Princípios Gerais

Forças, vetores e operações vetoriais

Sistema de forças coplanares

Sistema de forças tridimensional

Vetor-posição

Produto-escalar

MECÂNICA
MAC010

Dep. de Mecânica Aplicada e Computacional

Profª Michèle Farage,
Prof. Luis Paulo Barra

23 de agosto de 2009

Princípios Gerais

Forças, vetores e operações vetoriais

Sistema de forças coplanares

Sistema de forças tridimensional

Vetor-posição

Produto-escalar

1 Princípios Gerais

2 Forças, vetores e operações vetoriais
- Sistema de forças coplanares
- Sistema de forças tridimensional
- Vetor-posição
- Produto-escalar

Prof[a]
Michèle Farage,
Prof. Luis Paulo Barra

Princípios Gerais

Forças, vetores e operações vetoriais

Sistema de forças coplanares

Sistema de forças tridimensional

Vetor-posição

Produto-escalar

1 Princípios Gerais

2 Forças, vetores e operações vetoriais
- Sistema de forças coplanares
- Sistema de forças tridimensional
- Vetor-posição
- Produto-escalar

Prof[a]
Michèle Farage,
Prof. Luis Paulo Barra

Princípios Gerais

Forças, vetores e operações vetoriais

Sistema de forças coplanares

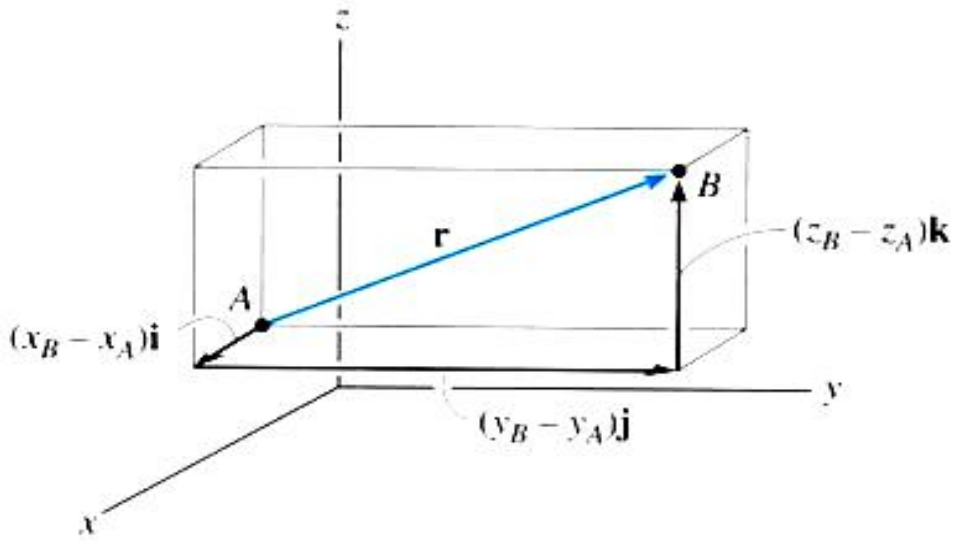
Sistema de forças tridimensional

Vetor-posição

Produto-escalar

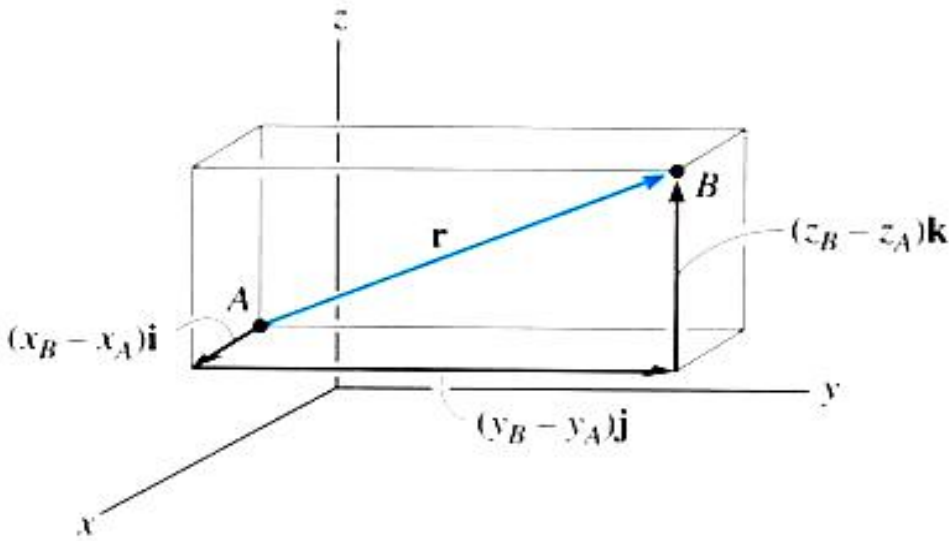
Vetor posição

Uma outra forma de representar as forças é através do vetor posição.



Vetor posição **r**: é um vetor fixo que localiza um ponto do espaço em relação a outro ponto.

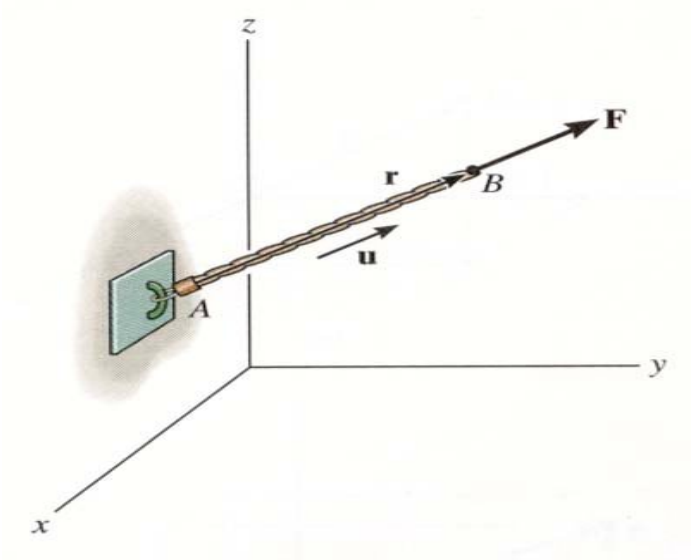
Vetor posição



O vetor posição orientado de A para B, denominado r_{AB}, é definido como:

$$\mathbf{r}_{AB} = (X_B - X_A)\mathbf{i} + (Y_B - Y_A)\mathbf{j} + (Z_B - Z_A)\mathbf{k}$$

Vetor posição



Vetor de força orientado ao longo de uma reta:

Uma força pode ser representada através do vetor unitário - que indica a orientação da força - e da intensidade da força.

Vetor posição

Para tanto, é necessário:

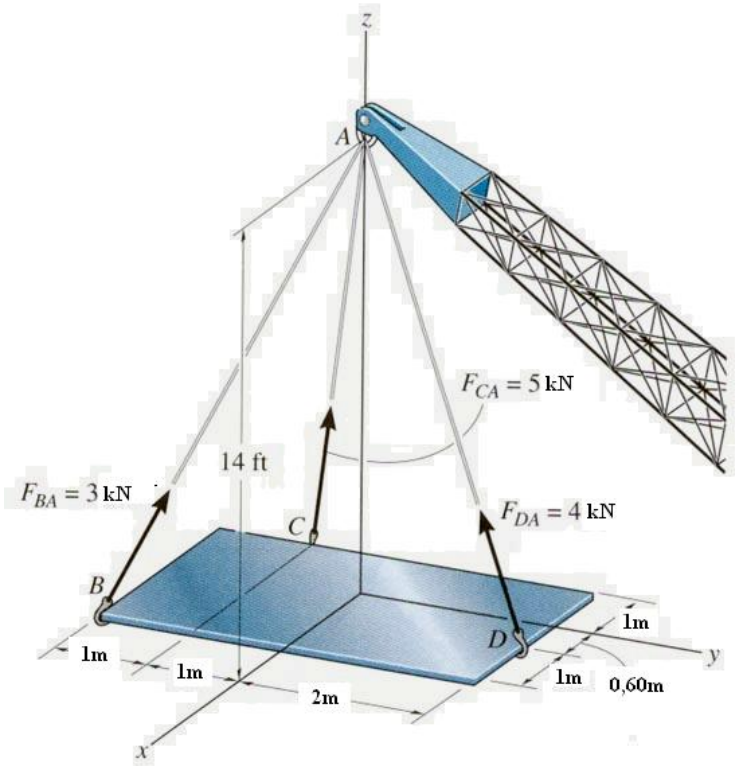
a) Determinar o vetor posição $\mathbf{r}_{AB}$ a partir de dois pontos da linha;

b) Determinar o vetor unitário que descreve a direção da linha: $\mathbf{u}_{AB} = \mathbf{r}_{AB}/r_{AB}$;

c) Multiplicar o vetor unitário pela intensidade da força: $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB}$;

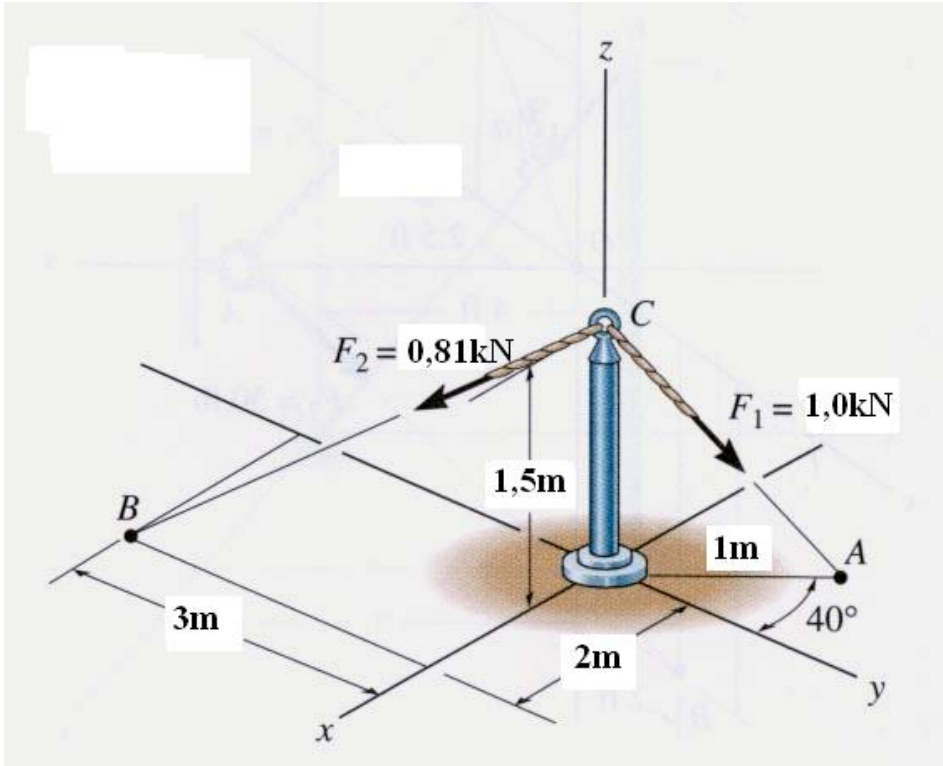
Exemplo 1

Sabendo que a força que age no cabo DA é de 4kN, pede-se determiná-la na forma vetorial cartesiana.



Exemplo 2

Determinar a força resultante no sistema representado na forma escalar (intensidade e ângulos coordenados).



Prof[a]
Michèle Farage,
Prof. Luis Paulo Barra

Princípios Gerais

Forças, vetores e operações vetoriais

Sistema de forças coplanares

Sistema de forças tridimensional

Vetor-posição

Produto-escalar

1 Princípios Gerais

2 Forças, vetores e operações vetoriais
- Sistema de forças coplanares
- Sistema de forças tridimensional
- Vetor-posição
- Produto-escalar

Produto escalar

Às vezes, em Estática, é preciso calcular o ângulo entre duas retas ou os componentes de uma força paralela ou perpendicular a uma reta.

Produto escalar

Às vezes, em Estática, é preciso calcular o ângulo entre duas retas ou os componentes de uma força paralela ou perpendicular a uma reta.

- em duas dimensões: emprega-se a trigonometria
- em três dimensões: são necessários métodos vetoriais.

Produto escalar

Às vezes, em Estática, é preciso calcular o ângulo entre duas retas ou os componentes de uma força paralela ou perpendicular a uma reta.

- em duas dimensões: emprega-se a trigonometria
- em três dimensões: são necessários métodos vetoriais.

Produto escalar: é um método particular para *multiplicar* dois vetores, e pode ser usado para resolver os problemas acima.

Produto escalar

Às vezes, em Estática, é preciso calcular o ângulo entre duas retas ou os componentes de uma força paralela ou perpendicular a uma reta.

- em duas dimensões: emprega-se a trigonometria
- em três dimensões: são necessários métodos vetoriais.

Produto escalar: é um método particular para *multiplicar* dois vetores, e pode ser usado para resolver os problemas acima. Definição: **A.B** é o produto das intensidades de **A** e **B** e do cosseno do ângulo formado por eles.

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = ABcos\theta$$

onde $0^o \leq \theta \leq 180^o$.

Propriedades do Produto escalar

- comutativa: **A.B=B.A**

Propriedades do Produto escalar

- comutativa: $\mathbf{A}.\mathbf{B}=\mathbf{B}.\mathbf{A}$
- multiplicação por escalar:
  $\alpha\mathbf{A}.\mathbf{B}= (\alpha\mathbf{A}).\mathbf{B}=\mathbf{A}.(\alpha\mathbf{B}) = \mathbf{A}.\mathbf{B}\alpha$

Propriedades do Produto escalar

- comutativa: $\mathbf{A}.\mathbf{B}=\mathbf{B}.\mathbf{A}$
- multiplicação por escalar:
  $\alpha\mathbf{A}.\mathbf{B}= (\alpha\mathbf{A}).\mathbf{B}=\mathbf{A}.(\alpha\mathbf{B}) = \mathbf{A}.\mathbf{B}\alpha$
- distributiva: $\mathbf{A}.(\mathbf{B}+\mathbf{D})= (\mathbf{A}.\mathbf{B})+(\mathbf{A}.\mathbf{D})$

Exercício proposto

Provar que o produto escalar entre dois vetores obedece à lei distributiva.

Produto escalar dos vetores unitários de direção

Os vetores unitários de direção dos eixos cartesianos são denominados **i**, **j**, **k**.

Produto escalar entre os vetores unitários das direções cartesianas:

$$\mathbf{i}.\mathbf{i} = i.i.\cos 0^o = 1 \qquad \mathbf{i}.\mathbf{j} = i.j.\cos 90^o = 0$$

$$\mathbf{j}.\mathbf{j} = j.j.\cos 0^o = 1 \qquad \mathbf{i}.\mathbf{k} = i.k.\cos 90^o = 0$$

$$\mathbf{k}.\mathbf{k} = k.k.\cos 0^o = 1 \qquad \mathbf{j}.\mathbf{k} = j.k.\cos 90^o = 0$$

Produto escalar de vetores cartesianos

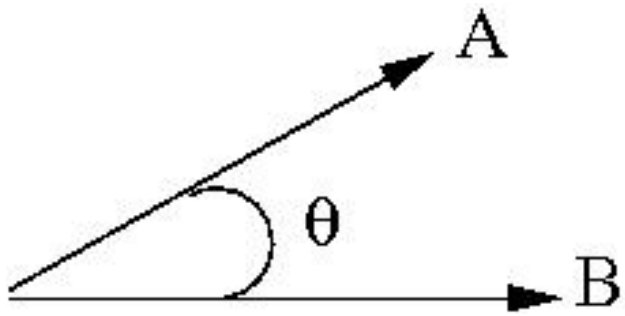
$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \\
\mathbf{B} &= B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}.\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}).(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\
&= A_xB_x\mathbf{i}.\mathbf{i} + A_yB_y\mathbf{j}.\mathbf{j} + A_zB_z\mathbf{k}.\mathbf{k} \\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z
\end{aligned}$$

Aplicações do Produto escalar

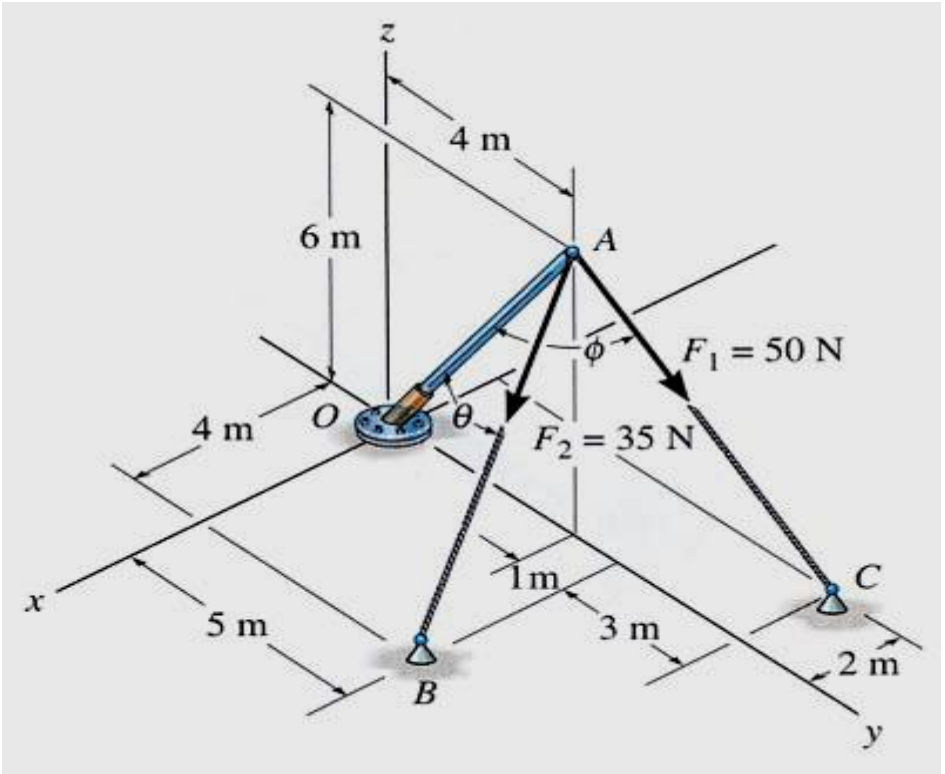
- Ângulo entre dois vetores: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{AB}\right)$
- Componentes paralelo e perpendicular de uma reta a um vetor:

Aplicações do Produto escalar



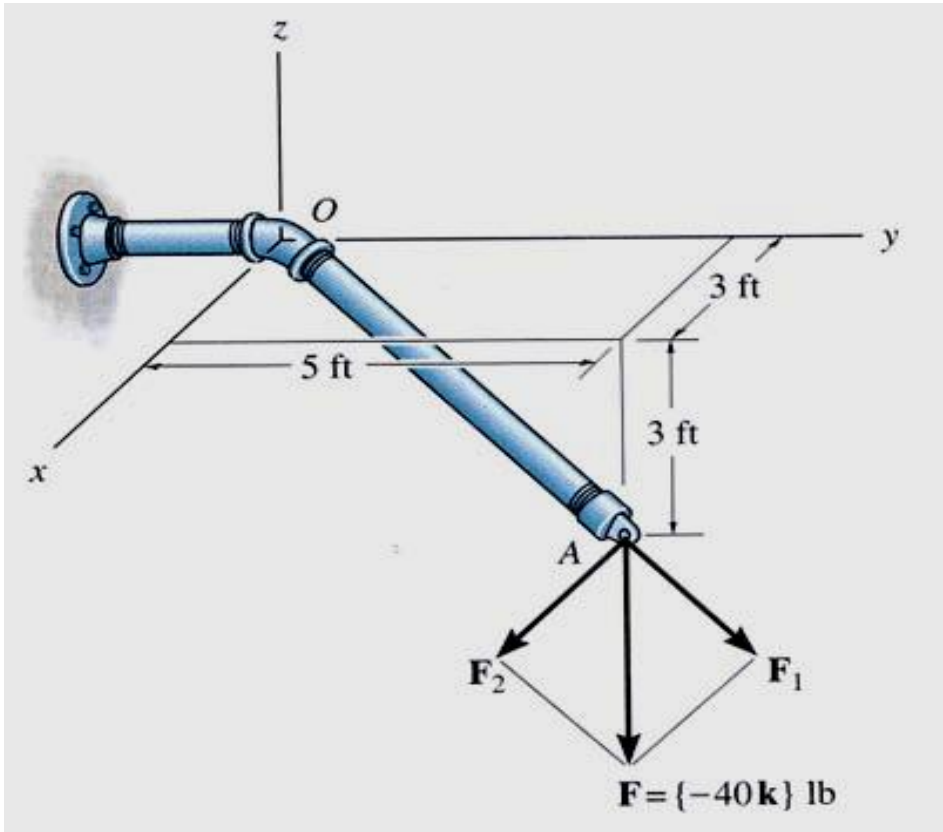
- Ângulo entre dois vetores: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{AB}\right)$
- Projeções de um vetor sobre uma reta.

Aplicações do Produto escalar



Quais são os ângulos entre a barra OA e os cabos AB e AC?

Aplicações do Produto escalar

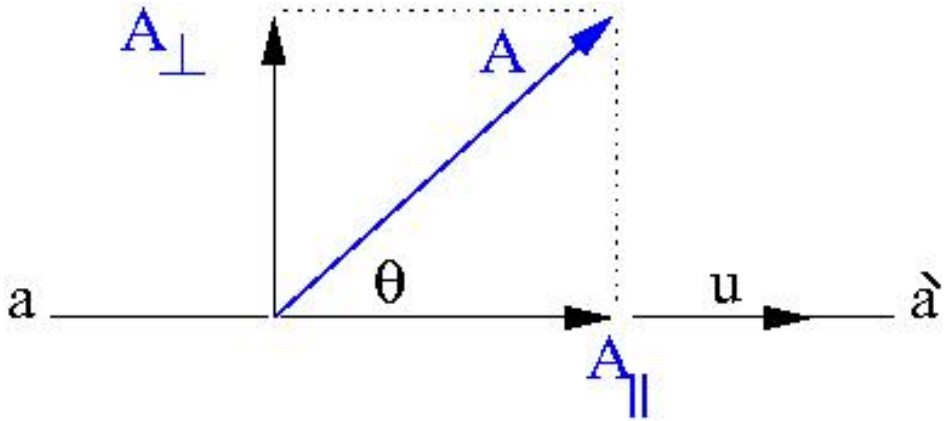


Qual é a intensidade da força que age ao longo do tubo OA?

Qual é a intensidade da força perpendicular ao tubo OA?

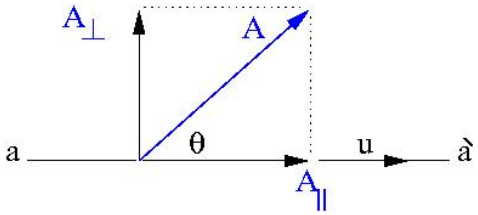
Aplicações do Produto escalar

Projeções de um vetor sobre uma reta



$\mathbf{A}_{||}$ é a componente de **A** sobre a reta **aa'**
$\mathbf{A}_{\perp}$ é a componente de **A** perpendicular à reta **aa'**

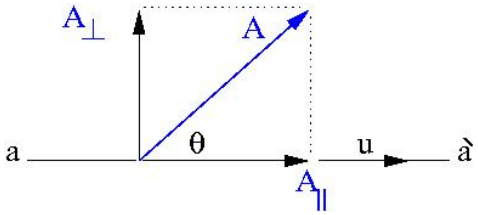
Aplicações do Produto escalar



Componente paralelo

$$A_{||} = A\cos\theta = \mathbf{A}.\mathbf{u}$$

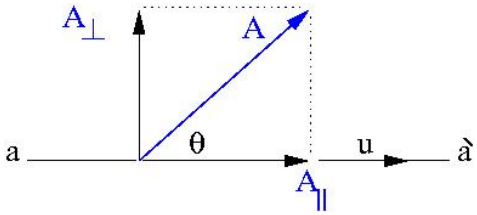
Aplicações do Produto escalar



Componente paralelo

$$A_{||} = A\cos\theta = \mathbf{A}.\mathbf{u}$$
$$\mathbf{A}_{||} = A\cos\theta\mathbf{u} = (\mathbf{A}.\mathbf{u})\mathbf{u}$$

Aplicações do Produto escalar



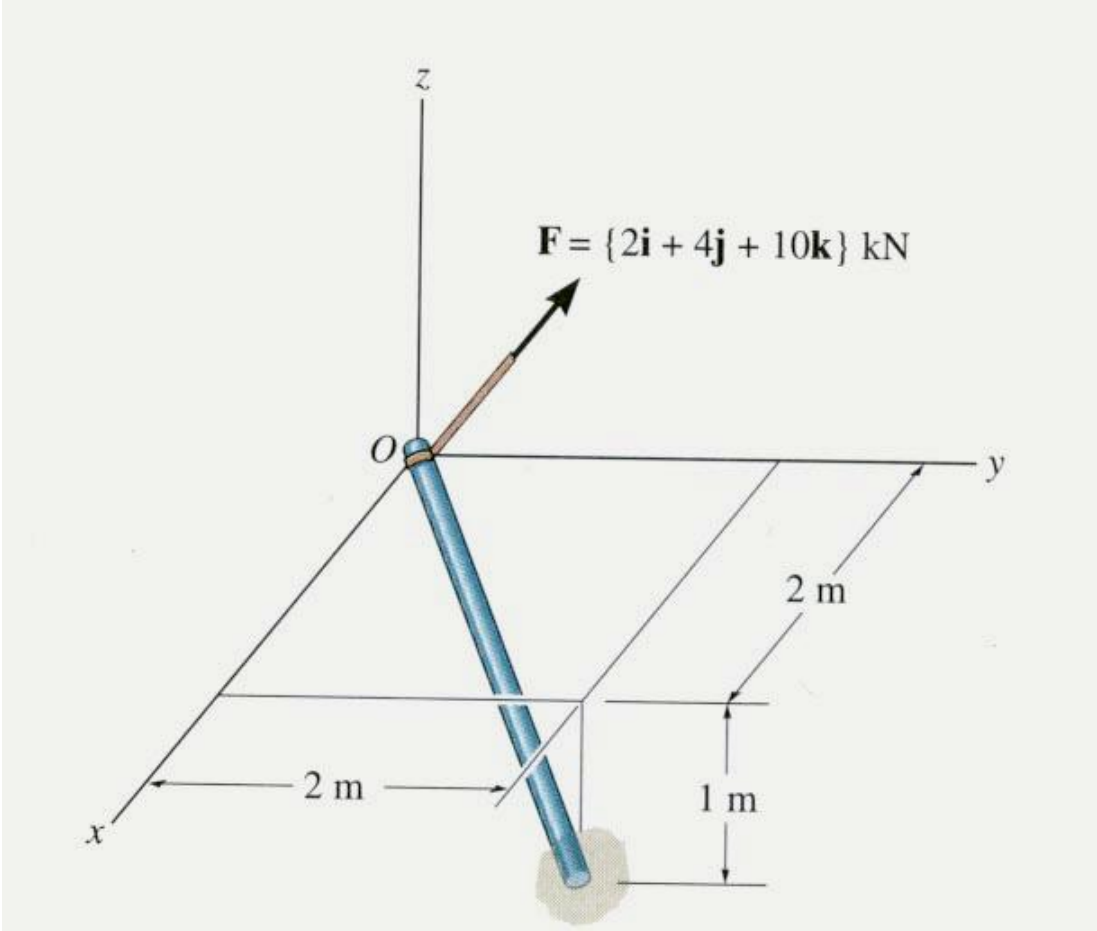
Componente paralelo

$$A_{||} = A\cos\theta = \mathbf{A}.\mathbf{u}$$
$$\mathbf{A}_{||} = A\cos\theta\mathbf{u} = (\mathbf{A}.\mathbf{u})\mathbf{u}$$

Componente perpendicular

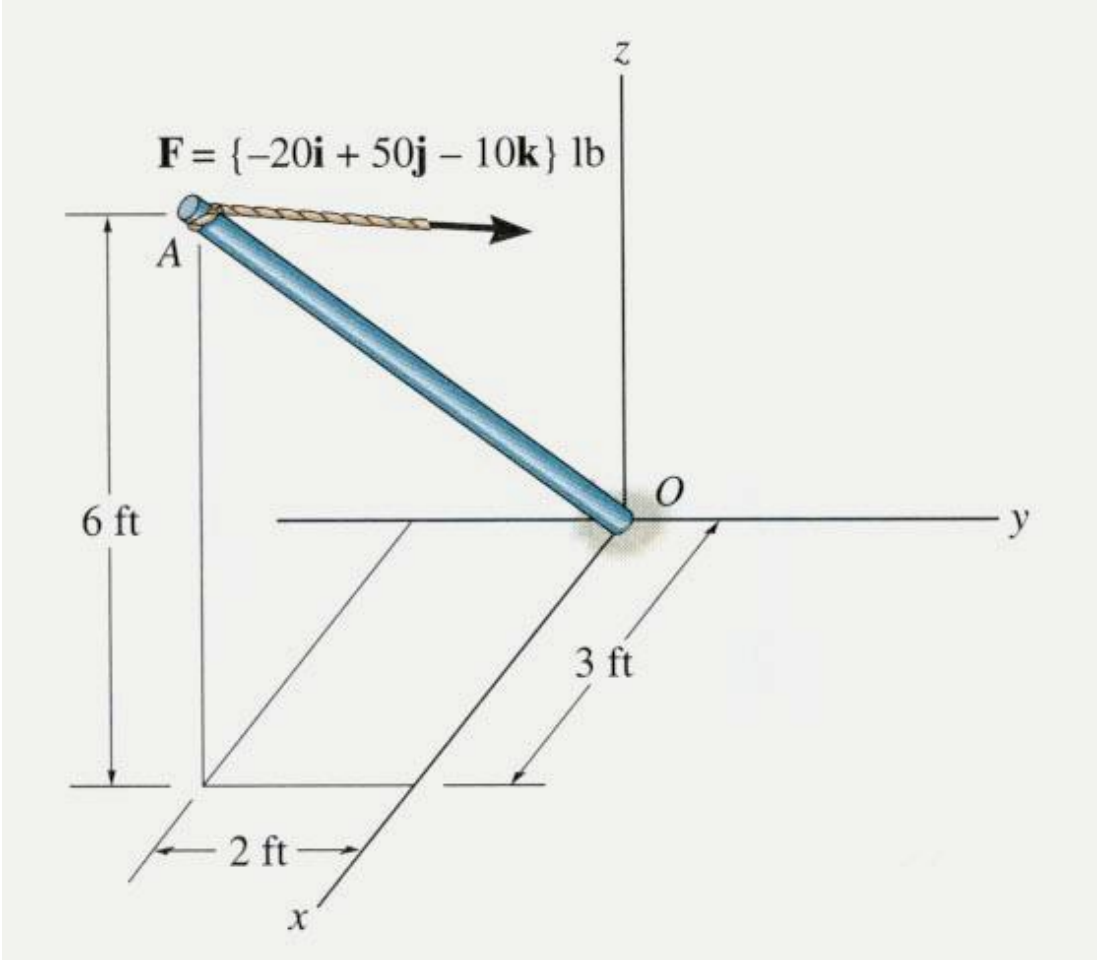
$$\mathbf{A}_{||} + \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{||}$$
$$A_{\perp} = A\sin\theta \ldots\ldots A_{\perp} = \sqrt{A^2 - A_{||}^2}$$

Exemplo 1



Dada a força que age no tubo OA, determinar o ângulo entre o vetor de força e o tubo, e a intensidade da projeção da força sobre o tubo OA.

Exemplo 2



Dada a força que age sobre o tubo, determinar o ângulo entre o vetor de força e o tubo e a magnitude da projeção da força sobre o tubo A0.