

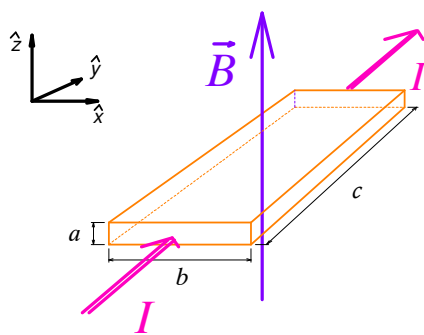
## 6.7 O efeito Hall

A força magnética externa que atua sobre um volume  $V$  de um condutor com corrente imersa num campo magnético  $\vec{B}$  vale

$$\vec{F} = \iiint_V \sum_e \rho_{\#e} q_e \vec{v}_e \times \vec{B} dV \quad (6.7.1)$$

As grandezas que aparecem nesta fórmula são a carga específica  $q_e$ , a densidade numérica  $\rho_{\#e}$  e a velocidade de deriva  $\vec{v}_e$  da espécie  $e$  de partícula. Isto é uma soma sobre todas as espécies de partículas no volume do condutor. Mas nem todas as espécies recebem a mesma força magnética. Por exemplo, os núcleos positivos numa rede cristalina têm velocidade de deriva zero e consequentemente contribuem com força nula nesta soma. Mas se soltarmos um condutor que transporta carga num campo magnético, esta força vai acelerar todo o condutor. No caso de um metal, os núcleos positivos não ficarão para trás. Então a força que atua sobre os elétrons de condução deve resultar também numa força sobre aquelas partículas que não contribuem para a condução. Isto significa que necessariamente deve haver uma modificação das forças internas do condutor quando ele transporta carga e se encontra num campo magnético não nulo. O Físico Edwin Hall<sup>1</sup> estava muito intrigado com o fato de que a força que atua apenas sobre as partículas em movimento acaba tendo uma consequência para todo o condutor, inclusive para as partículas em repouso. Então ele decidiu se dedicar ao estudo das mudanças das forças internas que aparecem num condutor com corrente na presença de um campo magnético e ele escolheu este assunto como tema da sua tese de doutorado. Nestas pesquisas em 1879 ele descobriu um efeito de suma importância. Toda a criação dos componentes eletrônicos à base de semicondutores que revolucionaram a vida moderna foi somente possível com pesquisas sobre os mecanismos de condução em sólidos e o efeito Hall foi e ainda é uma das principais ferramentas para poder caracterizar um condutor no nível microscópico.

A experiência que revela o efeito Hall é a seguinte.



Imagine um filme fino de espessura  $a$ , largura  $b$  e comprimento  $c$  no qual flui uma corrente  $I$ . Neste filme se aplica um campo magnético que aponta na direção perpendicular ao filme como mostrado na figura 6.7.1. Na figura a espessura  $a$  está desenhada exageradamente grossa para poder enxergá-la. Para evitar complicações mentais vamos primeiramente imaginar que este condutor transporte a carga elétrica com partículas positivamente carregadas. Então os portadores com carga  $q > 0$  se movem no mesmo sentido da corrente, como indicado na figura 6.7.2.

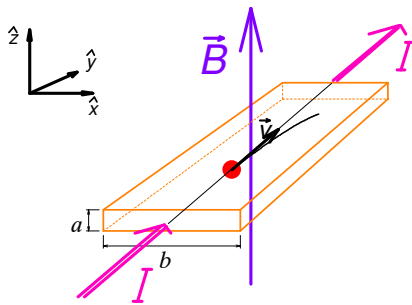
Fig. 6.7.1 Filme fino com corrente num campo magnético.

<sup>1</sup> Edwin Herbert Hall (07/11/1855 – 20/11/1938).

E. H. Hall: "On a New Action of the Magnet on Electric Currents". *American Journal of Mathematics* vol 2, 1879, p.287-292.

Coloquei uma base ortonormal direita  $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$  nas figuras com uma orientação tal que  $\vec{B} = \hat{z}B$  com  $B > 0$  e com a corrente fluindo no sentido do  $\hat{y}$ . Com uma partícula andando na direção  $\hat{y}$ , o produto  $\vec{v} \times \vec{B}$  aponta na direção e no sentido de  $\hat{x}$ . Multiplicando este produto ainda com o valor positivo da carga  $q$ , obtemos uma força que também aponta nesta direção e neste sentido. Então os portadores de carga devem desviar para a beirada direita do filme e carregar esta beirada positivamente. O filme como um todo certamente fica neutro e consequentemente a beirada esquerda deve ficar negativamente carregada como indicado na figura 6.7.3.

Fig. 6.7.2 Desvio de uma carga positiva causado pela força magnética.



Com o conseqüente acúmulo de carga positiva na beirada direita e carga negativa na beirada esquerda, aparece um campo elétrico apontando da direita para a esquerda como indicado na figura 6.7.3. Este campo exerce sobre os portadores de carga uma força contrária à força magnética. Conseqüentemente os portadores agora desviam menos da direção  $\hat{y}$  e se acrescenta menos carga

positiva na beirada direita. Rapidamente o sistema chegará num estado de equilíbrio dinâmico no qual a força elétrica compensa a força magnética completamente, os portadores não desviam mais do trajeto reto e a ocupação das beiradas com cargas positivas e negativas não muda mais.

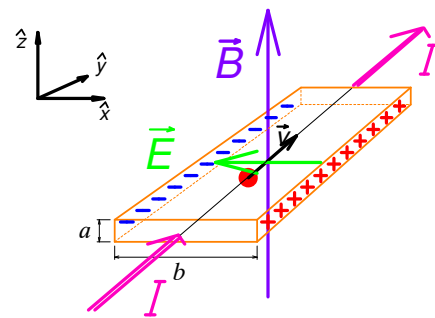


Fig. 6.7.3 O desvio dos portadores positivos carregou as beiradas do filme condutivo e criou um campo elétrico que compensa a força magnética, de tal forma que os portadores seguem agora em linha reta.

Agora veremos como fica esta história com um condutor que transporta carga por meio de partículas negativamente carregadas. A figura 6.7.4 mostra este caso. Agora os portadores andam no sentido oposto da corrente e o produto vetorial  $\vec{v} \times \vec{B}$  aponta na direção oposta do caso anterior. Mas este produto será ainda multiplicado pela carga para obtermos a força magnética atuando sobre os portadores. Como neste caso a carga é negativa, a força aponta novamente para a beirada direita<sup>2</sup>. Então os portadores desviarão para esta beirada como indicado na figura 6.7.4.

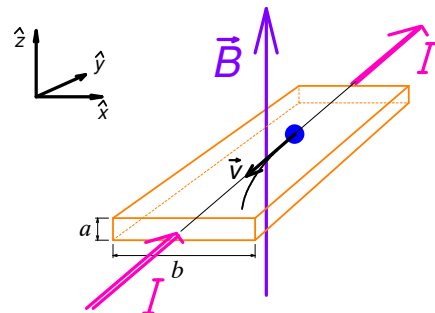


Fig. 6.7.4 Desvio de uma carga negativa causado pela força magnética.

Mas desta vez este desvio resulta num acúmulo de carga negativa na beirada direita, pois os portadores são negativos. Novamente a beirada esquerda fica com carga do sinal oposto à beirada direita, e se forma um campo elétrico que exerce força contrária à força

<sup>2</sup> Beirada direita do ponto de vista do observador da figura.

magnética e se alcança uma situação de equilíbrio dinâmico. Mas desta vez o campo elétrico está oposto ao campo no caso de portadores positivos. Este campo vai exercer força sobre os núcleos positivos o que responde às perguntas que motivaram Edwin Hall.

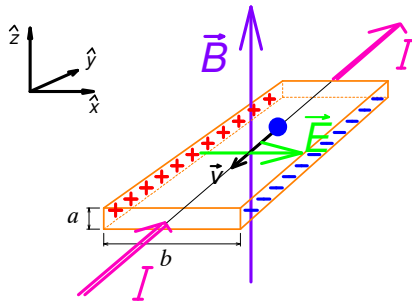


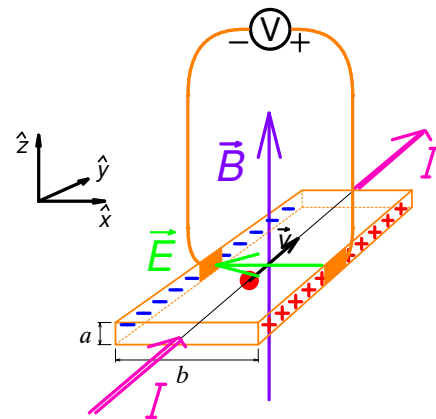
Fig. 6.7.5 O desvio dos portadores negativos carregou as beiradas do filme condutivo e criou um campo elétrico que compensa a força magnética, de tal forma que os portadores seguem agora em linha reta.

Então com uma medida da componente transversal do campo elétrico na amostra, pode-se determinar o sinal dos portadores de carga no material. A medida da componente transversal do campo elétrico, isto é, da componente  $x$ , pode ser feita com um voltímetro ligado em dois contatos fixados nas beiradas do filme. A figura 6.7.6 mostra a experiência com o

exemplo de portadores positivos.

Fig. 6.7.6 Medida da voltagem Hall.

Veremos como as características do filme condutor determinam a voltagem que aparece nesta medida. Esta voltagem é chamada de *voltagem Hall*. Seja  $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$  o campo elétrico na amostra na situação de equilíbrio dinâmico. Coloquei uma componente  $y$  nesta expressão que fornece a força necessária para manter a corrente  $I$  no filme. Nas figuras não representei esta componente. Podemos supor que ela seja muito pequena e de qualquer forma ela não interessa no contexto atual. A voltagem indicada pelo voltímetro pode ser relacionada com a componente  $x$  do campo elétrico com a ajuda da lei das malhas. Na aplicação da lei das malhas atravessamos primeiramente o voltímetro indo do sinal “+” até o sinal “-”, descemos pelo fio do voltímetro até a beirada esquerda da amostra, atravessamos a amostra no sentido de  $\hat{x}$  e finalmente voltamos para o voltímetro pelo fio. De acordo com a tabela 5.8.1, o voltímetro contribui para a integral  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  com o valor indicado no instrumento. Os fios contribuem com zero e o trajeto na amostra contribui com  $b E_x$ , supondo um campo uniforme. Então vale



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_{Hall} + b E_x = 0 \quad (6.7.2)$$

Vamos supor que haja apenas uma espécie de portador de carga no material do filme condutor. Seja  $q$  a carga desta espécie e  $\vec{v}_d$  sua velocidade de deriva. Na condição de equilíbrio a força magnética é exatamente cancelada pela força elétrica transversal. Então vale

$$q E_x \hat{x} + q \vec{v}_d \times B \hat{z} = 0 \quad (6.7.3)$$

Com a densidade numérica  $\rho_{\#}$  dos portadores, podemos relacionar a velocidade de deriva com a densidade de corrente. Temos

$$\vec{j} = \rho_{\#} q \vec{v}_d \quad (6.7.4)$$

e por outro lado

$$\vec{j} = \frac{I}{ab} \hat{y} \quad (6.7.5).$$

Então obtemos

$$\vec{v}_d = \frac{I}{ab\rho_{\#}q} \hat{y} \quad (6.7.6).$$

Inserindo isto da (6.7.3), podemos calcular  $E_x$ :

$$E_x = -\frac{IB}{ab\rho_{\#}q} \quad (6.7.7).$$

Substituindo este resultado na fórmula (6.7.3), obtemos

$$\boxed{V_{Hall} = \frac{IB}{a\rho_{\#}q}} \quad (6.7.8).$$

Com este resultado podemos entender por que Hall usou filmes finos como amostra para a observação do efeito. A voltagem é inversamente proporcional à espessura do filme. A fórmula quantitativa confirma aquilo que tínhamos visto qualitativamente; o efeito Hall permite determinar o sinal dos portadores de carga.

Então agora não precisamos mais da palavra de honra do nosso professor para saber que são os elétrons que conduzem a corrente num metal. De fato, quando se mede o efeito Hall com um filme de cobre, resulta um valor negativo para a carga dos portadores. Mas logo vem a grande surpresa: com um filme de zinco o efeito Hall indica condução com portadores positivos! Como se explica este resultado? - E a honra do professor?

Seguramente não são os núcleos positivos que andam num cristal de zinco na passagem de corrente elétrica. Para entender este resultado curioso, precisamos da mecânica quântica. Isto está fora do alcance da Física III. Mas de forma heurística podemos dar uma explicação. Talvez isto possa até estimular um ou outro aluno de engenharia a emendar alguns semestres adicionais para fazer uma segunda graduação em física.

Na seção 5.2 (A lei de Ohm) já mencionamos que os elétrons se comportam como ondas. Mencionamos também na seção 1.4 (O campo elétrico) que o momento linear é relacionado com translações. Somente na mecânica quântica teremos condições para entender a verdadeira natureza das grandezas: momento linear, energia e momento angular. Na mecânica quântica a relação destas grandezas com translações no espaço e no tempo e com giros fica clara. Mas aqui vamos, sem entender os detalhes, aceitar que momento linear é de alguma maneira definido por translações no espaço.

Agora, num cristal nem todas as translações serão operações de simetria. Para deixar um cristal<sup>3</sup> inalterado sob uma translação, esta deve deslocar tudo por um número inteiro de unidades da célula mínima do cristal. Então a dinâmica dos elétrons no cristal possui simetria de translação somente de forma discreta e não contínua. Mas com uma restrição a translações discretas podem acontecer fenômenos muito curiosos. Sabemos disso no caso de translações temporais. Todo mundo já percebeu que nos filmes de banguê - banguê de far west as rodas das carroças às vezes parecem girar para trás quando os cavalos puxam a carroça para frente. Isto se deve ao fato de que no cinema o avanço do

---

<sup>3</sup> Aqui vamos imaginar o cristal como infinitamente extenso. Para a dinâmica de um elétron no centro de um cristal não dava fazer nenhuma diferença se substituirmos o cristal finito por um infinitamente grande mesmo se o cristal verdadeiro tenha apenas dimensões de alguns micrômetros.

tempo fica discretizado. Nos antigos filmes apenas 15 imagens são mostradas por segundo. Outro fato importa nesta questão: nossos olhos não conseguem distinguir um giro de uma roda de 0,6 voltas para frente de um giro de  $-0,4$  voltas .

Esta mesma ambiguidade,  $0,6$  voltas  $\cong -0,4$  voltas , existe no caso da fase de uma onda que representa um elétron. Então a discretização das translações num cristal pode provocar para o correspondente momento linear o mesmo tipo de fenômeno das rodas das carroças no cinema. O elétron vai para o lado errado e isto corresponde a uma massa efetiva negativa. Pode-se consertar este defeito dizendo que a falta de um elétron num lugar  $B$  foi para o lugar  $A$  quando o elétron foi do lugar  $A$  para o lugar  $B$  . O “buraco” foi no sentido do momento linear e se substituirmos os elétrons negativos por buracos positivos voltaremos a ter partículas com massa positiva. Em certas substâncias os elétrons de condução se encontram nesta situação e a condução pode ser descrita como uma *condução por buracos*.

Há certos materiais chamados de semicondutores que no fundo são isolantes, mas que podem ser transformados em condutores implantando portadores. Podem-se implantar portadores negativos (elétrons) ou positivos (buracos). Correspondentemente os condutores que resultam desta modificação do material são chamados de condutores do tipo **n** ou do tipo **p**. O efeito Hall permite não apenas a distinção destas alternativas, mas ele permite medir também a densidade numérica dos portadores, como fica evidente pela fórmula (6.7.8). Conhecendo a densidade dos portadores, pode-se calcular a velocidade de deriva para uma dada densidade de corrente. Medindo ainda a condutividade do material, temos tudo para a determinação do fator de proporcionalidade entre campo elétrico e velocidade de deriva. Esta grandeza é a mobilidade dos portadores. O conhecimento da mobilidade dos portadores é crucial no desenvolvimento de dispositivos eletrônicos à base de semicondutores. Então podemos entender a enorme importância do efeito Hall.

Na fórmula (6.7.8) percebemos que a voltagem Hall depende de dois valores que são escolhidos durante a medida, a saber, da corrente  $I$  e o valor  $B$  da componente  $z$  do campo magnético. O fator que multiplica estes valores é determinado pela amostra. Neste fator da amostra, podemos ainda separar um fator geométrico,  $1/a$  , e uma constante de material,  $aV_{Hall}I^{-1}B^{-1}$  . Esta constante de material é chamada de coeficiente de Hall do material. No caso de um condutor com apenas numa única espécie de portadores, a constante Hall coincide com  $1/(\rho_{\#}q)$  . Infelizmente a medida desta constante depende fortemente da pureza e da estrutura cristalina do material, e os valores que se encontram na literatura divergem consideravelmente. Na tabela 6.7.1 informamos alguns valores da literatura<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Meissner Handbuch der Experimentalphysik" , v. 11, p. 336

C. M. Hurd, "The Hall Effect in Metals and Alloys" (Plenum Press: New York, 1972).

C. Kittel, "Introduction to Solid State Physics" , 4th Edition (John Wiley & Sons, Inc: New York, 1971).

H. Gobrecht: Berbmann Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik Band II Elektrizität und Magnetismus. Sechste Auflage de Gruyter Berlin 1971 ISBN 3 11 002090 0.

Tabela 6.7.1 Constantes de Hall de alguns metais

Elemento	$a V_{Hall} I^{-1} B^{-1}$
Al	$(-3,5 \pm 0,5) \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$
Au	$(-7,2 \pm 0,2) \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$
Bi	$-10^{-1 \pm 1} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$
Cu	$(-5,5 \pm 0,5) \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$
Fe	$+2 \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$
Na	$(-2,3 \pm 0,2) \times 10^{-4} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$
Zn	$(+6 \pm 4) \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$

O efeito Hall tem também aplicações menos fundamentais. Ele pode ser usado para medir campos magnéticos. Em condutores como cobre ou alumínio, a densidade de portadores é tão grande que as voltagens Hall resultam ser muito pequenas. Com estes metais a medição das voltagens Hall fica muito difícil e não seria uma boa ideia usar filmes destes materiais para um medidor de campo magnético. Mas em InSb (antimoneto de índio) e InAs (arsenieto de índio) a mobilidade dos portadores é ordens de grandeza maior do que no cobre, e se pode trabalhar com densidades de portadores muito baixas. Por exemplo, com InAs pode-se realizar um material com constante de Hall na ordem de  $-10^2 \text{ cm}^3 \text{ C}^{-1}$ .

Fig. 6.7.7 Sonda Hall

Tenho aqui um medidor de campo magnético que usa o efeito Hall. A figura 6.7.7 mostra uma fotografia da sonda Hall. Percebemos quatro linhas condutoras embutidas num material não condutor, duas para levar a corrente para uma plaqueta e duas para medir a voltagem Hall. Na figura 6.7.8 pressionamos esta sonda Hall contra a superfície do ímã que usamos na deflexão de um feixe de elétrons (figura 6.1.3). A sonda está ligada num equipamento dedicado a medidas de campo magnético. Este instrumento fornece a corrente para a sonda e mede a voltagem Hall e mostra o resultado



perpendicular do campo magnético. Na figura vemos que o módulo do campo magnético na superfície deste ímã vale aproximadamente 0,4 T.

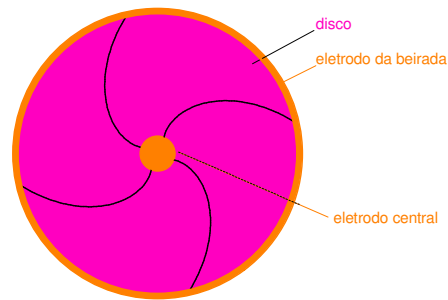


Fig.6.7.8 Medida do campo magnético na superfície de um ímã permanente.

O efeito Hall não serve para medidas de alta precisão do campo. Mas estes medidores de campo são frequentemente usados como sensores. Por exemplo, em alguns automóveis o nível do combustível no tanque é medido com a ajuda de uma sonda Hall no teto do tanque. Esta sonda mede o campo magnético de um ímã preso numa boia. Em alguns carros o sistema ABS (Antiblockier-Bremssystem - sistema de freio sem bloqueio das rodas) monitora a velocidade angular das rodas com sensores Hall. E alguns motores elétricos sem escovas usam sondas Hall para monitorar a orientação do rotor.

O efeito Hall pode ser visto como um primeiro exemplo de uma lista de efeitos envolvendo condutividade elétrica e campo magnético, tais como magnetorresistência gigante, magnetorresistência colossal, e efeito túnel magnético. Alguns destes efeitos mencionaremos ainda em capítulos futuros. Que o efeito Hall tem uma relação com condutividade fica especialmente evidente com uma variante do efeito Hall encontrada pelo físico e político italiano Orso Mario Corbino<sup>5</sup>. Corbino injetou corrente no centro de um disco circular coletando-a na beirada do disco. Obviamente a densidade de corrente será radial no disco. Mas, quando se aplica um campo magnético perpendicular ao plano do disco, as trajetórias dos portadores desviam formando espirais como mostrado na figura 6.7.9. Então o caminho percorrido pelos portadores aumenta com a aplicação do campo e conseqüentemente a resistência entre o eletrodo central e a beirada aumenta.

Fig. 6.7.9 Efeito Corbino. Corrente elétrica flui num disco partindo de um eletrodo central para um eletrodo na beirada. Com a aplicação de um campo magnético perpendicular ao disco, as linhas de corrente desviam da forma radial.



Em 1980, ou seja, 101 anos após a descoberta do efeito Hall, surgiu uma nova variante do efeito, e esta tem importantes implicações nas ciências de medidas de alta precisão. Para poder entender estes resultados novos, vamos definir duas resistências na observação do efeito Hall. Uma é a resistência comum  $R_{\parallel}$  que é o quociente da diferença de potencial entre dois pontos na mesma linha de fluxo dos portadores e a corrente  $I$ . Chamarei esta resistência de *resistência paralela* porque ela envolve a componente do campo elétrico paralela à densidade de corrente. A outra é o quociente da voltagem Hall e da corrente usada na experiência. Esta é chamada de *resistência Hall*:

$$R_{Hall} \stackrel{def.}{=} \frac{V_{Hall}}{I} \quad (6.7.9)$$

A resistência paralela  $R_{\parallel}$  está envolvida na dissipação de energia na amostra enquanto a resistência Hall não dissipa energia. Pela fórmula (6.7.8), a resistência Hall deve ser proporcional ao valor do campo magnético:

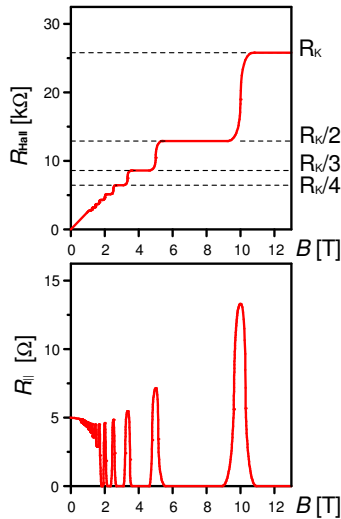
$$R_{Hall} = \frac{1}{a \rho_{\#} q} B \quad (6.7.10)$$

<sup>5</sup> Orso Mario Corbino (30/04/1876 – 23/01/1937) foi o professor de uma porção de físicos famosos: Enrico Fermi, Edoardo Amaldi, Franco Rasetti, Emilio Segré, Bruno Pontecorvo, Oscar D'Agostino e Ettore Majorana. Corbino pesquisou sobre o giro do plano de polarização da luz na passagem através de materiais na presença de campo magnético. Suas atividades científicas eram muito diversificadas e durante trabalhos sobre hidroelétricas ele entrou em contato com a política. Ele atuou como ministro de educação e de economia na Itália nos anos 20 do século XX.

Por outro lado, a resistência paralela aparentemente não tem nenhuma relação com o campo magnético, e ela não deve depender do valor de  $B$ .

$$R_{\parallel} = \text{const. (independente de } B) \quad (6.7.11)$$

Mas em 1977, quase 100 anos após a descoberta do efeito Hall, os físicos teóricos Tsuneya Ando, Yukio Mutsumoto e Yasutada Uemura previram que efeitos quânticos poderiam criar desvios das relações simples (6.7.10) e (6.7.11) quando se usam valores muito elevados do campo magnético<sup>6</sup>. E realmente no ano seguinte S. Kawaji e J. Wakabayashi encontraram nas resistências Hall valores especiais que pareciam ser independentes de certas condições experimentais<sup>7</sup>.



Mas somente em 1980 a comunidade científica se deu conta de que estava na frente de um novo fenômeno de suma importância. Em 1980 Klaus von Klitzing<sup>8</sup> observou o efeito Hall com amostras muito puras que foram preparadas por Michael Pepper<sup>9</sup> e Gerhard Dorda<sup>10</sup>. Estas medidas foram feitas a baixas temperaturas (poucos Kelvin) e com campos magnéticos extremamente intensos. Na publicação<sup>11</sup> que relata os resultados destas medidas, Klitzing, Dorda e Pepper destacaram que certos valores de resistência Hall, que aparecem como degraus na curva  $R_{Hall}(B)$ , são perfeitamente relacionados com duas constantes fundamentais: a carga elementar e a constante de Planck  $h$ , que aparece quando se passa da física Newtoniana para a Mecânica Quântica.

Fig. 6.7.9 Representação qualitativa da dependência da resistência Hall e da resistência paralela em função do campo magnético. (Não são dados experimentais).

O que se observa no lugar das relações simples da física clássica (6.7.10) e (6.7.11) é mostrado na figura 6.7.9. Para campos magnéticos modestos ( $< 1$  T), percebemos realmente uma proporcionalidade entre resistência Hall e campo magnético como era esperado pela fórmula (6.7.10). Mas, quando o campo ultrapassa 2 T, aparece uma estrutura estranha na curva. Para campos ainda mais intensos, esta estrutura se revela como uma escada com degraus de crescente altura. O último degrau chega a um valor que coincide com incrível precisão com uma combinação de constantes fundamentais da natureza, a saber, a constante de Planck  $h$  dividida pelo quadrado da carga elementar  $e$ .

<sup>6</sup> T. Ando, Y. Mutsumoto, Y. Uemura “The Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System” J. Phys. Soc. Japan 93 2 (1975) p. 279.

<sup>7</sup> S. Kawaji and J. Wakabayashi, “Temperature Dependence of Transverse and Hall Conductivities of Silicon MOS Inversion Layers under Strong Magnetic Field” Surface Sci. 58 (1976) 238; Solid State Commun. 22 (1977) 87.

<sup>8</sup> Klaus-Olaf von Klitzing, (28/06/1943 --) famoso pela descoberta da quantização exata da resistência Hall, se dedica intensamente para estimular o interesse por ciência na sociedade.

<sup>9</sup> Sir Michael Pepper (10/08/1942--) trabalha sobre nanoestruturas de semicondutores.

<sup>10</sup> Gerhard Dorda, (1932--), físico e compositor, descobriu efeitos quânticos na superfície de semicondutores.

<sup>11</sup> K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper: „New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance” Phys. Rev. Lett. 45, 6 p. 494-497 (1980).



Na Física IV falaremos muito mais sobre esta constante fundamental  $h$ . Mas, talvez pelas aulas de química ou de Física II (calor específico), vocês já tiveram um primeiro contato com esta constante. Lá geralmente se menciona que osciladores harmônicos, que classicamente poderiam oscilar com qualquer valor de energia, podem na verdade assumir somente valores de energia que se relacionam com a frequência  $f$  do oscilador da seguinte forma:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) h f \quad (6.7.12)$$

Nesta fórmula,  $n$  percorre os números inteiros não negativos, ou seja, somente os valores 0, 1, 2, 3 ..... podem aparecer. Diz-se que a energia do oscilador é quantizada. A constante de proporcionalidade  $h$  que aparece nesta relação é a constante de Planck e ela tem o valor

$$h = 6,626070040(81) \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (6.7.13)$$

Os dois dígitos em parênteses indicam a incerteza nas duas últimas casas. Esta forma de escrever uma incerteza é apropriada para resultados com um número elevado de casas. Na maneira usual de escrever uma incerteza, este valor teria o seguinte aspecto:

$$h = (6,626070040 \pm 0,000000081) \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (6.7.14)$$

Então o valor da resistência Hall do último degrau da escada tem o valor  $h/e^2$ . Esta constante foi chamada de constante de Klitzing  $R_K$ . Ela tem o valor

$$R_K = 25812,807557(18) \Omega \quad (6.7.15)$$

Então esta versão quântica do efeito Hall fornece um padrão para a grandeza resistência elétrica de altíssima precisão. Antigos padrões de resistência usavam exemplares de resistores e estes, por mais que se esforçasse para guardá-los com cuidado, sempre mostravam variações dos valores de resistência simplesmente por envelhecimento dos condutores. Com o efeito Hall quântico pode-se realizar um padrão de resistência em qualquer parte do mundo e com a garantia de que este padrão terá exatamente o mesmo valor no Japão ou no Brasil ou em qualquer outro lugar na Terra<sup>12</sup>. Além disso, o efeito Hall quântico fornece um método para medir o valor da carga elementar com altíssima precisão.

A resistência paralela também mostra um comportamento sumamente interessante. Para valores do campo magnético muito menores que 1 T, esta resistência realmente não apresenta muita dependência de  $B$ . Mas logo acima de 0,5 T aparece uma estrutura

<sup>12</sup> Coloquei a restrição “na Terra” porque há recentes observações de astrônomos que indicam que a carga elementar possa ter valores ligeiramente diferentes em regiões do universo que distam da nossa galáxia alguns bilhões de anos luz. J.K. Webb; et al. (1999). "Search for Time Variation of the Fine Structure Constant". *Physical Review Letters* **82** (5): 884–887. arXiv:astro-ph/9803165. Bibcode:1999PhRvL..82..884W. doi:10.1103/PhysRevLett.82.884, M.T. Murphy; et al. (2001). "Possible evidence for a variable fine-structure constant from QSO absorption lines: motivations, analysis and results". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **327** (4): 1208. arXiv:astro-ph/0012419. Bibcode:2001MNRAS.327.1208M. doi:10.1046/j.1365-8711.2001.04840.x, J.K. Webb; et al. (2001). "Further Evidence for Cosmological Evolution of the Fine Structure Constant". *Physical Review Letters* **87**(9): 091301. arXiv:astro-ph/0012539. Bibcode: 2001PhRvL..87i1301W. doi:10.1103/PhysRevLett.87.091301. PMID 11531558, M.T. Murphy; J.K. Webb; V.V. Flambaum (2003). "Further Evidence for a Variable Fine-Structure Constant from Keck/HIRES QSO Absorption Spectra". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **345** (2): 609. arXiv:astro-ph/0306483. Bibcode: 2003MNRAS.345..609M. doi:10.1046/j.1365-8711.2003.06970.x.

estranha no gráfico da função  $R_{\parallel}$ . E quando o campo magnético entra na faixa, na qual os degraus da escada no gráfico da resistência Hall são plenamente formados, aparece um fenômeno extraordinário: nos intervalos dos platôs da resistência Hall, a resistência paralela cai para zero! Nesta condição temos uma corrente na amostra que flui sem dissipar energia! Os portadores atravessam o condutor sem nenhum atrito!

Para entender o que provoca estes comportamentos estranhos das resistências  $R_{\parallel}$  e  $R_{Hall}$ , precisa-se de conhecimentos avançados da mecânica quântica. Mesmo assim tentarei fornecer algumas explicações no apêndice A desta seção. Num apêndice B aproveito algumas fórmulas do apêndice A para discutir uma outra aplicação de campo magnético e campo elétrico cruzado.

### Exercícios:

**E 6.7.1:** Na seção 5.2 estimamos a densidade dos elétrons de condução no cobre baseado na hipótese de que cada átomo de cobre contribui com um elétron para a condução. Isto resultou numa densidade numérica de  $\rho_{ec}^{\#} \approx 8,46 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . Use os dados experimentais citados nesta seção para obter uma estimativa mais realista. A antiga estimativa estava muito errada?

**E 6.7.2:** Na seção 5.4 (Eletromotância) discutimos dois efeitos termoelétricos. Há também efeitos que combinam fluxos de calor e de carga na presença de um campo magnético. Pesquise na internet ou na biblioteca sobre o efeito de Ettinghausen, o efeito de Righi-Leduc e o efeito Nernst.

**E 6.7.3:** Escreva os pontos de destaque desta seção.

## 6.7 Apêndice A -- O Efeito Hall Quântico

Na dedução da fórmula clássica (6.7.8) consideramos apenas a velocidade de deriva. Mas aprendemos na seção 5.2 (A lei de Ohm e a lei das malhas) que os elétrons se movem com uma velocidade de aproximadamente 0,5% da velocidade da luz e que a velocidade de deriva é apenas resultado de um minúsculo deslocamento médio dos movimentos randômicos. Então vamos considerar o movimento de um portador de carga não apenas no sentido de deslocamento médio. As experiências do efeito Hall quântico são feitas com amostras muito puras e a baixa temperatura. Isto significa que os portadores podem se deslocar por uma boa distância sem esbarrar em nenhum obstáculo. Por esta razão vamos considerar o movimento de um portador de carga no espaço completamente vazio. Na verdade o espaço não está vazio, mas a influência da rede cristalina, como mencionamos já na seção 2.4 na discussão do campo de Shiff-Barnhill, pode ser descrita com uma alteração da massa dos portadores. Vamos supor que tenhamos um campo magnético uniforme na direção  $z$  e um campo elétrico uniforme na direção  $x$ :  $\vec{B} = \hat{z} B$  e  $\vec{E} = \hat{x} E$ , com  $B$  e  $E$  ambos constantes. A segunda lei de Newton de uma partícula de massa  $m$  e de carga  $q$  exposta a estes valores de campo difere das equações (6.3.4) e (6.3.5) somente pela presença da força elétrica na direção  $x$ :

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B + q E \quad (6.7.16)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B \quad (6.7.17)$$

Não vamos considerar nenhum movimento na direção  $z$  supondo um filme condutor extremamente fino que proíbe os movimentos nesta direção. Reconhecemos logo neste sistema de equações diferenciais o caso de um sistema inhomogêneo linear. Já sabemos como encontrar a solução geral para este tipo de problema: precisamos de uma única solução particular e temos que somar a solução geral do problema homogêneo. Conhecemos a solução geral do sistema homogêneo da seção 6.3:

$$v_x^H(t) = -V_0 \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{com } \omega = \frac{q}{m} B \quad (6.7.18)$$

$$v_y^H(t) = -V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6.7.19)$$

Facilmente achamos uma solução particular com a tentativa  $v_y^P = \text{const.}$  e  $v_x^P = 0$ :

$$v_y^P = -\frac{E}{B} \quad (6.7.20)$$

Então a solução geral é

$$v_x(t) = -V_0 \sin(\omega t + \phi_0) \quad (6.7.21)$$

$$v_y(t) = -\frac{E}{B} - V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6.7.22)$$

Integrando sobre o tempo, obtemos a lei horária do movimento:

$$x(t) = x_0 + \frac{mV_0}{qB} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6.7.23)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{E}{B} t - \frac{mV_0}{qB} \sin(\omega t + \phi_0) \quad (6.7.24).$$

A figura 6.7.10 mostra a trajetória deste tipo de movimento para o caso de uma partícula negativamente carregada com  $E > 0$  e  $B > 0$ . Estas desigualdades correspondem ao caso do efeito Hall com elétrons (compare com a figura 6.7.5).

Então na direção  $x$  a partícula executa um movimento harmônico simples com a frequência  $f = qB / 2\pi m$  oscilando em torno da linha  $x_{\text{centro}} = x_0$ .

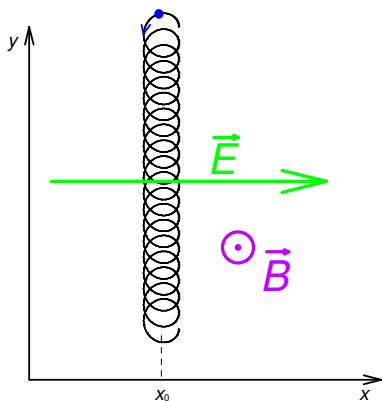


Fig. 6.7.10 Movimento de uma partícula negativa confinada no plano  $xy$  na presença de campos constantes  $\vec{B} = \hat{z} B$  e  $\vec{E} = \hat{x} E$ , com  $E > 0$  e  $B > 0$ .

Classicamente poderíamos escolher qualquer amplitude para esta oscilação na direção  $x$ . Mas a mecânica quântica diz que a energia desta oscilação tem que ter um dos valores dados pela fórmula (6.7.12). Se não tivesse o campo elétrico, as possíveis energias do elétron seriam dadas pela fórmula (6.7.12) sendo a frequência  $f = qB / 2\pi m$ . Mas, com um valor de  $E$  diferente de zero, há ainda uma pequena

modificação destes valores de energia. Isto é bem evidente. Obviamente um elétron que oscila perto da borda negativa do filme condutor terá uma energia um pouco maior do que um que oscila com a mesma amplitude perto da borda positiva. Então temos que olhar ainda a coordenada  $x_0$  do centro de oscilação.  $x_0$  é um dos parâmetros da solução geral que é determinado pelas condições iniciais. Classicamente este parâmetro poderia ter qualquer valor. De novo, parecido com o caso da energia de oscilação,

aparece uma quantização destes valores. Pode-se mostrar<sup>13</sup> que  $x_0$  só poder ter valores que cumprem a condição

$$x_0(l) = \frac{hl}{cqB} - \frac{mE}{qB^2} \quad \text{com } l \text{ inteiro} \quad (6.7.25)$$

Nesta fórmula  $c$  é o comprimento do filme condutor (compare com a figura 6.7.1) e  $h$  é novamente a constante de Planck. Então dois centros de oscilação vizinhos têm uma distância de

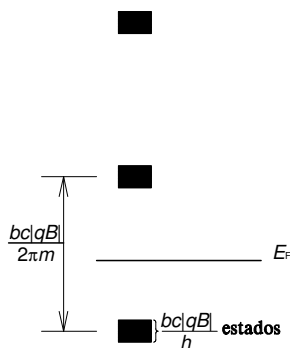
$$\delta x_0 = |x_0(l+1) - x_0(l)| = \frac{h}{c|qB|} \quad (6.7.26)$$

Mas o filme condutor tem uma largura finita. Então, para um dado valor  $n$  da quantização dos níveis de energia de oscilação, cabe somente um número finito  $N$  de valores de  $l$ , a saber:

$$N = \frac{b}{\delta x_0} = \frac{bc|qB|}{h} \quad (6.7.27)$$

Lembramos que  $b$  era a largura da amostra. Então o espectro de energia tem um aspecto como se fossem resmas de papel arrumadas em prateleiras de um armário como indicado na figura 6.7.11. Temos aglomerados ou pacotes de estados. Estes aglomerados estão energeticamente separados pelo quantum energético  $hf$  e cada um deles contém  $N$  estados, sendo  $N$  o valor dado pela formula (6.7.27).

Fig. 6.7.11 Espectro de energia dos elétrons no filme condutor na presença de um campo magnético e elétrico.



O filme condutor está eletricamente ligado em outros condutores. Estas ligações permitem passagem de elétrons e se estabelece um equilíbrio da densidade de elétrons. Da mesma maneira como o equilíbrio em relação à troca de calor entre dois corpos é determinado pela igualdade das temperaturas dos corpos, existe um parâmetro cuja igualdade determina o equilíbrio em relação à troca de alguma espécie de partícula entre dois corpos. Este parâmetro é chamado de potencial químico da espécie de partícula. O valor do potencial químico é uma energia e no caso dos elétrons é geralmente chamado de energia de Fermi  $E_F$  ou nível de Fermi. Na figura 6.7.11 mostrei a

energia de Fermi em alguma altura qualquer; bem, não totalmente qualquer. Tomei o cuidado de escolher uma altura que ficasse entre dois pacotes de estados, e será esta situação que analisaremos logo em seguida.

Para uma amostra que tem uma temperatura muito perto do zero absoluto, o significado deste nível de Fermi é simples: todos os estados com energia menor que  $E_F$  ficarão ocupados com elétrons, e todos os estados acima deste nível ficam vazios. Para temperaturas um pouco mais elevadas, pode haver um ou outro estado muito próximo

<sup>13</sup> Comentário para o leitor que já domina a mecânica quântica: a fórmula (6.7.25) foi deduzida impondo condições periódicas na direção  $y$  sobre a função de onda dos autoestados do Hamiltoniano. Tal procedimento é praxe embora um tratamento mais realista das condições de contorno nos contatos seria desejável.

de  $E_F$  com uma ocupação diferente, ou seja, desocupado para  $E < E_F$  e ocupado com  $E > E_F$ . Mas, quando o nível de Fermi fica entre dois pacotes de estados, não há estados perto de  $E_F$  e portanto, mesmo com temperaturas de alguns kelvin acima do zero absoluto, todos os estados abaixo de  $E_F$  estarão totalmente ocupados e todos acima de  $E_F$  totalmente vazios. Então, nesta situação, com o nível de Fermi bem na região vazia entre o  $k$ -ésimo<sup>14</sup> e  $k$ -ésimo-primeiro pacote de estados, teremos um total de  $kN$  estados ocupados.

$$\text{número total de estados ocupados} = kN = k \frac{bc |qB|}{h} \quad (6.7.28)$$

Agora veremos a contribuição de cada um destes elétrons para a corrente. Fora da oscilação o elétron avança na direção  $y$  com velocidade constante  $-E/B$ . Para atravessar o filme de comprimento  $c$  ele leva o tempo.

$$\tau = \frac{c}{|E/B|} \quad (6.7.29)$$

Então ele contribui para a corrente total com

$$|I_{\text{uma partícula}}| = \frac{|q|}{\tau} \quad (6.7.30)$$

Com a (6.7.28) temos o número total de partículas e podemos calcular o módulo da corrente:

$$|I| = kN |I_{\text{uma partícula}}| = kN \frac{|q|}{\tau} = k \frac{bc |qB|}{h} \frac{|q|}{c} \frac{|E|}{|B|} \quad (6.7.31)$$

Percebemos que o comprimento da amostra cancela assim como o campo magnético. O produto  $b|E|$  é justamente o módulo da voltagem Hall. Então temos

$$|I| = k \frac{|V_{Hall}|}{h} q^2 \quad (6.7.32)$$

Ou seja, a resistência Hall fica independente do valor do campo magnético e com  $q = -e$  ela terá um valor de

$$R_{Hall} = \frac{1}{k} \frac{h}{e^2} \quad (6.7.33)$$

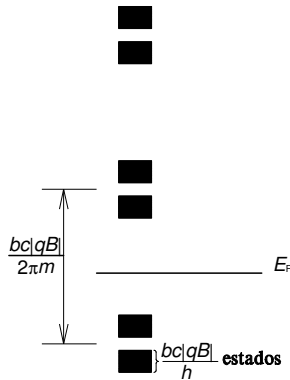
Então temos uma explicação dos valores dos platôs. O valor nulo da resistência paralela também pode ser compreendido com este modelo. Quando um elétron esbarra num obstáculo, ele somente poderá ser espalhado se tiver estados desocupados e energeticamente acessíveis. Com campos magnéticos muito intensos, a distância energética  $hf$  para o próximo pacote fica tão grande que os elétrons simplesmente não conseguem mais ser espalhados.

Quando mudamos o valor do campo magnético, muda a distância energética dos pacotes dos estados e os pacotes mudam de posição na escala de energia. Quando um pacote atravessa o nível de Fermi, há estados vazios na vizinhança de  $E_F$  e os elétrons conseguem ser espalhados. Nesta situação reaparecem valores positivos da resistência

<sup>14</sup> Naturalmente contando de baixo para cima, pois no lado de cima não tem fim.

paralela. Isto explica os picos no gráfico da resistência paralela nas regiões entre os platôs.

A explicação dada aqui naturalmente esconde os detalhes que precisam de um conhecimento da mecânica quântica. Fora disso esta explicação é baseada numa tremenda simplificação. Várias correções devem ser consideradas:



(1) Os elétrons possuem um grau de liberdade interno chamado de spin que discutiremos mais para o fim deste livro. A existência deste grau de liberdade provoca uma duplicação dos pacotes de estados. Então o espectro verdadeiro de energias se parece mais com a figura 6.7.12 do que com a 6.7.11

Fig. 6.7.12 Espectro de energia dos elétrons no filme condutor na presença de um campo magnético e elétrico considerando o spin dos elétrons.

Quando o número inteiro  $k$  da fórmula (6.7.33) é ímpar, o nível de Fermi se encontra no intervalo relativamente pequeno entre dois pacotes de uma dupla de pacotes de estados. Neste caso há estados relativamente próximos de  $E_F$ , e, com temperaturas não extremamente baixas, a resistência paralela não cai para zero, e o platô correspondente é curto.

(2) A interação elétrica entre os elétrons deve ser considerada.

(3) Impurezas no cristal devem ser consideradas.

(4) O truque de descrever a influência da rede cristalina sobre os elétrons com a ajuda de uma massa efetiva para os elétrons é apenas uma aproximação. Em determinados cristais a relação entre energia e momento linear pode ser qualitativamente tão diferente de uma relação parabólica que uma aproximação do tipo  $E(\vec{p}) = \vec{p}^2 / 2m^*$  não é mais aplicável.

Estes detalhes influenciam os aspectos dos degraus da escada da resistência Hall. Mas, por incrível que pareça, não impedem que a carga elementar possa ser medida com extrema precisão com o efeito Hall quântico.

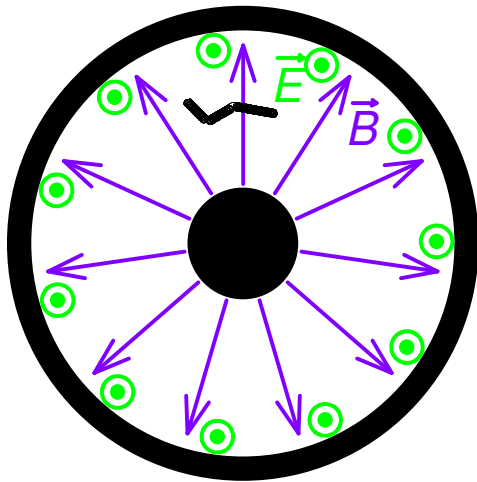
## 6.7 Apêndice B -- O propulsor Hall

Vamos aproveitar a lei horária (6.7.23), (6.7.24) para discutir uma outra aplicação dos movimentos de partículas carregadas num campo magnético cruzado com um campo elétrico. Percebemos pelas fórmulas ou pela figura 6.7.10 que um campo magnético pode ser usado para evitar que partículas carregadas sejam arrastadas por um campo elétrico na direção do mesmo. Aproveita-se isto em certos motores de foguete para ionizar um gás com elétrons sem arrastar estes elétrons com o campo elétrico que serve para acelerar os íons e expulsá-los do motor.

Lembramos da Física I que todo motor de foguete é baseado na expulsão de algum propelente que leva momento linear. Por conservação de momento linear, isto resulta numa mudança do momento linear do foguete. A tarefa do motor do foguete é justamente a produção desta mudança do momento linear. É desejável expulsar o propelente com alta velocidade. Isto permite usar um fluxo de massa pequeno. Altas

velocidades de expulsão podem ser alcançadas usando como propelente íons positivos e acelerá-las num campo elétrico. Para evitar que o foguete se carregue eletricamente e que ele seja puxado de volta pela nuvem de íons que saíram do motor, é necessário injetar no jato de íons positivos um feixe de elétrons que neutralize os íons.

A ideia deste tipo de motor iônico é simples, mas os detalhes para realizar tal artefato não são nada simples. Para começar, átomos ou moléculas de algum gás devem ser ionizados. Isto pode ser feito com elétrons com energia cinética de algumas dezenas de eV. Mas estes elétrons seriam também acelerados pelo campo que deve acelerar os



íons. Isto provocaria uma corrente elétrica que dissipa energia inutilmente. Neste ponto entra a ideia de evitar um arraste pelo campo elétrico usando um campo magnético. Para os íons pesados, que se movem com velocidades muito menores que os elétrons, a força magnética é praticamente desprezível e eles saem rapidamente da região onde o campo magnético é diferente de zero. Os elétrons ficam espiralando e fluindo perpendicularmente ao campo elétrico entre colisões com os átomos do gás a ser ionizado. Usa-se um campo magnético radial numa região anular e um campo

elétrico axial.

Fig. 6.7.13 Esquema dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  num propulsor Hall. Uma trajetória de um elétron que sofre duas colisões é mostrada. Os íons positivos são expulsos pelo campo elétrico na direção do observador da figura.

A figura 6.7.13 mostra o esquema deste arranjo. Simbolicamente coloquei uma trajetória de um elétron com duas colisões. Os íons positivos formados por colisão seriam acelerados na direção do observador da figura. A figura 6.7.14 mostra uma fotografia de um propulsor Hall em funcionamento.

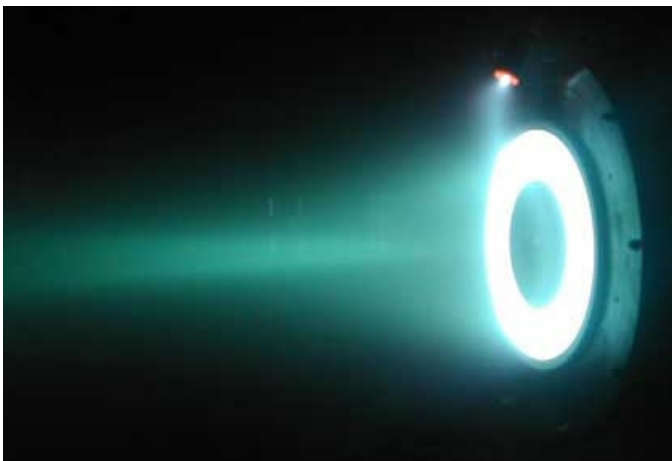


Fig. 6.7.14 Propulsor Hall de 3 kW. (Princeton Plasma Physics Laboratory). Na parte superior da imagem aparece o canhão de elétrons que neutraliza o feixe de íons. (Imagem tirada da Wikipédia)

Os íons saem do propulsor com uma velocidade de algumas dezenas de quilômetros por segundo. A força de empuxo destes motores é pequena, tipicamente 0,01 N até 0,6 N. Mas estes motores podem operar

continuamente durante meses. Além disso, eles são muito confiáveis e são extremamente leves. A massa de um propulsor Hall pode ser menor que 10 g. Muitos satélites usam propulsores Hall para efetuar correções da órbita. Mais detalhes se encontram no seguinte site:

<http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20040084644.pdf>