

## 7.4 A Lei de Ampère

Encontramos a seguinte expressão

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.4.1)$$

para o campo magnético gerado por um fio reto infinitamente comprido. Esta expressão se refere a coordenadas cilíndricas. O fio fica no eixo  $z$  e leva uma corrente  $I$  cujo sentido positivo coincide com o sentido do vetor  $\hat{z}$ . Vamos investigar integrais de caminho deste campo com caminhos fechados. Primeiramente vamos investigar um caminho  $C$  cuja projeção ortogonal no plano  $xy$  tenha a forma de um trapézio cujos lados compridos formam um ângulo infinitesimal  $\alpha$  com o vértice do ângulo no lugar do fio.

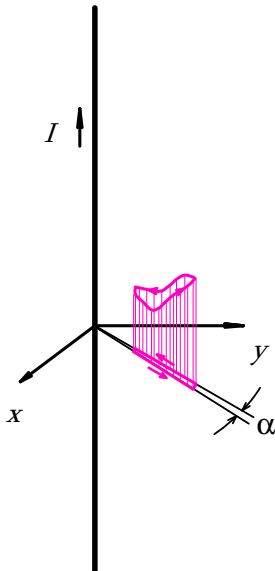
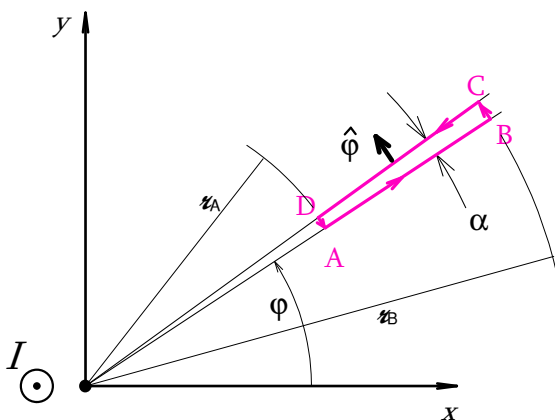


Fig. 7.4.1 Caminho fechado cuja projeção no plano  $xy$  é um trapézio cujos lados compridos formam um ângulo infinitesimal  $\alpha$  com vértice num fio reto com corrente.

A figura 7.4.1 mostra tal tipo de caminho e a figura 7.4.2 mostra a projeção no plano  $xy$  com mais detalhes. Nesta figura, o fio é representado como um ponto preto na origem, e a seta de definição da corrente  $I$  é vista como a ponta de uma flecha voando na direção ao observador. Seja  $x_C(\lambda)$ ,  $y_C(\lambda)$ ,  $z_C(\lambda)$ ;  $\lambda \in [0,1]$  uma representação paramétrica da curva  $C$ . A curva é supostamente seccionalmente regular; então em intervalos  $(0, \Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , ...,  $(\Gamma_{N-1}, 1)$  as derivadas das funções  $x_C$ ,  $y_C$  e  $z_C$  existem. A integral de caminho é uma soma de integrais tomadas sobre os intervalos<sup>1</sup> de regularidade da curva :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{\Gamma_i}^{\Gamma_{i+1}} \vec{B} \cdot \hat{x} \frac{dx_C}{d\lambda} d\lambda + \int_{\Gamma_i}^{\Gamma_{i+1}} \vec{B} \cdot \hat{y} \frac{dy_C}{d\lambda} d\lambda + \int_{\Gamma_i}^{\Gamma_{i+1}} \vec{B} \cdot \hat{z} \frac{dz_C}{d\lambda} d\lambda \right\} \quad (7.4.2).$$



Sabemos que  $\vec{B}$  é ortogonal ao vetor  $\hat{z}$ , então a última integral é zero. Isto significa que podemos integrar diretamente sobre o caminho projetado no plano  $xy$ ; ou seja, todo sobe e desce do caminho não contribui para a integral.

Fig. 7.4.2 Projeção do caminho da figura 7.4.1. O ângulo  $\alpha$  deve ser pensado como variável, representando uma grandeza infinitesimal.

Consequentemente a integral se

<sup>1</sup> Usamos  $\Gamma_0 = 0$  e  $\Gamma_N = 1$ .

reduz a quatro integrais:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.4.3).$$

Os pontos A, B, C e D são aqueles indicados na figura 7.4.2. Com a fórmula (7.4.1) fica claro que as integrais de A até B e de C até D são zero, pois os deslocamentos e os vetores do campo magnético são ortogonais. Os trechos B até C e D até A são infinitesimais, e conseqüentemente podemos substituir a integração por simples multiplicações. Desta forma obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}(B) \cdot \overline{BC} + \vec{B}(A) \cdot \overline{AD} \quad (7.4.4).$$

Nesta fórmula escrevi o valor do campo magnético nos pontos A e B como  $\vec{B}(A)$  e  $\vec{B}(B)$  respectivamente. Usando a expressão explícita do campo (da fórmula (7.4.1)) e o fato de que o ângulo  $\alpha$  é infinitesimal obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \left( \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_B} \right) \cdot (r_B \alpha \hat{\phi}) + \left( \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_A} \right) \cdot (-r_A \alpha \hat{\phi}) \quad (7.4.5).$$

Percebemos que o resultado é simplesmente zero. Obviamente teríamos o mesmo resultado se permitíssemos que os vetores  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  tivessem alguma componente na direção  $\hat{z}$ , como indicado na figura 7.4.3 com um trapézio mais geral, pois esta componente não fornece nenhuma contribuição para o produto escalar com o campo magnético.

Usando a propriedade aditiva da circulação podemos generalizar este resultado para caminhos fechados arbitrários. Mas não com caminhos fechados que dão uma volta ao redor do fio. A figura 7.4.4 mostra a decomposição da projeção de um caminho fechado em trapézios. Este caminho não contorna o fio. Considerando o número de trapézios e os ângulos como variáveis, podemos usar o resultado dos trapézios infinitesimais.

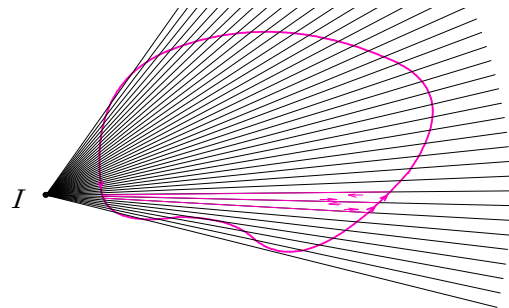


Fig. 7.4.4 Decomposição em trapézios de uma curva fechada projetada no plano  $xy$ . A soma das circulações em volta dos trapézios é a circulação total em volta da curva.

Então para qualquer caminho fechado que não contorna o fio vale  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ , já que a circulação em volta deste é a soma das circulações em volta dos trapézios que são todas nulas.

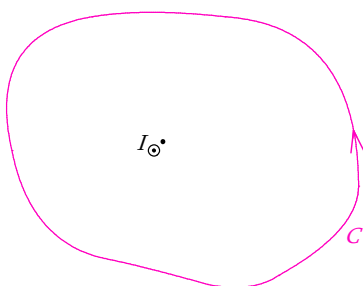
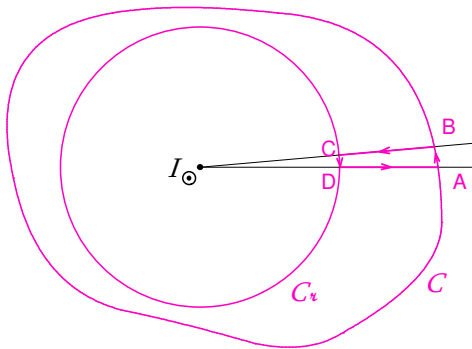


Fig. 7.4.5 Caminho que contorna o fio com corrente no sentido que forma com a seta de definição da corrente um parafuso direito.

O que acontece se o caminho contorna o fio que leva a corrente? Vamos considerar algum caminho que contorna o fio uma vez no sentido

que forma com a direção da seta da definição da corrente  $I$  um parafuso direito. De novo, qualquer descer e subir da curva na direção  $z$  não tem nenhuma importância e podemos logo pensar num caminho que fica no plano  $xy$ . A figura 7.4.5 mostra um exemplo deste tipo de caminho. De novo, o fio aparece como ponto preto com a indicação da corrente ao seu lado. Tendo em vista que o campo magnético aponta na direção  $\hat{\phi}$ , é óbvio que a circulação em volta deste tipo de caminho não será zero. Mas como podemos calcular o valor desta circulação, se a forma exata do caminho não está sequer especificada? Surpreendentemente isto é possível. Veja. A figura 7.4.6 mostra o mesmo caminho  $C$  da figura 7.3.5 no plano  $xy$  junto com um círculo  $C_\alpha$  de raio  $\alpha$  e duas retas saindo do fio de corrente também no plano  $xy$ . Considere o caminho fechado



que parte do ponto A seguindo a curva  $C$  até o ponto B e em seguida se aproxima do fio em linha reta até o ponto C, logo segue um pedaço de arco de círculo até o ponto D e finalmente retorna ao ponto A em linha reta. Este caminho não contorna o fio e conseqüentemente a circulação em volta dele é zero.

Fig. 7.4.6 Redução de um caminho que contorna o fio a um caminho circular.

Mas os trechos B até C e D até A não contribuem para a circulação, porque nestes o deslocamento é perpendicular ao campo. Então chegamos à conclusão de que a soma da integral de caminho que segue o caminho  $C$  de A até B e a integral de caminho que segue o círculo do ponto C até D é zero. Isto significa que a integral de caminho que segue o caminho  $C$  de A até B é igual a integral que segue o círculo de D até C. Podemos usar este argumento para qualquer parte do caminho  $C$ . Então podemos simplesmente substituir o caminho  $C$  pelo círculo sem alteração do valor da circulação:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.4.6).$$

Repare que as duas integrais são tomadas no mesmo sentido, o seja, na figura 7.4.6 no sentido anti-horário. Com este resultado podemos calcular a integral facilmente:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_{C_\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi \alpha} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \alpha d\phi = \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \quad (7.4.7).$$

Isto é um resultado bem simples que podemos juntar com o resultado dos caminhos que não contornam a corrente:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{se } C \text{ contorna a corrente uma vez no sentido direito} \\ 0 & \text{se } C \text{ não contorna a corrente} \end{cases} \quad (7.4.8).$$

O leitor atento deve ter percebido uma semelhança com os argumentos usados na dedução da lei de Gauss a partir da lei de Coulomb. As integrais são de dimensionalidade menor, mas os argumentos usados são muito semelhantes. Mas

infelizmente um passo que demos na lei de Gauss não pode ser copiado no caso das integrais de caminho do campo magnético. No caso da lei de Gauss generalizamos o resultado válido para o campo de uma carga pontual para uma distribuição arbitrária de cargas estacionárias com um simples argumento de linearidade. Imaginamos a distribuição arbitrária de cargas como uma que é composta de muitas cargas pontuais. O análogo disso não pode ser feito no presente caso. Não podemos pensar numa distribuição arbitrária e estacionária de corrente como uma superposição de fios retos e infinitos. Infelizmente a dedução completa da lei de Ampère não é tão intuitiva como aquela da lei de Gauss. Transferimos esta dedução para o apêndice desta seção deixando o estudo desta para os alunos mais dispostos a enfrentar matemática. Aqui, na parte principal da seção, citaremos apenas o resultado:

Lei de Ampère: A circulação do campo magnético em volta da beirada  $\partial\mathbb{S}$  de uma superfície orientável  $\mathbb{S}$  é igual à corrente  $I$  que passa pela superfície, multiplicada pela constante  $\mu_0$ . Nesta afirmação o sentido positivo da corrente é o sentido da superfície cuja orientação relativa da beirada coincide com o sentido da integração de caminho.

$$\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\mathbb{S}} \quad (7.4.9)$$

Geralmente<sup>2</sup> podemos escrever a corrente  $I_{\mathbb{S}}$ , que atravessa a superfície  $\mathbb{S}$ , com a ajuda da densidade de corrente  $\vec{j}$ :

$$\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathbb{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (7.4.10).$$

Esta afirmação é válida apenas para densidades de correntes estacionárias! Num capítulo futuro veremos qual modificação precisa ser feita nesta lei para podermos tratar também densidades de correntes que dependam do tempo.

Com a ajuda do teorema de Stokes podemos reformular a lei de Ampère de forma local. A circulação do lado esquerdo da fórmula (7.4.10) pode ser escrita como uma integral de superfície do rotacional do campo magnético:

$$\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathbb{S}} (\text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (7.4.11).$$

Então a fórmula (7.4.10) toma a forma

$$\iint_{\mathbb{S}} (\text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\mathbb{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (7.4.12).$$

Como esta igualdade deve valer para qualquer superfície orientável, podemos concluir que vale

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.4.13)$$

<sup>2</sup> Às vezes usam-se idealizações com correntes superficiais que não podem ser descritas com a ajuda de uma densidade de corrente com uma função vetorial no sentido convencional. No entanto para estes caso inventou-se também uma generalização do conceito de função que permite descrever mesmo estas situações com uma densidade de corrente.

para todos os pontos do espaço físico do referencial usado. Os argumentos que levaram da fórmula (7.4.10) até a fórmula (7.4.13) podem ser usados também na ordem inversa. Então estas fórmulas são duas formulações equivalentes da lei de Ampère. No apêndice usaremos isto e deduziremos a lei de Ampère na forma local (7.4.13) a partir da lei de Biot-Savart.

### Exercícios:

**E 7.4.1:** Um fio reto infinitamente comprido posto no eixo  $z$  de um sistema de coordenadas cartesianas leva uma corrente  $I$  fluindo no sentido positivo do eixo  $z$ . Calcule a integral de linha do campo magnético gerado por esta corrente sobre o caminho reto que começa no ponto  $A$  com coordenadas  $x_A = a$ ,  $y_A = -a$ ,  $z_A = -10a$  e que termina no ponto  $B$  com coordenadas  $x_B = a$ ,  $y_B = +a$ ,  $z_B = +20a$ . A constante  $a$  é algum valor positivo de distância.

**E 7.4.2:** Num anel circular metálico flui uma corrente estacionária  $I$ , cujo valor é desconhecido. Alguém mediu os valores do campo magnético nos pontos do eixo de simetria do anel e integrou estes valores. Se você imagina o anel no plano  $xy$  com o centro na origem de coordenadas isto seria a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}(0,0,z) \cdot \hat{z} dz \quad (7.4.14).$$

O valor da integral encontrado foi de  $(2,03 \pm 0,02) \times 10^{-6} \text{Tm}$ . Qual é o valor da corrente  $I$ ? O que aconteceria com o valor da integral se a tomarmos sobre uma outra linha reta paralela ao eixo  $z$  integrando de  $-\infty$  até  $+\infty$ ?

**E 7.4.3:** Escreva os pontos de destaque desta seção.

## 7.4 Apêndice

Seja um campo estacionário de densidade de corrente  $\vec{j}$  dado. Vamos supor que  $\vec{j}$  seja zero fora de alguma bola de raio  $R$  muito grande. Ou seja, as correntes estão limitadas a uma região finita perto da origem. Com a lei de Biot-Savart, sabemos que o campo magnético gerado por esta distribuição de corrente é

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}_l) \times (\vec{r} - \vec{r}_l)}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^{3/2}} d^3\vec{r}_l \quad (7.4.15).$$

A integral de volume se estende sobre todo o espaço físico.

Para comprovar a fórmula (7.4.13) vamos calcular o rotacional deste campo:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla_{\vec{r}} \times \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}_l) \times (\vec{r} - \vec{r}_l)}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^{3/2}} \right) d^3\vec{r}_l \quad (7.4.16)$$

Nesta fórmula escrevi o rotacional com a ajuda do operador nabla. E, como a expressão sobre a qual este operador diferencial atua depende de duas posições, a saber,  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_l$ , indiquei com um índice que a ação de derivação se refere à variável  $\vec{r}$ . Agora podemos usar a regra do bacmenoscab:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) &= \\
&= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} \right) d^3\vec{r}_I}_{\stackrel{\text{def.}}{=} \vec{\alpha}} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint (\vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} d^3\vec{r}_I}_{\stackrel{\text{def.}}{=} \vec{\beta}}
\end{aligned}
\tag{7.4.17}$$

Obtemos dois termos os quais chamei de  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$  como indicado com a chave embaixo dos termos. Vamos analisar primeiramente o segundo termo. Neste aparece uma derivada direcional que atua sobre a função vetorial  $(\vec{r} - \vec{r}_I)/|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}$ . Ela deriva em relação à variável  $\vec{r}$ . Mas, como a função depende somente da diferença  $\vec{r} - \vec{r}_I$ , cometemos somente um erro de sinal se derivarmos em relação à variável  $\vec{r}_I$ . Este erro pode ser compensado facilmente com um fator  $-1$ . Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
\vec{\beta} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint (\vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} d^3\vec{r}_I = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint (\vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \nabla_{\vec{r}_I}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} d^3\vec{r}_I
\end{aligned}
\tag{7.4.18}$$

Repare que na segunda linha o operador nabla leva o índice  $\vec{r}_I$ ! Mas  $\vec{r}_I$  é a variável de integração. Então podemos utilizar que a distribuição de correntes é zero no infinito e fazer uma integração por partes:

$$\begin{aligned}
\vec{\beta} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint (\vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \nabla_{\vec{r}_I}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} d^3\vec{r}_I = \\
&= +\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} (\nabla_{\vec{r}_I} \cdot \vec{j}(\vec{r}_I)) d^3\vec{r}_I
\end{aligned}
\tag{7.4.19}$$

Então resultou uma integral da função  $(\vec{r} - \vec{r}_I)/|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}$  multiplicada pela divergência da densidade de corrente. Espero que o leitor tenha levado meu aviso a sério de que a seção 2.2 abre muitas portas! O leitor que entendeu a história do banho matemático deve agora saber que a conservação da carga elétrica implica que a divergência da densidade de corrente num escoamento estacionário de carga é necessariamente zero. Então obtivemos o resultado que o termo  $\vec{\beta}$  vale simplesmente zero.

Resta a análise do primeiro termo da fórmula (7.4.17). Seja  $\langle \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3 \rangle$  uma base ortonormal. Nesta base, a  $k$ -ésima componente do vetor  $\vec{\alpha}$  é

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} \cdot \hat{b}_k &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint (\vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \hat{b}_k) \nabla_{\vec{r}} \cdot \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} \right) d^3\vec{r}_I = \\
&= \text{div} \left\{ \frac{1}{4\pi} \iiint (\mu_0 \vec{j}(\vec{r}_I) \cdot \hat{b}_k) \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^{3/2}} \right) d^3\vec{r}_I \right\}
\end{aligned}
\tag{7.4.20}$$

Esta divergência pode ser avaliada com as técnicas que aprendemos na seção 2.3 quando mostramos que um campo elétrico que satisfaz a lei de Coulomb também satisfaz a lei de Gauss. Naquela seção mostramos que um campo elétrico  $\vec{E}$  que se relaciona com uma densidade de carga  $\rho$  através da lei de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}_q) \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} d^3r_q \quad (7.4.21)$$

satisfaz a lei de Gauss

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (7.4.22)$$

Mas esta demonstração não depende de forma alguma do fato de que  $\vec{E}$  é um campo elétrico e de que  $\rho/\epsilon_0$  é uma densidade de carga dividida pela constante  $\epsilon_0$ . Podemos considerar tudo aquilo que está explicado na seção 2.3 como uma demonstração da seguinte fórmula:

$$f(\vec{r}) = \text{div} \left\{ \frac{1}{4\pi} \iiint f(\vec{r}_l) \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^{3/2}} \right) d^3\vec{r}_l \right\} \quad (7.4.23),$$

válida para qualquer função contínua  $f(\cdot)$  definida no espaço físico. Então podemos aplicar especialmente este teorema para a função  $f(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \cdot \hat{b}_k$ . Então segue

$$\vec{\alpha} \cdot \hat{b}_k = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \cdot \hat{b}_k \quad (7.4.24)$$

Isto vale para todos os valores de  $k$ ;  $k = 1, 2$  ou  $3$ . Então vale  $\vec{\alpha} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$ . Como o segundo termo da fórmula (7.4.17) era zero, temos o resultado desejado:

$$\boxed{\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})} \quad (7.4.25)$$

Aplicando ainda o teorema de Stokes, obtemos

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}} \quad (7.4.26)$$