

## 9.1 O circuito LC e algumas considerações críticas

Na seção 8.4 estudamos o circuito RL como uma das primeiras aplicações da lei modificada das malhas (8.2.19). Agora incluiremos também um capacitor no circuito. Vamos estudar um circuito de uma única malha feita com um capacitor e um indutor como mostrado na figura 9.1.1. Por enquanto vamos supor que o fio do indutor não tenha nenhuma resistência. Isto é uma hipótese um tanto irreal, mas ela ajuda manter a análise matemática bem simples. A lei das malhas deste circuito é prontamente montada:

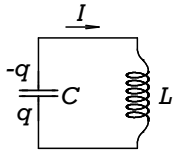


Fig. 9.1.1 Circuito LC

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.1.1).$$

Como sempre, definimos  $q$  como a carga daquela placa do capacitor na qual a seta de definição da corrente entra. Consequentemente vale a seguinte relação entre as incógnitas  $I$  e  $q$ :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (9.1.2).$$

Se usarmos esta relação para eliminar a incógnita  $I$ , obteremos uma equação diferencial muito bem conhecida desde os tempos da Física II:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad (9.1.3).$$

Ou, para evidenciar o tipo de equação ainda mais, vamos isolar o termo da derivada segunda:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q \quad (9.1.4).$$

Podemos escrever a solução geral desta equação imediatamente:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.1.5)$$

com

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.1.6).$$

$A$  e  $\alpha$  são os parâmetros ajustáveis que permitem adaptar a solução às condições iniciais. Para o leitor que estudou o capítulo de oscilações da Física II devidamente, estes passos devem ser todos óbvios. Ao leitor menos familiarizado com a dinâmica de osciladores, recomendo o estudo do capítulo de oscilações no livro de Física Básica II do autor H. Moysés Nussenzveig. (Editora Edgard Blücher). Provavelmente este é o texto mais claro que já tenha sido escrito sobre este assunto.

Embora a dedução do resultado (9.1.5) tenha sido bem simples, continua uma pergunta sem resposta: “por que a carga do capacitor oscila?” Queremos entender este comportamento intuitivamente! Então vamos descrever os acontecimentos em palavras.

Começamos com o capacitor carregado com carga  $q_0 < 0$  na placa inferior e  $-q_0 > 0$  na superior e sem nenhuma corrente. Sabemos da atração entre cargas de sinais opostos. Então podemos entender que comece a fluir carga pelo fio que conecta as placas do capacitor. Mas sabemos que a lei de indução não permite mudanças abruptas da corrente. Então a corrente cresce continuamente começando do valor inicial zero. Durante este processo de crescimento do valor da corrente, chega-se ao estado no qual toda a carga em excesso na placa superior do capacitor foi desmontada e neste ponto não haveria mais motivo para uma continuação da corrente. Mas agora a lei de Lenz impede que a corrente se anule imediatamente. Então agora o capacitor será carregado no sentido inverso da carga inicial. Neste processo a corrente flui contra a força eletrostática empurrada pelo campo elétrico não conservativo. Na medida em que se acumula carga negativa na placa superior do capacitor, aparece um campo eletrostático que tende a diminuir o fluxo de carga, e a corrente diminui até o valor zero. Neste instante a situação inicial se inverteu com  $q_0$  na placa superior e  $-q_0$  na inferior. Então começa tudo de novo, agora no sentido oposto.

Pode-se entender esta oscilação também em termos das energias dos campos. No estado inicial com o capacitor carregado sem corrente, toda a energia do sistema estava na forma de energia elétrica sem nenhuma energia magnética. Na medida em que se descarrega o capacitor, a energia elétrica que estava no capacitor é transformada em energia magnética dentro do solenoide. Da mesma maneira como na oscilação de um sistema massa–mola a energia oscila entre a forma cinética e a forma potencial, há aqui uma oscilação entre as formas elétrica e magnética.

Com um simples capacitor e um fio enrolado, podemos realizar um oscilador eletromagnético. É fácil obter osciladores com frequências de centenas de quilohertz até centenas de gigahertz. A importância destes osciladores nas aplicações vai da construção de relógios até geradores de ondas que transportam informação e energia. Mais adiante discutiremos estas aplicações mais detalhadamente.

Poderíamos prosseguir e colocar um resistor no circuito para torná-lo mais realista. Mas primeiramente gostaria de rever os procedimentos usados criticamente. Tanto a análise dos circuitos RC e RL como a do circuito LC usaram umas aproximações. Embora na maioria das aplicações estas aproximações sejam muito boas, é bom saber que algo não exato foi usado. Fazer aproximações conscientemente poupa possíveis sustos quando se aplicam os resultados fora do limite da validade das hipóteses. Primeiramente toda a descrição de fenômenos eletromagnéticos em termos de circuito é uma aproximação que substitui campos de densidade de corrente por correntes em fios descritos por curvas matemáticas. Mas fora disso há outras aproximações nas análises dos circuitos RL e LC. Assim que entramos no mundo dos fenômenos não estacionários, a densidade de corrente não precisa ser mais um campo sem fontes<sup>1</sup>. Consequentemente os valores da corrente em diferentes pontos de uma malha sem bifurcações não precisariam ser iguais. O que continua um campo sem fontes é a densidade de corrente generalizada que inclui a de deslocamento:

$$\vec{J} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{J} = 0 \quad (9.1.7)$$

---

<sup>1</sup> Aqui a palavra “fonte” é usada no sentido da definição dada na seção 2.2, ou seja, com  $\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Não estamos falando de fontes de alimentação de um circuito.

Acontece que na maioria dos casos o campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  tem valores apreciáveis somente no interior dos capacitores, e para fenômenos não exageradamente rápidos podemos ainda supor que a corrente tem os mesmos valores em todos os pontos da malha, com exceção do interior dos capacitores, onde o  $\vec{j}$  é integralmente substituído pelo campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ . Enquanto os fenômenos são ainda tão lentos que no tempo característico do circuito ondas eletromagnéticas percorrem distâncias  $\lambda$  muito maiores do que as dimensões geométricas do circuito, pode-se desprezar o campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  fora dos capacitores. Tempo característico significa no caso do circuito RC a constante de tempo RC, no circuito RL seria a constante de tempo  $L/R$  e no caso do oscilador, o período  $2\pi\sqrt{LC}$ . Se as distâncias características do circuito valem  $\ell$ , os efeitos do campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  fora dos capacitores provocam tipicamente alterações relativas da ordem  $(\ell/\lambda)^2$ . Por exemplo, com uma frequência de 100 MHz temos  $\lambda \approx 3$  m, e com circuitos de alguns centímetros de tamanho estas alterações são bem pequenas. Mas se fixamos longas hastes metálicas no circuito, os efeitos do campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  fora dos capacitores começam a ficar relevantes. Isto é justamente o caso com o uso de antenas para emitir ondas eletromagnéticas de um circuito. No apêndice desta seção discutimos mais detalhadamente a importância do campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  dentro de solenoides.

### Exercício:

**E 9.1.1:** Um capacitor de 10 nF foi ligado com fios curtos num solenoide cilíndrico de 10,0 cm de comprimento, raio  $R = 1,00$  cm e densidade de espiras  $n = 2000/\text{m}$ .

- (a) Calcule a frequência deste oscilador, usando a aproximação de solenoide comprido.
- (b) Determine a distância  $\lambda$  que uma onda eletromagnética pode percorrer durante um período de oscilação deste oscilador e calcule  $(\ell/\lambda)^2$  para este circuito, sendo  $\ell$  uma distância característica do circuito.

## Apêndice 9.1

Quando calculamos a indutância de um solenoide cilíndrico muito comprido, consideramos apenas a corrente elétrica como agente que gera campo magnético. Mas, com a emenda da lei de Ampère feita por Maxwell, sabemos que o campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  também gera campo magnético. Então numa situação com campos variáveis no tempo, o antigo cálculo da indutância deve ser revista. É relativamente simples avaliar qual é a importância da contribuição do campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ . De fato não precisamos calcular este campo explicitamente para avaliar sua importância. Seu papel está contido na dedução das equações de onda que explicitamos para o campo elétrico na seção 8.6. No exercício 8.6.3 sugerimos ao leitor deduzir também uma equação de onda para o campo magnético numa região do espaço sem matéria. O resultado é o mesmo tipo de equação de onda que vale para o campo elétrico:

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (9.1.8).$$

No interior do solenoide deve valer esta equação. Com os argumentos de simetria e supondo a mesma corrente em todos os pontos do fio enrolado no solenoide, podemos ainda assumir um campo orientado na direção  $z$ , ou seja, na direção do eixo de simetria do cilindro, e sem dependência do ângulo azimutal  $\varphi$  e da altura  $z$ . Vamos considerar o caso de um circuito com corrente oscilatória de frequência angular  $\omega$ ,  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$

e neste caso podemos fazer a seguinte tentativa para a solução da equação (9.1.8):

$$\vec{B}(t, \boldsymbol{r}) = \hat{z} b(\boldsymbol{r}) \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.1.9).$$

O operador de Laplace em coordenadas cilíndricas é

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{1}{\boldsymbol{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9.1.10).$$

Inserindo a tentativa (9.1.9) na equação de onda (9.1.8), obtemos

$$\frac{\partial^2 b}{\partial \boldsymbol{r}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}} \frac{\partial b}{\partial \boldsymbol{r}} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 b \quad (9.1.11).$$

Com a fórmula (8.6.28) sabemos que  $\epsilon_0 \mu_0$  é o inverso do quadrado da velocidade da luz e conseqüentemente

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (9.1.12)$$

é a distância que uma onda eletromagnética percorre durante um intervalo de oscilação. Com este parâmetro, a equação (9.1.11) toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial \boldsymbol{r}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}} \frac{\partial b}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} b \quad (9.1.13).$$

Para melhor reconhecer que esta equação é bem conhecida do curso de cálculo, vamos escrevê-la ainda em termos de uma coordenada radial adimensional  $\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{r} 2\pi/\lambda$ :

$$\frac{\partial^2 b}{\partial \boldsymbol{r}_*^2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}_*} \frac{\partial b}{\partial \boldsymbol{r}_*} = -b \quad (9.1.14).$$

Trata-se da equação de Bessel de ordem zero. Esta equação diferencial é linear e tem duas soluções linearmente independentes. Uma tem uma singularidade logarítmica em  $\boldsymbol{r}_* = 0$  e não serve para o nosso caso, e a outra é a função de Bessel de ordem zero.

$$J_0(\boldsymbol{r}_*) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\boldsymbol{r}_* \sin(u)) du \quad (9.1.15).$$

Então encontramos a seguinte solução da equação (9.1.8) dentro do solenoide:

$$\vec{B}(t, \boldsymbol{r}) = \hat{z} b_0 J_0\left(\frac{2\pi \boldsymbol{r}}{\lambda}\right) \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.1.16)$$

com uma constante  $b_0$  que deve ser ajustada para descrever a situação física corretamente.

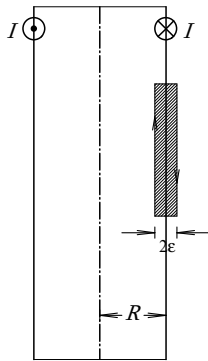


Fig. 9.1.2 Caminho retangular de integração que passa perto das espiras do solenoide. A contribuição do campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  na área hachurada é zero no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  enquanto a contribuição da corrente comum permanece com o seu valor.

Para este ajuste podemos usar o seguinte argumento. Imaginem que queiramos aplicar a lei de Ampère-Maxwell com um caminho de integração retangular que passa numa distância  $\epsilon$  dos fios do solenoide; um lado do retângulo está dentro do solenoide e outro, do lado de fora, como está indicado na figura 9.1.2. Se mandarmos  $\epsilon$  para zero, a contribuição da corrente de deslocamento tende a zero enquanto a contribuição da corrente continua com o mesmo valor. Por este motivo podemos esperar que valha a seguinte condição para o campo magnético:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{B}(\epsilon, \phi, t) = \hat{z} \mu_0 n I(t) \quad (9.1.17)$$

Nesta fórmula,  $n$  é a densidade de espiras do solenoide e  $R$ , o raio do mesmo. Com esta hipótese temos

$$b_0 = \frac{\mu_0 n I(t)}{J_0\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)} \quad (9.1.18)$$

e o campo fica com a seguinte expressão:

$$\vec{B}(t, \epsilon) = \hat{z} \frac{\mu_0 n I(t)}{J_0\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)} J_0\left(\frac{2\pi \epsilon}{\lambda}\right) \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.1.19)$$

Agora vamos supor uma oscilação com a frequência de 100 MHz. Para esta oscilação,  $\lambda$  vale aproximadamente 3 m. Para um solenoide de 1 cm de raio temos então  $\epsilon_* < 0,021$ . Para valores tão pequenos de  $\epsilon_*$  a seguinte fórmula

$$\cos(\epsilon_* \sin(u)) \approx 1 - \frac{1}{2} (\epsilon_* \sin(u))^2 \quad (9.1.20)$$

é uma excelente aproximação e conseqüentemente

$$J_0(\epsilon_*) \approx 1 - \frac{\epsilon_*^2}{4} \quad (9.1.21).$$

A figura 9.1.2 mostra o gráfico da função de Bessel  $J_0$ . Usando esta aproximação e a famosa  $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$  na fórmula (9.1.19), obtemos para o campo

$$\vec{B}(t, \epsilon) \approx \hat{z} \mu_0 n I(t) \left(1 - \frac{\pi^2 \epsilon^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2 R^2}{\lambda^2}\right) \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.1.22).$$

O campo ingenuamente calculado com a lei de Ampère sem considerar a contribuição do campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  seria

$$\vec{B}_{ingen.}(t, \kappa) = \hat{z} \mu_0 n I(t) \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.1.23).$$

Então, em módulo, o desvio relativo causado pelo campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  é

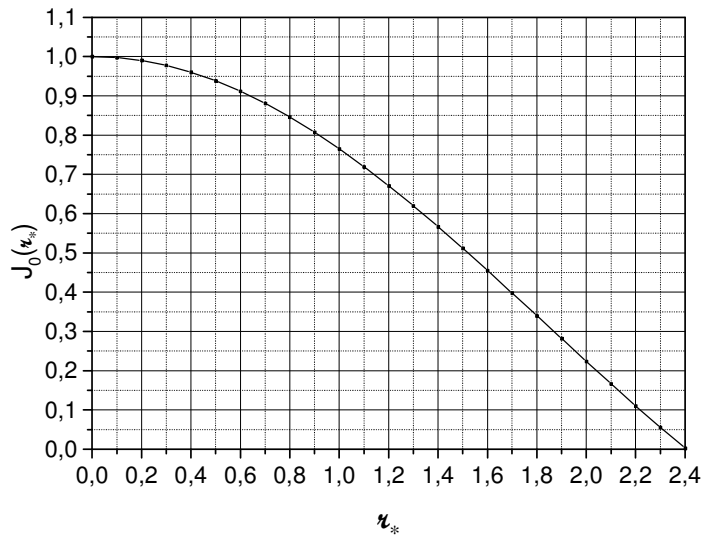
$$\frac{|\vec{B} - \vec{B}_{ingen}|}{|\vec{B}_{ingen}|} \approx \frac{\pi^2 R^2}{\lambda^2} - \frac{\pi^2 \kappa^2}{\lambda^2} \quad (9.1.24).$$

Para o nosso exemplo com uma frequência de 100 MHz e  $R = 1$  cm teríamos

$$\frac{|\vec{B} - \vec{B}_{ingen}|}{|\vec{B}_{ingen}|} \leq 1,1 \times 10^{-4} \quad (9.1.25).$$

Com frequências mais baixas este desvio fica ainda muito menor.

Fig. 9.1.2 Gráfico da função de Bessel de ordem zero.



Esta análise exemplifica nossa afirmação de que os efeitos causados pelo campo  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  são pequenos da ordem  $(\ell / \lambda)^2$ . Mas vale mencionar que discutimos apenas uma situação muito simples. Num solenoide podem existir também correntes não uniformes, ou seja, a corrente  $I$  pode depender da coordenada  $z$ . Isto ocorre nas famosas bobinas de Tesla. Superficialmente poder-se-ia descrever esta bobina

também como um circuito LC com um capacitor que consiste de dois condutores nos extremos da bobina. Tipicamente se excitam ondas neste arranjo que se propagam ao longo do solenoide. A descrição teórica destas excitações é bem complicada e neste caso uma simples análise de circuito LC não é adequada.

### Exercício:

**E 9.1.2:** Mostre que a função definida pela fórmula (9.1.15) é solução da equação diferencial (9.1.14).