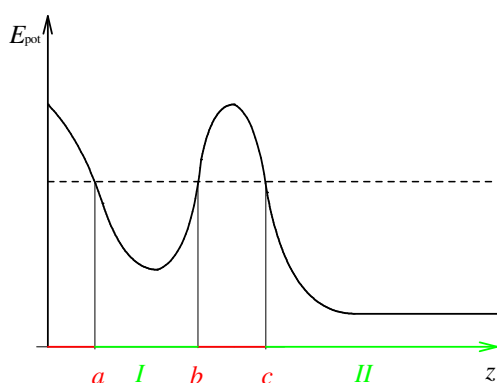


## 10.7 O efeito Josephson

Discutiremos nesta seção algumas aplicações da supercondutividade de suma importância tecnológica que resultaram da questão meramente acadêmica se pares de Cooper podem atravessar uma barreira de potencial pelo efeito túnel.

Mencionamos o efeito túnel algumas vezes. Na seção 3.2, falamos que o efeito túnel é importante na emissão de elétrons de uma superfície metálica, na seção 4.1 mencionamos que este efeito é usado para apagar a memória flash e na seção 4.6 mencionamos o microscópio de varredura por tunelamento. Sem entrar em detalhes da mecânica quântica, vamos rever o que é o efeito túnel. A figura 10.7.1 mostra o gráfico de energia potencial de alguma partícula que se pode mover somente na direção  $z$ . A linha horizontal pontilhada indica o valor total da energia da partícula. Se a partícula obedece às leis da mecânica clássica, ela pode ser encontrada somente nas regiões indicadas com verde no eixo  $z$ , pois a energia cinética dela não pode ser negativa. Uma vez que encontramos a partícula na região permitida  $I$ , ou seja, no intervalo  $[a, b]$ , podemos ter certeza de que esta partícula não será jamais encontrada na outra região permitida  $II$ . Pois, para passar para a região  $II$ , ela teria que atravessar a região proibida



do intervalo  $[b, c]$ . Mas as partículas microscópicas obedecem a uma mecânica diferente, à mecânica quântica. Elas se comportam como ondas. Esta onda de matéria consegue penetrar um pouco na região proibida, e uma partícula quântica que estava na região  $I$  pode futuramente aparecer na região  $II$ . Este é o efeito túnel.

Fig. 10.7.1 Barreira de potencial que impede que uma partícula clássica com energia na altura da linha pontilhada passe do intervalo  $[a, b]$  para a região com  $z \geq c$ .

Em 1962, o físico Brian David Josephson<sup>1</sup> previu na sua tese de doutorado que as partículas que transportam a supercorrente, ou seja, os pares de Cooper, podem também atravessar uma barreira de potencial<sup>2</sup>. Inicialmente esta previsão foi fortemente atacada e criticada pelos especialistas, mas em 1963 Philip Warren Anderson<sup>3</sup> e J. M. Rowell comprovaram experimentalmente que tunelamento de pares de Cooper realmente ocorre<sup>4</sup>. Este fenômeno resultou ser a peça chave para diversas aplicações de suma importância. Para poder entender estas aplicações, vamos ter que explicar alguns

<sup>1</sup> Brian David Josephson (04/01/1940 - ) trabalhou em diversos assuntos da física entre outros no efeito Mössbauer. Nos anos 70, ele começou a se interessar pelo problema mente-corpo e problemas da interpretação da mecânica quântica. Ele se aproximou perigosamente da fronteira entre ciência e pseudociência.

<sup>2</sup> B.D. Josephson: "Possible new effects in superconductive tunneling" *Phys.Lett.* 1 (7) pp. 251-253 (1962)

<sup>3</sup> Philip Warren Anderson (13/12/1923 -- ) trabalhou em localização em sistemas desordenados, em antiferromagnetismo e quebra espontânea de simetria.

<sup>4</sup> P.W. Anderson, J.M. Rowell "Probable Observation of the Josephson Tunnel Effect" *Phys.Rev. Lett.* 10 (6) p. 230 (1963)

detalhes dos fenômenos. A fenomenologia do tunelamento de pares de Cooper é extremamente vasta e complexa, e aqui vamos nos limitar apenas a alguns elementos.

O tunelamento de pares de Cooper ocorre na junção de dois supercondutores que são separados por uma fina camada de algum material não supercondutor. Pode-se usar um condutor comum ou um material isolante. Correspondentemente obtém-se uma junção Josephson SNS (Supercondutor-condutor Normal-Supercondutor) ou uma SIS (Supercondutor-Isolante-Supercondutor). Os dois têm características diferentes. A camada não supercondutora tem tipicamente uma espessura de apenas 10 Å no caso SIS e uns 200 Å no caso SNS. Existe ainda um tipo de junção Josephson SsS na qual dois supercondutores se tocam apenas numa ponta fina.

Entre dois pontos numa amostra supercondutora, não se consegue manter uma voltagem diferente de zero, pois a supercorrente que flui sem resistência impede que haja um campo elétrico macroscópico dentro da amostra. Mas, com a presença da fina camada não supercondutora que separa dois supercondutores, pode surgir uma voltagem não nula entre os dois supercondutores. A figura 10.7.2 mostra o esquema de uma junção Josephson ligada numa fonte de corrente com um monitoramento da voltagem entre os supercondutores.

Josephson fez uma previsão para a supercorrente  $I_S$  que atravessa a barreira neste tipo de experiência. De fato, as fórmulas de Josephson são bastante complicadas. Mas aqui vamos usar uma versão simplificada que serve como aproximação para muitos casos:

$$I_S = I_c \text{sen}(\varphi(t)) \quad (10.7.1).$$

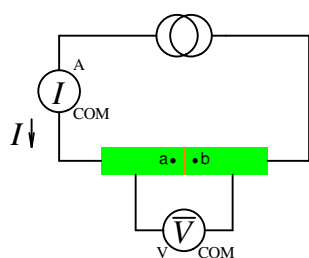


Fig. 10.7.2 Uma junção Josephson ligada numa fonte de corrente. A junção é monitorada por um volímetro. O volímetro mostra uma média temporal da voltagem, a qual pode eventualmente oscilar em alta frequência. Os dois supercondutores são representados em verde e a fina camada que os separa em cor abobara.

Na fórmula (10.7.1)  $I_c$  é um valor constante de corrente chamado de corrente crítica da junção. Este valor depende do material e da geometria da junção<sup>5</sup>. Valores típicos ficam na faixa de 1µA até algumas centenas de miliampère.  $\varphi(t)$  é um ângulo que satisfaz a seguinte relação com a voltagem  $V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$  entre os dois supercondutores

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (10.7.2).$$

$e$  é a carga elementar e  $\hbar = h/2\pi \approx 6,58 \times 10^{-16} \text{ eVs}$ . No apêndice desta seção, comentamos as fórmulas (10.7.1) e (10.7.2) para os leitores que enfrentaram a seção anterior com sucesso. Para os demais leitores seja dito aqui apenas que o ângulo  $\varphi$  representa algo como uma “diferença de fase” entre os valores da função de onda  $\psi$  nos dois supercondutores que descreve os pares de Cooper. Coloquei aspas na *diferença de fase* porque esta diferença de fase é uma grandeza um tanto sofisticada como explicado no apêndice.

<sup>5</sup> Na verdade  $I_c$  não é simplesmente uma constante. Aparece nestas experiências naturalmente uma voltagem oscilatória e neste caso a corrente crítica depende da frequência da oscilação.

A supercorrente  $I_s$  da fórmula (10.7.1) não é necessariamente a única que flui num circuito como aquele na figura 10.7.2. Se a junção for uma do tipo SNS, pode haver também uma corrente ôhmica. Uma parte ôhmica pode também ser oriunda de algum contato paralelo à junção Josephson. Além disso pode ter uma corrente de tunelamento de elétrons de condução. Esta corrente aparece apenas para voltagens grandes, tipicamente na faixa de 1 mV. Então temos uma corrente no circuito que é a soma de três termos

$$I = \frac{V}{R} + I_s + I_{tu.el.} \quad (10.7.3).$$

$R$  é a resistência ôhmica da junção. Nas nossas considerações não vamos incluir a parcela de tunelamento de elétrons de condução supondo voltagens suficientemente baixas de tal forma que valha  $I_{tu.el.} = 0$ . Vamos analisar o comportamento de uma junção SNS. Com a fórmula (10.7.2), a fórmula da corrente (10.7.3) se transforma numa equação diferencial com a incógnita  $\varphi$ :

$$I = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin(\varphi) \quad (10.7.4).$$

A corrente total  $I$  é mantida temporalmente constante<sup>6</sup> na maioria das experiências. Neste caso, pode-se resolver a equação. Temos que considerar dois casos separadamente:

(1) Se  $|I| \leq I_c$ , a solução geral é simplesmente  $\varphi = const$ . Isto significa que a voltagem na junção é zero. Então pode-se ajustar a fonte de corrente para qualquer valor entre  $-I_c$  e  $+I_c$  sem que apareça uma voltagem entre os supercondutores. Neste caso a parcela ôhmica é zero.

(2) Se  $|I| > I_c$ , pode-se resolver a equação diferencial pelo método de separação de variáveis:

$$dt = \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{I - I_c \sin(\varphi)} \quad (10.7.5).$$

Integrando obtemos

$$t - t_0 = \frac{\hbar}{2eR} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi'}{I - I_c \sin(\varphi')} \quad (10.7.6).$$

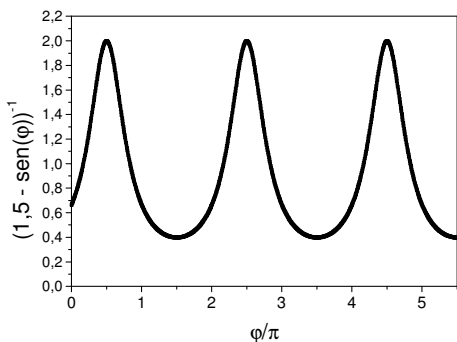


Fig.10.7.3 Exemplo da função que está sendo integrada na fórmula (10.7.6) para o caso  $I = 1,5 \times I_c$

Para entendermos esta relação entre tempo e ângulo  $\varphi$ , vamos olhar o caso  $I > 0$ . Neste caso a função que está sendo integrada é sempre positiva, e o valor da integral é uma função estritamente monotonicamente crescente. Portanto a função  $t(\varphi)$  que é definida pela igualdade (10.7.6) possui função inversa e esta é a função

<sup>6</sup> Na verdade se faz geralmente uma varredura de  $I$ ; então a todo rigor  $I$  não é temporalmente constante. Mas esta varredura é feita lentamente, com escala temporal típica de milissegundos, e, como veremos logo mais, a escala de tempo relevante na experiência fica na faixa de nanossegundos. Então podemos considerar  $I$  como constante.

procurada  $\varphi(t)$ . A derivada desta função nos fornece a voltagem como foi indicado pela fórmula (10.7.2).

Para termos uma ideia mais clara destas funções, veremos um exemplo numérico. A figura 10.7.3 mostra a função  $[I/I_c - \text{sen } \varphi]^{-1}$  para o caso  $I = 1,5 \times I_c$ , e a figura 10.7.4 mostra a integral desta função (calculada numericamente).

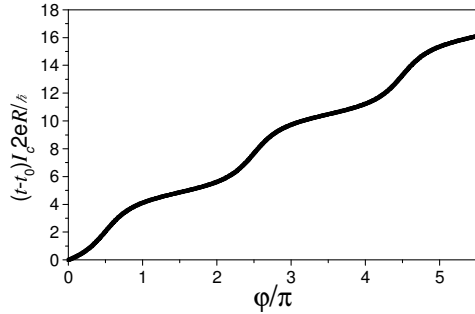


Fig. 10.7.4 O tempo como função do ângulo. O tempo está representado na unidade  $\hbar/(I_c^2 e R)$  e o ângulo na unidade de  $\pi$ . A curva se refere ao exemplo com  $I = 1,5 \times I_c$  como na figura 10.7.3.

Percebemos que a função inversa do tempo, ou seja, a função  $\varphi(t)$  é a soma de uma função afim (função do tipo  $y = a + bx$ ) e uma função periódica. O período da parcela periódica é determinado pelos avanços do ângulo por  $2\pi$ . Vamos calcular este período  $T$ :

$$T = \frac{\hbar}{2eR} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{I - I_c \text{sen}(\varphi')} \quad (10.7.7).$$

Esta integral definida é conhecida e se encontra em coleções de fórmulas matemáticas. O resultado é

$$T = \frac{\hbar}{2eR} \frac{2\pi}{\sqrt{I^2 - I_c^2}} \quad (10.7.8).$$

Com valores da corrente  $I$  que não estejam demasiadamente próximos do valor  $I_c$ , digamos com  $I > 1,01 \times I_c$ , os valores típicos de  $R\sqrt{I^2 - I_c^2}$  ficam na faixa de  $1\mu\text{V}$  até  $1\text{mV}$ <sup>7</sup>. Mesmo com o valor pequeno de  $1\mu\text{V}$ , o período da parcela oscilatória é muito pequeno:

$$\text{para } R\sqrt{I^2 - I_c^2} = 1\mu\text{V}: T = \frac{6,58 \times 10^{-16} \text{ eVs} \times \pi}{\text{e} \times 10^{-6} \text{ V}} = 2,07 \times 10^{-9} \text{ s} \quad (10.7.9).$$

Geralmente se emprega neste tipo de experiência um voltímetro que serve apenas para acompanhar voltagens cuja variação temporal é muito mais lenta. Este tipo de voltímetro não consegue acompanhar esta oscilação na faixa de gigahertz, e ele indicará uma voltagem média. Vamos calcular esta voltagem média. Podemos usar um período da parte oscilatória para fazer a média com o efeito de eliminar completamente a parte oscilatória do resultado. Com a fórmula (10.7.2) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \frac{\hbar}{2e} \frac{2\pi}{T} = \\ &= R\sqrt{I^2 - I_c^2} \end{aligned} \quad (10.7.10).$$

<sup>7</sup> Yonuk Chong, P. D. Dresselhaus, and S. P. Benz: "Electrical properties of Nb–MoSi<sub>2</sub>–Nb Josephson junctions" APPLIED PHYSICS LETTERS **86**, 232505 (2005)

Pode-se fazer facilmente uma análise análoga para a região  $I < -I_c$ . Juntando estes resultados com o do caso (1), obtemos uma relação entre voltagem média e corrente como aquela mostrada na figura 10.7.5.

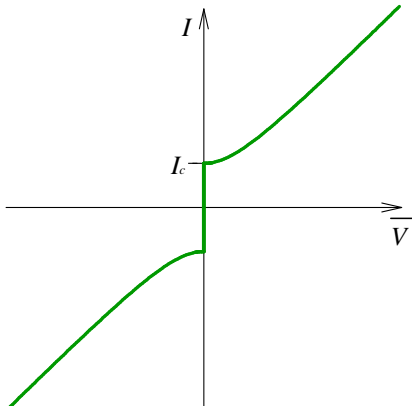
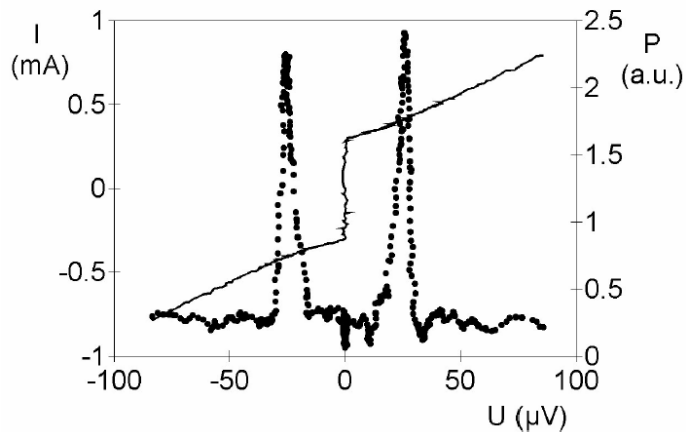


Fig. 10.7.5 Previsão teórica da relação entre voltagem média e corrente numa junção Josephson do tipo SNS que foi alimentada por uma fonte de corrente.

Na figura 10.7.6, mostramos dados experimentais com uma junção com nióbio. A curva de linha contínua mostra a relação entre corrente e voltagem média. Experiências deste tipo convenceram os críticos que as previsão de Josephson eram corretas.

Fig. 10.7.6 Dados experimentais de uma junção Josephson alimentada com corrente constante. A curva de linha contínua mostra a relação entre corrente e voltagem média. A curva pontilhada mostra uma potência registrada por um detector de microonda que é sensível na frequência de 12,75GHz. A figura é obtida da apostila do curso de laboratório avançado do Instituto Walther Meißner do Departamento de Física da Universidade Técnica de Munique. Agradecemos ao Professor Dr. Rudolf Gross pela permissão de usar este resultado.



Até aqui o leitor se pergunta por que ele está sendo torturado com detalhes da questão meramente acadêmica se tunelamento de pares de Cooper existe ou não. Mas há um pequeno detalhe de suma importância neste fenômeno. Na hora de calcular a média temporal da voltagem, jogamos a parte oscilatória fora. Mas esta pode ser a parte mais interessante. Então, quando aparece uma voltagem média diferente de zero na junção Josephson, aparece também uma oscilação de alta frequência. Isto é conhecido como *efeito Josephson AC*, enquanto o aparecimento de uma corrente constante sem voltagem na junção é chamado de *efeito Josephson DC*. Pela fórmula (10.7.10), o período desta oscilação é relacionado com a voltagem média:

$$\bar{V} = \frac{\hbar}{2e} \frac{2\pi}{T} \quad (10.7.11).$$

A constante de proporcionalidade que relaciona a voltagem média e o inverso do período depende somente da carga elementar e da constante de Planck e não depende de características do supercondutor ou da junção empregada e nem da temperatura ou do exato valor da corrente. Tempos e frequências são as grandezas que podem ser medidas com a mais alta precisão. Os relógios atômicos nas instituições de pesos e medidas alcançam atualmente limites de imprecisão de  $\delta t/t \approx 2 \times 10^{-16}$ . Isto é uma incerteza relativa muitas ordens de grandeza menor que a incerteza relativa da voltagem de uma célula eletroquímica fabricada de acordo com determinada receita. Então surgiu a ideia

de usar a relação entre tempo e voltagem das junções Josephson para construir um padrão da unidade volt.

Mas há algumas dificuldades técnicas envolvidas que precisavam ser vencidas. Em primeiro lugar, o sinal oscilatório é muito fraco e conseqüentemente sua detecção sofre com uma baixa razão sinal-ruído. Em segundo lugar, a constante de proporcionalidade possui um valor tal que com frequências acessíveis os valores de voltagem ficam numa faixa inconvenientemente baixa. O valor da constante de proporcionalidade entre inverso do período e voltagem vale

$$\frac{h}{2e} \approx 2,068 \times 10^{-15} \text{ Vs} \quad (10.7.12).$$

Então uma frequência de 1 GHz corresponde a uma voltagem de pouco mais de  $2\mu\text{V}$ . Para um padrão de volt, voltagens na faixa de 1 V a 10 V seriam convenientes. Veremos como os pesquisadores venceram estas dificuldades.

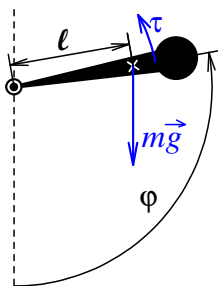
Para poder entender a técnica usada para estabelecer um padrão de voltagem com junções Josephson, precisamos corrigir ainda um pequeno erro na fórmula (10.7.3). Como vimos que acima da corrente crítica aparece naturalmente uma voltagem oscilatória, precisamos incluir na soma das correntes também uma parcela capacitiva. O erro de ter esquecido esta corrente capacitiva pode ser pequeno ou grande dependendo do valor  $C$  da capacitância do capacitor formado pelos dois supercondutores. A fórmula corrigida é

$$I = C \frac{\hbar}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \text{sen}(\varphi) \quad (10.7.13).$$

Esta é uma equação diferencial consideravelmente mais complicada que a original (10.7.4). Mas ela é uma velha conhecida da mecânica clássica. Compare esta com a segunda lei de Newton para um pêndulo físico no campo gravitacional com algum torque  $\tau$  constante adicional e com amortecimento:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\ell mg \text{sen}(\varphi) - \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \tau \quad (10.7.14).$$

$I$  é o momento de inércia do pêndulo,  $\ell$  é a distância entre centro de massa e eixo de rotação,  $-\ell mg \text{sen}(\varphi)$  é o torque gravitacional,  $\tau$  um torque constante e  $-\gamma d\varphi/dt$  representa um torque de atrito. Temos a seguinte correspondência



$$\begin{aligned} I &\rightarrow C \frac{\hbar}{2e} \\ \ell mg &\rightarrow I_c \\ \tau &\rightarrow I \\ \gamma &\rightarrow \frac{\hbar}{2eR} \end{aligned} \quad (10.7.15).$$

Fig. 10.7.7 Pêndulo físico com a dinâmica de uma junção Josephson.

É útil imaginar a energia potencial  $E_{\text{pot}}$  associada aos torques não dissipativos deste pêndulo:

$$E_{\text{pot}}(\varphi) = \ell mg(1 - \cos(\varphi)) - \tau\varphi$$

$$\downarrow$$

$$E_{\text{pot}}(\varphi) = I_c(1 - \cos(\varphi)) - I\varphi \tag{10.7.16}$$

A figura 10.7.8 mostra o gráfico desta energia potencial. Podemos imaginar uma tábua de lavar com esta imagem.

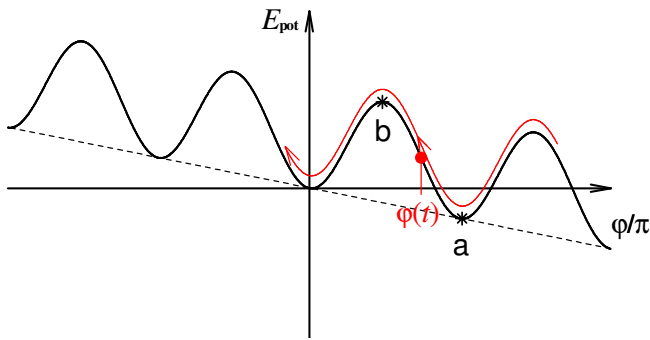


Fig. 10.7.8 Energia potencial dos torques não dissipativos do pêndulo que é análoga a uma junção Josephson. A inclinação da “tábua de lavar” é o torque constante  $\tau$  (a corrente  $I$ ), a profundidade dos sulcos é o dobro do termo  $\ell mg$  (da corrente crítica  $I_c$ ). A curva vermelha indica um possível movimento do ponto de fase  $\varphi(t)$ . Na passagem pelo ponto a, o módulo da velocidade  $|d\varphi/dt|$  é maior do que no

ponto b por haver uma energia potencial menor no ponto a do que no ponto b.

A dinâmica deste sistema é complicada, mas vamos complicá-la ainda mais. Vamos injetar na junção Josephson além da corrente constante  $I_{DC}$  uma corrente oscilatória  $I_{AC}(t) = A\cos(\omega t)$  como indicado no circuito da figura 10.7.9.

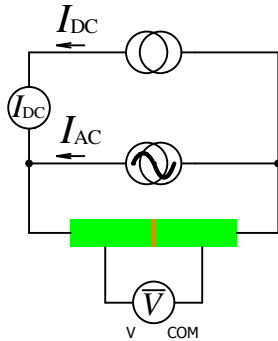


Fig. 10.7.9 Junção Josephson alimentada com corrente constante e alternada.

Com este sistema, pode-se observar um espectro amplo de possíveis comportamentos dependendo da escolha de parâmetros envolvidos. A escolha feita para fabricar um padrão de volt é uma que leva a um comportamento simples e controlável. Vamos supor que a corrente  $I$  seja pequena (a inclinação da “tábua de lavar” pequena) e a constante de amortecimento  $\hbar/2eR$  ( $\gamma$ ) suficientemente grande de tal forma que o ponto de fase  $\varphi(t)$  sem presença da corrente oscilatória não consiga descer a rampa por muito tempo. Sem a oscilação externa, ou seja, com  $A=0$ , o ponto de fase  $\varphi(t)$  deve terminar preso em algum dos sulcos da “tábua de lavar”. Uma vez preso numa posição de equilíbrio, teríamos  $\varphi(t) = \text{const.}$ , o que significa para a junção de Josephson uma voltagem zero (lembrem-se da fórmula (10.7.2)).

Agora vamos ver como a presença da corrente oscilatória  $I_{AC}(t) = A\cos(\omega t)$  pode causar um movimento continuado do ponto de fase de tal maneira que a voltagem média fique diferente de zero. Vamos utilizar a analogia com o pêndulo e introduzir também na segunda lei de Newton um torque oscilatório  $\tau_{AC}(t) = \alpha\cos(\omega t)$ . A potência que este torque entrega ao pêndulo é

$$P(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \alpha \cos(\omega t) \tag{10.7.17}$$

Num movimento continuado, a derivada  $d\phi/dt$  não muda de sinal, mas o cosseno muda de sinal. Mesmo assim a potência média entregue pode ser diferente de zero. Repare que devido à diferença de energia potencial nos pontos a e b na figura 10.7.8, o módulo da velocidade  $|d\phi/dt|$  no ponto a é maior do que no ponto b. Isto vale naturalmente para todos os vales e picos. Somente se o ritmo da passagem do ponto de fase  $\phi(t)$  pelos picos e vales combina perfeitamente com as oscilações do torque  $\tau_{AC}(t)$  de tal maneira que o período de oscilação é um número inteiro vezes o tempo da passagem entre dois picos, podemos ter uma potência média diferente de zero. Esta potência entregue ao pêndulo pode compensar a perda de energia do atrito e manter um movimento continuado. A relação entre frequência angular  $\omega$  e velocidade angular média  $\overline{d\phi/dt}$  que resulta desta condição é independente da inclinação da “tábua de lavar”. Para a junção de Josephson, isto significa que a voltagem média que se consegue manter para um dado valor de  $\omega$  permite uma faixa de possíveis valores da corrente. De fato, a corrente pode até fluir contra a voltagem. Foi este o caso que representei na figura 10.7.8. Neste caso, o ponto de fase  $\phi(t)$  sobe a rampa, e a energia fornecida pelo torque oscilatório compensaria não apenas as perdas por atrito, mas seria suficiente para aumentar a energia potencial  $U$  cada vez mais. Deste mecanismo resulta uma relação entre corrente  $I_{DC}$  e voltagem média como aquela representada na figura 10.7.10.

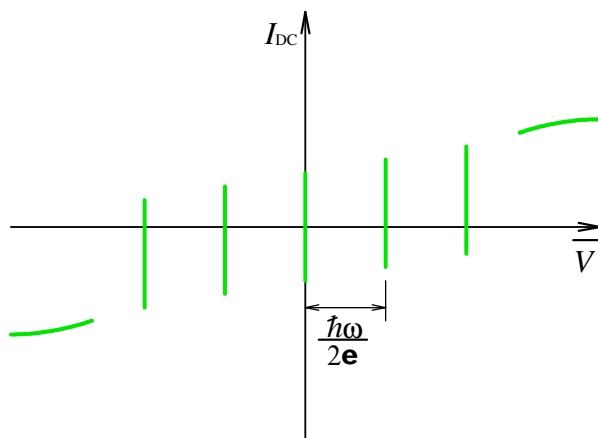


Fig. 10.7.10 Relação entre  $I_{DC}$  e voltagem média numa junção Josephson capacitiva com injeção de corrente alternada  $I_{AC}(t) = A \cos(\omega t)$ .

As curvas inclinadas nos extremos do gráfico correspondem a correntes tão elevadas ou a inclinações da “tábua de lavar” tão íngremes que o ponto de fase  $\phi(t)$  acaba escorregando sem a ajuda da oscilação externa.

Com este uso da junção Josephson, eliminou-se o problema da baixa intensidade do sinal oscilatório gerado no efeito Josephson AC. Ao invés de esperar por um sinal oscilatório, injeta-se tal sinal. De certa forma se inverteu o efeito. Por isso fala-se também do *efeito Josephson AC invertido*.

Resta resolver o problema de baixos valores de voltagem. Uma junção que trabalha numa destas linhas verticais do gráfico 10.7.10, por exemplo, na linha com  $\bar{V} = 1 \times \hbar\omega/2e$ , funciona como uma fonte de voltagem ideal desta voltagem. Para chegar a valores mais elevados da voltagem, podem-se colocar muitas destas junções em série. Todas devem ser alimentadas com a mesma oscilação. Não é completamente fácil garantir que, num circuito em série, todas as junções trabalhem na mesma linha, ou seja, com a mesma voltagem, mas os especialistas conseguiram resolver esta dificuldade. Hoje há circuitos integrados com mais de 20000 junções em série que podem ser operados com uma frequência de 75 GHz e fornecem padrões de voltagem de 1 V até 10 V.



Estas voltagens geradas com estes circuitos são tão confiáveis que se decidiu em 1990 definir uma unidade de voltagem chamada volt-90, escrita  $V_{90}$ , tal que a constante  $2e/h$  tenha o valor exato de

$$\frac{2e}{h} \stackrel{def.}{=} 0,4835979 \times 10^{-15} \frac{1}{s V_{90}} \quad (10.7.18)$$

O número  $0,4835979 \times 10^{-15}$  foi escolhido de tal forma que o valor  $V_{90}$  fique o mais perto possível da antiga unidade volt. Com o efeito Hall quântico (seção 6.7), pode-se basear também a unidade da corrente elétrica exclusivamente no valor da carga elementar e na unidade  $V_{90}$ . Com a balança de Kibble (seção 8.3), podemos definir um padrão de massa e finalmente com a invariância da velocidade da luz pode-se basear um padrão de comprimento num padrão de tempo. Com isto as cinco unidades básicas metro, quilograma, segundo, volt e ampère podem todas ser ancoradas na única unidade de segundo, a qual tem uma padronização com relógios atômicos extremamente confiável.

A fabricação e o uso de uma junção Josephson não são fáceis. No uso de uma junção deve-se blindar o campo magnético da Terra. O efeito Josephson reage sensivelmente a campos magnéticos. Vamos mentalmente olhar dentro de uma junção Josephson. A supercorrente total  $I_S$  que atravessa esta junção é uma soma de muitas contribuições  $I_S = \sum_{k=1}^n i_{Sk}$  de diversos pontos da junção como está indicado na figura 10.7.11. Na verdade,  $I_S$  é uma integral da densidade de supercorrente, mas podemos imaginar uma soma de correntes  $i_{Sk}$ . Para cada  $i_{Sk}$  vale uma fórmula como a (10.7.1)

$$i_{Sk} = i_{ck} \text{sen}(\varphi_k) \quad (10.7.19).$$

Se todas as fase  $\varphi_k$  tiverem o mesmo valor, recuperaremos a antiga fórmula (10.7.1) com  $I_S = \sum_{k=1}^n i_{Sk}$ . Mas resulta que, na presença de um campo magnético atravessando a junção numa direção perpendicular à densidade de supercorrente, as fases  $\varphi_k$  acabam tendo valores variados. Então, com  $\vec{B} \neq 0$ , algumas das correntes  $i_{Sk}$  podem ser negativas e outras positivas, e a supercorrente total fica menor. Como mostraremos no apêndice, a grandeza relevante nesta questão é o fluxo magnético que atravessa a região da junção. Então, para poder observar os efeitos descritos, precisa-se manter este fluxo pequeno isolando bem a junção de campos magnéticos e escolhendo o tamanho da junção muito pequeno.

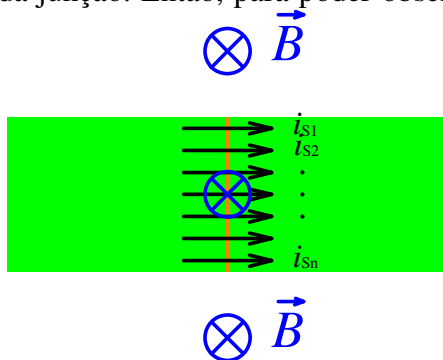


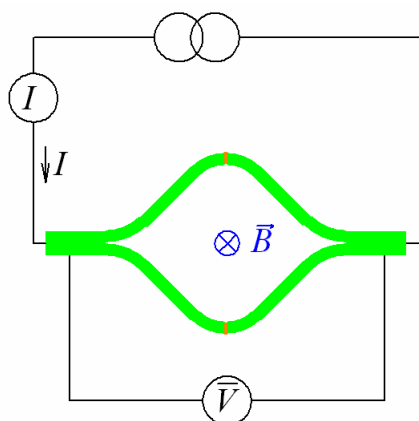
Fig. 10.7.11 Supercorrente numa junção Josephson como soma de muitas parcelas.

Robert Jaklevic, John J. Lambe, James Mercereau e Arnold Silver perceberam em 1964 que aquilo que parece uma desagradável dificuldade pode ser convertido numa poderosa ferramenta<sup>8</sup>. Se o

<sup>8</sup> R.C.Jacklevic, J. Lambe, A.H. Silver, J.E. Mercerau: “Quantum Interference Effects in Josephson Tunneling” *Phys. Rev.Lett.* 12 (7) pp, 159-160 (1964)

efeito Josephson é sensivelmente perturbado por campo magnético, pode-se usar este fato para medir campo magnético muito tênue. Para obter uma alta sensibilidade, deve-se fazer exatamente o contrário da diminuição do tamanho da junção. Então Jaklevic, Lambe, Mercereau e Silver resolveram “cortar o fio supercondutor ao meio” para separar duas partes da junção e englobar uma área grande que possa fornecer um fluxo magnético grande mesmo com valores muito pequenos do campo  $\vec{B}$ . A figura 10.7.12 mostra este esquema. Na verdade este tipo de dispositivo não se constrói cortando fios, usamos esta expressão apenas para enfatizar que estas duas junções dentro de uma malha podem ser consideradas uma única junção com área grande que pode acumular fluxo magnético.

Fig. 10.7.12 Uma junção Josephson que foi dividida em duas formando um SQUID



Aumenta-se a corrente  $I$  gradativamente até aparecer uma pequena voltagem no voltímetro. Neste ponto, a corrente tem o valor da corrente crítica. Quando há um fluxo magnético externamente gerado passando pela abertura com valor entre 0 e a metade de um quantum de fluxo, o valor da corrente crítica diminui. Quando o fluxo se aproxima do valor do quantum de fluxo, a corrente crítica volta ao seu antigo valor. O comportamento deste dispositivo é análogo ao comportamento da luz em certas experiências envolvendo interferência das ondas luminosas.

Por esta razão, este dispositivo recebeu o nome de *Superconducting Quantum Interference Device* com a sigla SQUID.

Os SQUIDs permitem medir valores extremamente pequenos do campo magnético. Por exemplo, os fracos campos magnéticos gerados pelas correntes elétricas dos pulsos nervosos que acompanham as atividades do nosso cérebro, do nosso coração ou do aparelho digestivo podem ser medidos. Várias técnicas diagnósticas que utilizam SQUIDs foram desenvolvidas. Por exemplo a arritmia do músculo cardíaco pode ser estudada com este método. Na geologia e no controle de materiais, os SQUIDs são usados, e galvanômetros muito sensíveis podem ser construídos com um SQUID.

As aplicações das junções Josephson não se limitam à fabricação de um padrão de volt e a magnetômetros sensíveis. Capacitores e junções de Josephson podem ser combinados para formar linhas de transmissão de sinais elétricos que não distorcem os sinais e ao transmiti-los ainda os amplificam com um baixíssimo nível de ruído<sup>9</sup>. Estes amplificadores têm uma largura de banda gigante de 2GHz. Com tal largura de banda, milhões de sinais de telefonema podem ser amplificados simultaneamente. Com anéis supercondutores que contêm uma junção Josephson, pode-se expressar um bit de informação pela presença ou ausência de um quantum de fluxo magnético no anel. A passagem de um estado para outro gera pulsos de voltagem extremamente curtos. A duração desses pulsos pode ser apenas um picossegundo. Isto pode ser usado para a

<sup>9</sup> Kevin O’Brien, Chris Macklin, Irfan Siddiqi, and Xiang Zhang: Resonant Phase Matching of Josephson Junction Traveling Wave Parametric Amplifiers *Phys. Rev. Lett.* 113, 157001 – Published 6 October 2014

C. Macklin, K. O’Brien, D. Hover, M. E. Schwartz, V. Bolkhovskiy, X. Zhang W. D. Oliver, I. Siddiqi: A near-quantum-limited Josephson traveling-wave parametric amplifier. *Scienceexpress Reports / sciencemag.org/content/early/recent / 3 September 2015 / Page 1 / 10.1126/science.aaa8525*

construção de computadores ultrarrápidos<sup>10</sup>. QUIDs podem ser usados para detectar radiação eletromagnética cobrindo uma faixa espectral desde a radiação infravermelha até os raios X com aplicações na astronomia<sup>11</sup>. E finalmente se investe atualmente grande esforço de usar circuitos com junção Josephson para realizar um computador quântico que não use a lógica booleana, mas, a lógica quântica. Peter Williston Shor mostrou que esta lógica permite resolver o problema de encontrar os fatores primos de um dado número com um tempo de computação que cresce somente como um polinômio do número de dígitos enquanto com a lógica booleana este tempo cresce exponencialmente. Depois desta descoberta começou uma corrida de construir um computador quântico. Existem diversas propostas, e o uso de junções Josephson é uma das mais promissoras.

## 10.7 Apêndice

Num material não supercondutor, não existem pares de Cooper. Então parece ser impossível que um par de Cooper atravesse uma camada fina deste tipo de material. Mas devemos lembrar que um par de Cooper é um objeto grande, uma bola com diâmetro de milhares de Å, enquanto a camada fina de átomos alheios que separam os dois supercondutores de uma junção SIS tem tipicamente 10 Å. Então esta bola é centenas de vezes maior que a espessura da camada alheia. Para poder falar de energia potencial de um par de Cooper, temos que imaginar um par de Cooper com uma função de onda do centro de massa bem localizada. Se imaginarmos o centro de massa dentro da camada de átomos alheios, perceberemos que se trata de um par de quase partículas que se encontram com boa chance de lados opostos desta camada. O acoplamento fornecido pelas vibrações da rede cristalina deve funcionar também com alguns átomos de uma substância estranha no meio do caminho. Então o par de Cooper pode existir dentro da substância não supercondutora, sim! Mas é bem razoável supor que a presença daqueles átomos alheios prejudique um pouco o acoplamento. Então a energia de ligação dos elétrons vestidos fica um pouco prejudicada e isto significa que o par de Cooper tem uma energia potencial um pouco mais elevada nesta posição. A elevação da energia potencial começa já quando partes da bola que constitui o par de Cooper interceptam a camada de átomos alheios. Consequentemente a largura da barreira de potencial é bem maior que a espessura de 10 Å. A barreira de potencial não precisa ser muito alta para formar uma zona classicamente proibida, pois a energia cinética dos pares de Cooper é geralmente muito pequena. No caso de uma junção SNS elétrons de condução do material normal podem estar correlacionados mesmo que este estado correlacionado no material N puro não seja energeticamente favorável.

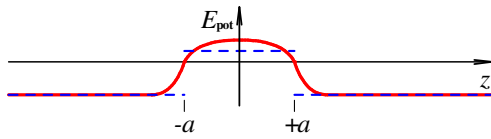
Certamente a barreira de potencial criada pela presença dos átomos alheios tem numa representação gráfica uma forma suave e redonda. Mas, para facilitar as contas, vamos simplificar um pouco e substituir esta função suave por uma função retangular como indicado da figura 10.7.13. Escolhemos o eixo  $z$  perpendicular à camada de átomos alheios e a origem no centro desta camada. A espessura da barreira chamamos de  $2a$ .

---

<sup>10</sup> Anna Herr: rapid single flux quantum logic  
[https://www.physics.umd.edu/~kosborn/index\\_files/SEALeR/Anna%20Herr.pdf](https://www.physics.umd.edu/~kosborn/index_files/SEALeR/Anna%20Herr.pdf)

<sup>11</sup> Evan D. Walsh, Dmitri K. Efetov, Gil-Ho Lee, Mikkel Heuck, Jesse Crossno, Thomas A. Ohki, Philip Kim, Dirk Englund, and Kin Chung Fong: Graphene-based Josephson junction single photon detector  
[arXiv.org/cond.mat> arXiv:1703.09736](https://arxiv.org/cond.mat/1703.09736)

Fig. 10.7.13 Representação qualitativa da energia potencial dos pares de Cooper perto da camada de átomos alheios entre dois supercondutores. A curva vermelha pode representar a verdadeira energia potencial, e a azul pontilhada, uma aproximação.



Os cálculos referentes ao efeito túnel constituem uma das primeiras tarefas que o aluno do curso de mecânica quântica tem que resolver como exercício. O resultado é que, dentro da barreira de potencial, a função de onda mostra um comportamento de decaimento exponencial. Com a forma simétrica da barreira no presente caso, temos um decaimento exponencial de cada lado. Isto pode ser escrito como uma combinação linear de um cosseno hiperbólico e um seno hiperbólico:

$$\text{para } z \in [-a, +a]: \quad \tilde{\Psi}(z) = A \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad (10.7.20).$$

Os coeficientes  $A$  e  $B$  são constantes complexas e a constante  $\lambda$  depende da energia  $E$  das partículas, da altura  $E_{\text{POT}_{\text{max}}}$  da barreira e da massa  $m$  das partículas.

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E_{\text{POT}_{\text{max}}} - E)}} \quad (10.7.21)$$

Vamos simplesmente copiar este resultado confiando que os cálculos dos exercícios foram bem feitos. Mas há um pequeno detalhe que precisa ser investigado e que motivou a “enfeitar” o  $\psi$  com um  $\sim$  para indicar que esta função de onda não é ainda definitiva. Os alunos daquele curso de mecânica quântica fazem este cálculo sem este misterioso potencial vetor  $\vec{A}$  que introduzimos na seção anterior e que parecia ter um papel fundamental em toda teoria de supercondutividade. Temos que incluir este campo nas nossas considerações. Também o cálculo do exercício da mecânica quântica é feito em uma dimensão espacial. Aqui temos três dimensões. No que diz respeito às dimensões, vamos assumir condições simples que permitam ignorar as direções  $x$  e  $y$ . Para geometrias reais isto pode não ser exato.

Para poder considerar o papel do potencial vetor  $\vec{A}$ , vamos assumir uma geometria simples, apesar do fato de que na prática as junções de Josephson costumam ter geometrias complicadas. Vamos supor que os dois supercondutores são cilindros alinhados com o eixo  $z$  e o plano da camada fina de substância não supercondutora seja perpendicular ao eixo  $z$ . Sabemos que a densidade de supercorrente não é uniforme, mas se concentra mais na superfície dos condutores. Por esta razão, devemos usar uma descrição local com densidades de corrente. Investigaremos o que acontece numa determinada linha caracterizada pelos valores de  $x$  e  $y$ ;  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . A figura 10.7.14 mostra a situação.

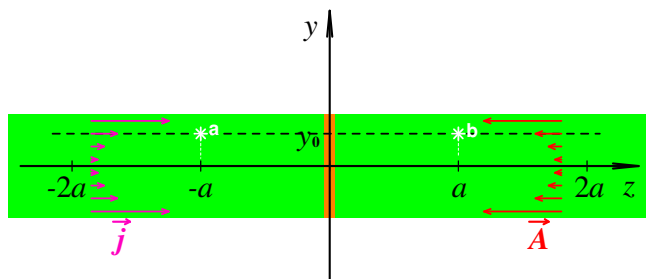


Fig. 10.7.14 Geometria simples de uma junção Josephson que usaremos para entender as fórmulas (10.7.1) e (10.7.2).

No apêndice da seção anterior mencionamos que os campos  $\vec{A}$  e  $\psi$  não são únicos e podem ser alterados por transformações do

tipo indicado na fórmula (10.7.22) sem alterar o significado físico destes campos.

$$\tilde{\Psi}(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) \exp\left\{i\frac{q}{\hbar}\chi(\vec{r})\right\}, \quad \vec{\tilde{A}}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad}\chi(\vec{r}) \quad (10.7.22)$$

A função  $\chi$  pode ser qualquer função derivável. Se escolhermos esta função da seguinte forma

$$\chi(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z \leq -2a \\ -\int_{-2a}^z A_z(x_0, y_0, z') dz' & \text{para } z \in [-2a, +2a] \\ -\int_{-2a}^{+2a} A_z(x_0, y_0, z') dz' & \text{para } z \geq 2a \end{cases} \quad (10.7.23)$$

obteremos um novo potencial vetor que é zero no segmento de reta  $z \in [-2a, +2a]$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . Por enquanto vamos supor que o potencial vetor não dependa do tempo e que o potencial escalar  $U$  que mencionamos no apêndice da seção anterior esteja nulo. Com os novos campos  $\tilde{\Psi}$  e  $\vec{\tilde{A}}$ , podemos usar o resultado (10.7.20) do cálculo dos alunos do curso de mecânica quântica enquanto olharmos apenas este segmento de reta. Inserindo esta função de onda na fórmula da supercorrente de F. London (10.6.2), obtemos para a componente  $z$  da densidade de corrente para pontos no segmento de reta  $z \in [-a, +a]$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$

$$\begin{aligned} j_z &= \frac{q\hbar}{2mi} \left\{ \tilde{\Psi}^* \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial z} \tilde{\Psi} \right\} = \\ &= \frac{q\hbar \hat{z}}{2mi\lambda} \left\{ \left( A^* \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B^* \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right) \left( A \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( A^* \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B^* \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right) \left( A \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right) \right\} = \\ &= \frac{q\hbar \hat{z}}{2mi\lambda} \{A^* B - B^* A\} \end{aligned} \quad (10.7.24).$$

Percebemos que este resultado não depende de  $z$ . A função de onda deve ser contínua nos pontos finais do intervalo  $[-a, +a]$ , isto é, nos pontos **a** e **b** indicados no desenho 10.7.14 em cor branca. Chamando os valores da função de onda  $\tilde{\Psi}$  nestes respectivos pontos de  $\tilde{\Psi}_a$  e  $\tilde{\Psi}_b$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_a &= A \cosh\left(\frac{-a}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{-a}{\lambda}\right) \\ \tilde{\Psi}_b &= A \cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{a}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (10.7.25).$$

Isto permite expressar os coeficientes  $A$  e  $B$  em termos dos valores  $\tilde{\Psi}_a$  e  $\tilde{\Psi}_b$

$$A = \frac{\tilde{\Psi}_a + \tilde{\Psi}_b}{2 \cosh(a/\lambda)}, \quad B = \frac{\tilde{\Psi}_b - \tilde{\Psi}_a}{2 \sinh(a/\lambda)} \quad (10.7.26).$$

Inserindo estes valores no resultado (10.7.24), obtemos:

$$\mathbf{j}_z = \frac{q\hbar}{m\lambda} \frac{1}{2 \cosh(a/\lambda) \sinh(a/\lambda)} \text{Im}(\tilde{\Psi}_a^* \tilde{\Psi}_b) \quad (10.7.27).$$

Vamos escrever os valores  $\tilde{\Psi}_a$  e  $\tilde{\Psi}_b$  em forma polar

$$\tilde{\Psi}_a = |\tilde{\Psi}_a| e^{i\tilde{S}_a}, \quad \tilde{\Psi}_b = |\tilde{\Psi}_b| e^{i\tilde{S}_b} \quad (10.7.28)$$

Se os supercondutores dos dois lados da barreira foram iguais, podemos supor  $|\tilde{\Psi}_a| = |\tilde{\Psi}_b| \equiv |\tilde{\Psi}|$  e a expressão da densidade de supercorrente toma a forma

$$\mathbf{j}_z = \frac{q\hbar}{m\lambda} \frac{|\tilde{\Psi}|^2}{2 \sinh(2a/\lambda)} \text{sen}(\tilde{S}_b - \tilde{S}_a) \quad (10.7.29).$$

Para poder sair da reta  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , temos que transformar os campos de volta expressando o resultado em termos dos campos originais  $\psi$  e  $\vec{A}$ :

$$\tilde{\Psi}_a = \psi_a \exp\left\{-i \frac{q}{\hbar} \int_{-2a}^{-a} A_z dz'\right\}, \quad \tilde{\Psi}_b = \psi_b \exp\left\{-i \frac{q}{\hbar} \int_{-2a}^{+a} A_z dz'\right\} \quad (10.7.30)$$

e com  $\psi = |\psi| e^{iS}$

$$\tilde{S}_b - \tilde{S}_a = S_b - S_a - i \frac{q}{\hbar} \int_{-a}^{+a} A_z dz' \quad (10.7.31)$$

Inserindo isto na (10.7.29) e usando  $q = -2e$ , obtemos

$$\mathbf{j}_z = \frac{e\hbar}{m\lambda} \frac{|\psi|^2}{\sinh(2a/\lambda)} \text{sen}\left(S_a - S_b - \frac{2e}{\hbar} \int_{-a}^{+a} \vec{A} \cdot d\vec{r}\right) \quad (10.7.32).$$

Vamos definir um ângulo de fase local para a linha  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ :

$$\varphi(x_0, y_0) \stackrel{\text{def.}}{=} S_a - S_b - \frac{2e}{\hbar} \int_{-a}^{+a} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (10.7.33)$$

e vamos abreviar o termo que multiplica o seno com  $\mathbf{j}_0$  de tal forma que a componente  $z$  da densidade de corrente fique como  $\mathbf{j}_z(x_0, y_0, z) = \mathbf{j}_0 \text{sen}(\varphi(x_0, y_0))$ . Obtemos a corrente total integrando esta densidade de corrente na superfície transversal ao fio, ou seja, no plano da fina camada de átomos alheios.

$$I_s = \mathbf{j}_0 \iint_{S.\text{transvers}} \text{sen}(\varphi(x_0, y_0)) dx_0 dy_0 \quad (10.7.34)$$

Para poder avaliar esta integral, precisamos informação a respeito da distribuição da densidade de supercorrente na secção transversal da barreira. Por enquanto vamos supor uma situação estacionária. Com a lei de Ampère temos

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad (10.7.35)$$

Com  $\text{rot}(\text{rot } *) = \text{grad div } * - \Delta *$  obtemos para a componente  $z$  da igualdade (10.7.35)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} A_z = \mu_0 \mathbf{j}_0 \text{sen}(\varphi) \quad (10.7.36).$$

Integrando esta igualdade em linha reta do ponto  $\mathbf{a}$  até o ponto  $\mathbf{b}$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, +a} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, +a} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, -a} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, -a} - \Delta_{xy} \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} \\ & = 2a \mu_0 \mathbf{j}_0 \text{sen}(\varphi(x_0, y_0)) \end{aligned} \quad (10.7.37)$$

Nesta fórmula abreviei o laplaciano bidimensional  $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  com  $\Delta_{xy}$ . A densidade de corrente deve ter a divergência igual a zero. Como tínhamos visto que a componente  $z$  da densidade de corrente era independente de  $z$ , vale  $\partial \mathbf{j}_x / \partial x + \partial \mathbf{j}_y / \partial y = 0$ . Com a fórmula (10.6.6) e supondo<sup>12</sup>  $\partial |\psi| / \partial x = \partial |\psi| / \partial y = 0$ , segue

$$\frac{\hbar}{q} \Delta_{xy} S - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \quad (10.7.38).$$

Com isto a (10.7.37) toma a forma

$$\Delta_{xy} \left\{ \frac{\hbar}{-2e} (S(\mathbf{b}) - S(\mathbf{a})) - \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} \right\} = 2a \mu_0 \mathbf{j}_0 \text{sen}(\varphi(x_0, y_0)) \quad (10.7.39)$$

Ou seja, a defasagem  $\varphi$  deve obedecer à seguinte equação diferencial:

$$\Delta_{xy} \varphi(x_0, y_0) = \frac{4a e \mu_0 \mathbf{j}_0}{\hbar} \text{sen}(\varphi(x_0, y_0)) \quad (10.7.40).$$

Escrevendo isto em coordenadas cilíndricas e assumindo simetria cilíndrica da solução, isto é, uma solução independente do ângulo azimutal, obtemos

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) = \frac{4a e \mu_0 \mathbf{j}_0}{\hbar} \text{sen}(\varphi(z)) \quad (10.7.41).$$

Para a corrente total obtemos

$$I_S = \mathbf{j}_0 \int_0^R 2\pi z \text{sen} \varphi(z) dz = \frac{2\pi \hbar}{4a e \mu_0} R \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=R} \quad (10.7.42)$$

onde  $R$  é o raio do condutor cilíndrico. A equação diferencial (10.7.41) precisa ser resolvida com a condição

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (10.7.43).$$

Com uma coordenada radial adimensional  $z_* = z/R$  e com a (10.7.42), podemos escrever a equação diferencial na seguinte forma:

<sup>12</sup> Infelizmente a suposição  $\partial |\psi| / \partial x = \partial |\psi| / \partial y = 0$  pode ser inválida na superfície dos condutores, mas nesta região as componentes  $x$  e  $y$  do vetor  $\hbar q^{-1} \nabla S - \vec{A}$  devem ser nulas e consequentemente as derivadas  $\partial |\psi| / \partial x$  e  $\partial |\psi| / \partial y$  não contribuem para a divergência de  $\vec{j}$ .

$$\frac{1}{z_*} \frac{\partial}{\partial z_*} \left( z_* \frac{\partial \varphi}{\partial z_*} \right) = \frac{j_0 R^2 \pi}{I_S} 2\varphi'(1) \text{sen}(\varphi) \quad (10.7.44)$$

com  $\varphi'(1) = R \partial \varphi / \partial z_{z=R}$ . Vamos escrever a equação (10.7.44) na forma de equação íntegro-diferencial:

$$\frac{d\varphi}{dz_*} = \frac{A}{z_*} \int_0^{z_*} z'_* \text{sen}(\varphi(z'_*)) dz'_* \quad (10.7.45).$$

Nesta equação, abreviei a constante que aparece na frente do seno na fórmula (10.7.44) com A;

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{j_0 R^2 \pi}{I_S} 2\varphi'(1) = \frac{4aR^2 e^2 |\psi|^2 \mu_0}{m\lambda \text{senh}(2a/\lambda)} \quad (10.7.46).$$

Vamos discutir dois casos: (1) um raio da junção extremamente pequeno e  $a \gg \lambda$  de tal forma que  $A \ll 1$ . Neste caso, os valores da derivada  $\partial \varphi / \partial z_*$  serão pequenos e podemos tratar  $\text{sen} \varphi$  aproximadamente como constante tirando este fator da integral. Neste caso temos  $\varphi'(1) \approx (A/2) \text{sen} \varphi$  e a supercorrente é

$$I_S = \frac{\pi \hbar A}{4a e \mu_0} \text{sen} \varphi = \pi R^2 \frac{e \hbar |\psi|^2}{m\lambda \text{senh}(2a/\lambda)} \text{sen} \varphi \quad (10.7.47).$$

Caso (2): para um raio da junção  $R \geq 1 \mu\text{m}$  e com  $\lambda \approx a$  temos valores da constante A muito grandes, tipicamente algo como  $10^3$ . Neste caso, vamos querer discutir soluções da equação diferencial (10.7.41) que descrevam correntes fluindo apenas numa fina camada superficial. A solução da equação (10.7.45) começa em  $z_* = 0$  com uma derivada nula  $\varphi'(0) = 0$  e com algum valor  $\varphi(0)$  incrivelmente pequeno. Com valores incrivelmente pequenos de  $\text{sen} \varphi$ , a integral continua pequena e com tanto, também a taxa de crescimento de  $\varphi$ . Somente pouco antes de o raio adimensional  $z_*$  atingir o valor 1, aparecerá um crescimento acentuado do ângulo de defasagem. Este comportamento esperado é mostrado qualitativamente da figura 10.7.15.

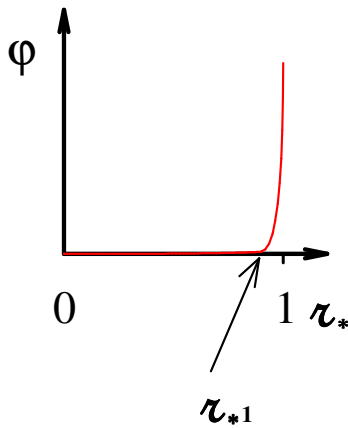


Fig. 10.7.15 Comportamento qualitativo da defasagem em função do raio adimensional.

Então deve ser uma boa aproximação começar a integral na equação (10.7.45) não no ponto  $z_* = 0$ , mas em algum valor  $z_{*1}$  que fique perto de 1, mas onde  $\varphi$  seja ainda muito pequeno.

$$\frac{d\varphi}{dz_*} \approx \frac{A}{z_*} \int_{z_{*1}}^{z_*} z'_* \text{sen}(\varphi(z'_*)) dz'_* \quad \text{com } 1 - z_{*1} \ll 1 \text{ e } |\varphi(z_{*1})| \ll 1 \quad (10.7.48)$$



Claro que esta aproximação faz sentido somente para valores de  $z_*$  maiores que  $z_{*1}$ . Agora vou usar o ângulo de defasagem como variável de integração:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz_*} &\approx \frac{A}{z_*} \int_{\varphi_1}^{\varphi} z'_*(\tilde{\varphi}) \frac{dz'_*(\tilde{\varphi})}{d\tilde{\varphi}} \text{sen}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} = \\ &= \frac{A}{2z_*} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d(z'_*(\tilde{\varphi}))^2}{d\tilde{\varphi}} \text{sen}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \end{aligned} \quad (10.7.49).$$

Chamei  $\varphi(z_{*1})$  de  $\varphi_1$ . Podemos expressar toda esta equação íntegro-diferencial em termos da função inversa  $z_*(\varphi)$ :

$$1 \approx \frac{dz_*}{d\varphi} \frac{A}{2z_*} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d(z'_*(\tilde{\varphi}))^2}{d\tilde{\varphi}} \text{sen}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (10.7.50)$$

Ou ainda melhor

$$1 \approx \frac{A}{4} \frac{d(\ln z_*^2)}{d\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d(z'_*(\tilde{\varphi}))^2}{d\tilde{\varphi}} \text{sen}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (10.7.51).$$

Agora vamos usar o fato de que estamos investigando um intervalo pequeno perto do valor 1;  $z_* \in [z_{*1}, 1]$ . Vamos escrever o quadrado de  $z_*$  como 1 mais uma pequena função  $f$ :

$$z_*^2 = 1 + f \quad (10.7.52).$$

Com  $|f| \ll 1$  temos  $\ln z_*^2 \approx f$ , e a equação (10.7.51) toma a forma

$$1 \approx \frac{A}{4} \frac{df}{d\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{df}{d\tilde{\varphi}} \text{sen}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (10.7.53)$$

Mudando mais uma vez a incógnita  $g = df/d\varphi$  obtemos:

$$\frac{1}{g(\varphi)} \approx \frac{A}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi} g(\tilde{\varphi}) \text{sen}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (10.7.54),$$

e derivando obtemos a equação diferencial

$$-\frac{1}{g^2} \frac{dg}{d\varphi} \approx \frac{A}{4} g \text{sen}(\varphi) \quad (10.7.55).$$

Esta podemos resolver facilmente por meio da separação de variáveis:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{g^2(\varphi)} - \frac{1}{g^2(\varphi_1)} \right\} \approx -\frac{A}{4} \{ \cos(\varphi) - \cos(\varphi_1) \} \quad (10.7.56)$$

No ponto  $z_{*1}$  o gráfico da função  $\varphi$  é ainda quase horizontal, ou seja,  $g(\varphi_1)$  tem um valor enorme, e podemos desprezar o termo  $(1/g(\varphi_1))^2$ . No outro lado da fórmula, podemos considerar que  $\varphi_1$  é pequeno e portanto  $\cos(\varphi_1) \approx 1$ :

$$\frac{1}{g^2(\varphi)} \approx \frac{A}{2} \{1 - \cos(\varphi)\} \quad (10.7.57)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{z}_*^2}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A(1-\cos\varphi)}} \quad (10.7.58).$$

Podemos substituir este resultado na fórmula (10.7.49) para calcular o valor da derivada  $d\varphi/d\mathbf{z}_*$  no ponto  $\mathbf{z}_* = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\mathbf{z}_*|_{\mathbf{z}_*=1}} &\approx \frac{A}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \tilde{\varphi}}{\sqrt{A(1-\cos \tilde{\varphi})}} d\tilde{\varphi} = \\ &= \sqrt{2A} \left\{ \sqrt{1-\cos \varphi(1)} - \sqrt{1-\cos \varphi_1} \right\} \approx \sqrt{2A} \sqrt{1-\cos \varphi(1)} \end{aligned} \quad (10.7.59).$$

Com a fórmula (10.7.42), obtemos finalmente o valor da supercorrente:

$$I_S \approx \frac{2\pi\hbar}{4a e\mu_0} \sqrt{2A} \sqrt{1-\cos \varphi(1)} = \frac{2\pi\hbar R |\psi|}{\sqrt{\mu_0 a m \lambda} \operatorname{senh}(2a/\lambda)} \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi(1)}{2} \right) \quad (10.7.60).$$

Então, no caso de uma junção grande, o ângulo da fórmula (10.7.1) é a metade do ângulo de defasagem invariante sob transformações de calibre na superfície do condutor.

Agora vamos imaginar que se aplique um campo magnético externamente na direção  $x$ . Veremos o que acontece com as contribuições para a supercorrente de dois lugares  $\langle x_0 = 0, y_0 \rangle, \langle x_0 = 0, -y_0 \rangle$  com a mesma distância do centro separados por um intervalo na direção  $y$ .

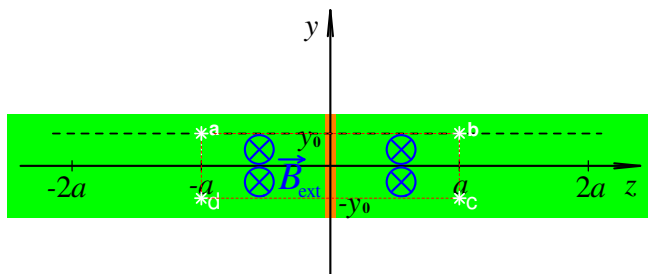


Fig. 10.7.16 Junção Josephson com campo magnético externo.

Na figura 10.7.16, marquei dois pares de pontos a, b e d, c nas respectivas retas. Sem o campo externo, as densidades de corrente teriam o mesmo valor nestas retas e se somariam

construtivamente. Vamos ver o que o campo magnético adicional fará. Este campo  $\vec{B}_{\text{ext}}$  tem associado também um potencial vetor adicional  $\vec{A}_{\text{ext}}$ . O fluxo magnético deste campo externo através do retângulo a, b, c, d, a é igual à integral de caminho fechado a, b, c, d, a do potencial vetor:

$$\Phi_{\text{mag}} = \iint_{\text{abcd a}} \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{abcd a}} \vec{A}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} \quad (10.7.61).$$

O campo externamente aplicado não consegue penetrar muito nos supercondutores e fica essencialmente confinado na região da barreira de potencial. Para garantir a expulsão do campo dos supercondutores, deve aparecer densidade corrente na direção  $y$  (e no sentido  $-\hat{y}$ ) nas beiradas da barreira de potencial. Estas densidades de corrente são acompanhadas por correspondentes valores do potencial vetor. Esperamos que este

potencial vetor na direção  $y$  seja igual nos trechos **a-d** e **b-c**. Portanto as contribuições destes trechos para a integral de caminho do lado direito da fórmula (10.7.61) devem se cancelar. Então o valor diferente de zero da integral de caminho requer que o potencial vetor  $\vec{A}_{\text{ext}}$  tenha componente  $z$  com sinais opostos nos segmentos de linha **a-b** e **d-c**. Então uma das fases  $\varphi(0, y_0)$  e  $\varphi(0, -y_0)$  sofre um aumento e a outra, uma diminuição. Isto pode eventualmente inverter os sinais de um dos senos destes ângulos, e as duas densidades de corrente acabam se somando destrutivamente.

Deixando este problema do campo magnético de lado, vamos agora comentar o caso de situações não estacionárias e com campo elétrico na junção. Na literatura é praxe pegar a fórmula do caso estacionário e permitir simplesmente que agora  $A_z$  e  $S_a - S_b$  possam depender do tempo. Em princípio, este procedimento está errado. Pois a fórmula (10.7.32) era baseada no cálculo de tunelamento sem campo elétrico na região da barreira. Mas pode-se argumentar que este procedimento deve dar uma boa aproximação, pois as voltagens entre os supercondutores ficam tipicamente na faixa de microvolt e a diferença  $E_{\text{POTmax}} - E$  deve ser algo na faixa da energia de ligação dos pares de Cooper, então algo na faixa de milieletronvolt. Então o mecanismo do tunelamento deve ser predominantemente determinado pela barreira. Então vamos usar o resultado (10.7.32):

$$j_z = \frac{e\hbar}{m\lambda} \frac{|\Psi|^2}{\sinh(2a/\lambda)} \text{sen} \left( S_a - S_b - \frac{2e}{\hbar} \int_{-a}^{+a} \vec{A} \cdot d\vec{r} \right).$$

Mas agora  $S_a - S_b$  e  $A_z$  podem depender do tempo. O fator de fase  $\exp\{iS\}$  da função de onda dentro de uma amostra supercondutora é  $\exp\{-iEt/\hbar\}$ , como mencionamos diversas vezes. Sem diferença de potencial entre os dois supercondutores de uma junção Josephson, esta dependência temporal das fases deve cancelar-se resultando em  $\partial(S_a - S_b)/\partial t = 0$ . Mas, com uma diferença de potencial escalar, as energias são diferentes, pois cada energia ganha um termo  $qU$ . Portanto teremos

$$\frac{\partial(S_a - S_b)}{\partial t} = \frac{\partial((-qU_a t/\hbar) - (-qU_b t/\hbar))}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar}(U_a - U_b) \quad (10.7.62).$$

Então a derivada temporal da defasagem  $\varphi$  é

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{2e}{\hbar}(U_a - U_b) - \frac{2e}{\hbar} \int_{-a}^{+a} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{2e}{\hbar} \int_{-a}^{+a} \left( -\text{grad}U - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{r} = \frac{2e}{\hbar} \int_{-a}^{+a} \vec{E} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (10.7.63).$$

No caso de uma junção grande, a equação diferencial (10.7.40) fica um pouco mais complicada na situação não estacionária. Ela adquire um termo  $-v^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2$  no lado esquerdo, ou seja, ela aparenta uma equação de onda com uma velocidade de propagação  $v$  perto da velocidade da luz.