frac{n}{n}} = \frac{[\ln \varphi(\frac{s}{n} \cdot n)]}{\frac{s}{n} \cdot n}$$

Fazendo  $s/n = s^*$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{[\ln \varphi(s^*n)]}{s^*n} &\leq \frac{\ln \varphi(s^*)^n}{ns^*} \\ &= \frac{n \ln \varphi(s^*)}{s^*n} \\ &= \frac{\ln \varphi(s^*)}{s^*} \end{aligned}$$



Porém como  $s_0 \leq s^* \leq 2s_0$  e  $\varphi(s) \leq 1/2$  para  $s \leq s_0$ , temos que:

$$\frac{\ln \varphi(s^*)}{s^*} \leq \frac{\ln(1/2)}{s_0} = \frac{\ln(2^{-1})}{s_0} = \frac{-\ln 2}{s_0} \leq \frac{-\ln 2}{2s_0}$$

Assim:

$$\frac{\ln \varphi(s)}{s} \leq \frac{\ln \varphi(s^*)}{s^*} \leq \frac{-\ln 2}{2s_0}$$

$$\frac{\ln \varphi(s)}{s} \leq \frac{\ln 2}{-2s_0}$$

$$\ln \varphi(s) \leq \frac{s \cdot \ln 2}{-2s_0}$$

$$\ln \varphi(s) \leq (-2s_0)^{-1} s \cdot \ln 2$$

$$\ln \varphi(s) \leq \ln(2^{(-2s_0)^{-1} s})$$

$$\varphi(s) \leq 2^{(-2s_0)^{-1} s}$$

$$\varphi(s) \leq e^{\ln 2^{(-2s_0)^{-1} s}}$$

$$\varphi(s) \leq e^{(-2s_0)^{-1} s \cdot \ln 2}$$

$$\varphi(s) \leq e^{-\left(\frac{\ln 2}{2s_0}\right)s}$$

Fazemos  $c = \frac{\ln 2}{2s_0}$

□

*Demonstração da Proposição 3.29.* 1. Pelos Lemas anteriores, temos que para todo  $\theta \in \text{SM}$  e todo  $\xi \in X_s(\theta)$ ,

$$\|d\phi_t(\xi)\| \leq \varphi(t) \leq a\|\xi\|e^{-ct}$$

para todo  $t \geq 0$  com  $a > 0$  e  $c > 0$ . E

$$\|d\phi_t(\xi)\| \geq (1/a)\|\xi\|e^{-ct}$$

para todo  $t \leq 0$  com  $a > 0$  e  $c > 0$ .

2. Se  $\theta \in \text{SM}$ , e  $\eta \in X_u(\theta)$  são dados, então  $\eta = dS(\xi)$  de acordo com a proposição (3.10).

$$\begin{aligned} \|d\phi_t(\eta)\| &= \|d\phi_t(dS(\xi))\| = \|dS \circ d\phi_{-t}(\xi)\| = \|d\phi_{-t}(\xi)\| \geq \\ &\geq (1/a)\|\xi\|e^{ct} = (1/a)\|\eta\|e^{ct} \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ . Ainda,

$$\begin{aligned} \|d\phi_t(\eta)\| &= \|d\phi_t(dS(\xi))\| = \|dS \circ d\phi_t(\xi)\| = \|d\phi_t(\xi)\| \leq \\ &\leq a\|\xi\|e^{ct} = a\|\eta\|e^{ct} \end{aligned}$$

para todo  $t \leq 0$ ,  $\theta \in SM$  e  $\eta \in X_u(\theta)$ .

3. Assim para todo  $\theta \in SM$ , segue que:

$$X_s(\theta) \cap X_u(\theta) = \{0\}$$

e pelo Lema 3.30 temos que:

$$T_\theta SM = X_s(\theta) \oplus X_u(\theta) \oplus Z(\theta)$$

Assim pelos itens 1, 2 e 3 as condições de fluxo Anosov são satisfeitas. □

## 4 Fluxo Magnético

Neste capítulo, uma referência para este capítulo é [2]

### 4.1 Introdução

Seja  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional fechada, munida de uma métrica Riemanniana  $C^\infty$   $g$ , e seja  $\pi : TM \rightarrow M$  a projeção canônica. Seja  $\omega_0$  a forma simplética de  $TM$  obtida via “pull-back” da forma simplética canônica de  $T^*M$  via métrica Riemanniana.

Como no caso geodésico podemos fatorar

$$T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$$

com  $V(\theta) = \ker d_\theta(\pi)$  e  $H(\theta) = \ker K_\theta$ . Igualmente, definimos a métrica de Sasaki.

Podemos escrever  $\omega_0$  como

$$\omega_0(\xi, \eta) = \langle d\pi(\xi), K(\eta) \rangle - \langle K(\xi), d\pi(\eta) \rangle$$

Seja  $\Omega$  uma 2-forma fechada em  $M$ , e considere a nova forma simplética,  $\omega_1$  definida como:

$$\omega_1 = \omega_0 + \pi^*\Omega$$

A 2-forma  $\omega_1$  é uma forma simplética e define o que é chamado de "Estrutura Simplética Torcida".

O fluxo Hamiltoniano de  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$  definido como

$$H(p, v) = \frac{1}{2}g_p(v, v)$$

Em relação à forma simplética  $\omega_1$  dá origem a um fluxo, chamado o fluxo magnético.

Este fluxo modela o movimento de uma partícula de massa e carga unitária mediante o efeito de um campo magnético, cuja força de Lorentz  $Y : TM \rightarrow TM$  é a aplicação unicamente

determinada por:

$$\Omega_p(u, v) = \langle Y_p(u), v \rangle$$

para todo  $u, v \in TM$ .

Esse fluxo tem órbita  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ , com  $\gamma$  a geodésica magnética, ou seja,  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = Y(\gamma')$ .

Notemos que quando  $\Omega = 0$ , o fluxo magnético é o fluxo geodésico, no qual as órbitas são geodésicas. Segue que, a partir das definições, a geodésica magnética tem velocidade constante.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= 2 \langle Y(\gamma'), \gamma'(t) \rangle \\ &= 2 \Omega(\gamma', \gamma') = 0. \end{aligned}$$

Entretanto as trajetórias das geodésicas magnéticas dependem do nível de energia. Iremos restringir nossa atenção para um único nível de energia, considerando as geodésicas magnéticas de velocidade unitária.

Consideremos o fluxo magnético  $\psi^t : SM \rightarrow SM$ .

A escolha do nível de energia não é uma restrição, assim podemos estudar outros níveis de energia a partir da consideração da forma  $\Omega^* = \lambda \Omega$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Observação 4.1.** No caso geodésico se  $\gamma(t)$  é uma geodésica, então  $\gamma(ct)$  é também uma geodésica. Entretanto, isso não continua válido para o caso do fluxo magnético.

Se  $V$  é um campo de vetores ao longo da geodésica  $\gamma(t)$ ,  $V'$  irá denotar a derivada covariante  $\nabla_{\gamma'} V$ . Queremos achar uma equação de Jacobi para campos magnéticos. Para isto, consideremos uma variação de  $\gamma$  através da geodésica magnética, isto é:

$$f(t, s) = \gamma_s(t)$$

com  $\gamma_s(t)$  a geodésica magnética para  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $t \in [0, T]$ .

Consideremos:  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = Y\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ .

Usando isso e a definição do tensor curvatura podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \left( Y\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) &= \frac{D}{\partial s} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

A igualdade acima vem do lema 4.1 do capítulo 4 de [4], que nos diz que:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) V$$

Para  $V$  um campo vetorial ao longo de  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ . Se chamarmos o campo variacional  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ , então

$$\frac{D}{\partial s} \left( Y\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) = \nabla_J Y(\gamma')$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} &= \nabla_J Y(\gamma') \\ J''(t) + R(\gamma', J)\gamma' &= \nabla_J Y(\gamma') \end{aligned}$$

Porém,

$$\nabla_J Y(\gamma') = (\nabla_J Y)\gamma' + Y(\nabla_J \gamma')$$

e

$$\nabla_J \gamma' = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = J'(t)$$

Assim combinando as equações acima, temos que

$$J''(t) + R(\gamma', J)\gamma' - (\nabla_J Y)(\gamma') - Y(J') = 0 \quad (4.1)$$

que é chamada equação de Jacobi magnética.

## 4.2 Fluxo Magnético em Superfícies

Seja  $M$  uma superfície orientada, munida com a métrica  $g$ . Dado  $(x, v) \in TM$ , seja  $iv$ , o único vetor em  $T_x M$  tal que  $\{v, iv\}$  é uma base ortonormal positivamente orientada de  $T_x M$ . A forma de área  $\Omega_a$  é dada por

$$\Omega_a(u, v) = g(iu, v)$$

Uma 2-forma fechada  $\Omega$  pode ser escrita como  $\Omega = f\Omega_a$  para alguma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . A força de Lorentz  $Y$  associada com  $\Omega$  é dada por

$$Y_x(v) = f(x)iv \quad (4.2)$$

$$\Omega_x(u, v) = g_x(Y_x(u), v)$$

Segue-se da equação (4.2) que  $t \mapsto \gamma(t)$  é uma geodésica magnética se e somente se

$$\frac{D\gamma'}{dt} = Y_\gamma(\gamma') = f(\gamma)i\gamma'$$

Dados  $(x, v) \in \text{SM}$  e  $\xi \in T_{(x,v)}\text{TM}$ , seja

$$J(t) = d_{(x,v)}(\pi \circ \phi_t)(\xi)$$

Chamamos  $J$  um campo de Jacobi magnético, se  $J$  satisfaz a equação (4.1), dada por

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' - [Y(J') + (\nabla_J Y)(\gamma')] = 0 \quad (4.3)$$

com  $\gamma(t) = \pi \circ \phi_t(x, v)$  e  $R$  o tensor curvatura de  $g$ , com sinal convenientemente escolhido.

Podemos expressar  $J(t)$  como:

$$J(t) = x(t)\gamma'(t) + y(t)i\gamma'(t) \quad (4.4)$$

e supondo que  $\xi \in T_{(x,v)}\text{SM}$ , no qual implica pelo Lema (2.20) que

$$g_\gamma(J', \gamma') = 0 \quad (4.5)$$

Temos que

$$J'(t) = x'(t)\gamma'(t) + x(t)\gamma''(t) + y'(t)i\gamma'(t) + y(t)i\gamma''(t)$$

Porém,

$$\frac{D\gamma'}{dt} = f(\gamma)i\gamma'$$

e

$$i(i\gamma') = -\gamma'$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J'(t) &= x'(t)\gamma'(t) + x(t)f(\gamma)i\gamma' + y'(t)i\gamma'(t) + y(t)if(\gamma)i\gamma' \\ &= x'(t)\gamma'(t) + x(t)f(\gamma)i\gamma' + y'(t)i\gamma'(t) + y(t)f(\gamma)(-\gamma') \end{aligned}$$

Omitindo  $t$ , por conveniência, temos que

$$J'(t) = (x' - yf(\gamma))\gamma' + (xf(\gamma) + y')i\gamma'$$

Da equação (4.5), temos que

$$\begin{aligned} g_\gamma(J', \gamma') &= 0 \\ g_\gamma((x' - yf(\gamma))\gamma' + (xf(\gamma) + y')i\gamma', \gamma') &= 0 \\ (x' - yf(\gamma)) \underbrace{|\gamma'|_g^2}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

Logo,  $x' = f(\gamma)y$  e usando a equação (4.3), temos que:

$$y'' + [k(\gamma) - \lambda \langle \nabla f(\gamma), i\gamma' \rangle + \lambda^2 f^2(\gamma)]y = 0$$

De fato, sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{D}{ds} \underbrace{\left(\frac{D}{dt} \gamma'\right)}_{=fi\gamma'} \Big|_{s=0} &= \underbrace{\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J}_{=J''} + R(\gamma', J) \gamma' \end{aligned}$$

Desenvolvendo, temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds}(fi\gamma') \Big|_{s=0} &= \left(\frac{D}{ds} f\right) \Big|_{s=0} i\gamma' + 0 + fi \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{s=0} \\ &= \left(\frac{D}{ds} f\right) \Big|_{s=0} i\gamma' + fi \underbrace{\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=0}}_{=J'} \\ &= (\nabla_J f) i\gamma' + fiJ' \end{aligned}$$

Porém

$$J'' = (x' - yf)fi\gamma' + \left(\frac{D}{dt}(x' - yf)\right)\gamma' + (y' + xf)(-f\gamma') + (y'' + x'f + x \cdot \underbrace{Df(\gamma')}_{\langle \nabla f(\gamma), \gamma' \rangle})i\gamma' \quad (4.6)$$

Sabemos porém que

$$x' - yf(\gamma) = 0$$

$$x' = yf(\gamma)$$

Assim,

$$(\nabla_J f) i\gamma' + fiJ' = J'' + R(\gamma', J) \gamma'$$

$$(\nabla_{x\gamma' + yi\gamma'} f) i\gamma' + fiJ' = J'' + R(\gamma', x\gamma' + yi\gamma') \gamma'$$

Porém temos que:

1.  $\nabla_{x\gamma' + yi\gamma'} f = x\nabla_{\gamma'} f + y\nabla_{i\gamma'} f = x \cdot Df(\gamma') + y \cdot Df(i\gamma')$
2.  $fiJ' = (x' - yf)fi\gamma' + (y' + xf)(-f\gamma')$
3.  $R(\gamma', J)\gamma' = R(\gamma', x\gamma' + yi\gamma')\gamma' = \underbrace{xR(\gamma', \gamma')\gamma'}_{=0} + yR(\gamma', i\gamma')\gamma' = yR(\gamma', i\gamma')\gamma'$

Substituindo as expressões acima, tomando o produto interno  $\langle \cdot, i\gamma' \rangle$  e usando (4.6) obtemos

$$\langle (xDf(\gamma') + yDf(i\gamma'))i\gamma', i\gamma' \rangle + x'f - yf^2 =$$

$$= y'' + x'f + xDf(\gamma') + \langle yR(\gamma', i\gamma')\gamma', i\gamma' \rangle$$

$$xDf(\gamma') + yDf(i\gamma') - yf^2 = y'' + xDf(\gamma') + y\langle R(\gamma', i\gamma')\gamma', i\gamma' \rangle$$

Porém, temos que

$$k(\gamma) = \frac{\langle R(\gamma', i\gamma')\gamma', i\gamma' \rangle}{\underbrace{|\gamma'|^2}_{=1} \cdot \underbrace{|i\gamma'|^2}_{=1} - \underbrace{\langle \gamma', i\gamma' \rangle^2}_{=0}}$$

$$k(\gamma) = \langle R(\gamma', i\gamma')\gamma', i\gamma' \rangle$$

Assim, temos que

$$yDf(i\gamma') - yf^2 = y'' + yk(\gamma)$$

$$y'' + yk(\gamma) - y\langle \nabla f(\gamma), i\gamma' \rangle + yf^2(\gamma) = 0$$

$$y'' + y[k(\gamma) - \langle \nabla f(\gamma), i\gamma' \rangle + f^2(\gamma)] = 0$$

Assim,

$$x' = f(\gamma)y \quad (4.7)$$

$$y'' + y[k(\gamma) - \langle \nabla f(\gamma), i\gamma' \rangle + f^2(\gamma)] = 0 \quad (4.8)$$

Chamamos a última equação de "equação de Jacobi escalar" de  $\gamma$  e definimos a curvatura magnética como:

$$k_{mag}(x, v) = k(x) - \langle \nabla f(x), iv \rangle + f^2(x)$$

**Proposição 4.2.** Se a curvatura magnética  $k_{mag} < 0$ , então o fluxo magnético é do tipo Anosov.

A prova segue como no caso geodésico, exceto que também devemos trabalhar na direção  $x(t)\gamma'(t)$ . Para isto, fazemos

$$x^s(t) = - \int_t^{+\infty} f(\gamma(\tau))y^s(\tau)d\tau$$

$$x^u(t) = \int_{-\infty}^t f(\gamma(\tau))y^u(\tau)d\tau$$

em que  $y^s, y^u$  são soluções da equação 4.8 tais que:

$$|y^s(t)| \leq ce^{-\mu t}; \text{ para todo } t \geq 0$$

$$|y^u(t)| \leq ce^{\mu t}; \text{ para todo } t \leq 0$$

que são obtidos como no caso geodésico.

**Corolário 4.3.** Suponhamos que a curvatura  $k(x)$  e  $f(x)$  sejam constantes. Então se

$$k + f^2 < 0$$



o fluxo magnético é do tipo Anosov.

## 5 *Bilhares e Campos de Jacobi*

Vamos agora ver uma aplicação de Campos de Jacobi ao estudo do bilhar. Primeiramente vamos definir o que é a dinâmica do bilhar.

Alguns resultados deste capítulo são baseados em [5] e [14].

Inicialmente mostraremos a descrição matemática da dinâmica do bilhare e definiremos seu espaço de fases. Em seguida faremos a derivada da aplicação bilhar. Faremos uma descrição de como construímos campos de Jacobi na dinâmica do bilhar

Será provado o Teorema de Rychlik no qual versa sobre a medida de órbitas periódicas de período 3. Para a prova usaremos uma idéia mais dinâmica usando campos de Jacobi.

E por fim provaremos o Teorema de Bialy que fala sobre folheações em cáusticas suaves no domínio  $D$ .

### 5.1 *Aplicação Bilhar*

Consideremos uma partícula de massa desprezível em movimento retilíneo uniforme no interior de uma região  $D \subset \mathbb{R}^2$ , limitada por uma fronteira  $\partial D$ , com a qual a partícula sofre colisões elásticas, isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. A descrição do comportamento desta partícula é o que descreve o sistema dinâmico que damos o nome de **Bilhar**.

Seja  $\Gamma$  uma curva de  $\mathbb{R}^2$  globalmente  $C^1$ , simples, fechada e convexa. Fazemos  $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$ , com cada  $\Gamma_i$  uma curva de classe  $C^k$  com  $(k \geq 2)$  e denotemos por  $|\Gamma| = \sum |\Gamma_i|$ , o comprimento total da curva  $\Gamma$ , os extremos  $\Gamma_i$  denotaremos os pontos de cola ou bicos. A região  $D$  cujo bordo é  $\Gamma$ , denominamos **Mesa de Bilhar** e denotamos seu fecho por  $\bar{D}$ . Consideremos  $\Gamma$ , orientada no sentido anti-horário e parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,  $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$  com  $|\Gamma'(s)| = 1$ , no qual ' denota a derivada em relação a  $s$ .

Para a descrição matemática do problema podemos considerar a partícula se movimentando

com velocidade unitária  $v$ . O estado do sistema no tempo  $t$  é dado pelo ponto  $(q_t, v_t) \in \bar{D} \times S^1$ , sendo que  $q_t$  é a posição da partícula na mesa e  $v_t$  sua velocidade a partir de um estado inicial  $(q_0, v_0)$ . A partícula segue uma trajetória linear com velocidade constante  $v_0$  até sofrer uma colisão elástica com a fronteira, quando há uma mudança na direção da velocidade, determinada por uma reflexão em relação à direção tangente à curva no ponto de colisão. Assim podemos descrever esse sistema dinâmico por um fluxo:

$$\Phi^t : B \rightarrow B$$

com  $B = \bar{D} \times S^1$  com a identificação  $(q, v^-) = (q, v^+)$  nos pontos onde  $q \in \partial D$ . Nos quais  $v^-$  representa o vetor velocidade antes da colisão, e  $v^+$  representa o vetor velocidade após a colisão.

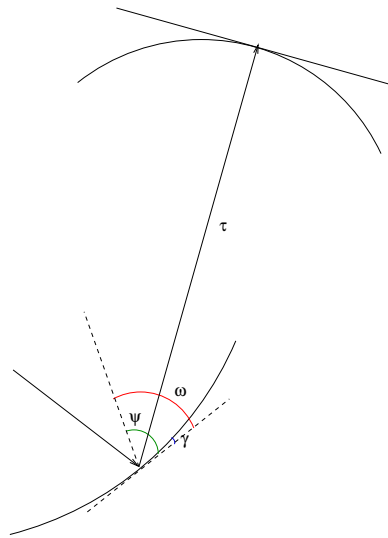


Figura 5.1: Dinâmica do Bilhar

Vamos descrever o fluxo  $\Phi^t$  em coordenadas  $(x, y, \omega)$  em  $B$ , com  $q = (x, y) \in D$ , onde  $x, y$  são coordenadas usuais cartesianas e  $\omega \in [0, 2\pi)$  denota o ângulo entre o eixo positivo  $x$  e o vetor velocidade  $v$ . Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a aplicação  $\Phi^t$  age em  $B$ , e consideremos um ponto arbitrário e sua imagem é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi^t : (x^-, y^-, \omega^-) &\longrightarrow (x^+, y^+, \omega^+) \\ x^+ &= x^- + t \cos \omega^- \\ y^+ &= y^- + t \sin \omega^- \\ \omega^+ &= \omega^- \end{aligned} \tag{5.1}$$

Seja  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_i$ , o ponto da colisão. Sejam  $s^-$  o tempo da colisão,  $s^+ = t - s^-$ ,  $T$  o vetor tangente

a  $\Gamma_i$ ,  $\psi$  o ângulo entre  $v^+$  e  $T$ , e  $\gamma$  o ângulo entre  $T$  e o eixo positivo  $x$ . Então:

$$\begin{aligned}x^- &= \bar{x} - s^- \cos \omega^- \\y^- &= \bar{y} - s^- \sen \omega^- \\ \omega^- &= \gamma - \psi\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}x^+ &= \bar{x} + s^+ \cos \omega^+ \\y^+ &= \bar{y} + s^+ \sen \omega^+ \\ \omega^+ &= \gamma + \psi\end{aligned}\tag{5.3}$$

Vamos agora derivar essas equações. Seja  $r$  o parâmetro comprimento de arco em  $\Gamma_i$ . Então:

$$\begin{aligned}d\bar{x} &= \cos \gamma dr \\d\bar{y} &= \sen \gamma dr \\d\gamma &= -kdr\end{aligned}\tag{5.4}$$

(O sinal de  $d\gamma$  é completamente determinado pela orientação de  $\Gamma_i$ , como definido anteriormente). Derivando (5.2), (5.3) temos:

$$\left\{ \begin{aligned}dx^+ &= d\bar{x} + \cos \omega^+ ds^+ - s^+ \sen \omega^+ d\omega^+ = \cos \gamma dr + \cos \omega^+ ds^+ - s^+ \sen \omega^+ d\omega^+ \\dy^+ &= d\bar{y} + \sen \omega^+ ds^+ + \cos \omega^+ d\omega^+ = \sen \gamma dr + \sen \omega^+ ds^+ + s^+ \cos \omega^+ d\omega^+ \\d\omega^+ &= d\gamma + d\psi = -kdr + d\psi\end{aligned}\right.\tag{5.5}$$

$$\left\{ \begin{aligned}dx^- &= d\bar{x} - \cos \omega^- ds^- + s^- \sen \omega^- d\omega^- = \cos \gamma dr - \cos \omega^- ds^- + s^- \sen \omega^- d\omega^- \\dy^- &= d\bar{y} - \sen \omega^- ds^- - \cos \omega^- d\omega^- = \sen \gamma dr - \sen \omega^- ds^- - s^- \cos \omega^- d\omega^- \\d\omega^- &= d\gamma - d\psi = -kdr - d\psi\end{aligned}\right.\tag{5.6}$$

Vamos agora construir o espaço de fases do sistema. A dinâmica preserva a norma, assim podemos considerar  $\|v\| = 1$ . Então o espaço de fases do sistema será

$$\mathcal{M} = \bar{D} \times S^1$$

Com  $\bar{D}$  sendo o fecho da mesa do bilhar  $D$ , e  $S^1$  é o círculo unitário de todos os vetores velocidade.

Para todo  $q \in \partial D$  os pontos  $(q, v^-)$  e  $(q, v^+)$  são relacionados por:

$$v^+ = v^- - 2\langle v^-, n(q) \rangle n(q)$$

em que  $\langle ; \rangle$  é o produto escalar e  $n(q)$  é o vetor normal unitário apontando para dentro no bordo  $\partial D$  da mesa  $D$  no ponto  $q$ .

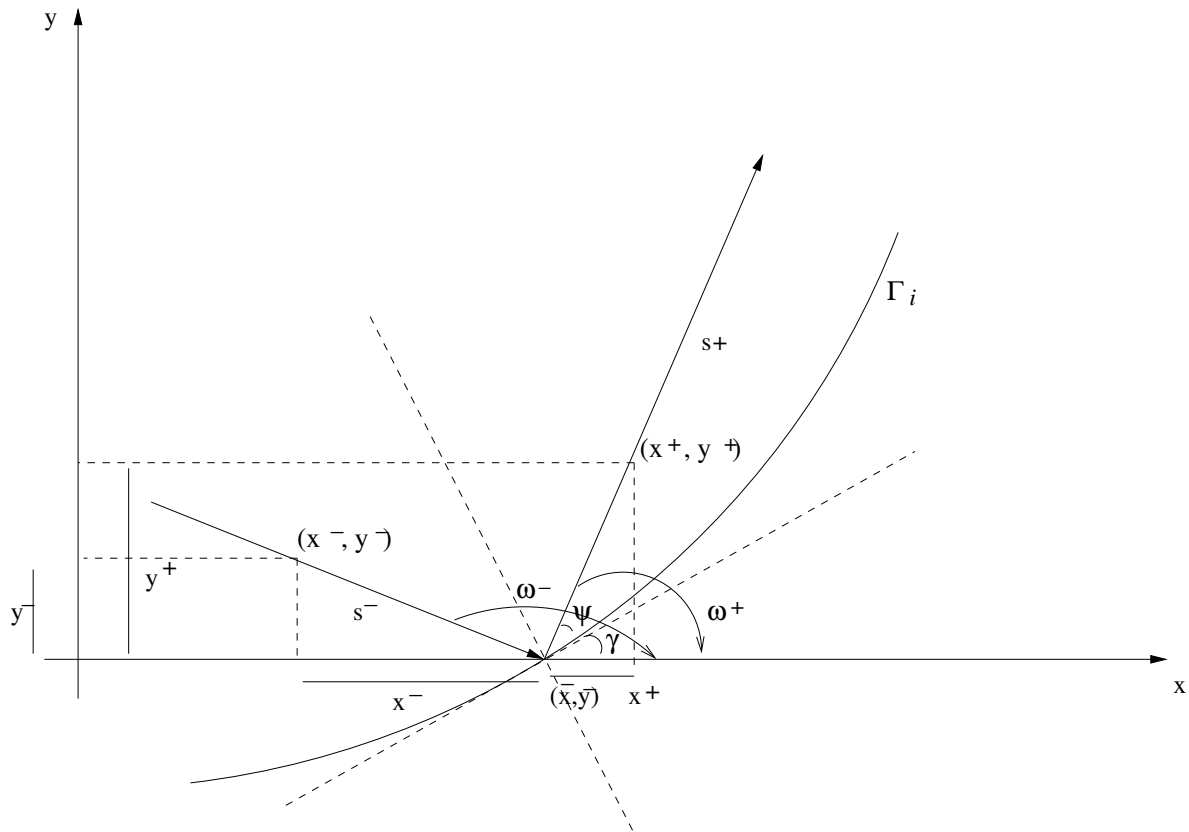


Figura 5.2: Esquema das fórmulas

Vamos reduzir o estudo do fluxos a aplicações construindo seções transversais. As seções transversais são hipersuperfícies para o fluxo. Para o fluxo  $\Phi^t$ , uma hipersuperfície em  $B$  pode ser construída com a ajuda da fronteira da mesa  $D$ . Seja

$$M = \{x = (q, v) \in B; q \in \partial D, \langle v, n(q) \rangle \leq 0\}$$

Isto é uma subvariedade bi-dimensional em  $B$  consistindo de todos os possíveis vetores velocidade de saída, resultantes da reflexão com  $\partial D$ . Alguma trajetória do fluxo  $\Phi^t$  atravessa a superfície  $M$  toda vez que é refletido em  $\partial D$ .

Isto define a aplicação de retorno  $T : M \rightarrow M$  por

$$Tx = \Phi^{\tau(x)+0}_x$$

com  $\tau(x) = \min\{t > 0; \Phi^{t+0}_x \in M\}$ .

A aplicação  $T$  é chamada aplicação do bilhar.

Introduzimos as coordenadas  $(r, \varphi)$  em  $M$ , no qual  $r$  denota o comprimento de arco para o parâmetro  $\partial D$  e  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$  o ângulo entre o vetor velocidade  $v$  e a normal  $n(q)$ .

## 5.2 A Derivada da Aplicação do Bilhar

Vamos agora determinar a aplicação  $T$  no ponto  $x = (r, \varphi) \in \text{int}B$ . Denotemos por  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial D$  e  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \partial D$  os pontos da fronteira correspondentes a  $r$  e  $r_1$ , respectivamente, por  $\omega$  o ângulo entre a trajetória do bilhar e o eixo positivo  $x$  em  $\mathbb{R}^2$ . Então,

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - \bar{x} = \tau \cos \omega \\ \bar{y}_1 - \bar{y} = \tau \sin \omega \end{cases} \quad (5.7)$$

em que  $\tau = \tau(x)$  é a geodésica entre  $(\bar{x}, \bar{y})$  e  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ . Usamos  $\gamma$  e  $\psi$  conforme definidos anteriormente

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Recordemos que

$$\begin{cases} d\bar{x} = \cos \gamma dr \\ d\bar{y} = \sin \gamma dr \\ d\gamma = -kdr \end{cases} \quad (5.8)$$

Notações similares  $\gamma_1$  e  $\psi_1$  são usadas no ponto  $(r_1, \varphi_1)$ . Notemos que

$$\omega = \gamma + \psi = \gamma_1 - \psi_1 \quad (5.9)$$

Derivando as últimas equações dadas

$$d\omega = -kdr + d\psi = -k_1 dr_1 - d\psi_1 \quad (5.10)$$

Derivando (5.7), temos que:

$$\begin{cases} d\bar{x}_1 - d\bar{x} = \cos \tau - \tau \sin \omega d\omega \\ d\bar{y}_1 - d\bar{y} = \sin \tau + \tau \cos \omega d\omega \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \cos \gamma_1 dr_1 - \cos \gamma dr = \cos \tau - \tau \sin \omega d\omega \\ \sin \gamma_1 dr_1 - \sin \gamma dr = \sin \tau + \tau \cos \omega d\omega \end{cases} \quad (5.12)$$

Multiplicando a primeira equação por  $-\sin \omega$  e a segunda por  $\cos \omega$ , temos:

$$\begin{cases} -\sin \omega \cos \gamma_1 dr_1 + \cos \gamma \sin \omega dr = -\sin \omega \cos \omega d\tau + \tau \sin^2 \omega \\ \sin \gamma_1 \cos \omega dr_1 - \cos \omega \sin \gamma dr = \sin \omega \cos \omega d\tau + \tau \cos^2 \omega d\omega \end{cases} \quad (5.13)$$

Somando as equações acima, temos

$$(\sin \gamma_1 \cos \omega - \sin \omega \cos \gamma_1) dr_1 + (\cos \gamma \sin \omega - \cos \omega \sin \gamma) dr = \tau d\omega$$

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\gamma_1 - \omega)dr_1 + \text{sen}(\omega - \gamma)dr &= \tau d\omega \\
\text{sen}\psi_1 dr_1 + \text{sen}\psi dr &= \tau d\omega
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Resolvendo (5.10) e (5.14) para  $dr_1$  e  $d\psi_1$  e considerando que  $\psi = \pi/2 - \varphi$  e  $\psi_1 = \pi/2 - \varphi_1$ , temos

$$\begin{aligned}
\text{sen}\psi_1 dr_1 + \text{sen}\psi dr &= \tau(-kdr + d\psi) \\
\text{sen}\psi_1 dr_1 &= -\text{sen}\psi dr - \tau kdr + \tau d\psi \\
-\text{sen}\psi_1 dr_1 &= (\text{sen}\psi + \tau k)dr + \tau d\psi
\end{aligned}$$

Resolvendo para  $d\psi_1$ , teremos

$$-\text{sen}\psi_1 d\psi_1 = (\tau k k_1 + k \text{sen}\psi_1 + k_1 \text{sen}\psi)dr - (\tau k_1 + \text{sen}\psi_1)d\psi$$

Assim, colocando na forma matricial temos

$$D_x T = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{bmatrix} \tau k + \cos \varphi & \tau \\ \tau k k_1 + k \cos \varphi_1 + k_1 \cos \varphi & \tau k_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Este fato se deve a  $\text{sen}\psi_1 = \cos \varphi_1$  e  $\text{sen}\psi = \cos \varphi$ .

**Lema 5.1.** A aplicação  $T$  do bilhar preserva a medida

$$\mu = \cos \varphi ds d\varphi$$

### 5.3 Campos de Jacobi e o fluxo do bilhar

Vamos agora fazer uma discussão para o fluxo do bilhar  $\Phi^t : B \rightarrow B$ , em termos de campos de Jacobi. Nossa análise sugere um sistema de coordenadas no espaço tangente 3D  $(d\eta, d\xi, d\omega)$  em  $T_x B$  com:

$$\begin{aligned}
d\eta &= \cos \omega dx + \omega dy \\
d\xi &= -\omega dx + \cos \omega dy
\end{aligned}$$

Chamamos essas coordenadas de coordenadas de Jacobi. Notemos que  $d\eta$  é a componente do vetor  $(dx, dy)$  ao longo do vetor velocidade  $v$  e  $d\xi$  é a componente ortogonal.

Para cada ponto  $q \in B$  do fluxo do bilhar, observamos também que o espaço tangente  $T_q B$  se decompõe numa soma direta de subespaços  $D\Phi^t$ -invariantes. De fato, consideremos

$$T_q^0 B = \{c(\omega, \cos \omega, 0); c \in \mathbb{R}\}$$

o espaço vetorial unidimensional na direção do fluxo e

$$T_q^\perp B = \{dq : - + \cos \omega dy = 0\}$$

o seu complemento ortogonal de dimensão 2.

Agora vamos descrever o campo de Jacobi ao longo das trajetórias do bilhar. Consideremos uma família de órbitas do bilhar:

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon, t) = \gamma(\varepsilon) + v(\varepsilon)t$$

com  $-\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  e  $-\infty < t < +\infty$ .

O campo de Jacobi é definido como

$$J(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \gamma'(\varepsilon) + v'(\varepsilon)t \Big|_{\varepsilon=0}$$

o que implica que:

$$J(t) = \gamma'(0) + v'(0)t$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J &= v'(0) \\ \frac{d^2}{dt^2}J &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

A última é uma equação de Jacobi, pois a curvatura do plano é igual a zero.

Para um ponto no espaço de fases, os campos de Jacobi formam o subespaço tangente, e pode ser identificado com o par de vetores  $(J(0), J'(0)) = (\gamma'(0), v'(0))$ . Vamos considerar campos de Jacobi para os quais  $J(0) = \gamma'(0)$  é ortogonal ao vetor velocidade  $v(0)$ . Notemos que  $J'(t) = v'(0)$  é automaticamente ortogonal a  $v(0)$ . Escrevendo na forma matricial, o desenvolvimento de  $(J, J')$ , se não houverem colisões com a fronteira, é dado por

$$\begin{pmatrix} J(t) \\ J'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Voltemos a considerar as coordenadas  $(d\eta, d\xi, d\omega)$  no espaço tangente  $T_x B$  com:

$$\begin{aligned} d\eta &= \cos \omega dx + \sin \omega dy \\ d\xi &= -\sin \omega dx + \cos \omega dy \end{aligned} \tag{5.18}$$

Para  $dX = (d\eta, d\xi, d\omega)$  denotamos por  $dX_t = (d\eta_t, d\xi_t, d\omega_t)$ .  $D_X \Phi^t$  é a imagem da aplicação



linear  $(d\eta, d\xi, d\omega) \mapsto (d\eta_t, d\xi_t, d\omega_t)$  e é dada pela matriz  $3 \times 3$

$$D_X \Phi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

com o bloco inferior direito  $2 \times 2$  correspondente à transformação  $(d\xi, d\omega) \mapsto (d\xi_t, d\omega_t)$ .  
Como

$$T_X B = T_X^0 B \oplus T_X^\perp B$$

restringindo agora a aplicação  $D_X \Phi^t$  ao subespaço  $T_X^\perp B$  com coordenadas de Jacobi  $(d\xi, d\omega)$ .  
Denotamos essa restrição por

$$D_X^\perp \Phi^t : T_X^\perp B \rightarrow T_{\Phi^t(X)}^\perp B$$

Usando as equações (5.5) e (5.6), temos que:

$$\begin{aligned} d\xi^- &= -\text{sen}\omega^- (\cos\gamma dr - \cos\omega^- ds^- + s^- \text{sen}\omega^- d\omega^-) + \\ &\quad + \cos\omega^- (\text{sen}\gamma dr - \text{sen}\omega^- ds^- - s^- \cos\omega^- d\omega^-) \\ &= \text{sen}(\gamma - \omega^-) dr - s^- d\omega^- \\ &\quad \cos\varphi dr - s^- d\omega^- \\ d\omega^- &= -kdr + d\varphi \\ d\xi^+ &= -\text{sen}\omega^+ (\cos\gamma dr + \cos\omega^+ ds^+ - s^+ \text{sen}\omega^+ d\omega^+) + \\ &\quad + \cos\omega^+ (\text{sen}\gamma dr + \text{sen}\omega^+ ds^+ + s^+ \cos\omega^+ d\omega^+) \\ &= -\text{sen}(\gamma - \omega^+) dr + s^+ d\omega^+ \\ &= -\cos\varphi dr + s^+ d\omega^+ \\ d\omega^+ &= -kdr - d\varphi \end{aligned}$$

Relembramos que  $\psi + \varphi = \pi/2$ ,  $d\psi = -d\varphi$ . Tomando  $s^+ = s^- = 0$  para expressar a ação do fluxo no tempo de colisão, e eliminando  $dr$  e  $d\varphi$  nas equações anteriores, temos

$$d\xi^+ = -d\xi^-$$

e

$$\begin{aligned} d\omega^- + d\omega^+ &= -2kdr \\ d\omega^+ &= -2kdr - d\omega^- \\ d\xi^- &= \cos\varphi dr - s^- d\omega^- \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
d\xi^- + s^- d\omega^- &= \cos\varphi dr \\
dr &= \frac{d\xi^- + s^- d\omega^-}{\cos\varphi}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Substituindo (5.21) em (5.20), temos que:

$$d\omega^+ = \frac{-2kd\xi^-}{\cos\varphi} - \underbrace{\frac{2ks^- d\omega^-}{\cos\varphi}}_{=0} - d\omega^-$$

pois estamos considerando  $s^- = 0$ , então

$$d\omega^+ = -\frac{2k}{\cos\varphi} d\xi^- - d\omega^-$$

que colocando na forma matricial encontramos:

$$\begin{pmatrix} d\xi^+ \\ d\omega^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{-2k}{\cos\varphi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi^- \\ d\omega^- \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

que denota a transformação do campo de Jacobi transversal  $(J, J')$  após uma colisão com a fronteira.

## 5.4 Teorema de Rychlik

Em [12] foi provado que o conjunto de órbitas periódicas de período 3 da aplicação do bilhar tem medida nula. Sua prova requeria métodos computacionais. Em [14], Wojtkowski prova o mesmo resultado usando campos de Jacobi. Primeiro ele prova o seguinte resultado: *As órbitas periódicas de período 3 da aplicação do bilhar não possuem vizinhanças formadas por órbitas periódicas de período 3.*

É na prova desse resultado que ele usa campos de Jacobi. A partir daí, ele argumenta que *O conjunto de órbitas periódicas de período 3 precisa ter medida nula.*

Nesta seção, seguiremos [14] para provarmos o seguinte resultado:

**Teorema 5.2.** As órbitas periódicas de período 3 da aplicação do bilhar não possuem vizinhanças formadas por órbitas periódicas de período 3.

Antes de demonstrarmos esse teorema precisamos do seguinte lema.

**Lema 5.3.** O perímetro das órbitas periódicas de período 3 é constante.

*Demonstração.* Sejam  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização pelo comprimento de arco de  $\partial D$ , isto

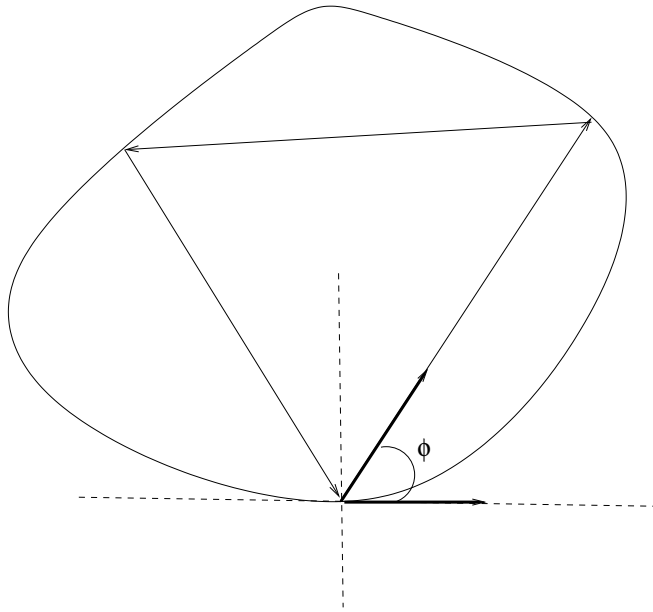


Figura 5.3: Órbita periódica de período 3

é  $\|\frac{dh}{ds}\| = 1$  e  $h(x), h(y), h(z)$  os respectivos pontos de batida na fronteira  $\partial D$  da mesa do bilhar  $D$ . Considere  $\tau(x, y) = \|h(y) - h(x)\|$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) &= -\frac{h(y) - h(x)}{\|h(y) - h(x)\|} \cdot \frac{dh}{ds} \Big|_{s=x} = \\ &= -\frac{\frac{h(y) - h(x)}{\|h(s) - h(x)\|} \cdot \frac{dh}{ds} \Big|_{s=x}}{\|\frac{h(y) - h(x)}{h(s) - h(x)}\| \cdot \|\frac{dh}{ds}\|} \\ &= -\cos \phi \end{aligned}$$

sendo  $\phi$  o ângulo entre a tangente à fronteira  $\partial D$  e a semi-reta de  $h(x)$  a  $h(y)$ . E

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x}(z, x) &= \frac{h(z) - h(x)}{\|h(z) - h(x)\|} \cdot \frac{dh}{ds} \Big|_{s=x} \\ &= \frac{\frac{h(z) - h(x)}{\|h(s) - h(x)\|} \cdot \frac{dh}{ds} \Big|_{s=x}}{\|\frac{h(z) - h(x)}{h(s) - h(x)}\| \cdot \|\frac{dh}{ds}\|} \\ &= \cos \phi \end{aligned}$$

Seja agora a função  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \tau(x, y) + \tau(y, z) + \tau(z, x).$$

Então temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z)}{\partial x} = \tau_x(x, y) + \tau_x(y, z) + \tau_x(z, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_x(x, y) + 0 + \tau_x(z, x) \\
&= \tau_x(x, y) - \tau_x(x, y) = 0
\end{aligned}$$

Analogamente se demonstra que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, z)}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

Portanto  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é constante. □

*Demonstração.* Teorema 5.2

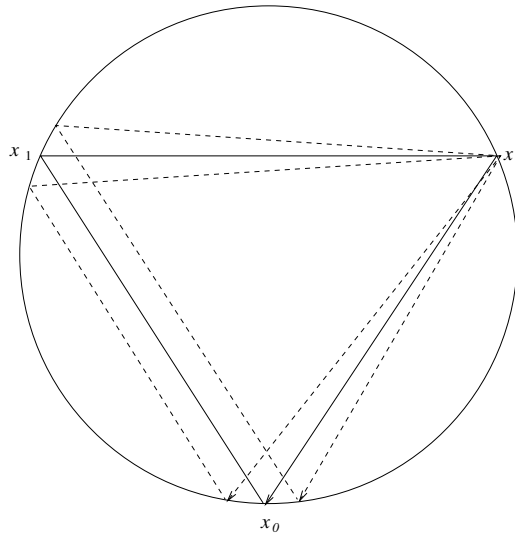


Figura 5.4: Órbitas de período 3

Suponhamos que exista uma órbita periódica de período 3 com  $\{x_0, x_1, x_2\}$  os pontos da fronteira  $\partial D$  com  $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ , o ângulo de incidência nos pontos  $x_0, x_1, x_2$  respectivamente, tal que existe uma vizinhança formada por órbitas periódicas de período 3. Temos que  $\Phi^3$  e  $d\Phi^3$  são iguais à identidade na vizinhança de  $x_0$  e sejam:

- $\tau(x_0)$  = a trajetória entre  $x_0$  e  $x_1$
- $\tau(x_1)$  = a trajetória entre  $x_1$  e  $x_2$
- $\tau(x_2)$  = a trajetória entre  $x_2$  e  $x_0$

Formulando a última propriedade na linguagem de campos de Jacobi e considerando  $d(x) = \frac{\cos \varphi}{k(s)}$ ,

$$P(\tau(x)) = \begin{pmatrix} 1 & \tau(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$R(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{d(x)} & -1 \end{pmatrix}$$

temos então que

$$P(\tau(x_0)) \cdot R(x_0) \cdot P(\tau(x_2)) \cdot R(x_2) \cdot P(\tau(x_1)) \cdot R(x_1) = Id_{2 \times 2}$$

Ou seja,

$$P(\tau(x_0)) \cdot R(x_0) \cdot P(\tau(x_2)) = [R(x_1)]^{-1} \cdot [P(\tau(x_1))]^{-1} \cdot [R(x_2)]^{-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \tau(x_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{-2}{d(x_0)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau(x_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{-2}{d(x_1)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau(x_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{d(x_2)} & -1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2\tau(x_0)}{d(x_0)} & -\tau(x_0) \\ -\frac{2}{d(x_0)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau(x_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -1 & -\tau(x_1) \\ -\frac{2}{d(x_1)} & \frac{2\tau(x_1)}{d(x_1)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{d(x_2)} & -1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2\tau(x_0)}{d(x_0)} & -\tau(x_2) + \frac{2\tau(x_0)\tau(x_2)}{d(x_0)} - \tau(x_0) \\ -\frac{2}{d(x_0)} & -\frac{2\tau(x_2)}{d(x_0)} - 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\tau(x_1)}{d(x_2)} & -\tau(x_1) \\ \frac{2}{d(x_1)} - \frac{4\tau(x_1)}{d(x_1)d(x_2)} + \frac{2}{d(x_2)} & -\frac{2\tau(x_1)}{d(x_1)} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pela igualdade de matrizes, e comparando os elementos da 1ª linha e 2ª coluna de cada matriz temos:

$$\begin{aligned} -\tau(x_2) + \frac{2\tau(x_0)\tau(x_2)}{d(x_0)} - \tau(x_0) &= -\tau(x_1) \\ \tau(x_0) - \tau(x_1) + \tau(x_2) &= \frac{2\tau(x_0)\tau(x_2)}{d(x_0)} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Seja

$$L = \tau(x_0) + \tau(x_1) + \tau(x_2)$$

Seja  $\theta$  o ângulo entre os lados  $\tau(x_0)$  e  $\tau(x_2)$  do triângulo de lados  $\tau(x_0)$ ,  $\tau(x_1)$ ,  $\tau(x_2)$ , Pela lei dos cossenos para triângulos,

$$2\varphi_0 + \theta = \pi$$

$$2\varphi_0 = \pi - \theta$$

e, então

$$\tau(x_1)^2 = \tau(x_0)^2 + \tau(x_2)^2 - 2\tau(x_0)\tau(x_2)\cos\theta$$

Mas,

$$\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi_0))$$

$$2\cos^2\varphi_0 = 1 + \cos(2\varphi_0)$$

$$2\cos^2\varphi_0 - 1 = \cos(\pi - \theta)$$

$$2\cos^2\varphi_0 - 1 = -\cos\theta$$

Voltando à equação anterior, temos então que:

$$\tau(x_1)^2 = \tau(x_0)^2 + \tau(x_2)^2 + 2\tau(x_0)\tau(x_2)(2\cos^2\varphi_0 - 1)$$

$$\tau(x_1)^2 = \tau(x_0)^2 + \tau(x_2)^2 + 2\tau(x_0)\tau(x_2)[2(1 - \sin^2\varphi_0) - 1]$$

$$\tau(x_1)^2 = \tau(x_0)^2 + \tau(x_2)^2 + 2\tau(x_0)\tau(x_2)[2 - 2\sin^2\varphi_0 - 1]$$

$$\tau(x_1)^2 - \tau(x_0)^2 - \tau(x_2)^2 - 2\tau(x_0)\tau(x_2) = -4\tau(x_0)\tau(x_2)\sin^2\varphi_0$$

$$\tau(x_0)^2 + \tau(x_0)\tau(x_2) - \tau(x_0)\tau(x_1) + \tau(x_0)\tau(x_1) + \tau(x_1)\tau(x_2) -$$

$$- \tau(x_1)^2 + \tau(x_2)\tau(x_0) + \tau(x_2)^2 - \tau(x_1)\tau(x_2) =$$

$$= 4\tau(x_0)\tau(x_2)\sin^2\varphi_0$$

$$\underbrace{(\tau(x_0) + \tau(x_1) + \tau(x_2))}_{=L}(\tau(x_0) + \tau(x_2) - \tau(x_1)) = 4\tau(x_0)\tau(x_2)\sin^2\varphi_0$$

$$\tau(x_0) - \tau(x_1) + \tau(x_2) = \frac{4\tau(x_0)\tau(x_2)\sin^2\varphi_0}{L} \quad (5.24)$$

Combinando (5.23) e (5.24) obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{2\tau(x_0)\tau(x_2)}{d(x_0)} &= \frac{4\tau(x_0)\tau(x_2)\text{sen}^2\varphi_0}{L} \\ \frac{1}{d(x_0)} &= \frac{2\text{sen}^2\varphi_0}{L} \\ \frac{k(s_0)}{\cos\varphi_0} &= \frac{2\text{sen}^2\varphi_0}{L} \\ k(s_0) &= \frac{2\text{sen}^2\varphi_0\cos\varphi_0}{L} \\ k(s_0) &= \frac{2 - 2\cos^3\varphi_0}{L}\end{aligned}\tag{5.25}$$

Essa relação da curvatura do bordo tem que valer para todas as órbitas periódicas próximas, em particular para órbitas começando do mesmo ponto porém com vetor velocidade diferente  $(s_0, \varphi)$  com  $\varphi$  próximo de  $\varphi_0$ . Mas, isto é impossível pois pelo Lema (5.3)  $L$  é constante e, então a função (5.25) não é constante em nenhum intervalo. Em resumo se mudarmos  $\varphi_0$  na função (5.25) ela se modifica, o que é absurdo, pois o ponto de partida é o mesmo e teria que conservar a curvatura.  $\square$

## 5.5 O Teorema de Bialy

**Definição 5.4.** Uma *cáustica*, em bilhares é uma curva tal que se um segmento da trajetória da bola do bilhar é tangente a esta curva então também o é a cada segmento refletido da mesma trajetória. Por exemplo, o interior de um disco com o centro removido é folheado por cáusticas suaves, os círculo concêntricos.

Nesta seção provaremos seguindo [14] o seguinte resultado de Bialy [1], usando **campos de Jacobi**.

**Teorema 5.5.** Se o domínio  $Q$  é folheado por cáusticas suaves de tal maneira que quase toda órbita é tangente a uma cáustica, então  $Q$  é um disco.

*Demonstração.* Fixemos  $x \in B$  a correspondente órbita do bilhar tangente a uma cáustica suave. Denotemos por  $l(x)$  a distância entre o ponto da fronteira e o ponto de tangência mais próximo no passado com a cáustica suave.

O ponto mais próximo de tangência no futuro é então igual a  $\tau(x) - l(T(x))$ .

O campo de Jacobi transversal obtido de nossa variação por geodésicas (usando órbitas

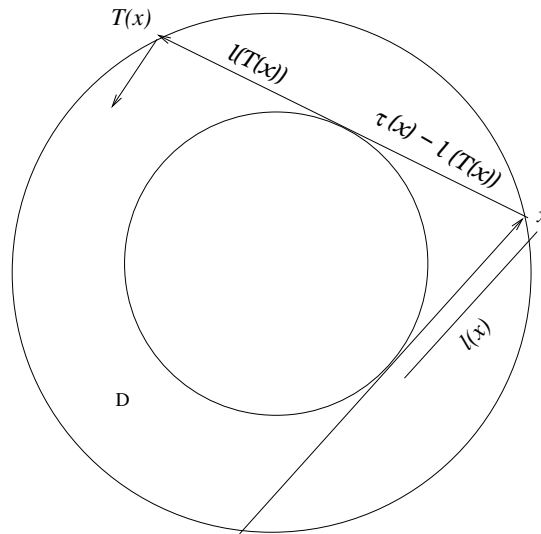


Figura 5.5: Esquema do teorema de Bialy

tangentes próximas a alguma cáustica suave) se anula nos pontos de tangência. Assim usando as matrizes correspondentes temos que:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & \tau(x) - l(T(x)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{d(x)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2\tau(x)}{d(x)} - \frac{2l(T(x))}{d(x)} & -\tau(x) + l(T(x)) \\ \frac{2}{d(x)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} -l(x) + \frac{2\tau(x)l(x)}{d(x)} - \frac{2l(T(x))l(x)}{d(x)} - \tau(x) + l(T(x)) \\ \frac{2l(x)}{d(x)} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \star \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Da 1ª linha da matriz acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 & -l(x) + \frac{2\tau(x)l(x)}{d(x)} - \frac{2l(T(x))l(x)}{d(x)} - \tau(x) + l(T(x)) = 0 \\
 & -l(x)d(x) + 2\tau(x)l(x) - 2l(T(x))l(x) - \tau(x)d(x) + l(T(x))d(x) = 0 \\
 & d(x)[-l(x) - \tau(x) + l(T(x))] = -2\tau(x)l(x) + 2l(T(x))l(x) \\
 & d(x) = \frac{-2l(x)[\tau(x) - l(T(x))]}{-[l(x) + \tau(x) - l(T(x))]} \\
 & d(x) = \frac{2l(x)[\tau(x) - l(T(x))]}{l(x) + \tau(x) - l(T(x))}
 \end{aligned}$$

que é a equação clássica do espelho de ótica geométrica.



Temos que a média harmônica entre 2 números positivos  $x_1, x_2$  é dada por:

$$H = \frac{x_1 x_2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

e a média aritmética é  $At = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Então temos que  $H \leq At$ . Com isso temos que

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Fazendo  $x_1 = l(x) > 0$  e  $x_2 = \tau(x) - l(T(x)) > 0$ , temos:

$$\underbrace{\frac{2l(x)[\tau(x) - l(T(x))]}{l(x) + [\tau(x) - l(T(x))]}_{=d(x)} \leq \frac{l(x) + \tau(x) - l(T(x))}{2}$$

$$2d(x) \leq l(x) + \tau(x) - l(T(x)) \quad (5.26)$$

Agora obteremos a conclusão por integração em (5.26) e comparando com a Desigualdade Isoperimétrica (Veja seção 1.5). Continuando, temos que integrando o lado direito de (5.26), usando a medida  $\mu(x)$ , obtemos:

$$\int_{\mu} [\tau(x) + l(x) - l(T(x))] d\mu(x) = \int_{\mu} \tau(x) d\mu(x)$$

$$= 2\pi A$$

Estamos usando o fato que  $l(x)$  é limitado e está definido para todo domínio  $B$ . A integração do lado esquerdo nos dá:

$$\int_B 2d(x) d\mu(x) = \int_B 2 \frac{\cos \varphi}{k(s)} d\mu(x)$$

$$= \int_0^p \int_0^\pi \frac{2 \cos^2 \varphi}{k(s)} d\varphi ds$$

Estamos usando que  $\mu(x) = \cos \varphi d\varphi ds$ , assim:

$$= \int_0^p \frac{1}{k(s)} ds \int_0^\pi 2 \cos^2 \varphi d\varphi$$

Sabemos que:

$$2 \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \cos \varphi \sin \varphi + \varphi \Big|_0^\pi = \pi$$

Assim:

$$\int_0^p \frac{1}{k(s)} ds \int_0^\pi 2 \cos^2 \varphi d\varphi = \pi \int_0^p \frac{1}{k(s)} ds$$

Pela desigualdade de Schwarz, temos:

$$\int_0^p \frac{1}{k(s)} ds \underbrace{\int_0^p k(s) ds}_{=2\pi} \geq p^2$$

$$\int_0^p \frac{1}{k(s)} ds \geq \frac{p^2}{2\pi}$$

$$\pi \int_0^p \frac{1}{k(s)} ds \geq \frac{\pi p^2}{2\pi} = \frac{p^2}{2}$$

Assim concluímos de (5.26) que:

$$2 \int_B d(x) d\mu(x) \leq \int_B (\tau(x) + l(x) - l(T(x))) d\mu(x)$$

$$\frac{p^2}{2} \leq 2\pi A$$

$$4\pi A \geq p^2 \tag{5.27}$$

então da Desigualdade Isoperimétrica e (5.27), temos que:

$$4\pi A = p^2$$

$$A = \frac{p^2}{4\pi}$$

no qual concluímos que Q é um disco, pois vale a igualdade. □

## *Referências Bibliográficas*

- [1] Bialy, M.: *Convex billiards and a theorem by E.Hopf*, *Mathematische Zeitschrift* **214** (1993), 147–154.
- [2] Burns, K. e Paternain, G. P.: *Anosov Magnetic flows, critical values and topological entropy*, *Nonlinearity* **15** (2002), 281–314.
- [3] do Carmo, M. P.: *Geometria Diferencial*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008. 3ª edição.
- [4] do Carmo, M. P.: *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [5] Chernov, N. e Markarian, R.: *Chaotic Billiards*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Volume 127, 2006.
- [6] Eberlein, P.: *When is a geodesic flow of Anosov type? I*, *J. Diff. Geometry* **8** (1973), 437–463.
- [7] Gomes, J. B. e Ruggiero R. O.: *Rigidity of magnetic flows for compact surfaces*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **346** (2008), 313–316.
- [8] Lima, E. L.: *Curso de Análise, vol.2*, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [9] Lima, E. L.: *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [10] Lima, E. L.: *Variiedades Diferenciáveis*, IMPA, Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2007.
- [11] Paternain, G. P.: *Geodesic Flows*, *Progress in Mathematic Volume 180*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [12] Rychlik, M. R.: *Periodic points of the billiards ball map in a convex domain*, *J. Differential Geometry* **30** 1989, 191–205.
- [13] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Volumes I, II, IV*, Second Edition, Publish or Perish, Inc, Houston, 1979.
- [14] Wojtkowski, M. P.: *Two Applications of Jacobi Fields to the Billiard Ball Problem*, *J. Differential Geometry* **40** (1994), 155–164.