

## 10.6 As teorias da supercondutividade

Esta seção não faz parte dos programas regulares de Física III. Ela se destina a alunos muito capacitados que queiram aprender algo além do mínimo. Estes alunos existem. Eu já recebi esta pergunta de uma aluna de Física III: como pares de Cooper podem ocupar o mesmo estado sem violar o princípio de Pauli?

Para poder entender as teorias da supercondutividade a fundo, é preciso um bom conhecimento da mecânica quântica, da teoria quântica de campos e de mecânica estatística. Mesmo que estas disciplinas estejam ainda totalmente fora do alcance do aluno de Física III, tentaremos explicar alguns aspectos das teorias usando, sempre que for possível, analogias da física clássica e algumas noções da física quântica que por ventura tenham sido usadas nas aulas de química.

Em alguma aula de química, certamente já foi mencionado que o elétron do átomo de hidrogênio não circula em volta do núcleo e que ele deve ser descrito por uma função de onda  $\psi(\vec{r}, t)$ . Aqui mesmo, na seção 6.7, já mencionamos funções de onda que descrevem elétrons. O exato significado desta função de onda não nos preocupa neste momento. Ela sempre aparece quando mergulhamos no mundo atômico olhando tudo na escala nanométrica. Por exemplo, no caso do átomo de hidrogênio no seu estado fundamental, esta função de onda escrita em coordenadas esféricas com centro no próton é

$$\psi_{\text{Hidrogênio}}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} \exp\left\{-\frac{r}{a_B}\right\} \exp\left\{-i \frac{E_1}{\hbar} t\right\} \quad (10.6.1).$$

Nesta fórmula  $a_B \approx 5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$ ,  $\hbar = h/2\pi \approx 6,58 \times 10^{-16} \text{ eVs}$  e  $E_1 \approx -13,6 \text{ eV}$ . Repare que a parte espacial e a temporal, a qual tem a forma de uma fase que gira, são simplesmente multiplicadas. Isto é uma característica dos estados com energia bem definida. Percebemos que esta função de onda é praticamente nula quando a distância  $r$  do núcleo for muito maior que um nanômetro. O físico Fritz London teve a ousadia de supor que os portadores de carga num supercondutor podem ser descritos por uma função de onda que se estende a distâncias macroscópicas na ordem de metros<sup>1</sup>.

Na teoria de F. London, assume-se que haja uma onda de matéria  $\psi(\vec{r})$  no supercondutor cujos valores são complexos, e a densidade de supercorrente seria dada pela seguinte expressão:

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \left\{ \psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - \frac{\hbar}{i} (\nabla \psi^*) \psi - 2q \vec{A} \psi^* \psi \right\} \quad (10.6.2).$$

Nesta expressão,  $m$  é a massa das partículas que transportam carga,  $q$  é a sua carga,  $\psi^*$  é o complexo conjugado de  $\psi$ , e  $\vec{A}$  é um campo vetorial que se relaciona com o campo magnético  $\vec{B}$  da seguinte forma:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (10.6.3).$$

Em disciplinas mais avançadas do eletromagnetismo, este tipo de campo vetorial  $\vec{A}$  é frequentemente usado para resolver a equação de Maxwell  $\text{div } \vec{B} = 0$  de forma automática. Este é o potencial vetor, que mencionamos na seção 8.1.

<sup>1</sup> F. London: "A New Conception of Superconductivity" *Nature* **140** pp.793-7 (1937)

A fórmula (10.6.2) assusta naturalmente, e ela parece ser totalmente “tirada do bolso”. No entanto, para um leitor que já teve algum contato com a mecânica quântica, ela deve fazer certo sentido, já que o operador que representa o observável velocidade de uma partícula carregada é o

$$\vec{v}_{operador} = \frac{\hbar}{im} \left\{ \nabla - i \frac{q}{\hbar} \vec{A} \right\} \quad (10.6.4).$$

Não vamos tentar entender a fórmula (10.6.2) no momento, mas vamos usá-la para elucidar o efeito Meissner-Ochsenfeld e a quantização do fluxo magnético. Vamos escrever o campo de matéria  $\psi(\vec{r})$  na forma polar:

$$\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| \exp\{iS(\vec{r})\} \quad (10.6.5).$$

Naturalmente, a função de fase  $S$  é definida somente módulo<sup>2</sup> múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Com esta representação polar da função de onda, a expressão da densidade da supercorrente se simplifica um pouco:

$$\vec{j} = |\psi|^2 \frac{q}{m} \{ \hbar \nabla S - q \vec{A} \} \quad (10.6.6).$$

Primeiramente vamos usar esta fórmula para entender o efeito Meissner. Para simplificar, vamos supor que o módulo  $|\psi(\vec{r})|$  seja constante. Isto é uma boa aproximação para o interior de supercondutores do tipo I, ou na região fora do vórtice de Abrikosov nos supercondutores do tipo II. Considerando o fato de que o rotacional de um gradiente é zero e usando a fórmula (10.6.3) que relaciona  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , obtemos para o rotacional da densidade de corrente

$$\text{rot } \vec{j} = -|\psi|^2 \frac{q^2}{m} \vec{B} \quad (10.6.7).$$

Podemos combinar este resultado com a equação de Maxwell  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \partial \vec{D} / \partial t$ . Supondo condições estacionárias, temos  $\partial \vec{D} / \partial t = 0$  e obtemos

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = -|\psi|^2 \frac{\mu_0 q^2}{m} \vec{B} \quad (10.6.8).$$

Com a equação de Maxwell  $\text{div } \vec{B} = 0$  segue

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad (10.6.9).$$

Então chegamos a uma equação diferencial para o campo magnético que deve valer dentro de um supercondutor:

$$\Delta \vec{B} = |\psi|^2 \frac{\mu_0 q^2}{m} \vec{B} \quad (10.6.10).$$

Agora vamos imaginar que o semiespaço  $z \leq 0$  esteja preenchido com um supercondutor, e que o campo magnético no semiespaço superior  $z > 0$  não dependa nem de  $x$  e nem de  $y$ . Na superfície  $z = 0$ , o campo  $\vec{B}$  deve ser contínuo. Podemos supor que  $\vec{B}$  dependa somente de  $z$  no espaço todo. Com isto a equação (10.6.10) se simplifica:

<sup>2</sup> Uma grandeza  $S$  ser definida módulo múltiplos de  $2\pi$  significa que  $S = S + n2\pi$  com  $n$  inteiro é uma igualdade válida mesmo com  $n \neq 0$ .

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = |\psi|^2 \frac{\mu_0 q^2}{m} \vec{B} \quad (\text{válida para } z < 0) \quad (10.6.11).$$

Esta equação tem as seguintes duas soluções linearmente independentes

$$\vec{B}_\vee(z) = \vec{B}_0 \exp\left\{\frac{z}{\lambda_L}\right\} \quad (\text{para } z \leq 0) \quad (10.6.12)$$

e

$$\vec{B}_\wedge(z) = \vec{B}_0 \exp\left\{\frac{-z}{\lambda_L}\right\} \quad (\text{para } z \leq 0) \quad (10.6.13),$$

com

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{|\psi|^2 \mu_0 q^2}} \quad (10.6.14).$$

A solução (10.6.13) cresce exponencialmente acima de qualquer limite quando  $z \rightarrow -\infty$ , e ela não é fisicamente aceitável. A outra solução descreve a diminuição exponencial do campo magnético no supercondutor. O vetor  $\vec{B}_0$  não é completamente arbitrário, pois o campo magnético tem que satisfazer a equação de Maxwell  $\text{div } \vec{B} = 0$  também. Esta condição exige que a componente  $z$  do vetor  $\vec{B}_0$  seja nula.

Naturalmente a situação que acabamos de discutir não é muito realista. Um semiespaço infinito pode até ser uma boa aproximação para diversas situações experimentais. Mas um campo magnético que não dependa de  $x$  e  $y$  não é muito realista. Tipicamente teríamos numa experiência de levitação magnética algum imã permanente alguns centímetros acima da superfície do supercondutor e o campo neste caso dependeria das coordenadas  $x$  e  $y$ . Neste caso a componente normal, ou seja, a componente  $z$ , do campo magnético no plano  $z=0$  deixa de ser zero. Mas ela continua muito pequena. No exercício E 10.6.3, exploramos esta situação um pouco e mostramos que o quociente do módulo da componente normal e da componente tangencial é da ordem  $\lambda_L/d$  sendo  $d$  uma distância característica da variação do campo magnético no plano  $xy$ . Com  $\lambda_L \approx 10^{-8} \text{ m}$  e  $d \approx 10^{-2} \text{ m}$ , temos  $|\vec{B}_{\text{normal}}|/|\vec{B}_{\text{tangencial}}| \approx 10^{-6}$ . Isto justifica o uso do método-imagem que mencionamos na seção anterior como aproximação, pois no método-imagem supõe-se  $\vec{B}_{\text{normal}} = 0$ .

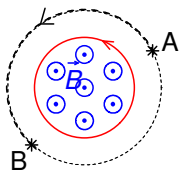


Fig. 10.6.1 Caminho de integração em volta de um vórtice de Abrikosov. A supercorrente que protege o material do campo magnético é mostrada em vermelho.

Agora vamos investigar a questão da quantização do fluxo magnético. Integraremos o campo vetorial  $\vec{j}$  num caminho circular em volta de um vórtice de Abrikosov. Escolheremos o raio deste caminho de integração grande o suficiente para ficar fora da região onde circula a supercorrente. Então neste caminho temos  $\vec{j} = 0$  e o valor da integral é sempre zero. Usaremos a fórmula (10.6.6) para a densidade de corrente  $\vec{j}$ . Integrando de um ponto A até um ponto B, como na figura 10.6.1, temos

$$\hbar S(\vec{r}_B) - \hbar S(\vec{r}_A) = q \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (10.6.15).$$

O que acontece se fecharmos o caminho, completando todo o círculo e mandando  $\mathbf{B}$  para  $\mathbf{A}$ ? A integral do lado direito da fórmula (10.6.15) se transforma numa integral sobre um caminho fechado, e podemos aplicar a fórmula (10.6.3) e o teorema de Stokes:

$$\lim_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}} \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint (\text{rot } \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (10.6.16)$$

Isto é justamente o fluxo magnético que passa pelo vórtice. Mas o outro lado da fórmula (10.6.15) deve tender a zero no limite  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  e chegamos numa contradição! - Não! Temos que nos lembrar de que a fase  $S$  era definida somente módulo múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Consequentemente temos o direito de substituir um zero por um  $n2\pi$  com  $n$  inteiro. Então o fluxo magnético  $\Phi_M$  que atravessa um vórtice deve obedecer à relação

$$\Phi_M = \frac{\hbar}{q} n 2\pi = \frac{h}{q} n \quad n \text{ inteiro} \quad (10.6.17).$$

Nos vórtices de Abrikosov,  $n$  vale geralmente  $\pm 1$ , mas outros inteiros seriam possíveis pelos argumentos usados. Podemos aplicar toda argumentação igualmente para um anel supercondutor. Então chegamos à conclusão de que o fluxo magnético que passa por um anel supercondutor é sempre quantizado.

Vitaly Lazarevich Ginzburg<sup>3</sup> e Lev Davidovich Landau<sup>4</sup> combinaram a teoria de F. London com a termodinâmica. Eles inventaram uma expressão da energia livre de um supercondutor que tem contribuições que dependem da função de onda  $\psi$  da teoria de F. London e do campo  $\vec{A}$  que aparece na fórmula da densidade de corrente. As propriedades eletromagnéticas e termodinâmicas dos supercondutores podem ser descritas corretamente com esta teoria de Ginzburg-Landau.

Mas, apesar destes sucessos, não se pode considerar esta teoria e nem a teoria de F. London uma explicação da supercondutividade. No fim das contas, o que é esta função de onda  $\psi$ , como ela se relaciona com os elétrons e o que transporta a carga? Por que uma supercorrente não cessa?

No átomo de hidrogênio temos um elétron e uma função de onda. Mas no cristal temos algo como  $10^{23}$  elétrons. Como fica a descrição quântica de vários elétrons? Na disciplina da mecânica quântica se aprende que  $N$  elétrons são descritos por uma única função de onda, mas esta função depende de  $N$  variáveis;  $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ . Eu escrevi as coordenadas do  $k$ -ésimo elétron como  $\xi_k$ . Na verdade este  $\xi_k$  engloba um pouco mais do que as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  porque há ainda um grau de liberdade interno do elétron, a saber, o spin. Este é descrito por uma variável  $m$  que toma

---

<sup>3</sup> Vitaly Lazarevich Ginzburg (Виталий Лазаревич Гинзбург (04/10/1916 – 08/11/2009) trabalhou na propagação de ondas eletromagnéticas em plasma e na a origem de raios cósmicos. Foi editor-chefe da revista científica *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*.

<sup>4</sup> Lev Davidovich Landau (Лев Давидович Ландау January 22/01/1908 – 01/04/1968) foi o mais produtivo dos físicos teóricos da União Soviética. Ele deu importantes contribuições em praticamente todas as áreas da física. Uma série de 10 volumes de livros didáticos de física teórica que ele e seu aluno Evgeny Mikhailovich Lifshitz (Евгений Михайлович Лифшиц 21/02/1915 – 29/10/1985) escreveram serve até hoje como bíblia dos físicos teóricos. A escola de Landau formou cientistas de peso. Quem queria ter acesso a esta escola teve que passar por exames. Somente 43 pessoas conseguiram passar. Lifshitz foi o segundo dos 43.

somente dois possíveis valores. Convencionalmente se usam os valores  $+1/2$  e  $-1/2$ . Então  $\xi_k$  é uma abreviação de um  $\langle x_k, y_k, z_k, m_k \rangle$ . Sabendo isto, o que poderia ser aquela função de onda  $\psi(x, y, z)$  da teoria de F. London? Poder-se-ia pensar em repetir a mesma função  $N$  vezes para descrever  $N$  elétrons na forma de um grande produto:

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \psi(x_1, y_1, z_1)\phi(m_1)\psi(x_2, y_2, z_2)\phi(m_2)\dots\psi(x_N, y_N, z_N)\phi(m_N) \quad (10.6.18).$$

Mas este tipo de função não serve para elétrons. Esquecemo-nos do princípio de Pauli. A formulação do princípio de Pauli, que demos na seção 5.2 dizendo que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado, é a forma heurística que se usa nas aulas de química no nível básico. A forma exata deste princípio é que a função  $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  tem que trocar de sinal sob troca de quaisquer duas das variáveis  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ . Para uma permutação  $\pi$  dos  $N$  índices, isto significa que a função de onda deve satisfazer

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = P_\pi \Psi(\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \dots, \xi_{\pi(N)}) \quad (10.6.19).$$

Nesta fórmula,  $\pi(k)$  é o número que resulta do número  $k$  pela permutação  $\pi$ , e  $P_\pi$  é a paridade da permutação  $\pi$ , isto é,  $P_\pi$  vale  $+1$  se a permutação  $\pi$  puder ser escrita como um número par de trocas de dois objetos, e  $P_\pi$  vale  $-1$  se  $\pi$  puder ser escrita como um número ímpar de trocas de dois objetos. Por exemplo, com  $N=4$  a permutação

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 2 \\ 3 &\rightarrow 1 \\ 4 &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

tem a paridade  $-1$  enquanto a permutação

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 2 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 4 \\ 4 &\rightarrow 3 \end{aligned}$$

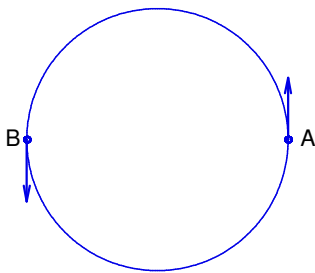
tem a paridade  $+1$ . Obviamente a função de onda (10.6.18) não satisfaz o princípio de Pauli e não serve para descrever os elétrons de um cristal. Então como se pode associar um grande número de elétrons a uma única função de onda que dependa somente de  $x, y$  e  $z$ ?

**Bardeen, Cooper e Schrieffer** perceberam que uma única função de onda  $\psi(x, y, z)$  pode ser associada a um grande número de pares de elétrons sem violar o princípio de Pauli. Estes pares formam novas partículas com carga elétrica  $-2e$ , e a função de onda  $\psi(x, y, z)$  diz respeito a estes pares.

Imaginem um elétron atravessando a rede cristalina de um material condutor. Naturalmente esta partícula negativa atrairá os núcleos positivos da rede quando passa perto deles. Isto deve excitar uma onda elástica no cristal. Um segundo elétron atingido por esta onda é sujeito a uma força devido ao deslocamento dos núcleos positivos da rede deformada pela onda. Na teoria BCS, mostra-se que este mecanismo fornece uma força atrativa e consegue formar estados ligados de pares de elétrons.

Vamos tentar entender isto no nível da física clássica. Classicamente um estado ligado de dois elétrons seria um sistema de dois elétrons que circulam em volta do seu centro de massa como se fosse uma estrela dupla. O que temos que explicar é que as ondas elásticas da rede cristalina conseguem fornecer a força necessária para providenciar a aceleração centrípeta dos elétrons. Então vamos imaginar dois elétrons em posições opostas A e B de uma órbita circular de raio  $R$  como mostrado na figura 10.6.2. Lembramos que os elétrons num condutor se movem com uma velocidade enorme de aproximadamente 0,5% da velocidade da luz. Por exemplo, no caso do chumbo, a velocidade de Fermi, ou seja, o módulo da velocidade dos elétrons que corresponde à energia de Fermi, vale  $v_F = 1,82 \times 10^6 \text{ m/s}$ . Se o elétron na órbita circular anda com velocidade  $v \approx v_F$ , o módulo da aceleração centrípeta vale  $a_c = v^2 / R$ . Para gerar esta aceleração com as fracas forças geradas por ondas elásticas da rede cristalina, precisamos de um raio  $R$  grande. Tipicamente estes raios ficam na faixa de algumas centenas de nanômetros. No caso do chumbo<sup>5</sup>, temos algo como  $R \approx 0,302 \mu\text{m}$ . Na escala microscópica, esta é uma distância enorme. Isto corresponde a aproximadamente 609 constantes  $a$  da rede cristalina:  $R \approx 609 a$ .

Fig. 10.6.2 Dois elétrons circulando em volta do centro de massa comum.



Tendo dois elétrons na órbita, aparece um elétron periodicamente na posição A com o período de  $T = \pi R / v$ . Para os valores exemplares  $R \approx 0,302 \mu\text{m}$  e  $v \approx 1,82 \times 10^6 \text{ m/s}$ , isto corresponde a uma frequência de  $f \approx 1,92 \times 10^{12} \text{ Hz}$ . Esta frequência é ainda um pouco menor que a frequência mais alta existente nos modos normais de vibração da rede cristalina (para chumbo temos:

$$f_{\text{max}} \approx 2,2 \times 10^{12} \text{ Hz}).$$

A passagem dos elétrons pelas posições A e B emite ondas elásticas para os dois lados da trajetória, para dentro do círculo e para fora. As duas ondas emitidas para dentro são contrapropagantes e formam uma onda estacionária. Para que esta onda estacionária possa fornecer a força centrípeta do movimento circular é necessário que no instante da passagem dos elétrons nos pontos A e B, haja acúmulos de núcleos positivos da rede ao lado interior de cada um destes pontos. Isto é garantido se a distância entre estes pontos vale  $(n + 1/2)$  comprimentos desta onda, sendo  $n$  algum número inteiro. Isto significa que a velocidade dos elétrons tem que satisfazer a seguinte relação com a velocidade de som  $c_{\text{som}}$  no cristal:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi R}{v} c_{\text{som}} = 2R \quad (10.6.20)$$

Repare que o módulo da velocidade do elétron  $v$  é muito maior que a velocidade de ondas elásticas na rede. A velocidade do som em chumbo vale  $c_s = 1190 \text{ m/s}$  e com isto temos para chumbo  $n \approx 486$ .

<sup>5</sup> Para caracterizar um supercondutor, usa-se um parâmetro chamado de comprimento de coerência  $\xi$ . O raio de um par de Cooper vale aproximadamente  $\xi \pi$ . Na literatura encontramos para chumbo  $\xi = 96,0 \text{ nm}$ . (R.F. Gasparovic, W.L. McLean "Superconducting Penetration Depth of Lead" Phys, ver. B 2, 2519 1 October 1970)

Fora do círculo, a onda emitida do ponto A para fora e a onda do ponto B para dentro são copropagantes. Com a condição (10.6.20), estas ondas estão defasadas por  $\pi$ . Então eles sofrem interferência destrutiva. Desta forma, a rede cristalina ficaria aproximadamente não deformada fora do círculo da trajetória. A figura 10.6.3 mostra as posições dos núcleos positivos entre os pontos A e B no instante  $t_A$  da passagem do elétron. Mas as posições em outros instantes podem ser vistas no mesmo desenho. Elas aparecem em outras direções que correspondem a posições dos elétrons em outros instantes. A figura 10.6.3 mostra um exemplo qualitativo no qual o comprimento da onda acústica e a constante de rede  $a$  são mostrados exageradamente grandes para poder enxergá-los. O padrão no interior da órbita gira junto com os elétrons. Um acúmulo de carga positiva fica sempre no lado interior dos elétrons e este acúmulo de carga positiva fornece a força necessária para manter os elétrons na órbita circular.

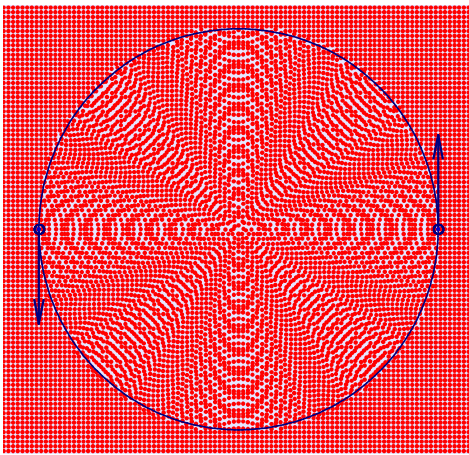


Fig.10.6.3 Deformação da rede cristalina provocada pela circulação de dois elétrons. O tamanho da constante de rede é exagerado para poder enxergar a rede. No lugar de  $a$ , foi usado  $R = 42,5 a$ . O comprimento de onda da onda elástica também está exageradamente grande.

Nossa análise clássica ajuda na compreensão intuitiva, mas infelizmente este “par de Cooper clássico” é tão falso quanto a ideia popular dos átomos que os visualiza como um pequeno sistema solar. Popularmente se imagina um átomo de hidrogênio como um elétron circulando em volta de um próton. Um elétron circulando iria emitir ondas eletromagnéticas,

perder energia e cair dentro do núcleo. O mesmo aconteceria com o nosso par de Cooper clássico. No átomo de hidrogênio, o elétron deve ser descrito por uma função de onda  $s$ , no estado de mais baixa energia, esta é esfericamente simétrica como indicado na fórmula (10.6.1). Os físicos chamam isto uma onda  $s$ . Os elétrons num par de Cooper também são descritos por uma onda  $s$ , ou seja, uma onda esfericamente simétrica  $\sigma(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$ . Naturalmente teria também uma dependência temporal, a qual eu não escrevi. Podemos supor um fator do tipo  $\exp\{-itE/\hbar\}$  como no átomo de hidrogênio. Este tipo de dependência temporal é característico dos estados de energia bem definida. A densidade de probabilidade de encontrar um elétron na distância  $r$  do centro de massa é dada pela função  $4\pi r^2 |\sigma(2r)|^2$ . No caso dos pares de Cooper, esta função tem um grande número de máximos e zeros. Isto significa que a densidade de probabilidade de encontrar o elétron se apresenta em finas camadas esféricas concêntricas. As distâncias de camadas consecutivas ficam na faixa de poucos ångströms.<sup>6</sup> Tanto o átomo de hidrogênio popular como o nosso par de Cooper clássico são planos enquanto o átomo verdadeiro e o par de Cooper verdadeiro são tridimensionais e esféricos.

Mesmo que o nosso par de Cooper clássico possa ter defeitos, muitos aspectos do verdadeiro par de Cooper podem ser vistos com esta imagem clássica. No percurso circular dos elétrons, os momentos lineares destes elétrons são sempre opostos, e eles

<sup>6</sup> Alan M. Kadin “Spatial Structure of the Cooper Pair” *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism* May 2007, Vol 20 Issue 4 pp 285 - 292

mudam continuamente mantendo sempre o módulo próximo do valor de Fermi  $m_*v_F$  (com  $m_*$  sendo uma massa efetiva do elétron; mais tarde comentaremos a respeito desta massa efetiva). Esta mudança é provocada pela interação com as oscilações da rede cristalina. Na descrição quântica, o estado ligado é formado pelo espalhamento de fônons. Isto são excitações quânticas das vibrações da rede, e este espalhamento acopla elétrons com momentos lineares aproximadamente do módulo  $m_*v_F$  e com sentidos opostos. Isto é bem parecido com o mecanismo do modelo clássico. Outra coisa pode ser vista com o modelo clássico: evidentemente o mecanismo de acoplar os elétrons deixa de funcionar se estes elétrons além do movimento circular tiverem um movimento de translação. Pois as ondas acústicas, uma vez emitidas, se movem com sua velocidade característica em relação à rede. Se os elétrons saem andando para o lado, eles saem da proximidade dos acúmulos de carga positiva. Então o par de Cooper tem que ficar parado! Mas como se transporta carga com este objeto? Bem, na seção 5.2, vimos que não precisa de grandes velocidades para gerar enormes densidades de corrente. Tipicamente uma velocidade de 1 mm/s é suficiente para gerar densidades de corrente na faixa de kA/cm<sup>2</sup>. Mas um par de Cooper que se desloca com uma velocidade de 1 mm/s pode muito bem ser considerado parado em comparação com a velocidade do som no sólido que fica na faixa de quilômetros por segundo. Mas percebemos que existe uma limitação para a velocidade de translação. Isto significa que há uma limitação para a densidade de supercorrente. De fato acima de certo valor da densidade de corrente, o material se torna normal. Há ainda uma outra fonte de limitação da densidade de corrente: o campo magnético associado à corrente possui energia. Quando esta energia ultrapassa o ganho de energia pela formação dos pares de Cooper, o estado supercondutor desaparece. A limitação do campo magnético que mencionamos na seção anterior está também relacionada com este limite da densidade de corrente.

Agora que temos uma ideia do que é um par de Cooper, devemos elaborar a descrição quântica deste objeto um pouco mais. Até agora falamos somente da posição relativa  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  de dois elétrons. O estar do centro de massa  $(\vec{r}_2 + \vec{r}_1)/2$  também deve ser descrito com uma função de onda  $f((\vec{r}_2 + \vec{r}_1)/2)$ , e finalmente precisamos de uma função de onda das variáveis de spin. Juntando tudo, obtemos como função de onda do par de Cooper

$$\Psi_{Cooper}(\vec{r}_1, \mathbf{m}_1, \vec{r}_2, \mathbf{m}_2) = f\left(\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}\right) \sigma(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \varepsilon(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \quad (10.6.21).$$

A parte espacial  $f \sigma$  não sofre nenhuma alteração se trocarmos os índices 1 e 2. Para satisfazer o princípio de Pauli precisa-se de uma função  $\varepsilon$  antissimétrica:

$$\varepsilon(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 \\ 1/\sqrt{2} & \text{para } \mathbf{m}_1 = +1/2, \mathbf{m}_2 = -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & \text{para } \mathbf{m}_1 = -1/2, \mathbf{m}_2 = +1/2 \end{cases} \quad (10.6.22).$$

Poder-se-iam usar também simplesmente os valores +1 e -1. O fator  $1/\sqrt{2}$  é uma convenção que tem haver com uma normalização da função de onda.

Agora temos que ver como construir uma função de onda  $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  de  $N$  elétrons dos quais alguns formaram pares de Cooper. O desafio é satisfazer o princípio de Pauli. Há um método de gerar uma função totalmente antissimétrica em relação à



troca das variáveis a partir de qualquer função  $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ . Isto se consegue com o seguinte operador de antissimetização:

$$\mathcal{A}F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{N!} \sum_{\pi} P_{\pi} F(\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \dots, \xi_{\pi(N)}) \quad (10.6.23)$$

O somatório se estende sobre todas as permutações dos  $N$  índices  $1, 2, \dots, N$ . O problema que se apresenta com este método de formar funções antissimétricas é o fato de que em certos casos a aplicação deste antissimetrizador resulta simplesmente na função zero. Por exemplo, se aplicarmos o operador  $\mathcal{A}$  na função da fórmula (10.6.18), obteremos simplesmente zero. Resulta que a seguinte função de onda não é nula:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = & \\ & \mathcal{A} \left\{ f\left(\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}\right) \sigma(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \varepsilon(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) f\left(\frac{\vec{r}_4 + \vec{r}_3}{2}\right) \sigma(|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|) \varepsilon(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4) \times \right. \\ & \dots \dots f\left(\frac{\vec{r}_{2n_f} + \vec{r}_{2n_f-1}}{2}\right) \sigma(|\vec{r}_{2n_f} - \vec{r}_{2n_f-1}|) \varepsilon(\mathbf{m}_{2n_f-1}, \mathbf{m}_{2n_f}) \times \\ & \times g\left(\frac{\vec{r}_{2n_f+2} + \vec{r}_{2n_f+1}}{2}\right) \sigma(|\vec{r}_{2n_f+2} - \vec{r}_{2n_f+1}|) \varepsilon(\mathbf{m}_{2n_f+1}, \mathbf{m}_{2n_f+2}) \times \\ & h\left(\frac{\vec{r}_{2n_f+4} + \vec{r}_{2n_f+3}}{2}\right) \sigma(|\vec{r}_{2n_f+4} - \vec{r}_{2n_f+3}|) \varepsilon(\mathbf{m}_{2n_f+3}, \mathbf{m}_{2n_f+4}) \dots \times \\ & \left. \times \phi_k(\vec{r}_k, \mathbf{m}_k) \phi_{k+1}(\vec{r}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+1}) \dots \dots \phi_N(\vec{r}_N, \mathbf{m}_N) \right\} \end{aligned} \quad (10.6.24)$$

Esta fórmula é grande e assustadora. Mas vamos ver os detalhes com calma. A função sobre a qual o antissimetrizador  $\mathcal{A}$  atua é um enorme produto de funções. Primeiramente temos fatores que são funções de duas variáveis  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $(\xi_3, \xi_4)$ , ..... . Estas funções representam elétrons que formaram pares de Cooper. Os primeiros  $n_f$  pares de Cooper são simplesmente iguais, todos com a mesma função  $f$ . Depois temos ainda alguns pares de Cooper com outras funções  $g, h$  etc.. Finalmente temos funções de onda  $\phi_l(\xi_l)$  que representam elétrons que não formaram pares de Cooper. Para que o antissimetrizador não anule tudo, é preciso que as funções  $\phi_l(\xi_l)$  sejam todas diferentes entre si. O surpreendente é que pode haver um número grande de pares de Cooper com a mesma função  $f$  sem que isto resulte na anulação da função pelo processo de antissimetização. De fato quando se trocam, por exemplo, as coordenadas  $(\xi_1, \xi_2)$  e  $(\xi_3, \xi_4)$  obtém-se exatamente o mesmo produto, e isto não leva a um cancelamento porque esta troca é uma permutação par. A troca  $(\xi_1, \xi_2), (\xi_3, \xi_4) \rightarrow (\xi_3, \xi_2), (\xi_1, \xi_4)$  é uma permutação ímpar, mas o correspondente fator  $-1$  também não leva a um cancelamento porque esta troca gera um produto completamente novo. Repare o efeito interessante do antissimetrizador: não são os elétrons número  $2n_f + 1$  e  $2n_f + 2$  que formam o par de Cooper com a função  $g$ ; todos os elétrons aparecem neste par de Cooper; os elétrons não têm individualidade!

Na verdade a função de onda (10.6.24) não descreve exatamente  $N$  elétrons. Pela nossa imagem clássica do par de Cooper, vimos que a formação dele requer um alto grau de correlação entre os movimentos dos elétrons e dos íons da rede cristalina. Na descrição quântica, isto significa que se trata de um estado chamado de *estado emaranhado*, isto é, um estado que não permite uma descrição somente pelos elétrons e pela rede de íons de forma separada. A descrição deste estado tem que envolver todo o cristal. Mas pode-se escapar desta complicação introduzindo o conceito de quase partículas. No caso, estas seriam algo como elétrons “vestidos” por vibrações da rede cristalina. Estas quase partículas têm uma massa efetiva  $m_*$  que pode diferir da massa de um elétron. A função de onda (10.6.24) descreve o estado de  $N$  destas quase partículas e isto fornece uma descrição, pelo menos aproximada, do estado verdadeiro de todo o cristal.

Esquecemo-nos da dependência temporal. Tacitamente assumi que se trata de um estado de energia bem definida cuja dependência temporal tem a forma  $\exp\{-itE/\hbar\}$ . De fato são os estados de energia bem definida que nos interessam. Pois o estado de um sistema em equilíbrio termodinâmico em contato com um reservatório de temperatura  $T$  se descreve com as probabilidades dos estados de energia bem definida de acordo com a fórmula de Boltzmann:

$$P_i = \frac{\exp\left\{-\frac{E_i}{k_B T}\right\}}{\sum_j \exp\left\{-\frac{E_j}{k_B T}\right\}} \quad (10.6.25).$$

Mencionamos isto já algumas vezes, por exemplo, na seção 4.7 (Densidade de energia elétrica e considerações termodinâmicas) e na seção 10.2 (Ferromagnetismo, paramagnetismo e diamagnetismo). Infelizmente não temos nenhuma garantia de que um estado da forma (10.6.24) seja um estado de energia bem definida. Em geral teria que considerar superposições de diversas funções do tipo (10.6.24) para descrever um estado de energia bem definida. Se os pares de Cooper não interagissem, seria bem razoável supor que as funções de onda de energia bem definida tivessem a forma (10.6.24). Mas, como estas partículas têm carga elétrica, sua interação não é desprezível. Mesmo assim a hipótese de termos estados de energia da forma (10.6.24) é uma boa aproximação que permite entender o essencial da supercondutividade. Isto acontece porque a maior parte da interação dos pares de Cooper pode ser descrita por um campo eletromagnético médio criado por todos os pares. Resulta que a grande maioria dos pares de Cooper ocupa o mesmo estado e é bastante razoável supor que as interações individuais comecem a ser desprezíveis quando  $10^{23}$  partículas fazem todas a mesma coisa. Este tipo de aproximação de campo médio é muito frequente na física e geralmente permite entender o essencial de uma situação, embora um tratamento exato requer considerar as interações individuais das partículas.

Agora vamos estudar o equilíbrio termodinâmico de uma amostra supercondutora que interage com um reservatório térmico à temperatura  $T$ . O equilíbrio de um sistema termodinâmico dentro de um reservatório térmico está caracterizado pela minimização da energia livre;  $F = E - TS \rightarrow \text{mínimo}$ . Já mencionamos algumas vezes o balanço entre energia  $E$  e entropia  $S$  do sistema (seções 4.7 e 10.2). A energia do sistema está associada à entropia do reservatório térmico. À temperatura baixa, o termo  $TS$  é menos importante, ou seja, o sistema fica preferencialmente em estados de baixa energia. À

temperatura alta, encontramos o sistema preferencialmente em estados mais energéticos<sup>7</sup>. Dois elétrons soltos têm mais entropia do que dois elétrons ligados num par de Cooper. Para altas temperaturas a contribuição entrópica para a energia livre é mais importante e não encontramos pares de Cooper. Para baixas temperaturas, a parcela energética é mais importante, e os elétrons ficam no estado ligado com menos energia. Eles ficam num estado ligado, mas em qual dos possíveis estados de par de Cooper,  $f, g, h, \dots$  ? Esta pergunta leva a um dos aspectos mais importantes da supercondutividade.

A falta de individualidade dos elétrons acarreta uma falta de individualidade dos pares de Cooper. Os físicos chamam partículas sem individualidade de *partículas idênticas*. Pares de Cooper não obedecem ao princípio de Pauli. O físico indiano Satyendra Nath Bose<sup>8</sup> percebeu que as excitações quânticas da luz são partículas idênticas que não obedecem ao princípio de Pauli e que elas têm uma peculiaridade no equilíbrio termodinâmico. Einstein estendeu as idéias de Bose a outras partículas idênticas que não obedecem ao princípio de Pauli. Bose e Einstein consideraram apenas partículas com interações desprezivelmente fracas<sup>9</sup>. Para poder entender o que estas partículas têm de especial, vamos primeiramente considerar  $n$  partículas com individualidade. Para  $n$  partículas com individualidade, há  $n!$  possibilidades de ocupar  $n$  estados quânticos. Isto corresponde a um valor consideravelmente alto de entropia. Se estas partículas ocupam um único estado, a entropia seria zero. Por outro lado, para partículas idênticas não há esta diferença de entropia, pois para partículas idênticas as atribuições <partícula 1 no estado  $a$ , partícula 2 no estado  $b$ , etc.>, e <partícula 2 no estado  $a$ , partícula 1 no estado  $b$ , ....> seriam exatamente a mesma coisa. Para baixas temperaturas, partículas idênticas que não precisam obedecer ao princípio de Pauli se acumularão simplesmente no estado de mais baixa energia para minimizar a energia livre. Ocorre um fenômeno parecido com a condensação de um gás. Chama-se este fenômeno de condensação de Bose-Einstein.

A condensação de Bose-Einstein se refere a partículas praticamente sem interação. Com os pares de Cooper, a situação é diferente, eles interagem eletromagneticamente. Mas, com a aproximação de campo médio, o estado de equilíbrio terá propriedades parecidas com as de um gás ideal com condensação de Bose-Einstein. Praticamente todos os pares de Cooper ocuparão a mesma função de onda  $f$  que têm a energia mais baixa. A diferença é que a função  $f$  e especialmente seu significado físico dependerão do campo magnético gerado pelos próprios pares de Cooper.

São os pares de Cooper condensados na função fundamental  $f$  que transportam a supercorrente. Com a fórmula (2.2.9), esperamos que a densidade de corrente seja proporcional ao número  $n_f$  de pares de Cooper condensados na função  $f$ . Por outro lado, pela fórmula (10.6.2), a densidade da supercorrente contém os fatores  $\psi$  e  $\psi^*$ . A função de onda da teoria de F. London ou de Ginzburg-Landau pode ser identificada

---

<sup>7</sup> Isto não contradiz o fato de que a probabilidade  $P_i$  da fórmula de Boltzmann (10.6.25) é uma função monotonamente decrescente da energia. Há de se considerar que o número de microestados  $i$  para um dado estado macroscópico muito energético é geralmente muito maior do que o número dos microestados para uma situação menos energética. É nesta contagem do número de microestados que entra a entropia do sistema.

<sup>8</sup> Satyendra Nath Bose (01/01/1894 – 04/02/1974) foi aluno de Jagadish Chandra Bose e como este teve um espectro extremamente amplo de interesses.

<sup>9</sup> Um pouco de interação estas partículas têm que ter para poder atingir o equilíbrio.

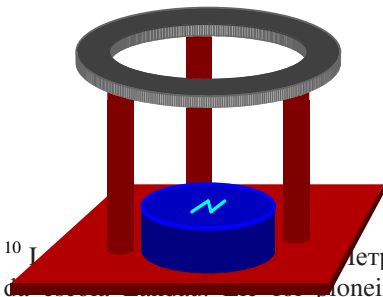
com o produto da função de onda fundamental  $f$  com a raiz quadrada do número  $n_f$  de pares de Cooper que condensaram neste estado.

$$\Psi(\vec{r}) = \sqrt{n_f} f(\vec{r}) \quad (10.6.26).$$

A função de onda  $f$  deve ser normalizada de tal maneira que  $|\Psi(\vec{r})|^2$  possa ser identificado com a densidade de pares de Cooper no estado  $f$ . No estado de equilíbrio termodinâmico, temos uma distribuição de probabilidade para os valores de  $n_f$  que se concentra no valor esperado  $\langle n_f \rangle$  com um desvio padrão na ordem de  $\sqrt{\langle n_f \rangle}$ , o que é um valor pequeno em comparação com  $\langle n_f \rangle$ . A interpretação física desta função de onda depende ainda do campo  $\vec{A}$ . Este inclui, no sentido da aproximação de campo médio, a interação dos pares de Cooper. Aqui o campo  $\vec{A}$  é um objeto da física clássica, e a condensação dos pares de Cooper faz um sistema intrinsecamente quântico exibir propriedades clássicas. Lev Petrovich Gorkov<sup>10</sup> mostrou que a teoria de Ginzburg-Landau pode ser obtida da teoria microscópica de Bardeen, Cooper e Schrieffer<sup>11</sup>.

Resta responder à pergunta mais inquietante: por que uma supercorrente não cessa? Em muitos textos sobre o assunto, podemos ler a respeito desta pergunta central explicações inadequadas. Eles afirmam que a conservação de energia junto com a conservação de momento linear impede o espalhamento dos pares de Cooper. É verdade que a relação entre energia e momento linear dos pares de Cooper é tal que um obstáculo teria que impactar com alta velocidade para poder espalhar um par de Cooper. Este fato é relevante na discussão da dinâmica de um supercondutor fora do equilíbrio, mas, para a questão da perenidade da supercorrente, isto não importa. Mesmo que os pares de Cooper não sejam espalhados, os elétrons vestidos que formam pares de Cooper são frequentemente espalhados, e isto simplesmente destrói o par de Cooper<sup>12</sup>. Em compensação, outros elétrons não ligados formarão novos pares. Estes processos de quebra e formação de pares de Cooper são de fato essenciais para que o sistema possa atingir o estado de equilíbrio termodinâmico, e, como veremos logo em seguida, o estado de equilíbrio é essencial para a manutenção da supercorrente. Para poder entender a perenidade da supercorrente, vamos analisar uma situação concreta com tal corrente.

Imaginem que montemos um anel de um material daqueles que adquirem supercondutividade para baixas temperaturas num suporte que mantém este anel acima de um ímã permanente, como na figura 10.6.4. O anel todo está “banhado” pelo campo magnético. Agora vamos abaixar a temperatura deste arranjo abaixo da temperatura crítica do material do anel. Pares de Cooper são formados e o sistema atinge um novo



<sup>10</sup> Lev Petrovich Gorkov; 14/06/1929 – 28/12/2016) era um dos últimos alunos de Ginzburg, pioneiro no uso de técnicas de teoria quântica de campos na teoria da supercondutividade e na mecânica estatística.

<sup>11</sup> Gorkov, L. P.: Sov. Phys. *JEPT* **9**, p.1364 (1959)

<sup>12</sup> A energia de ligação  $\epsilon$  de pares de Cooper fica tipicamente na faixa  $1 \times 10^{-3}$  eV. Com uma temperatura de 2 K, o fator de Boltzmann  $\exp\{-\epsilon/k_b T\}$  vale  $\approx 3 \times 10^{-3}$ , ou seja, um valor apreciavelmente grande de tal forma que a destruição de pares de Cooper não é um evento extremamente raro.

estado de equilíbrio que está caracterizado pela minimização da energia livre.

Fig. 10.6.4 Anel de um material que se torna supercondutor para baixas temperaturas montado acima de um imã permanente.

A maior parte dos pares de Cooper condensa num único estado caracterizado por um único par de funções  $f$  e  $\vec{A}$  que corresponde à menor energia livre possível do sistema incluindo o campo magnético associado. De acordo com a teoria de Ginzburg-Landau, a energia livre tem a seguinte forma:

$$F(T, [\psi], [\vec{A}]) = \iiint \left\{ f_N + \frac{(\text{rot } \vec{A})^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m} \psi^* (-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 \psi + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2} |\psi|^4 \right\} d^3\vec{r} \quad (10.6.27)$$

Nesta fórmula,  $f_N$  é a densidade de energia livre do material no estado normal, isto é, no estado sem pares de Cooper. A integração se estende sobre todo o espaço. Os fatores  $\alpha(T)$  e  $\beta(T)$  são características do material. O fator  $\alpha(T)$  é negativo e  $\beta(T)$  é positivo. O estado de equilíbrio termodinâmico é caracterizado pela minimização deste funcional de energia livre. No mínimo, os valores de  $F$  devem ficar constantes sob variações infinitesimais dos campos  $\psi$  e  $\vec{A}$ . Esta condição leva às seguintes equações diferenciais que os campos  $\psi$  e  $\vec{A}$  devem satisfazer no equilíbrio:

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2 \psi = 0 \quad (10.6.28)$$

e

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \frac{q}{2m} \left\{ \psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \psi - \frac{\hbar}{i} (\nabla \psi^*) \psi - 2q\vec{A} \psi^* \psi \right\} \quad (10.6.29).$$

A equação (10.6.29) é uma velha conhecida; ela é a fórmula (10.6.2) junto com a lei de Ampère  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Pode-se mostrar que a solução da equação (10.6.28) corresponde a um valor do módulo  $|\psi(\vec{r})|$  praticamente constante no interior do anel. Então já sabemos que neste caso a equação (10.6.29) resulta na expulsão do campo magnético do interior do anel. Expulsar o campo significa que deve haver correntes que geram um campo magnético que anule o campo do imã no interior do anel. Estas correntes fluem permanentemente perto da superfície do anel.

Por que estas correntes superficiais não cessam? Processos dissipativos que causam a resistência elétrica são processos que levam um sistema que está fora do equilíbrio para perto do equilíbrio. Mas aqui temos um sistema que já está no equilíbrio. A perenidade destas correntes nos surpreende porque não estamos acostumados a ver sistemas termodinâmicos no equilíbrio tendo fluxos diferentes de zero. Há até livros de termodinâmica que afirmam que a ausência de fluxos seria parte da definição de equilíbrio termodinâmico. Isto está redondamente errado. Podemos dar um contra-exemplo de um estado de equilíbrio com fluxos diferentes de zero do qual ninguém duvida que ele pertence à classe dos sistemas em equilíbrio: um simples gás ideal em equilíbrio dentro de algum recipiente. Onde está o fluxo diferente de zero neste caso? O fluxo diferente de zero no gás é a pressão. Ela é a parte isotrópica da densidade de fluxo do momento linear. Como o momento linear é um vetor, sua densidade de fluxo é um

tensor, a saber, um tensor simétrico. Estes tensores têm uma parcela que não depende da orientação no espaço, e, no caso da densidade de fluxo de momento linear, esta parcela é a pressão. Há também outros contraexemplos com fluxos mais convencionais.

Agora veremos um caso um pouco mais complicado. Na nossa experiência imaginada, vamos agora retirar o ímã permanente. Esta mudança provocará certamente um rearranjo dos pares de Cooper. Mas este rearranjo não leva o sistema ao mínimo absoluto de energia livre. O estado de mais baixa energia livre de todo o sistema (incluindo o campo magnético) seria agora o estado sem correntes e com campo magnético nulo. Mas não é este estado que se estabelecerá. Inicialmente, isto é, ainda com a presença do ímã, passa um fluxo magnético pelo anel, e o interior do material estaria ainda sem campo magnético. O valor do fluxo magnético que atravessa a área associada a um caminho circular de integração no interior do material (como aquele da figura 10.6.5) seria inicialmente  $n_{inicial} h/2e$  com algum número inteiro  $n_{inicial}$  diferente de zero. Para que o sistema possa atingir o mínimo absoluto de energia livre, ele teria que passar por estados intermediários com densidade de corrente diferente de zero no interior do material. Estas situações intermediárias não iriam satisfazer as equações (10.6.28) e (10.6.29), e a energia associada a estes estados intermediários seria tão alta que nenhuma flutuação térmica seria capaz de ultrapassar esta barreira de energia. Então o valor inicial  $n_{inicial} h/2e$  se mantém.

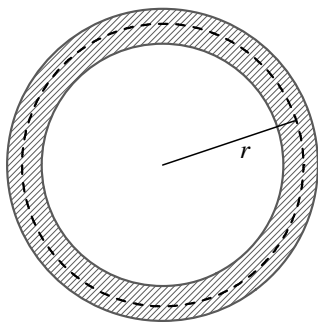
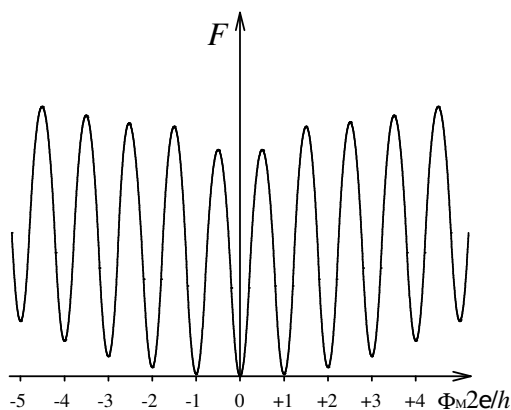


Fig. 10.6.5 Caminho circular de integração no interior do material de um anel supercondutor.

O sistema fica num mínimo-local ou relativo de energia livre. Este estado tem correntes perenes numa fina camada superficial do anel. A figura 10.6.6 mostra as “montanhas de energia livre” com os vales e barreiras energéticas qualitativamente. Cada mínimo local pode ser contado como um perfeito equilíbrio termodinâmico. A situação é

análoga àquela de um recipiente com uma mistura de 0,5 mol de  $O_2$  e 1,0 mol de  $H_2$  numa temperatura de  $20^\circ C$ . Esta mistura pode ser mantida durante milhões de anos sem nenhuma mudança de estado, e ela pode ser considerada um estado de equilíbrio termodinâmico. Mas o verdadeiro mínimo de energia livre seria um conteúdo de 1,0 mol de  $H_2O$  neste recipiente.



Resumindo podemos dizer: a perenidade das supercorrentes é uma consequência do fato de se tratar de estados de equilíbrio. Contudo a supercondutividade é um fenômeno complexo cuja descrição teórica é talvez um dos assuntos mais difíceis da física.

Fig. 10.6.6 Representação qualitativa da energia livre de um anel supercondutor e campo magnético associado em função do fluxo magnético que passa pelo anel.

**Exercícios:**

**E 10.6.1:** Determine com que unidades valores dos campos  $\psi$  e  $\vec{A}$  podem ser escritos.

**E 10.6.2:** No texto discutimos o caso idealizado com o semiespaço  $z \leq 0$  preenchido com um supercondutor do tipo I. Neste caso o campo

$$\vec{B}_v(z) = \hat{x} b_0 \exp\left\{\frac{z}{\lambda_L}\right\} \quad (\text{para } z \leq 0) \quad (10.6.30)$$

com  $b_0 = \text{const.}$  satisfaz a equação  $\text{div} \vec{B}_v = 0$  e a equação (10.6.10). **(a)** Calcule a densidade de corrente  $\vec{j}(z)$ . **(b)** Mostre que, neste exemplo, a equação (10.6.6) pode se satisfazer com uma fase  $S$  constante.

**E 10.6.3:** Novamente consideramos o caso idealizado com o semiespaço  $z \leq 0$  preenchido com um supercondutor do tipo I. Mas desta vez vamos permitir campos magnéticos que dependam de  $x$  e  $y$ . Campos magnéticos do seguinte tipo permitem descrever situações realistas:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\vec{k}) \left\{ i \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} + \frac{|\vec{k}| \hat{z}}{a(\vec{k})} \right\} \exp\{a(\vec{k})z + i \vec{k} \cdot \vec{r}\} dk_x dk_y \quad (10.6.31)$$

Esta fórmula vale para  $z \leq 0$ . Nesta fórmula  $\vec{k} = \hat{x} k_x + \hat{y} k_y$ ,  $\tilde{B}(\vec{k})$  é uma função contínua e quadraticamente integrável, e  $a(\vec{k})$  vale

$$a(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_L^2} + |\vec{k}|^2} \quad (10.6.32).$$

**(a)** Mostre que o campo  $\vec{B}$  da fórmula (10.6.31) satisfaz a equação de Maxwell  $\text{div} \vec{B} = 0$ , e a equação (10.6.10). **(b)** Se  $\vec{B}(x, y, z)$  varia nas direções  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  numa escala típica  $d$ , as componentes de Fourier  $\tilde{B}(\vec{k})$  são apreciavelmente diferentes de zero para valores de  $\vec{k}$  com  $|\vec{k}| \approx d^{-1}$ . Mostre que o quociente do módulo da componente normal  $\hat{z} \vec{B} \cdot \hat{z}$  e da componente tangencial  $\vec{B} - \hat{z} \vec{B} \cdot \hat{z}$  é da ordem  $\lambda_L / d$ . **(c)** Determine a densidade de corrente  $\vec{j}$  associada ao campo (10.6.31) e mostre que a equação (10.6.6) pode ser satisfeita novamente com uma fase  $S$  constante.

**E 10.6.4:** Agora tentaremos entender o caso de um anel com supercorrente. Um anel de raio interno  $a$ , raio externo  $b$  e altura  $h$  seria o objeto mais perto de situações reais, mas vamos simplificar a geometria um pouco e escolher  $b = h = \infty$ , ou seja, um espaço com buraco tubular de raio  $a$ . **(a)** Mostre que a função

$$\vec{B}(z) = \hat{z} B_0 \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{z \cosh(u)}{\lambda_L}\right\} du \quad \text{para } z \geq a \quad (10.6.33)$$

satisfaz a equação  $\text{div} \vec{B} = 0$  e a equação (10.6.10) ( $z$  é a coordenada radial num sistema cilíndrico de coordenadas). **(b)** Calcule a densidade de corrente e mostre que a

equação (10.6.6) pode ser satisfeita com a fase  $S(\varphi) = n\varphi$  com  $n$  inteiro. A constante  $B_0$  é determinada pela condição

$$n2\pi = 2\pi \int_a^\infty B_0 z \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{z \cosh(u)}{\lambda_L}\right\} du dz + \pi a^2 B_0 \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{a \cosh(u)}{\lambda_L}\right\} du \quad (10.6.34).$$

**E 10.6.5:** Nos exercícios E 10.6.2 -10.6.4, usou-se a aproximação  $|\psi(\vec{r})| \approx const.$  a qual é a base da fórmula (10.6.7). Infelizmente esta aproximação não é irrestritamente boa. A função de onda  $\psi$  deve satisfazer a equação (10.6.28).

Agora investigaremos de novo o caso de um semiespaço infinito ( $z \leq 0$ ) preenchido com um supercondutor. Mas desta vez consideramos uma situação sem campo magnético e sem supercorrente. Neste caso, podemos supor  $\vec{A} = 0$ , uma fase constante da função de onda e podemos escolher  $\psi$  como função real que dependa apenas de  $z$ . Com estas restrições, a equação (10.6.28) toma a seguinte forma:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad \text{para } z \leq 0 \quad (10.6.35).$$

Uma solução é

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} = const. \quad \text{para } z \leq 0 \quad (10.6.36).$$

Os especialistas afirmam que esta é realmente a solução realizada na natureza com um cristal que termina abruptamente no vácuo. Mas pode-se evaporar na superfície uma substância ferromagnética com o efeito de forçar uma condição de contorno  $\psi(0) = 0$ .

(a) Mostre que a função

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} \tanh\left\{\frac{-z}{\xi\sqrt{2}}\right\} \quad \text{para } z \leq 0 \quad (10.6.37)$$

com

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\alpha|}} \quad (10.6.38)$$

satisfaz a equação (10.6.35) e a condição de contorno  $\psi(0) = 0$ . Esboce a função (10.6.37).

**Comentário 1:** vale

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \psi(z) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} \quad (10.6.39),$$

e para  $z = -4\xi$  o valor de  $\psi(z)$  difere deste valor limite por menos de 0,7%. Bem dentro do material, isto é para  $z \ll -\xi$ , a aproximação  $|\psi(\vec{r})| \approx const.$  é boa. O parâmetro  $\xi$  é chamado de “comprimento de coerência”. Um material supercondutor é então caracterizado por dois parâmetros: a profundidade de penetração de London  $\lambda_L$  e o comprimento de coerência  $\xi$ . Resulta que o quociente destes parâmetros determina se o supercondutor é do tipo I ou do tipo II. Se  $\xi \gg \lambda_L$  temos um supercondutor do tipo I



e para  $\xi \ll \lambda_L$ , um do tipo II. A teoria de Ginzburg-Landau<sup>13</sup> prevê a transição no ponto  $\lambda_L / \xi = 1/\sqrt{2}$ . No caso de  $\vec{j} \neq 0$  e  $\vec{A} \neq 0$ , a solução simultânea das equações (10.6.28) e (10.6.29) é difícil e requer métodos numéricos. Em todo caso, o campo magnético é expulso do interior do supercondutor e a densidade de corrente se limita a camadas superficiais.

### 10.6 Apêndice: Uma visão mais profunda do eletromagnetismo

Iniciamos o nosso estudo do eletromagnetismo esfregando bastões de PVC, introduzimos o conceito de carga elétrica e os conceitos de campo elétrico e magnético. As cargas em movimento geram valores diferentes de zero do campo magnético. Agora, com o estudo da supercondutividade, fomos levados a uma visão totalmente diferente. O mundo parece não mais ser feito de grãos cujos andar no espaço gera campo magnético. Fritz London destaca este fato no seu trabalho “A New Conception of Superconductivity” *Nature* **140** pp.793-7 (1937). A partícula que transporta carga no supercondutor não possui um lugar de estar; ela está em toda a extensão da amostra supercondutora. O misterioso campo vetorial  $\vec{A}$  gera a densidade de corrente e ainda por cima ela determina o campo magnético. Será este campo algo mais fundamental do que o próprio campo magnético? Parece que este campo é tão fundamental que altera até a interpretação da função de onda  $\psi$ . Veja os exercícios E 10.6.2 e E 10.6.3. A função de onda  $\psi$  é simplesmente constante em ambos, mas os campos de densidade de corrente são diferentes. Então o significado físico da função de onda  $\psi$  depende do campo  $\vec{A}$ .

O campo  $\vec{A}$  é fundamental sim, e não. Este campo tem um pequeno defeito: ele não é totalmente físico por não ser determinado de forma única pela situação física. O campo  $\psi$  tem o mesmo defeito. Se substituirmos os campos  $\vec{A}$  e  $\psi$  por novos campos

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \exp\left\{i \frac{q}{\hbar} \chi(\vec{r})\right\}, \quad \tilde{\vec{A}}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad} \chi(\vec{r}) \quad (10.6.40),$$

com alguma função real e derivável  $\chi$ , obtemos exatamente a mesma densidade de corrente e o mesmo campo magnético. Por razões históricas, este tipo de transformação se chama de *transformação de calibre*. O par de campos  $\langle \psi, \vec{A} \rangle$  descreve a mesma situação física que o par  $\langle \tilde{\psi}, \tilde{\vec{A}} \rangle$ . Isto lembra o vetor posição  $\vec{r}$  que usamos na mecânica clássica para descrever a posição de uma partícula. O conceito fundamental que corresponde diretamente à realidade física é a posição  $P$  da partícula, a qual é um ponto no espaço físico. Mas, para fazer nossos cálculos, é prático escolhermos arbitrariamente um ponto  $O$  e descrevermos a posição com a ajuda do vetor posição  $\vec{r} = \vec{OP}$ . Este objeto contém um elemento não físico, subjetivo, criado pela nossa escolha arbitrária do ponto de origem  $O$ . Seria uma grande ajuda na nossa tentativa de entender o eletromagnetismo se pudéssemos apontar objetos tão diretamente ligados à realidade física como o ponto  $P$  que possam substituir os campos  $\psi$  e  $\vec{A}$ .

Na mecânica quântica convencional, o estado de uma partícula é descrito por uma função complexa  $\psi(x, y, z, t)$ . Vamos experimentar uma descrição alternativa: ao invés

<sup>13</sup> Ginzburg W. L., Landau L. D. (1950) JETP 20, 1064

de associar a cada quadra  $\langle x, y, z, t \rangle$  um número<sup>14</sup> complexo  $\psi(x, y, z, t)$ , vamos associar um elemento  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$  de um espaço linear  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$ . Este espaço deve ser um espaço linear complexo, isto é, os elementos deste espaço podem ser multiplicados por números complexos. Além disso vamos supor que  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  seja unidimensional. Isto significa que qualquer elemento  $\mathbf{a} \in \mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  pode ser escrito como um múltiplo de algum elemento básico  $\mathbf{b}$ ;  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$  com algum número complexo  $\alpha$ . O próprio conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos é um espaço linear complexo unidimensional. Mas o espaço  $\mathbb{C}$  tem uma propriedade que os espaços  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  não devem ter: no espaço  $\mathbb{C}$  há uma “direção” privilegiada, a saber, o subconjunto de números reais. No espaço  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  não deve haver nenhuma “direção” privilegiada.

Na penúltima frase, usamos o plural: “os espaços  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$ ”. Sim, são muitos espaços diferentes; cada quadra  $\langle x, y, z, t \rangle$  tem o seu espaço associado. Para  $\langle x, y, z, t \rangle \neq \langle x', y', z', t' \rangle$  temos  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle} \neq \mathcal{E}_{\langle x', y', z', t' \rangle}$ . Sendo assim, uma simples derivada parcial do campo  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$  não pode ser definida da maneira usual. A definição

$$\frac{\partial \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\partial x} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(x + \varepsilon, y, z, t) - \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\varepsilon} \quad (10.6.41)$$

não faz sentido, pois  $\mathbf{s}(x + \varepsilon, y, z, t)$  e  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$  são de espaços diferentes e a diferença  $\mathbf{s}(x + \varepsilon, y, z, t) - \mathbf{s}(x, y, z, t)$  não é definida. Para poder derivar o campo  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$ , precisamos de um elemento estrutural adicional. Temos que ter um meio de transportar os valores deste campo de um lugar para outro. Para cada curva  $\gamma$  que leva de um  $\langle x, y, z, t \rangle$  para um  $\langle x', y', z', t' \rangle$ , devemos ter um mapeamento linear  $T_\gamma$  que mapeia o espaço  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  linearmente no espaço  $\mathcal{E}_{\langle x', y', z', t' \rangle}$ . Precisamos ainda de mais um elemento de estrutura. Nos espaços  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  deve haver uma estrutura de produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que, para cada dois elementos  $\mathbf{c} \in \mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$ , o produto  $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$  seja um número complexo e deve valer  $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{c} \rangle^*$ , ou seja, a troca dos fatores equivale à conjugação complexa. O transporte deve conservar os valores destes produtos escalares:  $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle T_\gamma \mathbf{c}, T_\gamma \mathbf{d} \rangle$ . Com esta estrutura de transporte de valores, podemos definir derivadas. Por exemplo, para a derivada parcial  $\partial/\partial x$ , escolhemos o caminho reto  $\gamma_{x,\varepsilon}$  que começa em  $\langle x + \varepsilon, y, z, t \rangle$  e termina em  $\langle x, y, z, t \rangle$ ; com este caminho podemos definir

$$\frac{\partial \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\partial x} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{s}(x + \varepsilon, y, z, t) - \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\varepsilon} \quad (10.6.42).$$

Esta definição faz sentido. O valor transportado  $T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{s}(x + \varepsilon, y, z, t)$  é elemento do mesmo espaço no qual se encontra o valor  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$ , e a diferença destes valores é bem definida.

<sup>14</sup> Na verdade um número vezes uma unidade.

Para poder calcular com este campo  $\mathbf{s}$ , vamos escolher elementos básicos  $\mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle}$  nos espaços  $\mathcal{E}_{\langle x,y,z,t \rangle}$ . Vamos escolher estas bases normalizadas de tal forma que valha

$$\langle \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle}, \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle} \rangle = 1 \quad (10.6.43).$$

Podemos escrever o campo  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$  com a ajuda destas bases:

$$\mathbf{s}(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle} \quad (10.6.44)$$

com alguma função complexa  $\psi$ . Vamos analisar o valor transportado  $T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{s}(x+\varepsilon, y, z, t)$ . Como  $T_{\gamma_{x,\varepsilon}}$  é um mapeamento linear, podemos tirar o fator  $\psi(x+\varepsilon, y, z, t)$  fora do mapeamento:

$$T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{s}(x+\varepsilon, y, z, t) = \psi(x+\varepsilon, y, z, t) T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{b}_{\langle x+\varepsilon,y,z,t \rangle} \quad (10.6.45).$$

$T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{b}_{\langle x+\varepsilon,y,z,t \rangle}$  é um elemento do espaço  $\mathcal{E}_{\langle x,y,z,t \rangle}$  e pode, portanto, ser escrito como um múltiplo do elemento básico  $\mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle}$ . Segue da condição (10.6.43) que este fator numérico tenha que ter o módulo 1, ou seja, se trate de uma fase. Podemos supor que as bases sejam escolhidas de forma razoável de tal maneira que este fator de fase possa ser escrito como série de Taylor em  $\varepsilon$ . Para um  $\varepsilon$  infinitesimal temos então

$$T_{\gamma_{x,\varepsilon}} \mathbf{b}_{\langle x+\varepsilon,y,z,t \rangle} = (1 - i \tilde{A}_x \varepsilon) \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle} \quad (10.6.46),$$

com algum valor real  $\tilde{A}_x$ . Coloquei um índice  $x$  neste valor, pois poderíamos depois querer fazer a mesma coisa com as derivadas  $\partial/\partial y$  ou  $\partial/\partial z$ . O valor  $\tilde{A}_x$  pode mudar se fizermos toda esta operação num outro ponto  $\langle x', y', z', t' \rangle$ . Então estes valores formam uma função  $\tilde{A}_x(x, y, z, t)$ . Coloquei um sinal negativo na fórmula (10.6.46) por se tratar de um transporte para trás: de  $x+\varepsilon$  para  $x$ . Veremos como fica a derivada do campo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\partial x} &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x+\varepsilon, y, z, t) (1 - i \tilde{A}_x \varepsilon) \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle} - \psi(x, y, z, t) \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle}}{\varepsilon} = \\ &= \left\{ \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x} - i \tilde{A}_x \psi(x, y, z, t) \right\} \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle} \end{aligned} \quad (10.6.47)$$

O fator que multiplica o elemento básico  $\mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle}$  nesta derivada tem exatamente a forma das derivadas que aparecem nas fórmulas (10.6.2), (10.6.4), (10.6.27), (10.6.28) e (10.6.29). Para tornar este fator formalmente idêntico às derivadas nestas fórmulas basta escrever o valor  $\tilde{A}_x$  na forma de  $q A_x / \hbar$  com uma outra função  $A_x(x, y, z, t)$ .

$$\frac{\partial \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x} - i \frac{q}{\hbar} A_x \psi(x, y, z, t) \right\} \mathbf{b}_{\langle x,y,z,t \rangle} \quad (10.6.48)$$

Fazendo tudo também com as derivas  $\partial/\partial y$  e  $\partial/\partial z$ , obtemos três campos que podem ser juntados num campo vetorial  $\vec{A}$ . Com isto a fórmula complicada (10.6.2) pode ser escrita da seguinte forma

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \frac{\hbar}{i} \{ \langle \mathbf{s}, \nabla \mathbf{s} \rangle - \langle \nabla \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle \} \quad (10.6.49).$$

Uma mudança da escolha de bases nos espaços  $\mathcal{E}$  provoca para os campos  $\psi$  e  $\vec{A}$  exatamente uma mudança do tipo (10.6.40). Então a parcela arbitrária nestes campos tem sua origem numa escolha arbitrária de bases nos espaços  $\mathcal{E}$ . Podemos supor que os objetos físicos objetivos sejam o campo  $\mathbf{s}(x, y, z, t)$  e os mapeamentos de transporte  $T_\gamma$ . Mas infelizmente não teremos acesso direto a estes objetos. Somente expressões do tipo  $\langle \mathbf{s}(x, y, z, t), \mathbf{s}(x, y, z, t) \rangle$  ou  $\langle \mathbf{s}(x, y, z, t), \nabla \mathbf{s}(x, y, z, t) \rangle$ , como aquelas na expressão da densidade de corrente, são acessíveis. Estas expressões têm todas a forma de produtos escalares de elementos definidos no mesmo ponto. Como podemos então verificar se este transporte de valores faz alguma coisa não trivial? Podemos transportar um valor e voltar para o mesmo ponto e verificar que o valor transportado difere do valor original por um fator de fase. Seja  $\mathbf{a}$  algum valor no espaço  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$ , e seja  $\gamma$  uma curva do espaço físico que começa e termina no ponto  $\langle x, y, z \rangle$ . Se transportamos o valor  $\mathbf{a}$  ao longo desta curva, mantendo  $t$  constante, obtemos como valor transportado

$$T_\gamma \mathbf{a} = \exp \left\{ i \frac{q}{\hbar} \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} \right\} \mathbf{a} \quad (10.6.50).$$

Como a curva era uma curva fechada, o valor transportado e o valor original pertencem ao mesmo espaço  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$ , e o fator de fase pode ser medido fisicamente. Com o teorema de Stokes podemos escrever a integral do expoente na forma de uma integral de superfície  $S$ . a qual deve ter a curva  $\gamma$  como beirada:

$$T_\gamma \mathbf{a} = \exp \left\{ i \frac{q}{\hbar} \iint_S (\text{rot } \vec{A}) \cdot d\vec{S} \right\} \mathbf{a} \quad (10.6.51).$$

Então o rotacional do campo  $\vec{A}$  pode em princípio ser medido. É este rotacional que chamamos de campo magnético. Especialmente, se transportarmos o elemento  $\mathbf{a}$  em volta de um retângulo infinitesimal no plano  $xy$ , indo primeiramente uma distância infinitesimal  $\varepsilon$  na direção  $x$ , depois uma distância infinitesimal  $\eta$  na direção  $y$  e voltando fechando um retângulo, obtemos

$$T_\gamma \mathbf{a} = \exp \left\{ i \frac{q}{\hbar} \varepsilon \eta B_z \right\} \mathbf{a} = \left( 1 + i \frac{q}{\hbar} \varepsilon \eta B_z \right) \mathbf{a} \quad (10.6.52)$$

Então o campo magnético se revelou como a parte dos mapeamentos de transporte que pode ser observada com a ajuda de curvas fechadas no espaço. Naturalmente surge agora a pergunta pelo campo elétrico. Este é a parte dos mapeamentos de transporte que pode ser observada com a ajuda de curvas fechadas que entram na dimensão temporal. Correspondentemente há também uma fórmula para derivadas temporais análoga à fórmula (10.6.48):

$$\frac{\partial \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} - i \frac{q}{\hbar} A_t(x, y, z, t) \psi(x, y, z, t) \right\} \mathbf{b}_{\langle x, y, z, t \rangle}$$

(10.6.53)

Por razões históricas não se usa este campo  $A_t$ , mas se usa o negativo dele  $U = -A_t$ , e a derivada temporal fica na forma

$$\frac{\partial \mathbf{s}(x, y, z, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} U(x, y, z, t) \psi(x, y, z, t) \right\} \mathbf{b}_{\langle x, y, z, t \rangle}$$

(10.6.54)

O campo  $U$  é o potencial escalar cuja “ressurreição” mencionamos no fim da seção 8.1. O campo elétrico se relaciona com os campos  $U$  e  $\vec{A}$  da seguinte forma:

$$\vec{E} = -\text{grad}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(10.6.55)

e a transformação de calibre completa é

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{r}, t) &= \psi(\vec{r}, t) \exp \left\{ i \frac{q}{\hbar} \chi(\vec{r}, t) \right\}, \\ \tilde{\vec{A}}(\vec{r}, t) &= \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad} \chi(\vec{r}, t), \\ \tilde{U}(\vec{r}, t) &= U(\vec{r}, t) - \frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

(10.6.56)

Na seção 1.1 falamos que certos elementos da estrutura do eletromagnetismo parecem ser universais e se aplicam também a outras forças básicas da natureza. Agora estamos em condições de explicitar esta afirmação. As outras forças subatômicas também resultam de mapeamentos de transporte. Mas estes transportam elementos de espaços  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  com mais dimensões. Por exemplo, no caso da força forte, que é responsável pela coesão dos nucleões, os espaços  $\mathcal{E}_{\langle x, y, z, t \rangle}$  são tridimensionais.