

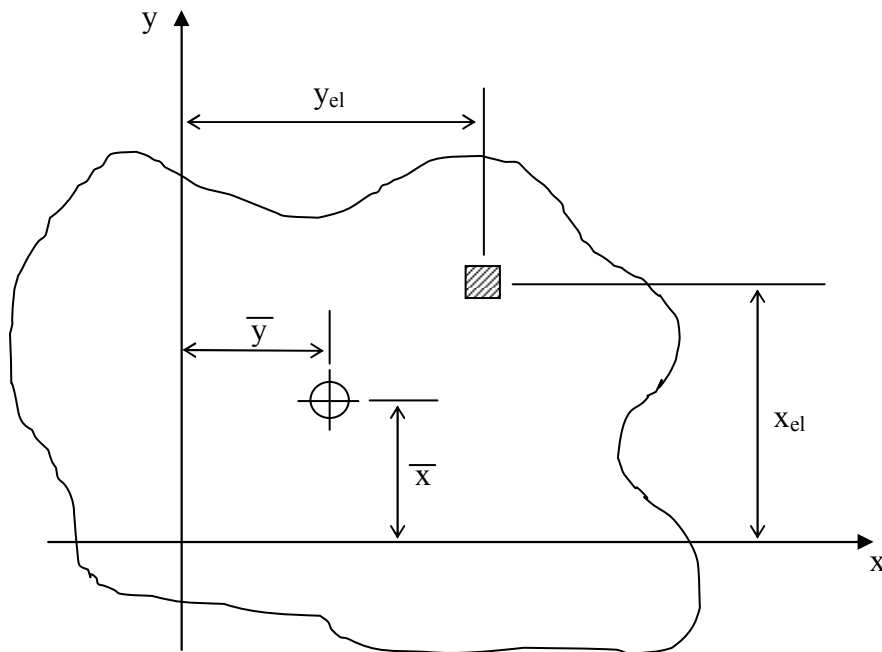
CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

1 – CENTRÓIDES E BARICENTROS

1.1 – Introdução

Freqüentemente consideramos a força peso dos corpos como cargas concentradas atuando num único ponto, quando na realidade o que se passa é que o peso é uma força distribuída, isto é, cada pequena porção de matéria tem o seu próprio peso. Esta simplificação pode ser feita se aplicarmos a força concentrada num ponto especial denominado *Baricentro*. Este ponto deve ter uma distribuição de matéria homogênea em torno de si. Terá importância também a determinação de um ponto de uma superfície e não somente de um corpo tridimensional que terá uma distribuição homogênea de área em torno de si. A este ponto especial chamaremos de *Centróide* (ou Centro de Gravidade – CG).

Demonstra-se que as coordenadas deste ponto serão obtidas, no caso geral, tomando-se um elemento de área dA e partindo do centróide deste elemento (x_{el} ; y_{el}) fazemos a integração em toda a área A .



As coordenadas deste ponto serão:

$$\bar{x} = \frac{\int x_{el} \cdot dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_{el} \cdot dA}{\int dA}$$

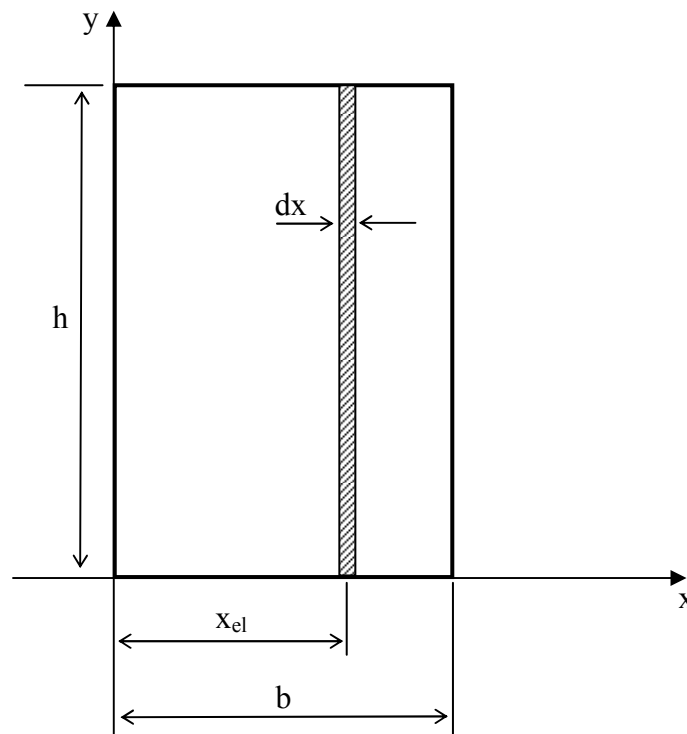
A integral $\int x \, dA$ é conhecida como Momento Estático de 1ª Ordem ou Momento Estático de Área em relação ao eixo y . Analogamente, a integral $\int y \, dA$ define o Momento Estático de 1ª Ordem ou Momento Estático de Área em relação ao eixo x .

1.2 – Determinação do Centróide

a – Por Integração

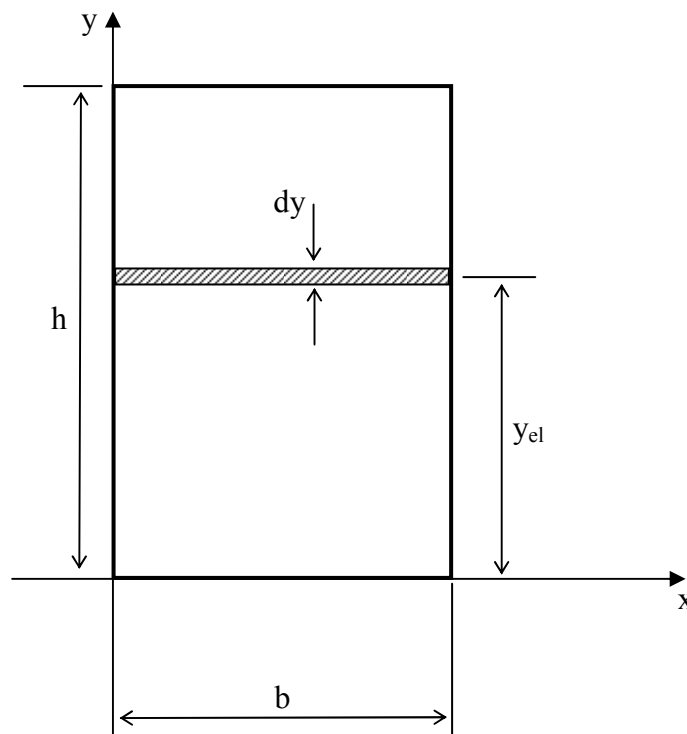
Escolha do elemento de área – pode-se escolher qualquer elemento de área para o cálculo do CG. A resolução da maior parte dos problemas será possível com elemento de área em forma de uma faixa retangular ou um setor circular. Ex.:

Retângulo



$$\bar{x} = \frac{\int x_{el} \cdot dA}{\int dA} \quad x_{el} = x \quad e \quad dA = y \cdot dx$$

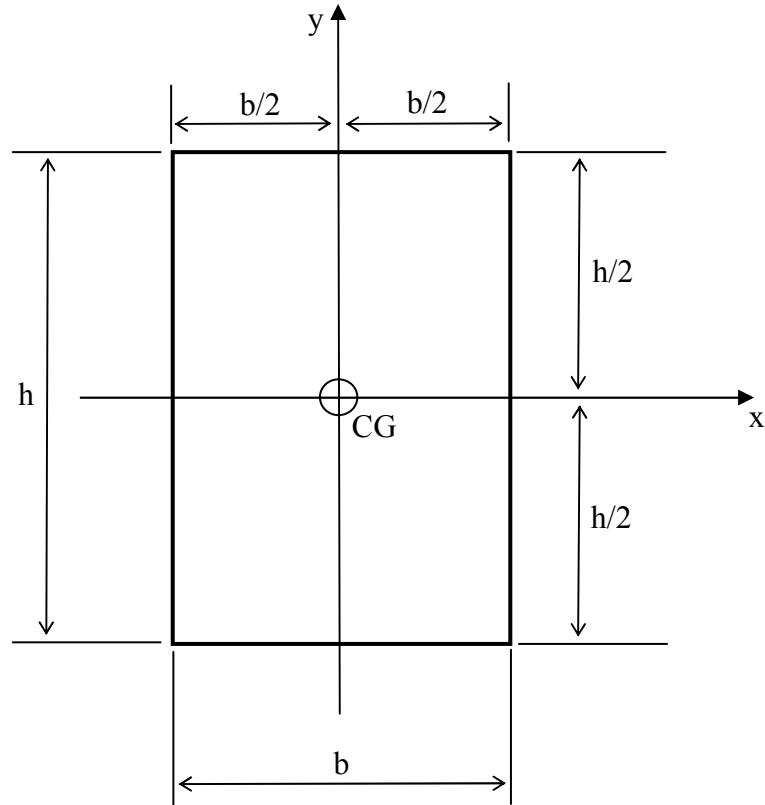
$$\bar{x} = \frac{\int_0^b x \cdot y \cdot dx}{\int_0^b y \cdot dx} = \frac{\int_0^b x \cdot h \cdot dx}{\int_0^b h \cdot dx} = \frac{h \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^b}{h \cdot x \Big|_0^b} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{b} \rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{b}{2}}$$



$$\bar{y} = \frac{\int y_{el} \cdot dA}{\int dA} \quad y_{el} = y \quad e \quad dA = x \cdot dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y \cdot x \cdot dy}{\int_0^h x \cdot dy} = \frac{\int_0^h y \cdot b \cdot dy}{\int_0^h b \cdot dy} = \frac{b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{b \cdot y \Big|_0^h} = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{h} \rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{h}{2}}$$

Portanto, para o retângulo temos:

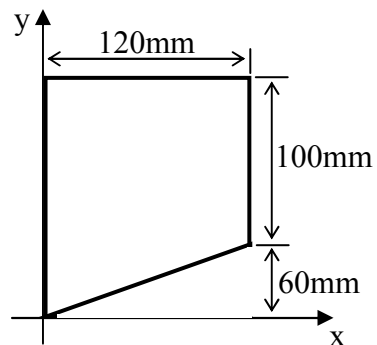


A partir destes resultados, toda vez que utilizarmos um elemento de área em forma de faixa retangular colocaremos:

$$x_{el} = \frac{b}{2} \quad e \quad x_{el} = \frac{b}{2}$$

b – Por Composição de Figuras

Muitas figuras são resultantes de soma ou diferença de outras figuras conhecidas e para estas há um segundo método para se determinar o CG. Ex.:



Notamos que a figura resultante pode ser obtida pela soma de um retângulo com um triângulo ou pela diferença de um outro retângulo e um triângulo. Faremos a opção pela soma.

Observamos que o CG de cada figura (retângulo e triângulo) já são conhecidos, pois foram obtidos por integração. Contudo, Estas coordenadas devem ser tomadas em relação à origem do sistema dado.

Como trata-se de soma de figuras conhecidas, as integrais $\int x_{el} dA$, $\int y_{el} dA$ e $\int dA$ se tornam $\sum \bar{x}A$, $\sum \bar{y}A$ e $\sum A$.

Figura	\bar{x}	\bar{y}	A	$\bar{x} A$	$\bar{y} A$
Retângulo	60	110	12000	720000	1320000
Triângulo	40	40	3600	144000	144000
\sum			15600	864000	1464000

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{864000}{15600} = 55,38\text{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A} = \frac{1464000}{15600} = 93,85\text{mm}$$

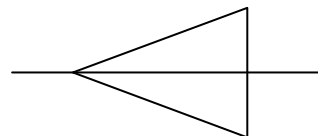
1.3 – Aplicações do Cálculo do CG

Teoremas de Pappus-Guldinus: para a aplicação dos teoremas torna-se necessário definirmos:

Superfície de revolução: é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo dado.



Curva plana (reta)

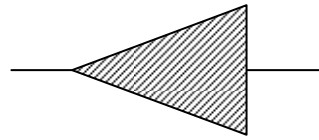


Superfície de revolução – casca do cone

Corpo de revolução: é um corpo que pode ser gerado pela rotação de uma área plana em torno de um eixo fixo.



Área plana (triângulo)



Corpo (cone)

Teorema I: a área de uma superfície de revolução é igual ao comprimento da curva geratriz, multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a geração da superfície.

Teorema II: o volume de um corpo de revolução é igual à área geratriz, multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da área durante a geração do corpo.

1.4 – Centróide de um Corpo Tridimensional

Analogamente ao que foi feito para áreas planas, a determinação do Centróide de um Corpo Tridimensional pode ser obtida pelas expressões:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dV}{\int dV} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dV}{\int dV} \quad e \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dV}{\int dV}$$

Para corpos homogêneos, isto é, os que possuem peso específico constante, o Centróide coincide com o Baricentro. Relembremos que Centróide é um ponto com distribuição de volume homogênea em torno de si (do ponto de vista geométrico) e Baricentro é um ponto com distribuição homogênea de massa em torno de si (ponto onde deve situar a força peso, que sozinha substitui o peso distribuído de cada porção de matéria).

A integral $\int x \cdot dV$ é conhecida como Momento Estático ou Momento de Primeira Ordem de Volume em relação ao plano yz . Analogamente, $\int y \cdot dV$ com em relação a xz e $\int z \cdot dV$ em relação a xy .

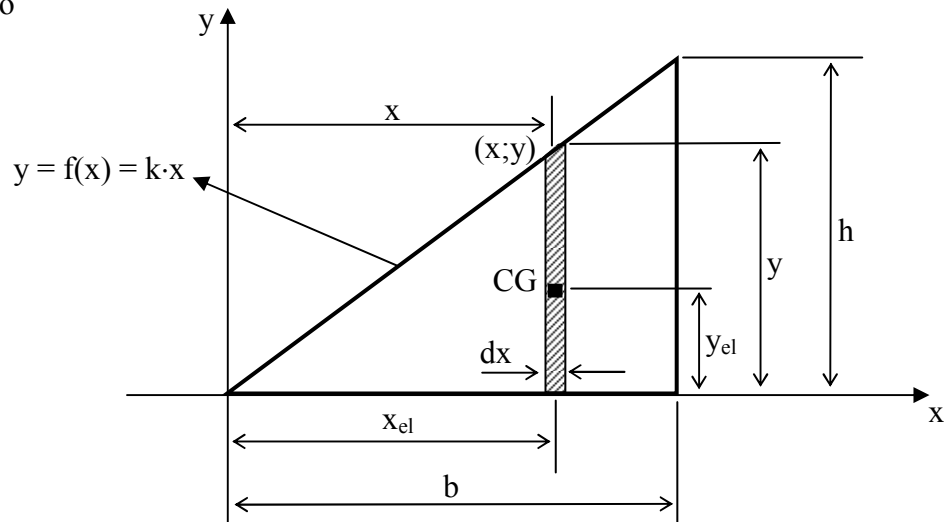
No cálculo de centróide de áreas pudemos observar que figuras com eixo de simetria possuíam o CG sobre este eixo. O mesmo se aplica para o CG de corpos tridimensionais. Desta forma é imediato o CG de esferas, elipsóides, cubos, paralelepípedos, etc.

Semelhante ao que foi feito para as áreas, há dois métodos para determinar o CG de volumes: por Integração e Composição de Corpos.

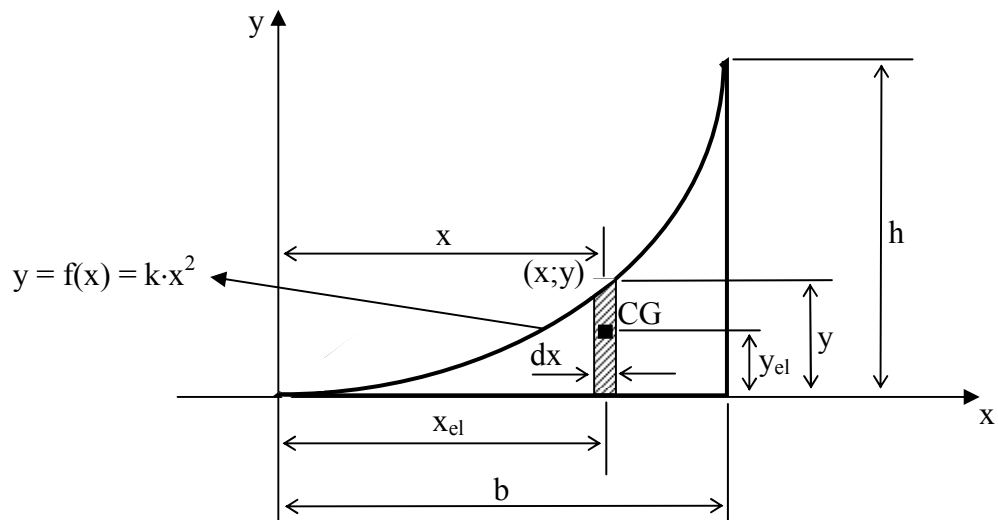
Lista de Exercícios

1. Determinar, por integração direta, o CG das áreas abaixo:

a) Triângulo

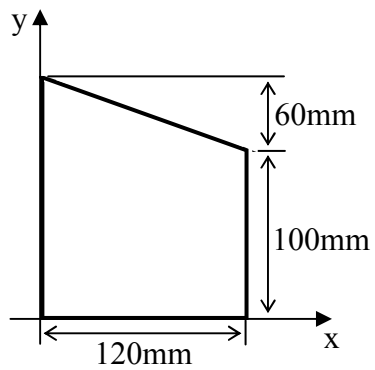


b) Parábola do 2º grau

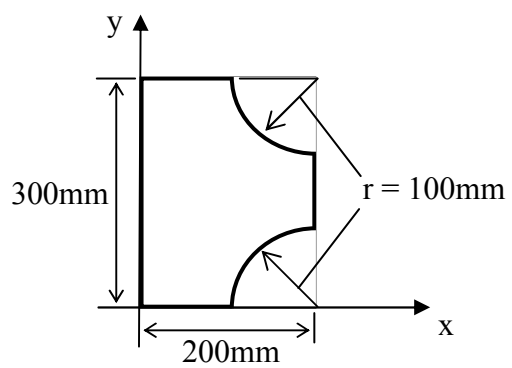


2. Determinar, por composição de figuras, o CG das áreas abaixo:

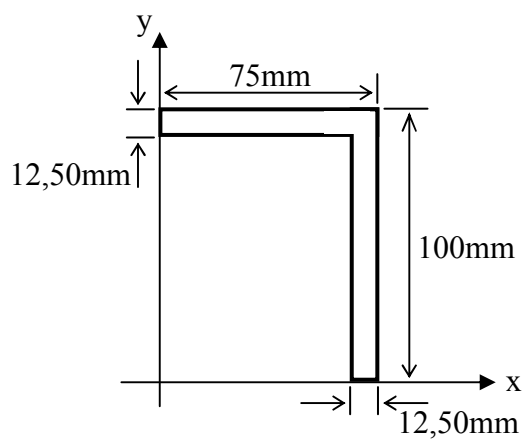
a)



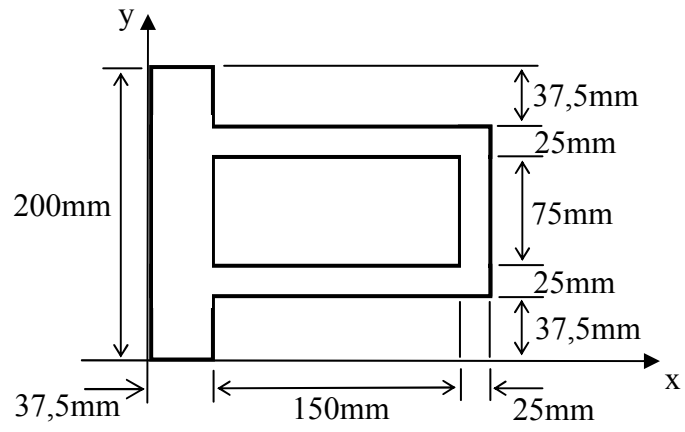
b)



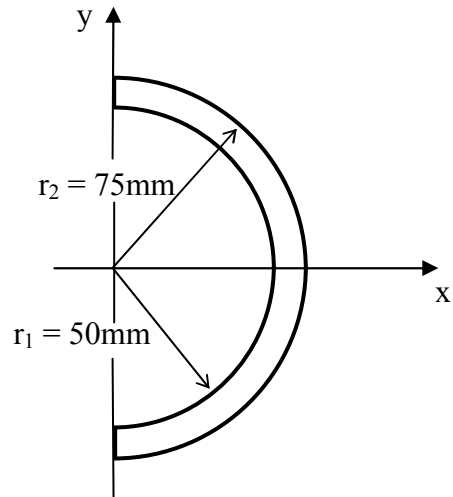
c)



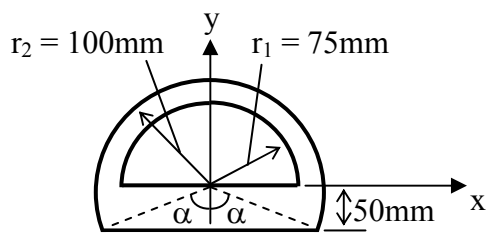
d)



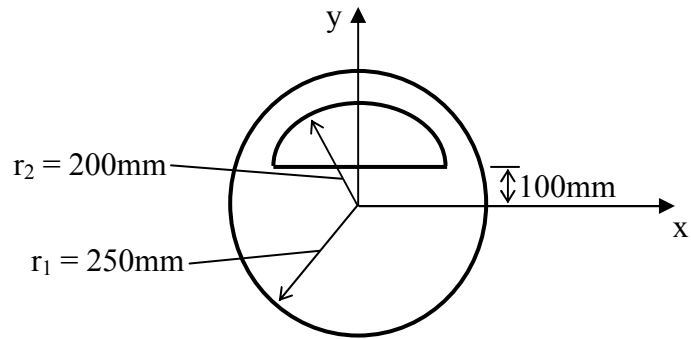
e)



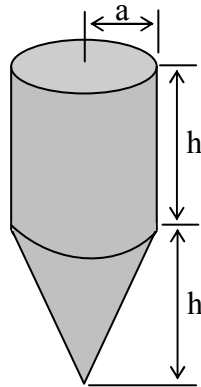
f)



g)



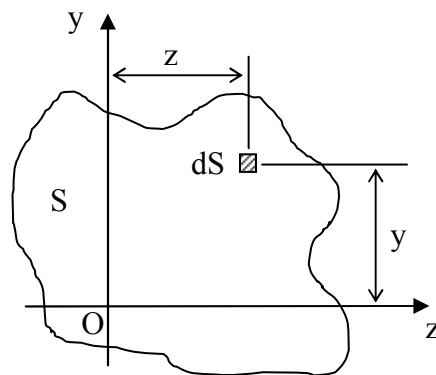
3. Um cone e um cilindro de mesmo raio \underline{a} e altura \underline{h} estão unidos como ilustrado abaixo. Determine a posição do centróide do corpo.



2. Momento de Inércia de Figuras Planas

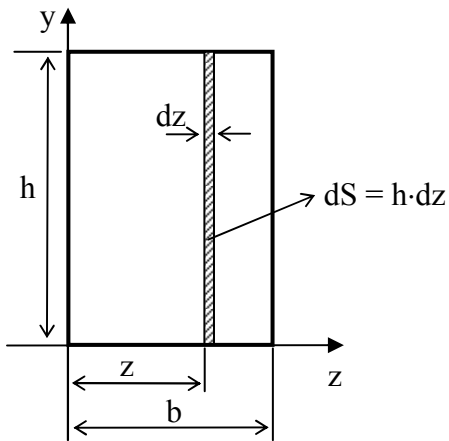
No desenvolvimento da expressão da tensão Normal no estudo da flexão, surgem as integrais $\int y^2 \cdot dS$ e $\int z^2 \cdot dS$ chamadas de Momento Estático de 2ª ordem ou Momento de Inércia. Estudaremos o desenvolvimento e expressões finais dessas integrais para as figuras mais comuns.

Momento de Inércia é uma grandeza que mede a resistência que uma determinada área oferece quando solicitada ao giro em torno de um determinado eixo. Normalmente representamos pelas letras I e J. Assim a resistência que a Figura 1 oferece ao giro em torno do eixo z é representada por $J_z = \int y^2 \cdot dS$ e em torno do eixo y é representada por $J_y = \int z^2 \cdot dS$, onde dS é um elemento de área da Figura 5.1, z é a distância do elemento de área ao eixo y e y é a distância do elemento de área ao eixo z.

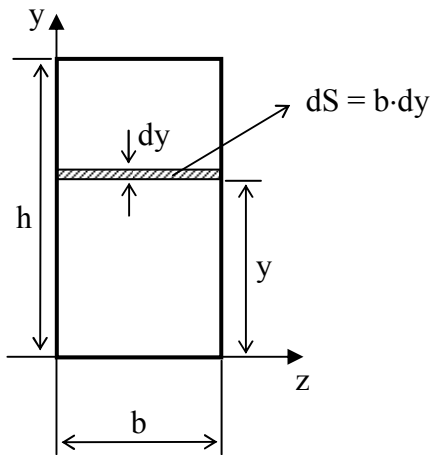


Da mesma maneira que fizemos para os Momentos Estáticos de 1ª ordem (cálculos de Centro de Gravidade), desenvolveremos as integrais para as figuras comuns, retângulo, triângulo, parábola e círculo. A escolha do elemento de área adequado facilita a resolução das integrais. Deve-se utilizar um elemento de área que equidiste do eixo em torno do qual se calcula o Momento de Inércia.

• **Retângulo**

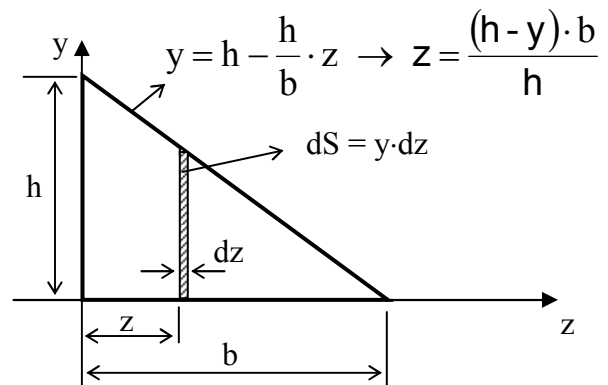
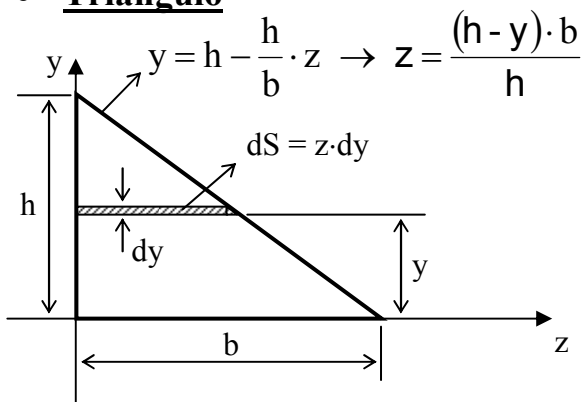


$$J_y = \int z^2 \cdot dS = \int_0^b z^2 \cdot h \cdot dz = h \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^b \Rightarrow J_y = \frac{h \cdot b^3}{3}$$



$$J_z = \int y^2 \cdot dS = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h \Rightarrow J_z = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

• **Triângulo**

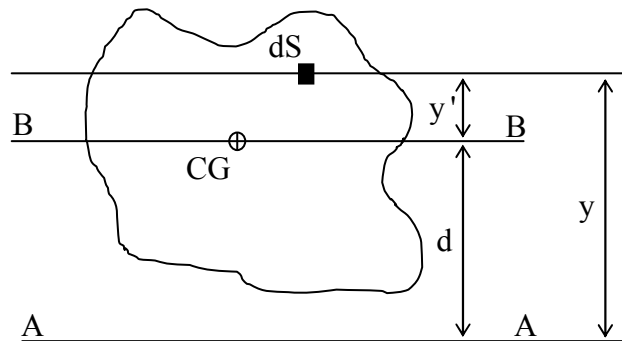


$$J_z = \int y^2 \cdot dS = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b(h-y)}{h} \cdot dy = \left[\frac{b \cdot y^3}{3} - \frac{b \cdot y^4}{4h} \right]_0^h \Rightarrow J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_y = \int z^2 \cdot dS = \int_0^b z^2 \cdot \left(h - \frac{h}{b} z \right) \cdot dz = \left[\frac{h \cdot z^3}{3} - \frac{h \cdot z^4}{4b} \right]_0^b \Rightarrow J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

2.1. Teorema dos Eixos Paralelos

Freqüentemente necessitamos do momento de inércia de uma área em relação a um eixo qualquer (este eixo será qualquer para a figura em si, mas especial para a seção da qual a referida figura faz parte). para evitar o cálculo constante de integrais, desenvolveremos uma expressão para o cálculo do momento de inércia em relação a este eixo qualquer a partir do valor do momento de inércia em relação a outro eixo, já conhecido.



$$J_{AA} = \int y^2 \cdot dS = \int (y'+d)^2 \cdot dS$$

$$J_{AA} = \int y'^2 \cdot dS + 2d \cdot \int y' \cdot dS + d^2 \cdot \int dS$$

A integral $\int y'^2 \cdot dS$ já é conhecida. Como o eixo BB é o horizontal que contém o CG, esta integral é chamada J_z .

A integral $\int y' \cdot dS$ é igual a zero pois refere-se ao CG.

A integral $\int dS$ resulta a área S.

Portanto:

$$J_{AA} = J_{BB} + d^2 \cdot S$$

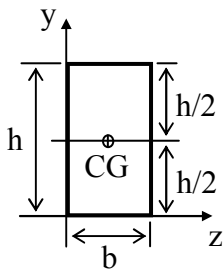
Sendo d a distância de eixo a eixo.

Para eixos horizontais teremos:

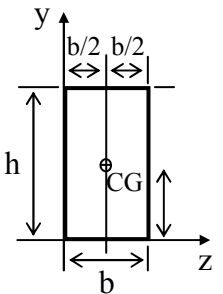
$$J_z = J_{z_{CG}} + d^2 \cdot S$$

$$J_y = J_{y_{CG}} + d^2 \cdot S$$

- **Retângulo**

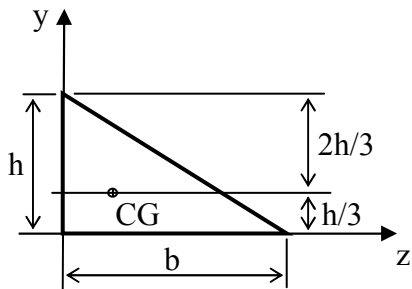


$$J_z = J_{z_{CG}} + d^2 \cdot S \rightarrow \frac{b \cdot h^3}{3} = J_{z_{CG}} + \frac{h^2}{4} \cdot b \cdot h \Rightarrow J_{z_{CG}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

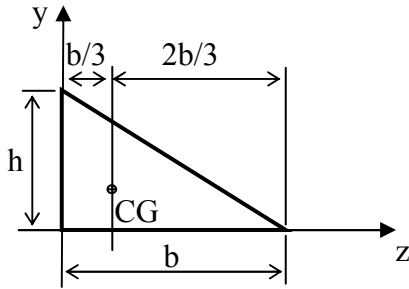


$$J_y = J_{y_{CG}} + d^2 \cdot S \rightarrow \frac{h \cdot b^3}{3} = J_{y_{CG}} + \frac{b^2}{4} \cdot b \cdot h \Rightarrow J_{y_{CG}} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

- **Tritângulo**



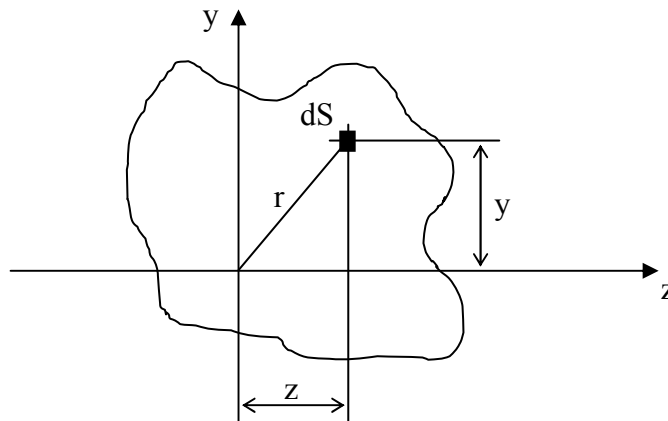
$$J_z = J_{z_{CG}} + d^2 \cdot S \rightarrow \frac{b \cdot h^3}{12} = J_{z_{CG}} + \frac{h^2}{9} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow J_{z_{CG}} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$



$$J_y = J_{y_{CG}} + d^2 \cdot S \rightarrow \frac{h \cdot b^3}{12} = J_{y_{CG}} + \frac{b^2}{9} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow J_{y_{CG}} = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

3. Momento Polar de Inércia

No estudo da torção em peças cilíndricas terá grande importância a integral $\int r^2 \cdot dS$, que é chamada de *Momento Polar de Inércia*. É utilizada quando houver solicitação em torno de um eixo (na seção estudada teremos um ponto = Pólo).



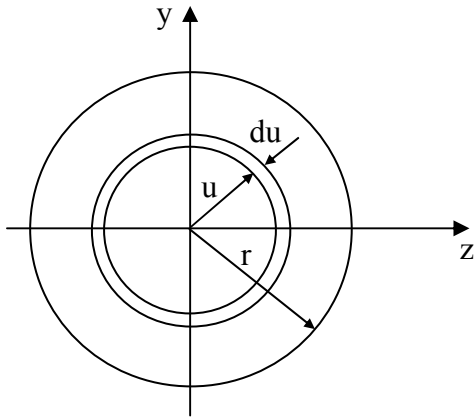
Temos que:

$$J_0 = J_p = \int r^2 \cdot dS = \int (z^2 + y^2) \cdot dS$$

$$J_0 = J_p = \int z^2 \cdot dS + \int y^2 \cdot dS$$

$$J_0 = J_p = J_z + J_y$$

A terceira figura importante para a qual precisamos dos valores dos Momentos de Inércia é o Círculo. A dedução mais simples é a de J_0 .



$$J_0 = J_p = \int u^2 \cdot dS$$

$$dS = 2\pi \cdot u \cdot du$$

$$J_0 = \int_0^r u^2 \cdot 2\pi \cdot u \cdot du$$

$$J_0 = 2\pi \cdot \int_0^r u^3 \cdot du$$

$$J_0 = J_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

Em função da simetria, podemos concluir que para o círculo os valores de J_z e J_y são iguais. Como o ponto O é o encontro dos eixos \underline{z} e \underline{y} , teremos:

$$J_0 = J_z + J_y$$

$$\frac{\pi \cdot r^4}{2} = J_z + J_y = 2 \cdot J_z \quad (\text{pois } J_z = J_y)$$

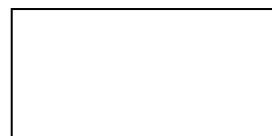
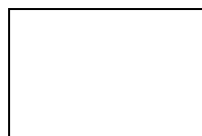
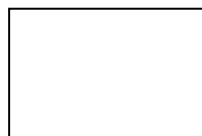
Portanto, para o círculo teremos:

$$J_z = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$J_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

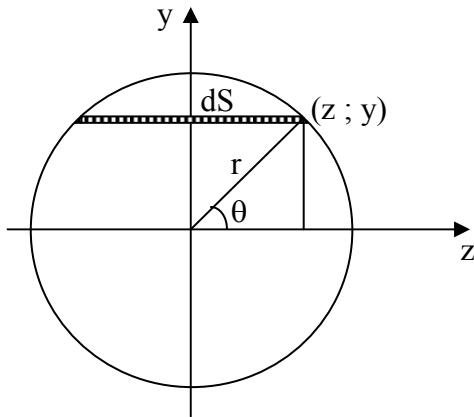
$$J_0 = J_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

Ou, escrevendo em função do diâmetro:



$$J_z = \frac{\pi d^4}{64} \quad J_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad J_0 = J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Figuras Circulares



$$z^2 + y^2 = r^2$$

$$y = r \cdot \text{sen } \theta$$

$$z = r \cdot \text{cos } \theta$$

$$dS = 2 \cdot z \cdot dy$$

$$dy = r \cdot \text{cos } \theta \cdot d\theta$$

$$J_z = \int y^2 \cdot dS = \int y^2 \cdot 2 \cdot z \cdot dy$$

$$J_z = \int r^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot 2 \cdot r \cdot \text{cos } \theta \cdot r \cdot \text{cos } \theta \cdot d\theta$$

$$J_z = 2 \cdot r^4 \cdot \int \text{sen}^2 \theta \cdot \text{cos}^2 \theta \cdot d\theta \Rightarrow J_z = 2 \cdot r^4 \cdot \int \text{sen}^2 \theta \cdot \text{cos}^2 \theta \cdot d\theta$$

$$J_z = 2 \cdot r^4 \cdot \left[\frac{\theta}{8} - \frac{\text{sen} 4\theta}{32} \right]$$

Para descrever o **círculo** θ deve variar de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

$$J_z = 2 \cdot r^4 \cdot \left[\frac{\pi}{16} - \left(-\frac{\pi}{16} \right) \right] \Rightarrow \boxed{J_z = \frac{\pi r^4}{4}}$$

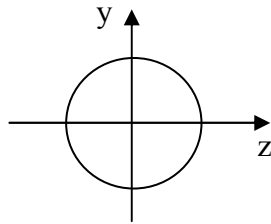
Para o **semi-círculo** θ deve variar de 0 a $+\frac{\pi}{2}$. Então

$$\boxed{J_z = \frac{\pi r^4}{8}}$$

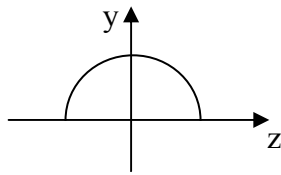
Para o **quarto de círculo** θ deve variar de 0 a $+\frac{\pi}{2}$ e o elemento de área deve

ser $dS = z \cdot dy$. Então $J_z = \frac{\pi r^4}{16}$

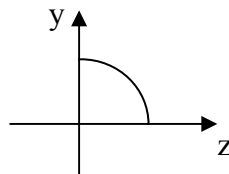
Resumindo teremos:



$$J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$



$$J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$$



$$J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi d^4}{256}$$

3.1. Teorema dos Eixos Paralelos

- **Círculo:** os valores obtidos já são em relação aos eixos que passam pelo Centro de Gravidade.
- **Semi-Círculo:**

$$J_z = J_{zCG} + d^2 \cdot S$$

$$\frac{\pi r^4}{8} = J_{zCG} + \left(\frac{4 \cdot r}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi r^2}{2}$$

$$J_{zCG} = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = 0,1097569 \cdot r^4$$

- **Quarto de Círculo:**

$$J_z = J_{zCG} + d^2 \cdot S$$

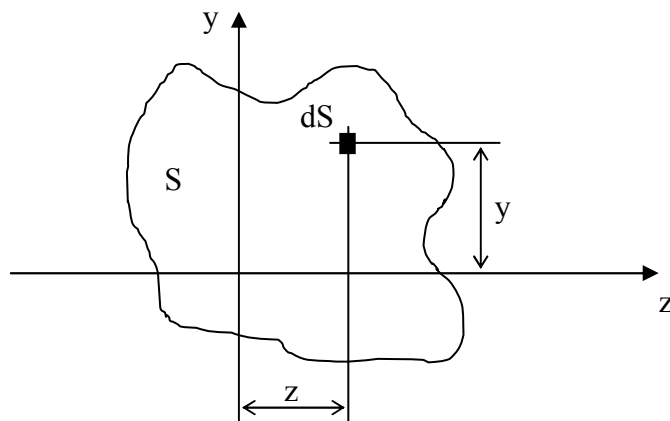
$$\frac{\pi r^4}{16} = J_{zCG} + \left(\frac{4 \cdot r}{3\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi r^2}{4}$$

$$J_{zCG} = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0,0548784 \cdot r^4$$

4. Produto de Inércia

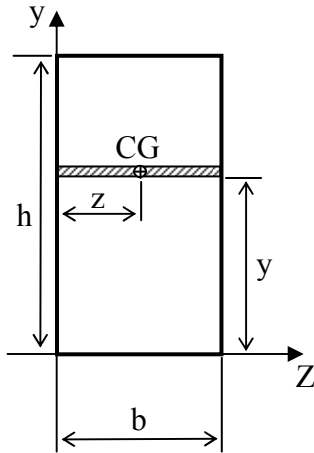
É definido com a integral $\int z \cdot y \cdot dS$ obtida multiplicando-se cada elemento de área dS de uma área S por suas coordenadas z e y em relação aos eixos coordenados z e y e integrando sobre a área.

Ao contrário dos Momentos de Inércia J_z e J_y , o Produto de Inércia pode ser positivo, negativo ou nulo e não tem significado físico. Será útil mais tarde para a determinação dos próprios Momentos de Inércia. É indicado pela abreviação J_{zy} .



Calculando $J_{zy} = \int z \cdot y \cdot dS$ para as figuras mais comuns temos:

- **Retângulo:**



$$z = \frac{b}{2} \quad y = y \quad dS = b \cdot dy$$

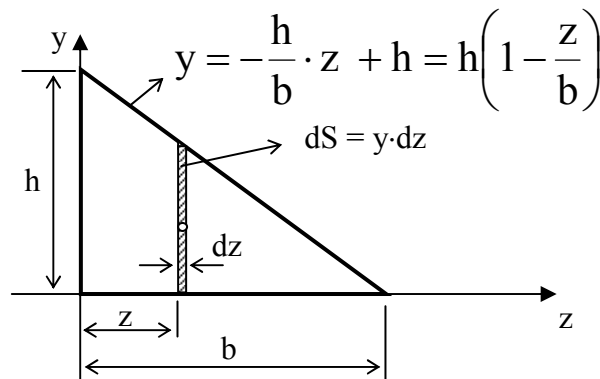
$$J_{zy} = \int z \cdot y \cdot dS$$

$$J_{zy} = \int_0^h \frac{b}{2} \cdot y \cdot b \cdot dy = \frac{b^2}{2} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h$$

$$J_{zy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

- **Triângulo:**

Há quatro posições para os triângulos. Desenvolveremos uma delas.



$$z = z \quad y = \frac{y}{2}$$

$$J_{zy} = \int z \cdot y \cdot dS = \int_0^b z \cdot \frac{y}{2} \cdot y \cdot dS = \frac{1}{2} \int_0^b z \cdot y^2 \cdot dS$$

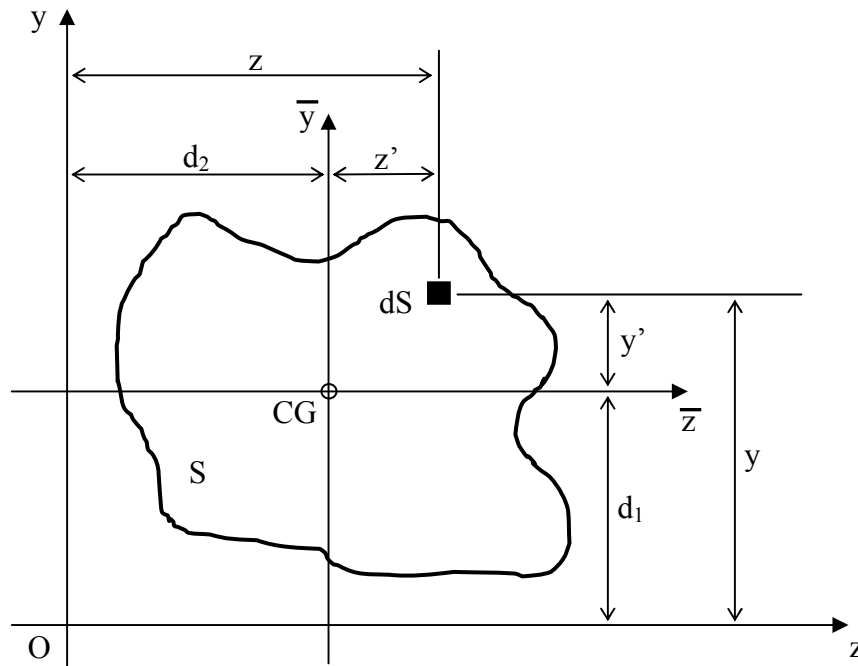
$$J_{zy} = \frac{1}{2} \int_0^b z \cdot h^2 \left(1 - \frac{2z}{b} + \frac{z^2}{b^2} \right) dz = \frac{h^2}{2} \int_0^b \left(z - \frac{2z^2}{b} + \frac{z^3}{b^2} \right) dz$$

$$J_{zy} = \frac{h^2}{2} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{2b^3}{3b} + \frac{b^4}{4b^2} \right) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{2b^2}{3} + \frac{b^2}{4} \right)$$

$$J_{zy} = \frac{h^2}{2} \left(\frac{(6-8+3)b^2}{12} \right) \Rightarrow \boxed{J_{zy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}}$$

4.1. Teorema dos Eixos Paralelos

De forma semelhante ao que fizemos com os Momentos de Inércia teremos:



$$z = z' + d_2$$

$$y = y' + d_1$$

$$J_{zy} = \int z \cdot y \cdot dS$$

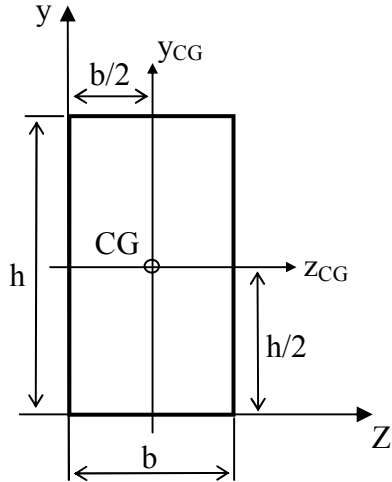
$$J_{zy} = \int (z' + d_2) \cdot (y' + d_1) \cdot dS$$

$$J_{zy} = \int d_1 \cdot d_2 \cdot dS + d_1 \cdot \int z' \cdot dS + d_2 \cdot \int y' \cdot dS + \int z' \cdot y' \cdot dS$$

$$\boxed{J_{zy} = J_{zyCG} + d_1 \cdot d_2 \cdot S}$$

Aplicando para cada uma das figuras principais teremos:

- **Retângulo:**

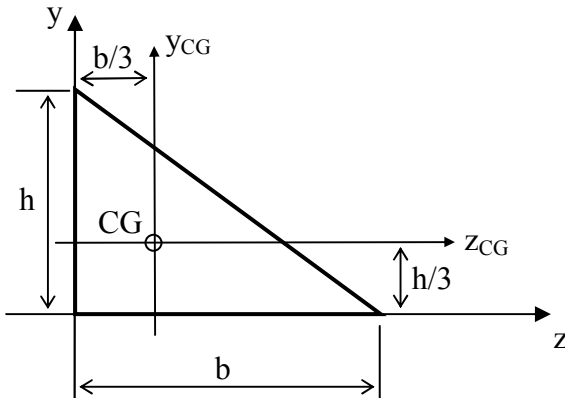


$$J_{zy} = J_{zyCG} + d_1 \cdot d_2 \cdot S$$

$$\frac{b^2 \cdot h^2}{4} = J_{zyCG} + \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h$$

$$J_{zyCG} = 0$$

- **Triângulo:**

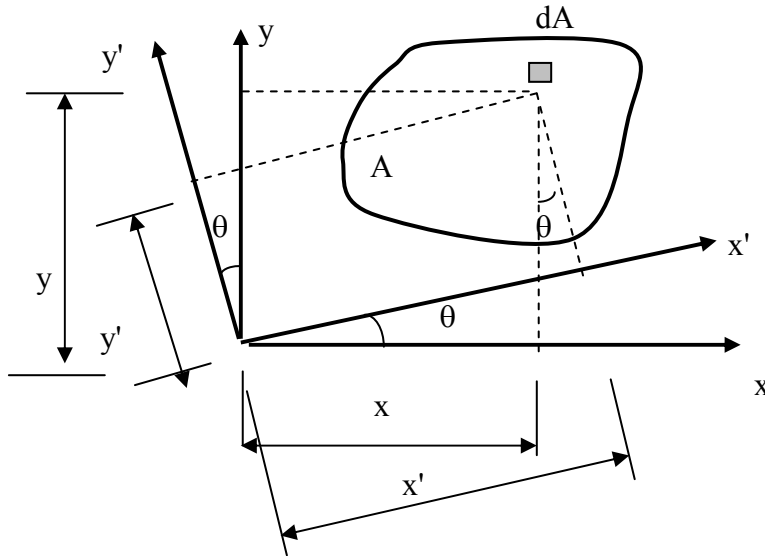


$$J_{zy} = J_{zyCG} + d_1 \cdot d_2 \cdot S \Rightarrow \frac{b^2 \cdot h^2}{24} = J_{zyCG} + \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

$$J_{zyCG} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$

5 – Momentos de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Muitas vezes é necessário calcular os momentos e o produto de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ para uma área em relação a um par de eixos u e v inclinados em relação aos eixos x e y , sendo os valores de θ , I_x , I_y e I_{xy} conhecidos. Para isso utilizaremos as equações de transformação que relacionam as coordenadas x , y e x' e y' .



$$x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

$$y' = y \cos(\theta) - x \sin(\theta)$$

Sabendo-se que :

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int x' y' dA$$

Substituindo x' e y' na expressão acima, tem-se:

$$I_{x'} = \int (y \cos(\theta) - x \sin(\theta))^2 dA$$

$$I_{y'} = \int (x \cos(\theta) + y \sin(\theta))^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int (y \cos(\theta) - x \sin(\theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) dA$$

Expandindo cada expressão e lembrando que

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy dA$$

obtem-se

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{x'y'} = I_x \sin \theta \cos \theta - I_y \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Simplificando estas equações utilizando as identidades trigonométricas

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

resulta:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{y'} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{x'y'} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1)$$

Se a primeira e a segunda equações forem somadas, pode-se mostrar que o momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pelo ponto O é independente da orientação dos eixo x' e y', ou seja:

$$I_0 = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

Momentos principais de inércia

As equações (1) mostram que $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ dependem do ângulo de inclinação θ dos eixos x' e y'. Deseja-se determinar agora a orientação desses eixos para os quais os momentos de inércia da área, $I_{x'}$ e $I_{y'}$ são extremos, isto é, máximo e mínimo. Este par de eixos em particular é chamado de eixos principais de inércia e os correspondentes momentos de inércia em relação a eles são os chamados momentos principais de inércia. Em geral existe um par de eixos para cada origem O escolhida. Nos projetos estruturais e mecânicos de um elemento, a origem O é geralmente localizada no centróide da área de seção reta.

O ângulo $\theta = \theta_p$ que define a orientação dos eixos principais da área pode ser obtido por derivação da primeira das equações (1) em relação a θ , impondo-se resultado nulo.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Assim, em $\theta = \theta_p$

$$\boxed{\tan 2\theta_p = -2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y}} \quad (2)$$

Essa equação possui duas raízes θ_{p1} e θ_{p2} defasadas de 90° e estabelecem a inclinação dos eixos principais. De forma a substituí-las nas equações (1) devemos inicialmente obter o seno e o cosseno de $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ o que pode ser feito pela relação (2) em associação com a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 2\theta_p + \cos^2 2\theta_p = 1$. Obtem-se dessa forma:

Para θ_{p1}

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p1} = \frac{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p2}

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p2} = \frac{-\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

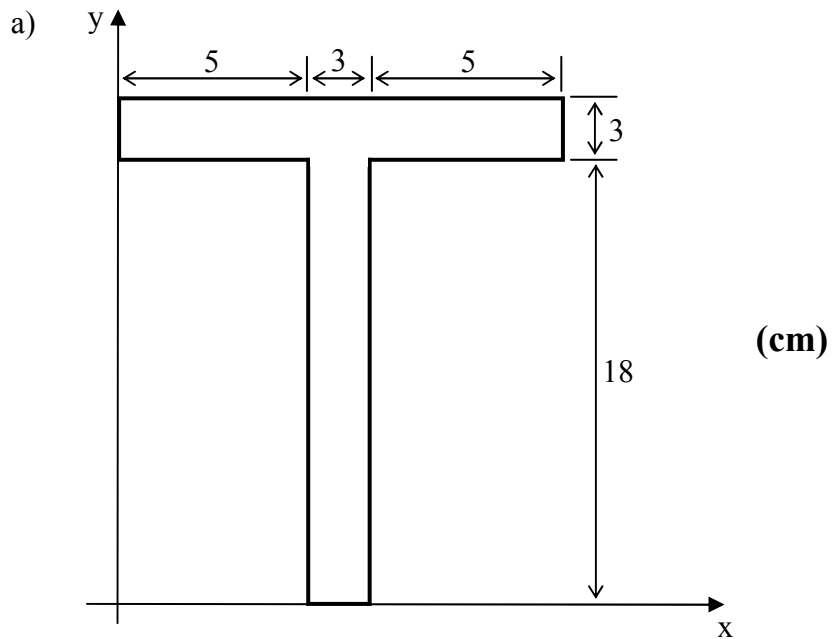
Substituindo esses dois pares de relações trigonométricas nas equações (1) e simplificando tem-se:

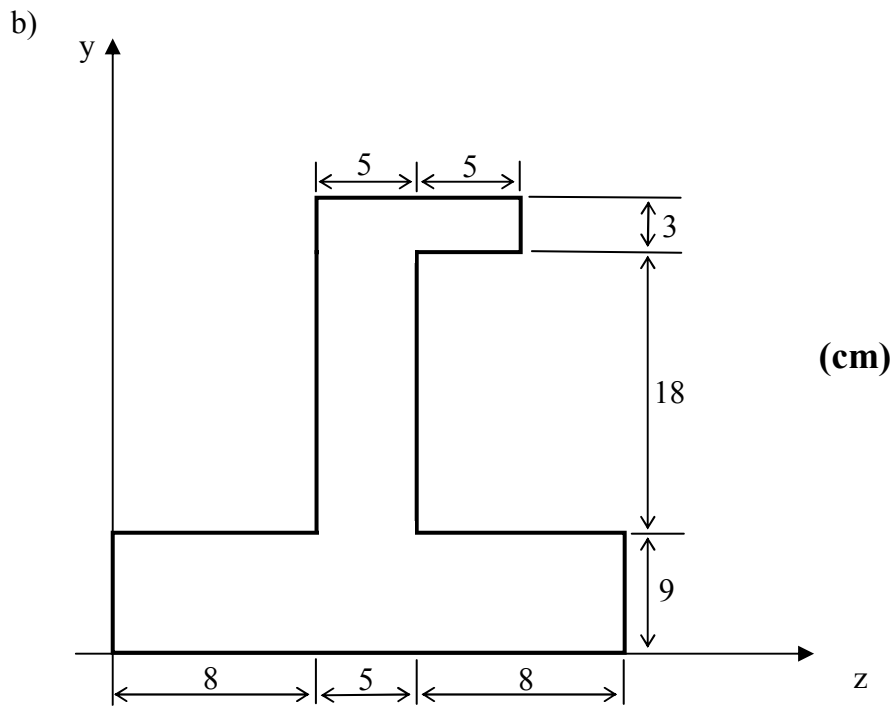
$$I_{\min}^{\max} = I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{12} = 0$$

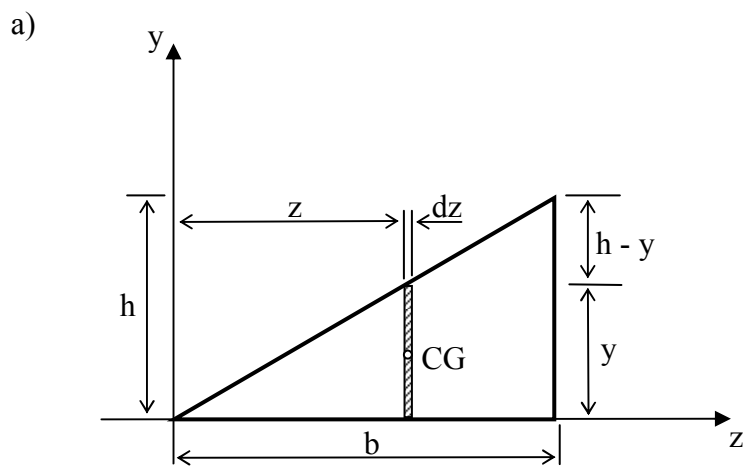
Lista de Exercícios

1. Calcular os valores de J_z e J_y em relação ao sistema de eixos que passa pelo CG da seção.

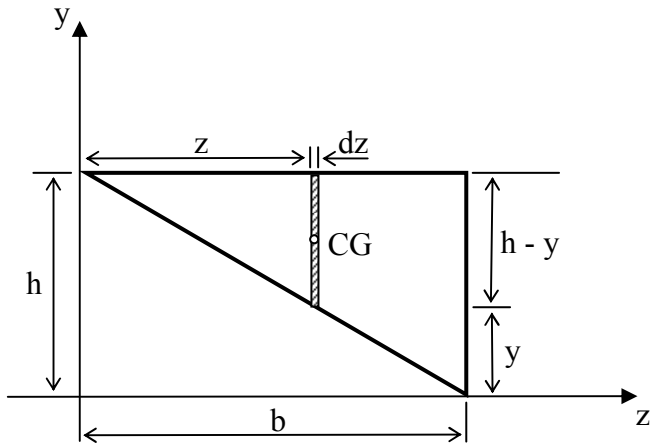




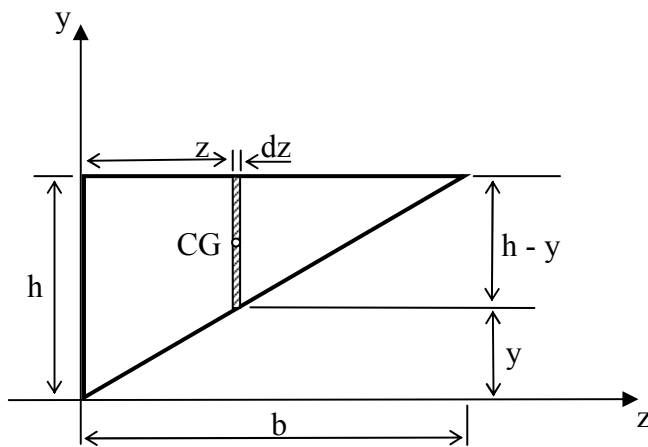
2. Determine o produto de inércia (J_{zy}) para as figuras abaixo.



b)

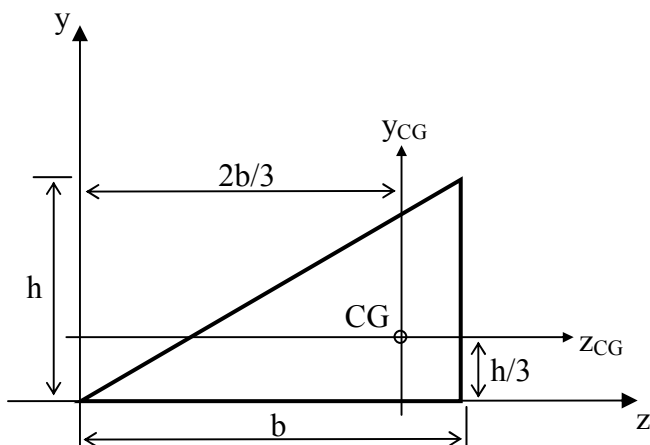


c)

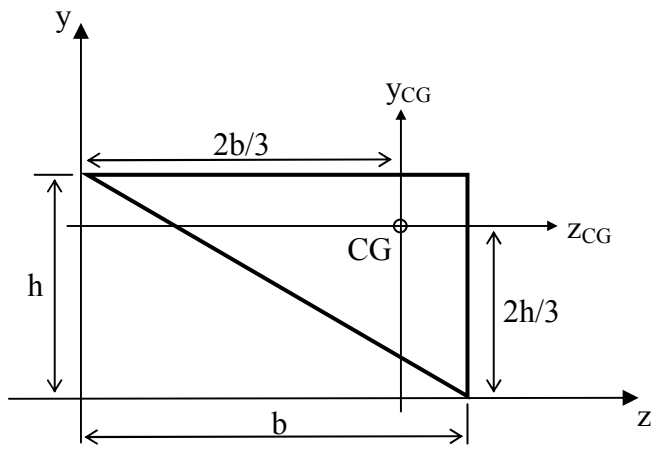


3. Determine o valor de J_{zyCG} para as figuras abaixo.

a)



b)



c)

