A Lei das Malhas na Presença de Campos Magnéticos.

1) Revisão da lei de Ohm, de força eletromotriz e de capacitores

Num condutor ôhmico na presença de um campo elétrico e sem outras forças atuando sobre os portadores de carga temos uma proporcionalidade[1] entre campo elétrico e densidade de corrente:

$$\vec{j} \;=\; \sigma \vec{E} \qquad (1.1)$$

onde σ é uma propriedade do condutor chamada de condutividade. Existem outras causas para o aparecimento de correntes elétricas. São as "forças eletromotrizes". Na presença de forças eletromotrizes temos um termo amais na equação:

$$\vec{j} \;=\; \vec{j}_0 \;+\; \sigma \vec{E} \qquad (1.2)$$

Para a aplicação da lei das manhas interessa calcular a integral

$$\oint_{malha} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad (1.3)$$

onde o caminho de integração percorre os condutores e dielétricos dentro de capacitores numa malha de um circuito. Em trechos do caminho com condutores podemos usar a equação (1.2) ou a (1.1) para expressão o campo elétrico em termos das correntes existentes nos condutores. Vamos usar a equação (1.2), que é mais geral. Para o caso de um simples condutor ôhmico basta escolher no final $\vec{j}_0 = 0$. A contribuição de um trecho do caminho de um ponto a até um ponto b seria:

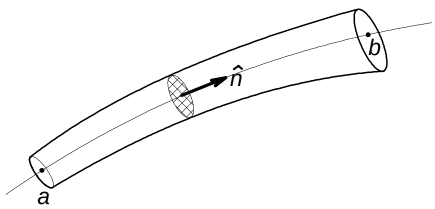

Fig. 1 Condutor

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{\vec{j} \cdot \hat{n}}{\sigma} d\ell - \int_a^b \frac{\vec{j}_0 \cdot \hat{n}}{\sigma} d\ell \qquad (1.4)$$

Vamos supor que a densidade de corrente seja razoavelmente constante nas seções retas do fio. Neste caso é vantajoso multiplicar e dividir pela área da seção transversal do fio[2] na primeira integral do lado direito:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{A \vec{j} \cdot \hat{n}}{A\sigma} d\ell - \int_a^b \frac{\vec{j}_0 \cdot \hat{n}}{\sigma} d\ell \qquad (1.5)$$

A vantagem desta operação é que $I = A \vec{j} \cdot \hat{n}$ é uma constante por causa da conservação de carga elétrica e, portanto pode ser tirada da integral. Na segunda integral este tipo de truque não traria benefícios porque não existe uma lei de conservação das densidades de corrente $\vec{j}_0$. Aplicando este truque obtemos

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \;=\; I \int_a^b \frac{d\ell}{A\sigma} \;-\; \int_a^b \frac{\vec{j}_0 \cdot \hat{n}}{\sigma} d\ell \qquad (1.6)$$

O importante deste resultado é que a integral $\int_a^b \frac{d\ell}{A\sigma}$ é uma propriedade somente do condutor e não depende da corrente. Vamos chamar esta grandeza de resistência do

---

[1] Na verdade não precisaria ser uma proporcionalidade, poderia ser alguma dependência linear, ou seja a condutividade poderia ser um tensor.
[2] que pode variar ao longo do caminho

condutor. Para a segunda integral vamos introduzir uma abreviação e chamar este termo de força eletromotriz:

$$\varepsilon \underset{def.}{=} \int_a^b \frac{\vec{j}_0 \cdot \hat{n}}{\sigma} d\ell \tag{1.7}$$

A contribuição para a integral de caminho fica então na forma

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad = \quad I\,R \quad - \quad \varepsilon \tag{1.8}$$

Se tiver um capacitor na malha temos uma contribuição:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \frac{1}{C}\int I\,dt \tag{1.9}$$

2) A lei das Malhas

Fazendo toda a integral sobre o caminho de malha obtemos uma soma destas contribuições. Sem campos magnéticos variáveis no tempo esta soma seria zero. Mas, com campos magnéticos variáveis a lei das malhas é agora

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad = \quad -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}} \tag{1.10}$$

Com as contribuições (1.8) e (1.9) podemos escrever esta equação em termos das correntes:

$$-\sum_{e=\text{fems}} \varepsilon_e \quad + \sum_{r=\text{resistores}} R_r I_r \quad + \sum_{c=\text{capacitores}} \frac{1}{C_c}\int I_c dt \quad = \quad -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{1.11}$$

Nesta forma a lei das malhas não é ainda muito prática. Queremos reescrevê-la dando um tratamento especial nas forças eletromotrizes magnéticas. Há forças eletromotrizes ligadas a certos estados térmicos fora do equilíbrio tais como reações químicas ou o efeito eletro-térmico (efeito Seebeck). E tem também uma força eletromotriz magnética oriunda da força magnética atuando sobre cargas em movimento. Quando empurramos um fio lateralmente dentro de um campo magnético os portadores de carga sofrem uma força magnética

$$\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.12}$$

Esta força provoca correntes da mesma maneira como a força elétrica $q\vec{E}$. Desta maneira temos que escrever no lugar da equação (1.2)

$$\vec{j} \quad = \quad \vec{j}_0 \quad + \quad \sigma\vec{E} \quad = \quad \underbrace{\vec{j}_{0\,\text{térmico}} + \sigma v \times \vec{B}}_{=\vec{j}_0} \quad + \quad \sigma\vec{E} \tag{1.13}$$

Com a definição da força eletromotriz (1.7) temos então uma força eletromotriz magnética num trecho de integração (a,b):

$$\varepsilon_{mag.} \quad = \quad \int_a^b \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{\ell} \tag{1.14}$$

Separando a força eletromotriz das demais forças eletromotrizes na lei das malhas obtemos:

$$-\sum_{e=\text{fems térmicas}} \varepsilon_e - \oint \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell} \;+\; \sum_{r=\text{resistores}} R_r I_r \;+\; \sum_{c=\text{capacitores}} \frac{1}{C_c}\int I_c dt \;=\; -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$
(1.15)

Vamos botar o termo da força eletromotriz magnética para o outro lado da equação para juntá-lo com o termo da lei de indução:

$$-\sum_{e=\text{fems térmicas}} \varepsilon_e \;+\; \sum_{r=\text{resistores}} R_r I_r \;+\; \sum_{c=\text{capacitores}} \frac{1}{C_c}\int I_c dt \;=\; -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell}$$
(1.16)

Agora temos que fazer um pouco de geometria para ver como os dois termos no lado direito podem ser combinados para uma única expressão simples. Vamos imaginar a malha num instante t e num instante infinitesimalmente posterior $t+\delta t$. A figura mostra um exemplo com dois caminhos de integração $C(t)$ e $C(t+\delta t)$ ligeiramente diferentes. Nesta figura os deslocamentos ocorridos neste intervalo de tempo são indicados com vetores de deslocamento (em vermelho). Mostramos também um deslocamento infinitesimal $\delta\vec{\ell}$ pertencente ao processo de integração sobre o caminho $C(t)$.

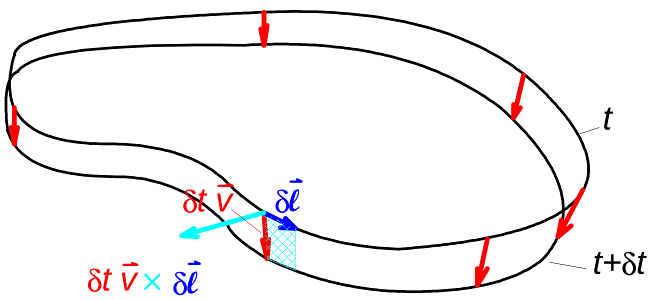

Fig. 2 Malha no instante t e um instante infinitesimalmente posterior.

Vamos olhar para uma contribuição infinitesimal para a integral $\oint \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell}$:

$$\text{contribuição infinitesimal} = \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\delta\vec{\ell} \qquad (1.17)$$

Sabemos que os fatores neste tipo de produto triplo podem ser trocados ciclicamente e uma troca não cíclica muda o sinal:

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\delta\vec{\ell} \;=\; \left(\delta\vec{\ell}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{B} \;=\; -\left(\vec{v}\times\delta\vec{\ell}\right)\cdot\vec{B} \qquad (1.18)$$

O vetor $\delta t\,\vec{v}\times\delta\vec{\ell}$, que é proporcional a última expressão, é o vetor superfície do pedaço de beirada entre os dois caminhos de integração que é formado pelos dois vetores $\delta t\,\vec{v}$ e $\delta\vec{\ell}$. Então $\delta t\left(\vec{v}\times\delta\vec{\ell}\right)\cdot\vec{B}$ é um fluxo de campo magnético através desta superfície. Fazendo a integral de caminho coletamos todos estes fluxos. Desta forma podemos afirmar:

$$\oint \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell} \;=\; -\frac{1}{\delta t}\times\left\{\text{fluxo magnético através da beirada}\right\} \qquad (1.19)$$

Sabemos que o campo magnético não tem fontes, isto é $\operatorname{div}\vec{B}=0$. Então todas as integrais de fluxo magnético através de superfícies fechadas são zero. Vamos escolher superfícies $S(t)$ e $S(t+\delta t)$ que tenham os dois caminhos de integração como beirada: $C(t)=\partial S(t)$ e $C(t+\delta t)=\partial S(t+\delta t)$. Ambas as superfícies devemos orientar de tal forma que o vetor de superfície junto com o avanço da integração defina uma hélice direita (como indicado na figura 3).

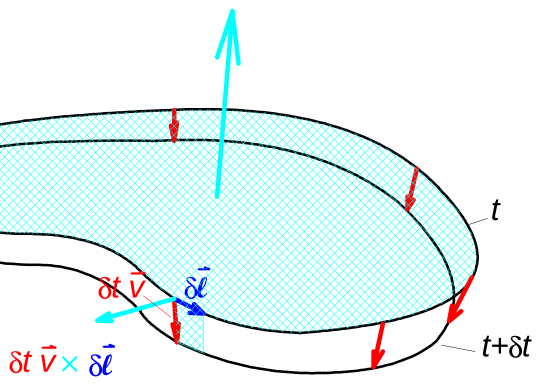

Fig.3 Superfície $S(t)$ com orientação.

O fato que todas as integrais de fluxo magnético através de superfícies fechadas são zero implica que:

$$\iint_{S(t)} \vec{B}\cdot d\vec{S} - \iint_{S(t+\delta t)} \vec{B}\cdot d\vec{S} + \{\text{fluxo magnético através da beirada}\} \quad = \quad 0 \qquad (1.20)$$

É importante notar que o campo magnético nos três termos tem que ser tomado no mesmo instante. Combinando este resultado com a equação (1.19) obtemos

$$\oint \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad -\frac{1}{\delta t}\left\{\iint_{S(t+\delta t)} \vec{B}\cdot d\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}\cdot d\vec{S}\right\} \qquad (1.21)$$

Podemos inserir este resultado na lei das malhas (1.16):

$$\begin{aligned} -\sum_{e=\text{fems térmicas}} \varepsilon_e + \sum_{r=\text{resistores}} R_r I_r + \sum_{c=\text{capacitores}} \frac{1}{C_c}\int I_c dt \quad &= \\ = \quad -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left\{\iint_{S(t+\delta t)} \vec{B}\cdot d\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}\cdot d\vec{S}\right\} & \end{aligned} \qquad (1.22)$$

Aproveitamos que δt era infinitesimal e escrevemos um limite. Ser infinitesimal significa simplesmente um aviso que no final de toda conta se pretende tomar o limite $\delta t \to 0$. O lado direito da equação (1.22) é obviamente a derivada temporal total do fluxo magnético através da superfície $S(t)$. Desta forma a lei das malhas fica na forma simples:

$$\boxed{-\sum_{e=\text{fems térmicas}} \varepsilon_e + \sum_{r=\text{resistores}} R_r I_r + \sum_{c=\text{capacitores}} \frac{1}{C_c}\int I_c dt \quad = \quad -\frac{d\Phi_{mag}}{dt}} \qquad (1.23)$$

Repare que o termo no lado direito contém duas contribuições de dois efeitos físicos totalmente diferentes: um efeito é a geração de campo elétrico pela taxa de variação de campo magnético num local perto dos condutores. O outro é uma força eletromotriz correspondente à força magnética sobre cargas que estão sendo arrastados por um fio em movimento dentro do campo magnético. A pessoa que utiliza esta fórmula geralmente não pensa nesta separação do termo $-d\Phi/dt$ em duas parcelas. Mas, a compreensão correta da equação (1.23) pode evitar erros. Como exemplo de um possível erro, damos aqui o seguinte

Exercício: A figura 4 mostra um circuito de uma malha variável no tempo formado de um amperímetro, fios e dois interruptores. Inicialmente o interruptor 1 está fechado e o 2 está aberto. Num certo instante se abre 1 e se fecha simultaneamente 2. No retângulo de fios entre os interruptores existe um forte imã permanente. Qual será a reação do amperímetro na hora de trocar os estados dos interruptores?

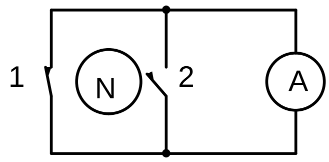

Fig. 4 Moto perpétuo eletromagnético.