Autovetor e Autovalor de um Operador Linear

Definição

Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um operador linear. Um vetor $v \in \mathbb{V}$, $v \neq 0$, é dito um *autovetor* de T se existe um número real λ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

O número real λ acima é denominado *autovalor* de T associado ao autovetor v.

Autovetor e Autovalor de um Operador Linear

Exemplo 1

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.
$T(5, 2) = (30, 12) = 6 \cdot (5, 2)$.
$\therefore$ 6 é um autovalor associado ao autovetor $(5, 2)$ do operador T.

Autovetor e Autovalor de um Operador Linear

Exemplo 1

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.
$T(5, 2) = (30, 12) = 6 \cdot (5, 2)$.
$\therefore$ 6 é um autovalor associado ao autovetor $(5, 2)$ do operador T.

Exemplo 2

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
$T(x, y, 0) = 1 \cdot (x, y, 0)$.
$\therefore$ qualquer vetor $(x, y, 0)$ é um autovetor de T e seu autovalor associado é 1.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a - \lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d - \lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x,y) \neq (0,0)$ com

$$T(x,y) = \lambda \cdot (x,y).$$

- Isto é o mesmo que encontrar $(x,y) \neq (0,0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & \lambda x \\ cx+dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a-\lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

- O sistema linear homogêno acima possui solução não-nula se, e só se,

$$\det \left[\begin{array}{cc} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{array} \right] = 0.$$

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a - \lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d - \lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

- O sistema linear homogêno acima possui solução não-nula se, e só se,

$$\det \begin{bmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

- Os autovalores de T são as soluções da equação acima, se existirem.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.
- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a - \lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d - \lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.
- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a-\lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

- Os autovetores de T associados a λ são as soluções não-nulas do sistema linear homogêneo acima.
  Obs.: Obrigatoriamente há tais soluções pois o λ foi calculado para que isto aconteça.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado *polinômio característico* de T.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado *polinômio característico* de T.
4. Resolva a equação $p(\lambda) = 0$. As raízes desta equação são os autovalores de T.
   Obs.: A equação $p(\lambda) = 0$ é denominada *equação característica* de T.

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado *polinômio característico* de T.
4. Resolva a equação $p(\lambda) = 0$. As raízes desta equação são os autovalores de T.
   Obs.: A equação $p(\lambda) = 0$ é denominada *equação característica* de T.
5. Para cada autovalor λ encontrado, resolva o sistema linear homogêneo cuja matriz dos coeficientes é $A - \lambda I$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Exemplo 1

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Exemplo 1

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Exemplo 2

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Exemplo 1

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Exemplo 2

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$.

Exemplo 3

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$.

Propriedades de Autovalores e Autovetores

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{V} \,;\, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ denominado *autoespaço* associado a λ.

Propriedades de Autovalores e Autovetores

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{V}\,;\, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.

Propriedades de Autovalores e Autovetores

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{V}\,;\, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$.

Propriedades de Autovalores e Autovetores

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{V}\,;\, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$.
- $u \in S_\lambda, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$. Logo, $\alpha u \in S_\lambda$.

Propriedades de Autovalores e Autovetores

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{V}\,;\, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$.
- $u \in S_\lambda, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$. Logo, $\alpha u \in S_\lambda$.
- Pelo visto acima, S_λ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.