

### 7.3 Revisão do teorema de Stokes

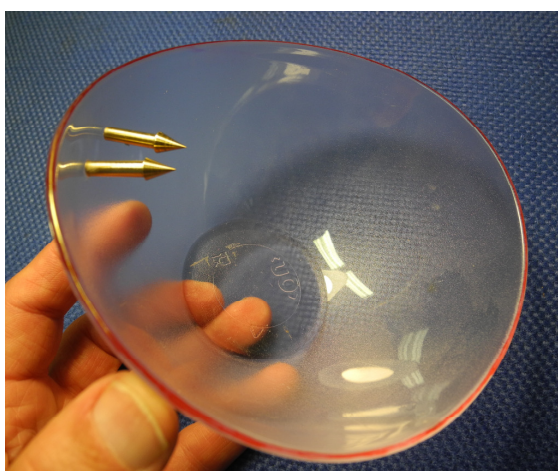
(Esta seção é prevista para o estudo individual do aluno, e não para a aula)

Integrais de linha calculadas sobre caminhos fechados que formam beiradas de superfícies orientáveis serão de suma importância na compreensão das leis que governam o campo magnético. Então vamos investigar este tipo de integral mais detalhadamente.

Já mencionamos superfícies orientáveis na seção 3.1 e vimos um exemplo de uma superfície não orientável. Devemos explicar esta noção mais detalhadamente. Imagine uma superfície regular ou suave no espaço físico do referencial do laboratório. Definiremos a noção de superfície regular de maneira formal no apêndice A desta seção. Aqui basta uma ideia intuitiva de uma superfície sem “bicos” que permite definir um plano tangente em todos os seus pontos. A figura 7.3.1 fornece um exemplo de tal tipo de superfície.

Em algum ponto  $P_1$  desta superfície escolhemos um vetor normalizado  $\hat{n}_{P_1}$  que seja ortogonal ao plano tangente neste ponto. Falei escolher. Pois existem dois vetores deste tipo, um de cada lado da superfície. Os dois diferem por um sinal.

Fig. 7.3.1 Superfície orientável com dois vetores de orientação. A superfície é fisicamente realizada pela interface acrílico-ar de uma tigela. Esta superfície é delimitada por uma marca vermelha na beirada da tigela. Os dois vetores de orientação, realizados com peças torneadas de latão, apontam quase na mesma direção devido à proximidade dos lugares onde eles foram colados e pela suavidade da superfície.



Agora imagine que queiramos escolher também um destes vetores num ponto vizinho  $P_2$  muito próximo do primeiro ponto. De novo teremos duas opções. Mas, depois da escolha no ponto  $P_1$ , uma das opções é agora mais natural que a outra. Pois devido ao fato de que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são próximos e de que a superfície é suave, os planos tangentes nestes pontos terão quase a mesma orientação no espaço. Consequentemente uma das opções no ponto  $P_2$  fornece um vetor  $\hat{n}_{P_2}$  que difere

do vetor  $\hat{n}_{P_1}$  muito pouco, enquanto a outra opção corresponde a um vetor que difere do vizinho  $\hat{n}_{P_1}$  drasticamente. A escolha sem mudança drástica é a mais natural.

Desta forma podemos tentar cobrir toda a superfície com vetores unitários  $\hat{n}_p$ , todos perpendiculares aos seus respectivos planos tangentes e de tal forma que a associação de pontos com vetores  $P \mapsto \hat{n}_p$  defina uma função contínua na superfície. Se isto for possível, chamaremos a superfície de *orientável* e chamaremos uma escolha entre as duas opções de uma *orientação da superfície*. O exemplo da fita de Möbius mostra que nem toda superfície é orientável. Na figura 3.1.1 as duas opções são marcadas com duas cores, um lado azul e o outro preto. Como podemos ver na figura 3.1.1, há uma descontinuidade na coloração e não é possível pintar os dois lados opostos com duas cores diferentes sem criar alguma descontinuidade.

Caso a superfície  $S$  tenha uma beirada  $\partial S$ , a orientação da superfície permite definir uma orientação da beirada relativa à orientação da superfície. Vamos definir esta orientação relativa da seguinte maneira: imagine uma pequena roda dentada rodando num ponto  $P_B$  perto da beirada da superfície com uma velocidade angular  $\vec{\omega}$  que aponta na mesma direção e no mesmo sentido do vetor de orientação  $\hat{n}_{P_B}$ . E vamos imaginar que na beirada  $\partial S$  exista um cordão de pérolas que pode deslizar ao longo da beirada. Os dentes da roda dentada encaixam nos espaços entre as pérolas e a roda moverá o cordão. O sentido deste movimento será a orientação relativa da beirada da superfície. A figura 7.3.2 mostra este arranjo.

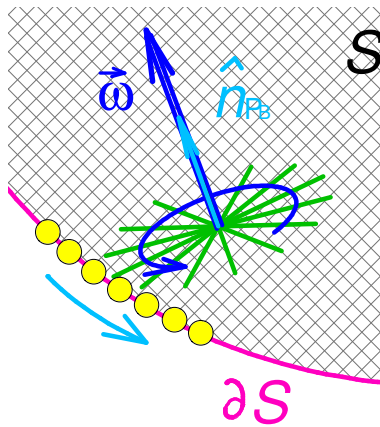


Fig. 7.3.2 Roda dentada imaginada perto da beirada  $\partial S$  de uma superfície orientável  $S$ . A roda gira com uma velocidade angular cujo pseudovetor aponta na direção e no sentido do vetor de orientação da superfície no lugar da roda. A roda move um cordão de pérolas na beirada  $\partial S$  e define com isto uma orientação da beirada.

Nas considerações subsequentes, interessam superfícies orientáveis que possuem uma beirada em forma de curva fechada. Seja  $S$  uma superfície deste tipo e seja  $\vec{V}$  algum campo vetorial diferenciável definido no espaço físico  $\mathbb{E}$  do referencial do laboratório. O objeto do nosso interesse é a integral de linha

$$\oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.3.1).$$

Esta grandeza é também chamada de *circulação do campo  $\vec{V}$  em volta da curva  $\partial S$* . Podemos imaginar que andemos de um ponto  $P_0$  da beirada  $\partial S$ , indo no sentido da orientação da beirada até um ponto vizinho  $P_1$ , igualmente na beirada  $\partial S$ , e que multipliquemos o vetor deslocamento  $\overline{P_0P_1}$  escalarmente pelo vetor  $\vec{V}(P_0)$ . Anotamos o resultado desta multiplicação. Depois seguimos com o mesmo procedimento até um ponto  $P_2$ , e depois para  $P_3$  etc. até percorrer toda a beirada, voltando ao ponto inicial. Feito isto somamos todos os produtos

$$\vec{V}(P_0) \cdot \overline{P_0P_1} + \vec{V}(P_1) \cdot \overline{P_1P_2} + \dots + \vec{V}(P_N) \cdot \overline{P_NP_0} \quad (7.3.2).$$

Esta soma é uma aproximação da integral (7.3.1). Repetindo este procedimento com deslocamentos cada vez menores e em maior número, obtemos a integral  $\oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  no limite com  $N \rightarrow \infty$  e  $\max_i \{|\overline{P_iP_{i+1}}|\} \rightarrow 0$ .

Podemos expressar esta integral também como uma integral comum com a ajuda de uma descrição paramétrica da curva  $\partial S$ . Seja  $\vec{r}_{\partial S}(\cdot): [0,1] \rightarrow \partial S$  uma função diferenciável com  $\vec{r}_{\partial S}(0) = \vec{r}_{\partial S}(1)$  que percorre toda a beirada de tal forma que a derivada  $d\vec{r}_{\partial S}(\lambda)/d\lambda$  aponte no sentido da orientação da beirada  $\partial S$  para todo

$\lambda \in [0,1]$ . Com tal função podemos escrever a integral (7.3.1) como uma integral comum:

$$\oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \vec{V}(\vec{r}_{\partial S}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad (7.3.3).$$

Naturalmente pode-se usar também um outro intervalo  $[a, b]$  para o parâmetro de curva e neste caso a integral se estende de  $a$  até  $b$ . E também é obvio como se pode generalizar esta representação da integral de linha por integrais comuns para curvas que são apenas seccionalmente regulares. Neste caso tem-se que somar várias integrais comuns que tomam conta dos diversos pedaços regulares da curva.

A circulação de um campo vetorial tem uma propriedade em comum com a quantidade de fonte de um campo vetorial. Na seção 2.2 vimos que a quantidade de fonte é aditiva. Expressamos isto com a fórmula (2.2.18), a qual eu repito aqui:

$$\text{para } V = V_1 \cup V_2 \text{ com } V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ vale } \iiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\partial V_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\partial V_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (7.3.4).$$

De forma semelhante, a circulação tem uma propriedade aditiva. Imagine que dividimos uma superfície orientável  $S$  em duas partes  $S_1$  e  $S_2$ , como indicado na figura 7.3.3.

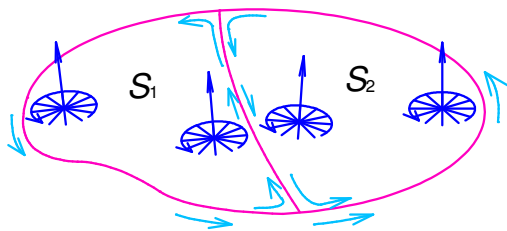


Fig. 7.3.3 Uma superfície orientada  $S$  dividida em duas partes  $S_1$  e  $S_2$ .

Percebemos que as beiradas  $\partial S_1$  e  $\partial S_2$  possuem uma parte comum que não faz parte da beirada  $\partial S$ . Por outro lado as partes de  $\partial S_1$  e de  $\partial S_2$  que não são comuns constituem toda a beirada  $\partial S$ .

Percebemos ainda que a parte comum é percorrida na soma das integrais  $\oint_{\partial S_1} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{\partial S_2} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  duas vezes e em sentidos contrários de tal forma que esta parcela se cancela na soma. Consequentemente vale

$$\oint_{\partial S_1} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{\partial S_2} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.3.5).$$

No caso da quantidade de fonte tomamos a propriedade aditiva como motivo para definir uma densidade. Podemos tentar algo análogo no caso da circulação. Mas, no caso da circulação, esta densidade é uma densidade superficial e a circulação depende certamente também da orientação da superfície no espaço. Na seção 2.1 pedi para se estudar a seção subsequente com especial atenção, pois esta iria abrir muitas portas. Naquela seção 2.2 vimos que tal tipo de densidade tem que ser um vetor. Então a densidade superficial de circulação deve ser um vetor (também poderia ser um pseudovetor). Esta densidade superficial da circulação é chamada de rotacional e é escrita como  $\text{rot} \vec{V}$ . Mas podemos esperar uma dependência linear entre circulação e vetor superfície somente para superfícies infinitesimais. Então esperamos poder contar com uma fórmula do seguinte tipo:

$$\text{para } S \text{ infinitesimal: } \oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = (\text{rot} \vec{V}) \cdot \vec{S} \quad (7.3.6).$$

Os detalhes desta afirmação não são triviais. Para começar, não é nada óbvio que a circulação  $\oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  em volta da beirada de uma superfície infinitesimal  $S$  seja uma função do vetor superfície  $\vec{S}$ . E em segundo lugar, não é trivial que esta função seja linear. Elucidamos estes detalhes no apêndice B desta seção. Aqui vamos simplesmente assumir que estas afirmações sejam verdadeiras.

A partir da relação linear (7.3.6) válida localmente para pedaços infinitesimais de superfície, podemos compor a circulação em volta da beirada de uma superfície grande integrando a densidade. Esta recomposição da circulação grande a partir de pedaços infinitesimais usa a propriedade aditiva da circulação.

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\text{rot } \vec{V}) \cdot d\vec{S}} \quad (7.3.7)$$

Nesta fórmula e na (7.3.6) é essencial que as orientações da superfície e da sua beirada sejam relacionadas. A relação destas orientações será sempre aquela descrita no início desta seção.

Com uma representação explícita da densidade de circulação, ou seja, com o rotacional, a fórmula (7.3.7) constitui o teorema de Stokes. Como o teorema de Gauss, ele expressa uma integral de dimensionalidade  $N$  por uma de dimensionalidade  $N-1$ . No caso de Gauss temos  $N=3$  e no caso de Stokes  $N=2$ . O teorema fundamental do cálculo integral também entra nesta classe de teoremas, no caso, com  $N=1$ .

Na seção 2.2 calculamos a divergência de um campo vetorial em coordenadas cartesianas. O leitor deve agora tentar usar ideias análogas para calcular o rotacional em coordenadas cartesianas, ou seja, mostrar que

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} \quad (7.3.8).$$

Na seção 3.1 prometemos dar a oportunidade de “reinventar” o teorema de Stokes. Pois aqui fornecemos as dicas para reinventá-lo.

### Exercícios:

**E 7.3.1:** Calcule a circulação de um campo vetorial  $\vec{V}$  diferenciável em volta de um retângulo no plano  $xy$  com lados infinitesimais  $\delta$  (na direção  $x$ ) e  $\epsilon$  (na direção  $y$ ) desprezando termos superiores aos termos da ordem  $\delta^1 \epsilon^1$ . Depois divida o seu resultado pela área do retângulo para obter uma densidade de circulação.

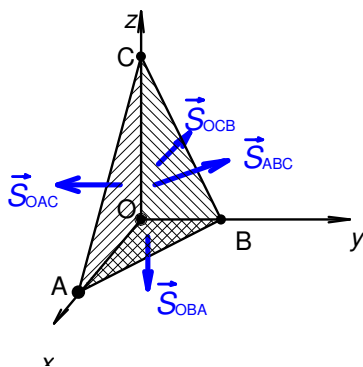


Fig. 7.3.4 Decomposição de uma superfície triangular em componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**E 7.3.2:** A figura 7.3.4 mostra quatro superfícies triangulares que juntas formam uma superfície fechada. Vamos orientar estas quatro superfícies de tal forma que os vetores superfície apontem todos para fora do volume que é embrulhado por esta superfície fechada. **(A)** determine as orientações relativas das beiradas dos quatro triângulos. **(B)** Mostre que a soma das quatro circulações de um campo vetorial qualquer resultam em zero. **(C)** Mostre que a soma dos quatro vetores superfície dos quatro triângulos resulta em zero.

Comentário: O fato que deve ser mostrado no item (C) significa que  $-\hat{x} \cdot \vec{S}_{OCB}$  é a componente  $x$  do vetor  $\vec{S}_{ABC}$ , que  $-\hat{y} \cdot \vec{S}_{OAC}$  é a componente  $y$  do vetor  $\vec{S}_{ABC}$  e que  $-\hat{z} \cdot \vec{S}_{OBA}$  é sua componente  $z$ . Então podemos decompor uma superfície como um vetor em componentes e a componente é a projeção ortogonal de sombra no plano de coordenadas perpendicular ao correspondente eixo de coordenadas. O item (B) significa que podemos compor a circulação a partir das circulações das componentes.

**E 7.3.3:** Um ponto **A** tem as coordenadas esféricas  $\langle r, \theta, \varphi \rangle$  como indicado na figura 7.3.5. A partir do ponto **A** faremos três passeios infinitesimais:

(1) De **A** até o ponto **B** com coordenadas  $\langle r + \delta, \theta, \varphi \rangle$ . Depois vamos até o ponto **C** com coordenadas  $\langle r + \delta, \theta + \varepsilon, \varphi \rangle$ , depois para **D** com  $\langle r, \theta + \varepsilon, \varphi \rangle$  e finalmente voltamos para **A**.

(2) De **A** até o ponto **F** com coordenadas  $\langle r, \theta, \varphi + \zeta \rangle$ . Depois vamos até o ponto **G** com coordenadas  $\langle r + \delta, \theta, \varphi + \zeta \rangle$ , depois para **B** com  $\langle r + \delta, \theta, \varphi \rangle$  e finalmente voltamos para **A**.

(3) De **A** até o ponto **D** com coordenadas  $\langle r, \theta + \varepsilon, \varphi \rangle$ . Depois vamos até o ponto **E** com coordenadas  $\langle r, \theta + \varepsilon, \varphi + \zeta \rangle$ , depois para **F** com  $\langle r, \theta, \varphi + \zeta \rangle$  e finalmente voltamos para **A**.

Calcule a circulação de um campo vetorial  $\vec{V}$  diferenciável em volta dos três trajetos fechados. No trajeto (1) despreze termos de ordem superior à ordem  $\delta^1 \varepsilon^1$ . No trajeto (2) despreze termos de ordem superior à ordem  $\delta^1 \zeta^1$ . No trajeto (3) despreze termos de ordem superior à ordem  $\varepsilon^1 \zeta^1$ . Divida as circulações pelas áreas envolvidas nos trajetos para obter três densidades de circulação. Use os resultados para escrever o rotacional do campo em coordenadas esféricas.

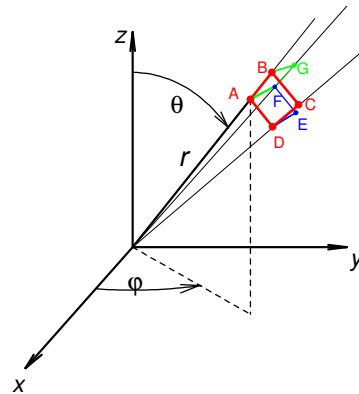


Fig. 7.3.5 Ilustração para a determinação geométrica do rotacional em coordenadas esféricas.

## Apêndice A

Uma superfície regular num espaço tridimensional euclidiano  $\mathbb{E}$  é um subconjunto deste espaço que se parece em todos os pontos localmente com um espaço bidimensional euclidiano. Os matemáticos descrevem esta ideia da seguinte forma:

Uma superfície regular  $S$  dentro de um espaço tridimensional euclidiano  $\mathbb{E}$  é um subconjunto de  $\mathbb{E}$  com as seguintes propriedades:

para cada  $P \in S$  existem os seguintes itens:

- (1) uma vizinhança  $V$  de  $P$  em  $\mathbb{E}$ ,
- (2) um conjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,
- (3) uma função bijetora contínua  $f : A \rightarrow S \cap V$ , cuja inversa é também contínua, que é continuamente diferenciável e cuja diferencial  $df(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  é injectiva para todos os  $p \in A$ .

Este tipo de conjunto não tem beirada. Para poder incluir beiradas podemos acrescentar ao conjunto  $S$  seus pontos de acumulação. Lembramos que um ponto  $P \in \mathbb{E}$  é chamado de ponto de acumulação de um conjunto  $S$  se e somente se para toda bola  $B_\varepsilon(P)$  de raio  $\varepsilon > 0$  e centro  $P$  a intersecção  $S \cap B_\varepsilon(P)$  estiver não vazia. Vamos chamar o conjunto que resulta de  $S$  acrescentando todos os pontos de acúmulo de *fecho de  $S$*  e vamos escrevê-lo como  $\bar{S}$ . Nas aplicações, usaremos somente superfícies para as quais o conjunto  $\bar{S} \setminus S$ , ou seja, o conjunto dos pontos de acúmulo que não estão em  $S$  forma uma única curva fechada seccionalmente regular. Neste caso, o conjunto  $\bar{S} \setminus S$  é a beirada  $\partial S$  da superfície.

### 7.3 Apêndice B

Afirmamos que a circulação em volta da beirada de uma superfície infinitesimal é uma função do vetor superfície. O que significa esta afirmação? Poder-se-ia imaginar que duas superfícies no mesmo lugar que possuem o mesmo vetor superfície  $\vec{S}$ , mas que diferem na sua forma, resultem em valores diferentes de circulação. Se fosse assim, a circulação não seria uma função do vetor  $\vec{S}$ .

Na investigação desta questão há um pequeno problema: a afirmação vale apenas para superfícies infinitesimais. Mas uma superfície infinitesimal não é, na verdade, uma única superfície, mas é um conjunto infinito de superfícies. Quando falamos que para um valor  $\varepsilon$  infinitesimal e para uma função  $f$  diferenciável vale

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = f'(x)\varepsilon \quad (7.3.9),$$

queremos dizer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x) - f'(x)\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \quad (7.3.10).$$

Então um “valor  $\varepsilon$  infinitesimal” é, na verdade, um conjunto de valores, pois  $\varepsilon$  precisa poder variar para podermos tomar um limite. No caso de uma superfície infinitesimal este fato dificulta a tarefa de falar da forma da superfície. O que significa a

forma de uma superfície infinitesimal se esta consiste em um número infinito de diferentes superfícies?

Antes de enfrentar esta questão na forma mais geral, investigaremos superfícies retangulares. Consideramos um conjunto de retângulos, todos contendo um mesmo ponto P como um dos vértices, todos com a mesma orientação no espaço e todos com as arestas paralelas, como mostra a figura 7.3.6

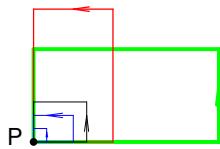


Fig. 7.3.6 Coleção de retângulos com um vértice comum e com arestas paralelas.

Podemos definir um sistema de coordenadas cartesianas que tem o ponto P como origem e podemos orientá-lo no espaço de tal forma que o lado de qualquer um dos retângulos que sai

da origem (no sentido da orientação da beirada) fica no lado positivo do eixo x e o lado do retângulo que volta para o ponto P fica no lado positivo do eixo y, como mostra a figura 7.3.7 para um retângulo com lados de comprimentos  $d_{PA} = \delta$  e  $d_{CP} = \epsilon$ .

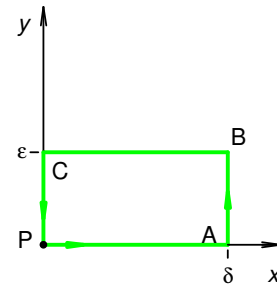


Fig. 7.3.7 Um dos retângulos da coleção da figura 7.3.6 junto com um sistema de coordenadas.

O significado do adjetivo “infinitesimal” do  $\epsilon$  na fórmula (7.3.9) expressa a convenção de desconsiderar erros de ordem superior à ordem  $\epsilon^1$ . Nas superfícies das figuras 7.3.6 e 7.3.7, infinitesimal significa que devemos desconsiderar erros da ordem superior à ordem  $\delta^1$  e também erros da ordem superior à ordem  $\epsilon^1$ . Termos de ordem  $\delta^1 \epsilon^1$  são mantidos. Como veremos logo, a circulação de um campo vetorial  $\vec{V}$  diferenciável em volta destes retângulos não tem termos de ordem  $\delta^0 \epsilon^0$ , nem de ordem  $\delta^1 \epsilon^0$  e nem de ordem  $\delta^0 \epsilon^1$ . Então o primeiro e único termo que teremos que considerar é da ordem  $\delta^1 \epsilon^1$ .

Então vamos avaliar esta circulação para algum campo vetorial  $\vec{V}$ . Ela é a soma de quatro integrais de linha sobre os quatro lados do retângulo:

$$\oint_{\text{retângulo}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^P \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.3.11)$$

Analisaremos primeiramente a integral de linha de P até A. De acordo com o teorema do valor médio do cálculo integral, há algum ponto intermediário no segmento de reta P-A com coordenadas  $x_{P-A} \in [0, \delta]$ ,  $y_{P-A} = z_{P-A} = 0$  tal que

$$\int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \overline{PA} \cdot \vec{V}(x_{P-A}, 0, 0) \quad (7.3.12).$$

O módulo do vetor  $\overline{PA}$  vale  $|\delta|$ . Consequentemente esta integral é de ordem  $\delta^1$ . A diferença entre  $\vec{V}(x_{P-A}, 0, 0)$  e  $\vec{V}(0, 0, 0)$  também é de ordem  $\delta^1$ . Então cometemos somente um erro de ordem  $\delta^2$  quando usarmos o valor  $\vec{V}(0, 0, 0)$  no lugar de  $\vec{V}(x_{P-A}, 0, 0)$  na fórmula (7.3.12). Com  $\delta$  infinitesimal, temos o direito de escrever



$$\int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \overline{PA} \cdot \vec{V}(0,0,0) \quad (\delta \text{ infinitesimal}) \quad (7.3.13).$$

Isto é

$$\int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = V_x(0,0,0) \delta \quad (\delta \text{ infinitesimal}) \quad (7.3.14).$$

Em seguida investigamos a integral  $\int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$ . De novo, podemos usar o teorema do valor médio. Existe algum ponto no segmento de reta entre o ponto B e C com coordenadas  $x_{B-C} \in [0, \delta]$ ,  $y_{B-C} = \varepsilon$ ,  $z_{B-C} = 0$  tal que

$$\int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \overline{BC} \cdot \vec{V}(x_{B-C}, \varepsilon, 0) \quad (7.3.15).$$

O vetor  $\overline{BC}$  tem o módulo de ordem  $\delta^1$  e  $\vec{V}(x_{B-C}, \varepsilon, 0)$  difere de  $\vec{V}(0, \varepsilon, 0)$  por um vetor também de ordem  $\delta^1$ . Então cometemos somente um erro de ordem  $\delta^2$  se substituirmos  $\vec{V}(x_{B-C}, \varepsilon, 0)$  por  $\vec{V}(0, \varepsilon, 0)$  na integral (7.3.15):

$$\int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \overline{BC} \cdot \vec{V}(0, \varepsilon, 0) \quad (\delta \text{ infinitesimal}) \quad (7.3.16).$$

Isto pode ser escrito na forma

$$\int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = -V_x(0, \varepsilon, 0) \delta \quad (\delta \text{ infinitesimal}) \quad (7.3.17).$$

Agora vamos juntar as integrais  $\int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  e  $\int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$ :

$$\int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \{V_x(0,0,0) - V_x(0, \varepsilon, 0)\} \delta \quad (\delta \text{ infinitesimal}) \quad (7.3.18)$$

Mas a diferença  $V_x(0,0,0) - V_x(0, \varepsilon, 0)$  difere da expressão  $-\varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{x=0, y=0, z=0}$  apenas

por um erro de ordem superior à ordem  $\varepsilon^1$ . Então para  $\varepsilon$  infinitesimal temos o direito de escrever

$$\int_P^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = -\varepsilon \delta \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{x=0, y=0, z=0} \quad (\varepsilon \text{ e } \delta \text{ infinitesimais}) \quad (7.3.19).$$

Analogamente podemos proceder com as integrais  $\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  e  $\int_C^P \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  e o resultado é

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^P \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \delta \varepsilon \frac{\partial V_y}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0, z=0} \quad (\varepsilon \text{ e } \delta \text{ infinitesimais}) \quad (7.3.20).$$

Juntando este resultado com o (7.3.19), obtemos para a circulação



$$\oint_{\text{retângulo}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon \delta \left\{ \left. \frac{\partial V_y}{\partial x} \right|_{x=0, y=0, z=0} - \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{x=0, y=0, z=0} \right\} \quad (\varepsilon \text{ e } \delta \text{ infinitesimais})$$

(7.3.21)

Então esta circulação depende somente da área do retângulo, isto é do produto  $\varepsilon \delta$ , e não da razão de aspecto do retângulo.

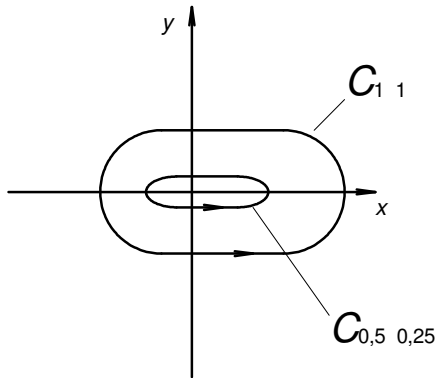


Fig. 7.3.8 Redução dimensional de uma curva fechada no plano  $xy$  com fatores 0,5 e 0,25 nas respectivas direção  $x$  e  $y$ .

Para figuras geométricas mais gerais, a questão levantada no início deste apêndice é mais complexa. Para não ter que enfrentar uma variedade inextricável de possíveis situações, vamos nos lembrar que estas superfícies infinitesimais serão no fim das contas usadas para integrais sobre superfícies regulares. Então vamos apenas considerar a

seguinte situação: Imagine um ponto  $P$  numa superfície regular e orientável  $S$ . Esta é uma superfície fixa (grande – não infinitesimal). A superfície infinitesimal  $S_{\delta\varepsilon}$  (que consiste na verdade de um conjunto de superfícies) que investigaremos será construída da seguinte forma: Escolhemos um sistema de coordenadas cartesianas que tenha o ponto  $P$  como origem, e cujo eixo  $z$  aponta na direção e no sentido do vetor de orientação  $\hat{n}_p$ . Então o plano  $xy$  forma o plano tangente da superfície  $S$  no ponto  $P$ . Consideremos agora uma curva fechada  $C_{11}$  seccionalmente regular no plano  $xy$  que dá uma volta em torno da origem circulando no sentido matemático positivo, ou seja, de forma tal que o percurso forme um parafuso direito com o eixo  $z$ . Seja  $\langle x_{11}(\lambda), y_{11}(\lambda) \rangle$  uma representação paramétrica desta curva. Agora sejam  $\delta$  e  $\varepsilon$  dois parâmetros infinitesimais. Com estes definimos uma curva  $C_{\delta\varepsilon}$  no plano  $xy$  cuja representação paramétrica é dada por  $x_{\delta\varepsilon}(\lambda) = \delta x_{11}(\lambda)$ ,  $y_{\delta\varepsilon}(\lambda) = \varepsilon y_{11}(\lambda)$ . Ou

seja, a curva  $C_{\delta\varepsilon}$  foi obtida da  $C_{11}$  encolhendo a última por um fator  $\delta$  na direção  $x$  e por um fator  $\varepsilon$  na direção  $y$ . A figura 7.3.8 fornece um exemplo deste tipo de encolhimento.

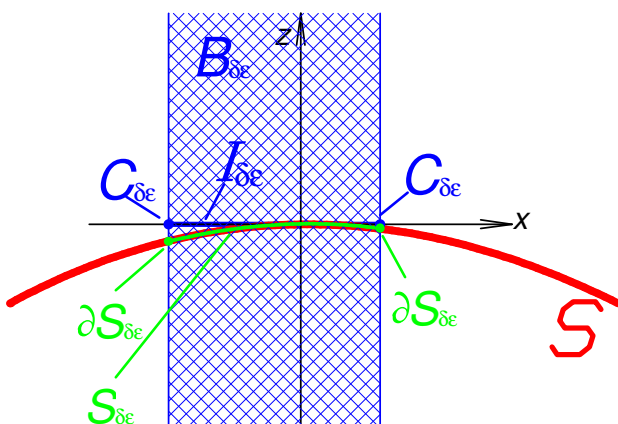


Fig. 7.3.9 Construção de uma superfície infinitesimal  $S_{\delta\varepsilon}$  numa superfície  $S$  através de uma superfície infinitesimal  $I_{\delta\varepsilon}$  no plano tangente.

A curva  $C_{\delta\varepsilon}$  divide o plano  $xy$  numa região interna da curva  $I_{\delta\varepsilon}$  e uma externa. Os pontos no espaço físico que têm coordenadas  $x$  e  $y$  de pontos da parte interna da curva  $C_{\delta\varepsilon}$  e valores arbitrários de  $z$  formam um bastão  $B_{\delta\varepsilon}$ . A superfície infinitesimal que consideraremos será a intersecção da superfície  $S$  com este bastão  $B_{\delta\varepsilon}$ . A figura 7.3.9 ilustra esta construção com um corte no plano  $xz$ . Os valores da

coordenada  $z$  dos pontos da beirada  $\partial S_{\delta\epsilon}$  são pequenos de ordem superior à ordem  $\delta^1$  e  $\epsilon^1$ . Como a circulação em volta da curva  $\partial S_{\delta\epsilon}$  já é da ordem  $\delta^1\epsilon^1$  podemos tranquilamente substituir a curva  $\partial S_{\delta\epsilon}$  pela curva  $C_{\delta\epsilon}$  no cálculo da circulação: então vale

$$\text{para } \delta \text{ e } \epsilon \text{ infinitesimais: } \oint_{\partial S_{\delta\epsilon}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_{\delta\epsilon}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.3.22).$$

Além disso, nos pontos destas curvas os valores do campo  $\vec{V}$  diferem do campo

$$\begin{aligned} \vec{W}(x, y, z) = & \vec{V}(0,0,0) + \hat{x} \left\{ \frac{\partial V_x}{\partial x} x + \frac{\partial V_x}{\partial y} y + \frac{\partial V_x}{\partial z} z \right\} + \\ & + \hat{y} \left\{ \frac{\partial V_y}{\partial x} x + \frac{\partial V_y}{\partial y} y + \frac{\partial V_y}{\partial z} z \right\} + \\ & + \hat{z} \left\{ \frac{\partial V_z}{\partial x} x + \frac{\partial V_z}{\partial y} y + \frac{\partial V_z}{\partial z} z \right\} \end{aligned} \quad (7.3.23).$$

apenas em termos superiores à ordem  $\delta^1$  ou  $\epsilon^1$ . Na fórmula (7.3.23) todas as derivadas são calculadas no ponto  $P$ , ou seja, na origem de coordenadas. Então podemos substituir este campo no lugar do campo  $\vec{V}$ . A forma de escrever o campo  $\vec{W}$  não é muito elegante. Vamos escrevê-lo com outros símbolos. Vamos chamar as coordenadas  $x, y$  e  $z$  por outros nomes:  $x = u_1, y = u_2$  e  $z = u_3$ , e correspondentemente  $\hat{x} = \hat{u}_1, \hat{y} = \hat{u}_2$  e  $\hat{z} = \hat{u}_3$ . Com este uso de índices podemos transformar a fórmula (7.3.23) numa bem compacta:

$$\vec{W}(x, y, z) = \vec{V}(0,0,0) + \sum_{i,j=1}^3 \hat{u}_i A_{ij} u_j \quad (7.3.24).$$

Nesta fórmula os  $A_{ij}$  são as derivadas

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial V_i}{\partial u_j} \right|_{u_1=u_2=u_3=0} \quad (7.3.25).$$

Agora vamos imaginar que descrevemos a curva  $C_{\delta\epsilon}$  de forma paramétrica com funções  $u_{C_{\delta\epsilon}1}(\lambda), u_{C_{\delta\epsilon}2}(\lambda)$  com  $u_{C_{\delta\epsilon}1}(0) = u_{C_{\delta\epsilon}1}(1)$  e  $u_{C_{\delta\epsilon}2}(0) = u_{C_{\delta\epsilon}2}(1)$  e trivialmente  $u_{C_{\delta\epsilon}3}(\lambda) = 0$ . O termo  $\vec{V}(0,0,0)$  não contribui para a circulação. Então temos

$$\text{para } \delta \text{ e } \epsilon \text{ infinitesimais: } \oint_{\partial S_{\delta\epsilon}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^2 \frac{du_{C_{\delta\epsilon}i}}{d\lambda} A_{ij} u_{C_{\delta\epsilon}j} d\lambda \quad (7.3.26).$$

Como a integração é uma operação linear, temos

$$\text{para } \delta \text{ e } \epsilon \text{ infinitesimais: } \oint_{\partial S_{\delta\epsilon}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \int_0^1 \frac{du_{C_{\delta\epsilon}i}}{d\lambda} u_{C_{\delta\epsilon}j} d\lambda \quad (7.3.27).$$

Com integração por partes segue imediatamente que a matriz

$$M_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 \frac{du_{C_{\delta\epsilon}^i}}{d\lambda} u_{C_{\delta\epsilon}^j} d\lambda \quad (7.3.28)$$

é antissimétrica;  $M_{ij} = -M_{ji}$ . Consequentemente somente a parte antissimétrica na matriz  $A_{ij}$  contribui. Então vale

$$\delta \text{ e } \epsilon \text{ infinitesimais: } \oint_{\partial S_{\delta\epsilon}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (A_{ij} - A_{ji}) \int_0^1 \frac{du_{C_{\delta\epsilon}^i}}{d\lambda} u_{C_{\delta\epsilon}^j} d\lambda \quad (7.3.29).$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (A_{ij} - A_{ji}) \int_0^1 \frac{du_{C_{\delta\epsilon}^i}}{d\lambda} u_{C_{\delta\epsilon}^j} d\lambda &= \frac{1}{2} (A_{12} - A_{21}) M_{12} + \frac{1}{2} (A_{21} - A_{12}) M_{21} \\ &= \frac{1}{2} (A_{21} - A_{12}) (M_{21} - M_{12}) = \\ &= (A_{21} - A_{12}) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \frac{du_{C_{\delta\epsilon}^2}}{d\lambda} u_{C_{\delta\epsilon}^1} - \frac{1}{2} \frac{du_{C_{\delta\epsilon}^1}}{d\lambda} u_{C_{\delta\epsilon}^2} \right] d\lambda \end{aligned} \quad (7.3.30).$$

O integrando da última integral é justamente a componente 3 (componente  $z$ ) do pseudovetor  $\frac{1}{2} \vec{r}_{C_{\delta\epsilon}} \times \frac{d\vec{r}_{C_{\delta\epsilon}}}{d\lambda}$ . Aliás, a componente 3 é a única componente que este pseudovetor tem. Se avançarmos no processo de integração por um valor infinitesimal  $\mu$ , indo de  $\lambda$  para  $\lambda + \mu$ , a componente 3 deste pseudovetor multiplicado por  $\mu$  descreve a área do triângulo infinitesimal formado pelo vetor posição  $\vec{r}_{C_{\delta\epsilon}}(\lambda)$ , pelo

vetor infinitesimal de avanço  $\vec{r}_{C_{\delta\epsilon}}(\lambda + \mu) - \vec{r}_{C_{\delta\epsilon}}(\lambda)$  e pelo novo vetor posição  $\vec{r}_{C_{\delta\epsilon}}(\lambda + \mu)$ .

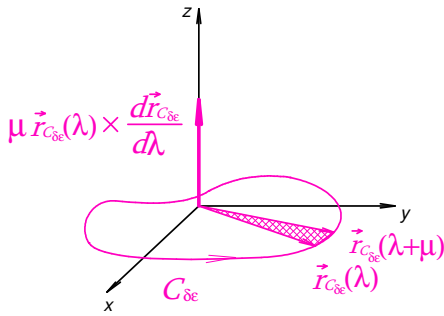


Fig. 7.3.10 A interpretação geométrica do integrando da fórmula (7.3.30).

A figura 7.3.10 mostra isto. Então a integral na última linha da fórmula (7.3.30) é a componente 3 do vetor superfície da superfície  $I_{\delta\epsilon}$ . Considerando que os valores das coordenadas  $z$  dos pontos da curva  $\partial S_{\delta\epsilon}$  são pequenos de ordem superior ao  $\delta^1$

e  $\epsilon^1$  podemos declarar este vetor como vetor superfície da superfície  $S_{\delta\epsilon}$ . Então chegamos ao resultado que

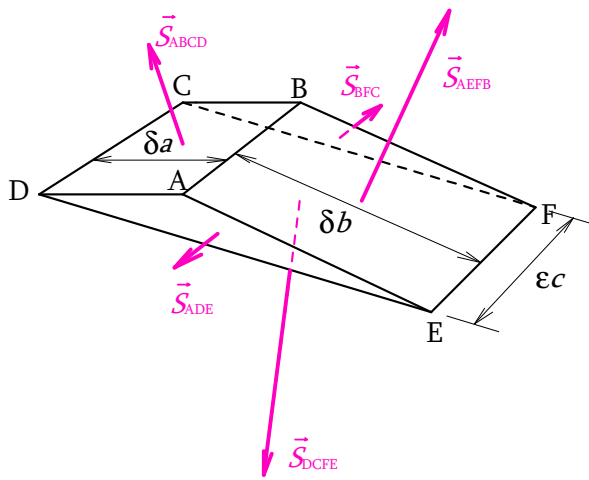
$$\text{para } \delta \text{ e } \epsilon \text{ infinitesimais: } \oint_{\partial S_{\delta\epsilon}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \Big|_{x=y=z=0} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{x=y=z=0} \right) \hat{z} \cdot \vec{S}_{\delta\epsilon} \quad (7.3.31)$$

De novo notamos que a circulação é uma função do vetor superfície, e desta vez para superfícies de formas arbitrárias. Somente temos ainda a restrição a superfícies essencialmente planas, mas na integração sobre superfícies regulares esta restrição não

apresenta problemas, já que as superfícies regulares localmente se aproximam dos planos.

Temos que investigar ainda a questão se a circulação em volta da beirada de uma superfície infinitesimal depende de forma linear do vetor superfície. Temos que mostrar que a circulação de uma superfície infinitesimal cujo vetor superfície é a soma de dois vetores  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  é a soma das circulações associadas aos vetores  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$ . Se estes vetores forem paralelos, a questão se resolve imediatamente com a propriedade aditiva da circulação. Resta investigar o caso de vetores não paralelos. Este caso também depende da propriedade aditiva da circulação, mas a argumentação não é tão direta.

Fig. 7.3.11 Duas superfícies infinitesimais formando um “telhadinho”.



Então vamos considerar dois vetores superfície infinitesimais  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  não colineares. Como a forma das superfícies associadas a estes vetores não importa, podemos imaginar dois retângulos que possuem um lado em comum. A figura 7.3.11 mostra esta configuração. O vetor  $\vec{S}_1 = \vec{S}_{ABCD}$  representa o retângulo ABCD e o vetor  $\vec{S}_2 = \vec{S}_{AEFB}$  representa o retângulo AEFB. O segmento AB com comprimento  $\epsilon c$  é o lado comum dos retângulos. Os lados

ortogonais a este têm comprimentos  $\delta a$  e  $\delta b$  com valores fixos de  $a$  e  $b$ .  $\delta$  e  $\epsilon$  são os parâmetros infinitesimais. Estes retângulos formam um “telhadinho”. Podemos formar uma superfície fechada  $F$  se acrescentarmos ainda o retângulo DCFE e os triângulos ADE e BFC. A figura mostra os vetores superfície correspondentes todos com a orientação para o lado externo do volume que está embrulhado pela superfície fechada  $F$ . A soma destes vetores é zero. Podemos ver isto da seguinte forma. Seja  $\vec{A}$  um campo vetorial constante. Então temos  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Com o teorema de Gauss segue

$$\oiint_F \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

Mas esta integral é simplesmente a soma

$$\vec{A} \cdot \vec{S}_{ABCD} + \vec{A} \cdot \vec{S}_{AEFB} + \vec{A} \cdot \vec{S}_{DCFE} + \vec{A} \cdot \vec{S}_{ADE} + \vec{A} \cdot \vec{S}_{BFC} \quad (7.3.32).$$

Com a linearidade do produto escalar segue

$$\vec{A} \cdot \{ \vec{S}_{ABCD} + \vec{S}_{AEFB} + \vec{S}_{DCFE} + \vec{S}_{ADE} + \vec{S}_{BFC} \} = 0 \quad (7.3.33).$$

Então o vetor  $\vec{S}_{ABCD} + \vec{S}_{AEFB} + \vec{S}_{DCFE} + \vec{S}_{ADE} + \vec{S}_{BFC}$  é ortogonal a um vetor arbitrário  $\vec{A}$ . O único vetor que é ortogonal a qualquer vetor é o vetor zero. Então vale

$$\vec{S}_{ABCD} + \vec{S}_{AEFB} + \vec{S}_{DCFE} + \vec{S}_{ADE} + \vec{S}_{BFC} = 0 \quad (7.3.34).$$

Temos ainda  $\vec{S}_{ADE} + \vec{S}_{BFC} = 0$ . Então  $\vec{S}_{ABCD} + \vec{S}_{AEFB} + \vec{S}_{DCFE} = 0$ . Isto significa que o vetor  $\vec{S}_{EFCD} = -\vec{S}_{DCFE}$  é a soma dos vetores  $\vec{S}_1 = \vec{S}_{ABCD}$  e  $\vec{S}_2 = \vec{S}_{AEFB}$ .

Agora analisaremos as circulações de um campo vetorial diferenciável  $\vec{V}$  em volta dos retângulos. A figura 7.3.12 mostra as orientações relativas das beiradas de todas as partes da superfície  $F$ .

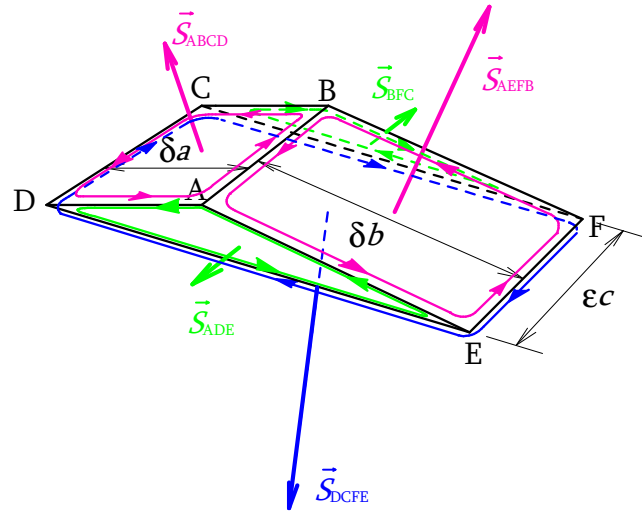


Fig. 7.3.12 Orientações das beiradas de todas as partes da superfície fechada  $F$  relativas aos respectivos vetores superfície.

Percebemos que todos os segmentos são percorridos duas vezes e em sentidos contrários. Consequentemente se anula a soma de todas as circulações:

$$\oint_{ABCD} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{AEFB} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{DCFE} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{ADE} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{BFC} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (7.3.35).$$

A diferença dos valores do campo  $\vec{V}$  nos pontos do triângulo ADE e dos pontos correspondentes do triângulo BFC é da ordem  $\epsilon^1$ . As circulações em volta destes triângulos são da ordem  $\delta^2$ . Então a soma  $\oint_{ADE} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{BFC} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  das circulações é da ordem  $\epsilon^1 \delta^2$  e com  $\delta$  e  $\epsilon$  infinitesimais esta soma deve ser considerada como zero. Consequentemente temos

$$\oint_{ABCD} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{AEFB} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{DCFE} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (7.3.36).$$

Mas vale

$$\oint_{EFCD} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = - \oint_{DCFE} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.3.37).$$

Então a fórmula é o resultado desejado:

$$\oint_{ABCD} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{AEFB} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{EFCD} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (7.3.38).$$

$(\vec{S}_1)$                        $(\vec{S}_2)$                        $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$