

4.5 Polarização e o campo de deslocamento

Temos que considerar duas parcelas de carga na aplicação da lei de Gauss: as cargas devido ao estado de polarização do dielétrico e as demais cargas, que eu chamarei de *cargas líquidas*. Imaginamos a matéria dividida em regiões microscópicas que podem corresponder a moléculas, a átomos ou, no caso de um cristal, a uma célula unitária que permite gerar o cristal através de translações repetidas. Uma distribuição assimétrica de carga dentro destas regiões contribui para a polarização enquanto um excesso de um tipo de carga dentro de uma destas regiões faz parte da carga líquida. Especialmente as cargas de condução, que podem ser deslocadas por grandes distâncias, contarão como carga líquida. Então podemos destacar estas parcelas quando escrevemos a lei de Gauss:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{L \text{ em } V} + Q_{P \text{ em } V} \quad (4.5.1).$$

Nesta fórmula usei o subscrito *L* para indicar carga Líquida e o subscrito *P* para indicar carga de Polarização. Ambos os tipos de carga são apenas considerados dentro do volume *V* cuja superfície serve como superfície Gaussiana. Escrevi todas as grandezas em negrito porque trataremos aqui dos campos macroscópicos. No exemplo do capacitor de placas paralelas com um dielétrico homogêneo, vimos que a carga de polarização aparece apenas na superfície do dielétrico, onde a polarização muda abruptamente. Mas podemos imaginar situações mais gerais em que o estado de polarização pode mudar continuamente. Gostaríamos de saber quanta carga de polarização está presente numa dada configuração de polarizações.

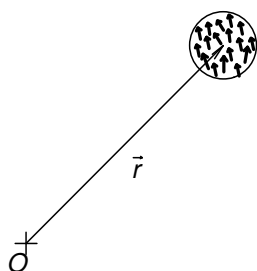


Fig. 4.4.6 Ilustração da definição de polarização.

Para poder responder a esta pergunta, tem-se que inventar primeiramente uma descrição quantitativa daquilo que eu chamei de “configuração de polarizações” ou “estado de polarização”. Vamos pensar: as moléculas deformadas formam pequenos dipolos. Poderíamos quantificar o “estado de polarização” com o vetor dipolo de uma molécula? Mas não é apenas o vetor dipolo de uma molécula que interessa. Se

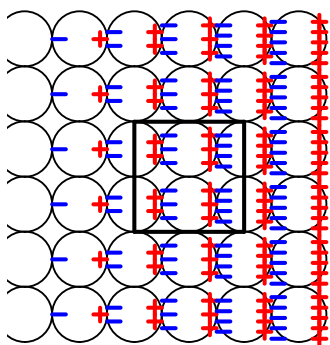
tivermos um dielétrico de baixa densidade, onde quase não há moléculas, o “estado de polarização” certamente é mais fraco do que num dielétrico denso com o mesmo vetor dipolo de cada molécula. Também tem-se que considerar se todas as moléculas estão cooperando ou se os vetores dipolo apontam em direções diversas. Estes três aspectos, magnitude do dipolo, densidade da matéria e uniformidade das direções, podem ser descritos pela seguinte definição de um novo campo: a polarização $\vec{P}(\vec{r})$ da matéria no ponto \vec{r} é a soma de todos os vetores-dipolo dentro de uma esfera com centro \vec{r} , dividida pelo volume da esfera, sendo esta esfera pequena na escala macroscópica, mas ainda suficientemente grande para conter um número elevado ($> 10^5$) de moléculas.

$$\vec{P}(\vec{r}) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{\text{todos os dipolos na esfera de centro } \vec{r}} \vec{p}_i}{V_{\text{esfera}}} \quad (4.5.2)$$

A esfera deve ser tão pequena que ela possa ser considerada um ponto na escala macroscópica, mas ela deve conter ainda um número grande de moléculas. Em palavras podemos expressar a definição (4.5.2) de forma sucinta:

$$\vec{P}(\vec{r}) \text{ é a densidade de dipolo no ponto } \vec{r}. \quad (4.5.3)$$

Veremos agora como a carga de polarização pode ser descrita em termos deste novo campo. Tentaremos adivinhar uma relação. Primeiramente olharemos as unidades. Os módulos dos vetores de dipolo se medem em Coulomb vezes metro. Então o módulo de $\vec{P}(\vec{r})$ se mede em Coulomb por metro quadrado. Se dividirmos isto por uma distância, obteremos uma densidade de carga. Dividir por distância lembra derivada. Mas que tipo de derivada? Deve ser uma derivada que transforme um campo vetorial num campo escalar, pois $\vec{P}(\vec{r})$ é um campo vetorial, e uma densidade de carga é um campo



escalar. Estas considerações já dão uma dica muito óbvia – a derivada deve ser uma divergência. Podemos adivinhar o resto com um desenho com moléculas polarizadas de maneira não uniforme. Na figura 4.5.1 mostramos um pedaço de matéria onde $\vec{P}(\vec{r})$ cresce na direção do próprio $\vec{P}(\vec{r})$. Então nesta região teremos $\text{div } \vec{P} > 0$.

Fig. 4.5.1 Moléculas com dipolos que crescem na direção do vetor \vec{P} . Uma superfície Gaussiana está marcada como caixa preta. Ela contém um excesso de carga negativa.

Percebemos que em qualquer superfície Gaussiana no seio do material sobra carga negativa. Juntando estes indícios, podemos adivinhar qual é a relação entre polarização e densidade de carga de polarização:

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P} \quad (4.5.4)$$

Aqui no ciclo básico vamos nos limitar a este argumento de adivinhação. O aluno que fará alguma disciplina de eletromagnetismo mais avançada conhecerá uma dedução rigorosa desta fórmula¹. Mas para os alunos interessados que queiram conhecer uma dedução formal desde já, ou que não têm uma disciplina de eletromagnetismo na grade curricular, temos uma dedução formal no apêndice desta seção.

Já que obtivemos a informação a respeito da carga de polarização em termos de uma densidade de carga, vamos usar a forma diferencial da lei de Gauss:

$$\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho_L + \rho_p = \rho_L - \text{div } \vec{P} \quad (4.5.5)$$

Olhando esta fórmula, dá vontade de juntar os dois termos de divergência:

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_L \quad (4.5.6)$$

E olhando esta fórmula, ainda dá vontade de definir um novo campo:

$$\vec{D} \stackrel{\text{def.}}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.5.7)$$

¹ Ele aprenderá ainda mais detalhes, por exemplo, que há também contribuições de momentos de quadrupolo para as cargas de polarização. Aqui vamos desprezar estas contribuições.

Maxwell introduziu este campo e chamou-o de *campo de deslocamento*. A parcela de polarização, ou seja, o campo \vec{P} , realmente corresponde a um deslocamento de cargas dentro das moléculas. Maxwell imaginava o espaço repleto de cargas positivas e negativas e associava o campo elétrico \vec{E} também a um deslocamento de cargas. Hoje não se interpreta mais o campo elétrico como um deslocamento de “cargas do vácuo”, mas o nome “*campo de deslocamento*” ficou. Com este novo campo a lei de Gauss fica numa forma extremamente simples:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_L} \quad (4.5.8),$$

ou em forma integral:

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{L \text{ em } V}} \quad (4.5.9).$$

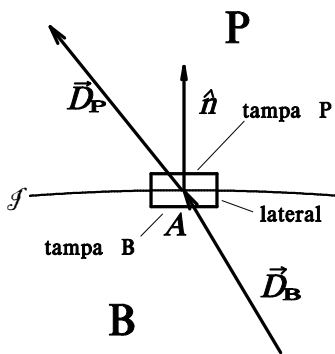


Fig. 4.5.2 Aplicação da lei de Gauss para o campo \vec{D} numa interface de dois meios B e P.

Precisa-se ainda de uma formulação da lei de Gauss específica para interfaces entre substâncias. Imaginem dois materiais B e P que se tocam numa interface \mathcal{J} . Numa região suficientemente pequena esta superfície pode ser considerada como localmente plana, e podemos erguer um vetor normal \hat{n} na superfície nesta região. Vamos escolher o sentido deste vetor tal que ele aponte de B para P. Por esta razão chamei as substâncias de B e P para lembrar de Base do vetor e

Ponta do vetor. Agora vamos escolher uma superfície Gaussiana em forma de uma caixinha com as tampas da caixinha normais ao vetor \hat{n} , ou seja, paralelas à interface. Uma das tampas deve ficar na substância B e a outra na substância P. A altura da caixinha seja h , e esta vamos mandar para zero. A figura 4.5.2 mostra esta situação. A integral de fluxo do campo \vec{D} tem contribuições das tampas e da parte lateral.

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Tampa B}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Tampa P}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Lateral}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (4.5.10)$$

Se escolhermos a área A das tampas suficientemente pequena, as contribuições para o fluxo de \vec{D} que vêm das tampas se transformam em simples multiplicações:

$$\iint_{\text{Tampa B}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = -\vec{D}_B \cdot \hat{n} A, \quad \iint_{\text{Tampa P}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = +\vec{D}_P \cdot \hat{n} A \quad (4.5.11),$$

onde chamei os valores do campo \vec{D} adjacentes à superfície \mathcal{J} nos respectivos lados de \vec{D}_B e \vec{D}_P . No limite de $h \rightarrow 0$ a parte lateral não contribui e a lei de Gauss resulta em $(\vec{D}_P - \vec{D}_B) \cdot \hat{n} A = Q_{L \text{ em } V}$. Dividindo pela área, obtemos no lado direito a densidade superficial de carga líquida na interface:

$$\boxed{(\vec{D}_P - \vec{D}_B) \cdot \hat{n} = \sigma_L} \quad (4.5.12)$$

Na maior parte das aplicações, cargas líquidas são cargas de condução em condutores, e no equilíbrio eles aparecem nas superfícies. Ocasionalmente podemos ter cargas

líquidas também em dielétricos, por exemplo, cargas implantadas dentro do material ou cargas na superfície após um atrito com outro material. Somente neste último caso teríamos uma carga superficial líquida num dielétrico. Mas dentro de capacitores isto seria uma situação pouco típica. Então quando as duas substâncias forem dielétricos, normalmente não há carga líquida superficial na interface, e neste caso a fórmula (4.5.12) significa que a componente normal do campo \vec{D} tem que ser contínua na interface:

$$\boxed{\vec{D}_P \cdot \hat{n} = \vec{D}_B \cdot \hat{n} \quad \text{para P e B ambos dielétricos não atritados}} \quad (4.5.13)$$

As fórmulas (4.5.12) e (4.5.13) são versões da lei de Gauss especificamente adaptadas às interfaces de substâncias.

As leis da eletrostática eram: a lei de Gauss e a lei da existência do potencial. Esta segunda lei escrita em forma diferencial é:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (4.5.14)$$

Esta equação tem três componentes; então na verdade são três equações. A lei de Gauss é uma relação escalar que representa mais uma equação. Então isto dá um total de quatro equações. Para uma situação com condutores, temos quatro incógnitas: os três componentes do campo elétrico e a densidade de carga (que no caso de condutores toma a forma de densidade superficial, mas mesmo assim é uma função escalar). Então tudo estava perfeito: quatro equações e quatro incógnitas.

Mas agora, com a elegante invenção do campo de deslocamento, estragamos tudo! O campo \vec{D} com as suas três componentes representa mais três incógnitas. Para podermos calcular alguma coisa, precisamos de mais equações. Neste caso não se trata de leis fundamentais, mas de descrições de propriedades dos materiais, pois \vec{D} contém a polarização que representa alguma reação de um material. Neste caso uma descrição fenomenológica baseada em dados experimentais sobre cada material é a forma adequada de se escreverem as equações que faltam. Então precisamos de alguma informação empírica que informe como a polarização \vec{P} depende do campo elétrico. Certamente esta dependência corresponde a uma função amigável que pode ser escrita como série de Taylor, e como os campos elétricos que temos nos nossos laboratórios modestos são fracos, podemos supor que os termos quadráticos, cúbicos etc. são desprezíveis. Então a descrição empírica deve ter a forma de uma relação linear entre \vec{P} e \vec{E} . Como as unidades dos módulos de \vec{P} e \vec{E} são diferentes, convém separar nesta dependência linear um fator que conserte as unidades, e um outro que corresponda a um número puro. O fator das unidades pode ser o ϵ_0 . Então podemos escrever a lei empírica na forma

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (4.5.15)$$

O valor numérico χ se chama *susceptibilidade elétrica* do material, e este valor² tem que ser medido experimentalmente para cada material. Se inserirmos esta relação na definição do campo de deslocamento, obteremos:

² Na verdade, para alguns materiais cristalinos o χ pode ser um objeto um pouco mais complicado do que um simples número. Cristais podem ter direções espaciais privilegiadas e conseqüentemente o vetor \vec{P} pode apontar numa direção diferente do vetor \vec{E} . Neste caso χ seria um mapeamento linear que os físicos chamam de *tensor de susceptibilidade*. Mas aqui no ciclo básico podemos limitar-nos ao caso de um χ , que é um simples número.

$$\vec{D} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{E} \quad (4.5.16)$$

Com esta relação vamos resolver o problema do capacitor de placas paralelas com dielétrico. Com a hipótese de que o diâmetro das placas é muito maior que a distância d entre as placas, podemos de novo supor um campo elétrico uniforme na maior parte do interior do capacitor. O módulo deste campo é $|\vec{E}| = V_C/d$. Então o módulo do campo de deslocamento é $|\vec{D}| = \epsilon_0(1+\chi)|V_C|/d$. Se aplicamos a lei de Gauss para interfaces (4.5.12) para a superfície da placa condutora, obtemos $\sigma_L = \epsilon_0(1+\chi)V_C/d$. Multiplicando esta densidade superficial de carga com a área A das placas (desprezando de novo as contribuições complicadas das beiradas e das partes externas das placas), obtemos a carga $|Q| = A\epsilon_0(1+\chi)|V_C|/d$. Então a capacitância é $C = A\epsilon_0(1+\chi)/d$. Comparando este resultado com a fórmula 4.4.2, concluímos que

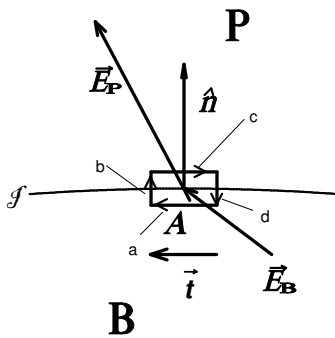
$$\kappa = 1+\chi \quad (4.5.17)$$

Com este resultado sabemos como a susceptibilidade χ pode ser medida. Também podemos escrever a relação entre \vec{D} e \vec{E} de forma simples com a constante dielétrica:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} \quad (4.5.18)$$

O campo de deslocamento é uma ferramenta muito prática para calcular as coisas da eletrostática. Especialmente a lei de Gauss para interfaces é importante. Para muitas aplicações precisamos ainda de uma forma interfacial da lei da existência do potencial. Lembrem-se da formulação integral desta lei (fórmula (3.1.24)):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{para todo caminho fechado} \quad (4.5.19)$$



Agora imaginem uma interface entre duas substâncias B e P. De novo vamos erguer o vetor normal \hat{n} apontando do B para o P. Vamos escolher um caminho de integração que consiste de quatro retas: (a) um deslocamento dentro do meio B descrito por um vetor \vec{t} do plano tangente da interface, (b) um caminho que atravessa a interface andando uma distância h na direção do vetor \hat{n} , (c) um deslocamento descrito pelo vetor $-\vec{t}$ e (d) o retorno para o ponto de partida como está ilustrado na figura 4.5.3.

Fig. 4.5.3 Ilustração para uma formulação da lei de existência de potencial adaptada a interfaces. Caminho fechado na interface de duas substâncias com dois deslocamentos paralelos ao plano tangente.

Para um vetor \vec{t} suficientemente pequeno as contribuições dos trechos (a) e (c) se transformam em simples multiplicações:

$$\int_{(a)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_B \cdot \vec{t} \quad , \quad \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\vec{E}_P \cdot \vec{t} \quad (4.5.20)$$

onde \vec{E}_B e \vec{E}_P são os valores do campo adjacentes à interface nos respectivos materiais B e P. Vamos “matar” as contribuições dos trechos (b) e (d) mandando a altura h do retângulo para zero. Então segue

$$\vec{E}_B \cdot \vec{t} - \vec{E}_P \cdot \vec{t} = 0 \quad (4.5.21)$$

O vetor \vec{t} pode ter qualquer direção dentro do plano tangencial da interface. Com isto a fórmula (4.5.21) significa que a parcela tangencial do campo elétrico tem que ter o mesmo valor dos dois lados da interface. Ou seja, a parcela tangencial do campo elétrico é contínua na interface. É bom saber como obter a parcela tangencial \vec{E}_\parallel do vetor \vec{E} ; muito simples; tira-se do \vec{E} a parte normal:

$$\vec{E}_\parallel = \vec{E} - \vec{E}_\perp = \vec{E} - \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{E}) \quad (4.5.22)$$

Com esta noção de parcela tangencial podemos formular a versão interfacial da lei de existência do potencial:

A parcela tangencial do campo elétrico é contínua numa interface.

$$\vec{E}_{\parallel B} = \vec{E}_{\parallel P} \quad (4.5.23)$$

Veremos alguns exemplos que ilustram a utilidade do campo de deslocamento e das formulações interfaciais das leis³.

Considere um capacitor esférico com uma esfera condutora de raio a e uma cavidade esférica concêntrica de raio interno b . O espaço entre estes condutores esteja preenchido com dois dielétricos. O primeiro, com constante dielétrica κ_1 , fica na região $a \leq r \leq c$, onde c é um raio entre a e b ($a < c < b$), e o segundo, com constante dielétrica κ_2 , preenche o resto do volume entre os condutores. O problema tem simetria esférica e podemos supor que \vec{D} tenha a forma

$$\vec{D}(r, \theta, \varphi) = D_r(r) \hat{r}(\theta, \varphi) \quad (4.5.24)$$

Para uma superfície Gaussiana em forma de esfera de raio $a \leq r \leq b$ e concêntrica com os condutores, temos

$$\oiint_{\odot_r} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D_r(r) \quad (4.5.25)$$

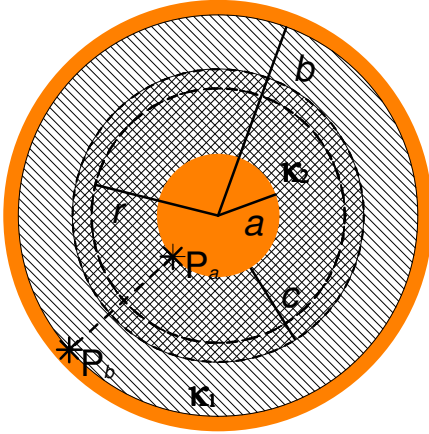
Então com a lei de Gauss para o campo de deslocamento obtemos

$$D_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{para } a \leq r \leq b \quad (4.5.26)$$

onde Q é a carga na esfera interna. Isto é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e a condição (4.5.13) está satisfeita. Mas com a relação entre \vec{D} e \vec{E} dada pela fórmula (4.5.18), percebemos que o campo elétrico não é contínuo na interface entre os dielétricos:

³ Numa disciplina de 4 horas semanais estes exemplos ficam por conta do estudo dos bons alunos em casa.

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{Q \hat{r}(\theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_1 r^2} & \text{para } a \leq r < c \\ \frac{Q \hat{r}(\theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 r^2} & \text{para } c < r \leq b \end{cases} \quad (4.5.27)$$



Mesmo com esta descontinuidade, a condição (4.5.21) está satisfeita, pois a parcela tangencial do campo elétrico é zero em ambos os lados da fronteira entre os dielétricos. Fora da fronteira o campo da (4.5.27) também satisfaz a lei da existência do potencial $\text{rot } \vec{E} = 0$. Além disso este campo é perpendicular às superfícies esféricas; então as superfícies dos condutores são realmente equipotenciais, e temos uma solução completa do problema.

Fig. 4.5.4 Capacitor esférico com dois dielétricos em camadas concêntricas. A figura mostra também uma superfície Gaussiana esférica e um caminho de integração entre pontos nos condutores.

Com este campo podemos calcular a diferença de potencial entre os condutores:

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= \int_{P_a}^{P_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_a^c \frac{Q \hat{r}(\theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_1 r^2} \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) dr + \int_c^b \frac{Q \hat{r}(\theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 r^2} \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\kappa_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right\} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\kappa_2 (c-a)b + \kappa_1 (b-c)a}{\kappa_1 \kappa_2 abc} \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

E com a definição da capacitância obtemos

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 abc \kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2 (c-a)b + \kappa_1 (b-c)a} \quad (4.5.29)$$

Agora veremos um exemplo um pouco mais complicado. De novo consideramos um capacitor esférico com dois dielétricos entre os condutores. Mas desta vez o dielétrico com constante κ_1 preenche o “hemisfério norte”, isto é, a região com $\theta \in [0, \pi/2]$, e o material com constante dielétrica κ_2 preenche o “hemisfério sul”, onde $\theta \in [\pi/2, \pi]$. A figura 4.5.5 mostra este objeto junto com duas superfícies Gaussianas e com um caminho de integração. A dificuldade deste exemplo reside no fato de não haver simetria esférica. Então os argumentos que sempre usamos na aplicação da lei de Gauss não funcionam. Pelo menos um dos campos \vec{E} ou \vec{D} não deve ter simetria esférica. Mas veremos se conseguiremos adivinhar uma solução não trivial. Uma coisa está certa; nos raios a e b o potencial tem que ter simetria esférica. Seria difícil imaginar um potencial que não tivesse também simetria esférica no resto do intervalo $[a, b]$. Se o

potencial tiver simetria esférica, o campo elétrico também terá que ter esta simetria. Então faremos uma tentativa supondo

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r) \hat{r}(\theta, \varphi) \quad (4.5.30).$$

Da (4.5.18) obtemos o campo de deslocamento:

$$\vec{D}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \varepsilon_0 \kappa_1 E_r(r) \hat{r}(\theta, \varphi) & \text{para } \theta \in [0, \pi/2] \\ \varepsilon_0 \kappa_2 E_r(r) \hat{r}(\theta, \varphi) & \text{para } \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \quad (4.5.31).$$

Agora vamos escolher uma superfície Gaussiana no hemisfério norte com as seguintes características: (A) uma face é uma fração de superfície esférica, concêntrica com o capacitor, com raio menor que a que cobre algum ângulo sólido Ω_0 visto a partir do centro do capacitor; (B) uma fração de superfície esférica, concêntrica com o capacitor, com um raio $r \in [a, b]$ que cobre o mesmo ângulo sólido Ω_0 ; (C) um manto cônico que une as superfícies (A) e (B). Como a superfície (A) está dentro do condutor central, o campo é zero e não há fluxo nesta. Como toda superfície (B) está no hemisfério norte, a componente radial do campo de deslocamento não depende dos ângulos θ e φ . Então podemos calcular a integral de fluxo:

$$\begin{aligned} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Omega_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \\ &= \varepsilon_0 \kappa_1 E_r(r) \iint_{\Omega_0} \hat{r}(\theta, \varphi) \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) r^2 d\Omega = \varepsilon_0 \kappa_1 E_r(r) r^2 \Omega_0 \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

A carga líquida que tem dentro da superfície Gaussiana escolhida está localizada na superfície da esfera central, mais precisamente na parte da superfície que está dentro do ângulo sólido Ω_0 . Então temos com a lei de Gauss

$$\varepsilon_0 \kappa_1 E_r(r) r^2 \Omega_0 = \iint_{\Omega_0} \sigma(\theta, \varphi) a^2 d\Omega \quad (4.5.33)$$

onde $\sigma(\theta, \varphi)$ é a densidade superficial de carga livre na esfera de raio a . O que esta fórmula diz é que a integral desta densidade sobre qualquer ângulo sólido dentro do hemisfério norte é proporcional ao tamanho do ângulo sólido independentemente de onde escolhemos este ângulo sólido. Isto é somente possível, se a função $\sigma(\theta, \varphi)$ estiver constante em todo hemisfério norte.

Podemos usar o mesmo argumento para o hemisfério sul. Então lá a função $\sigma(\theta, \varphi)$ também pode ter apenas um único valor, mas este pode ser diferente do valor no hemisfério norte. Chamando estes valores de σ_N e σ_S respectivamente, obtemos

$$\iint_{\Omega_0} \sigma(\theta, \varphi) a^2 d\Omega = \begin{cases} \sigma_N a^2 \Omega_0 & \text{no hemisfério norte} \\ \sigma_S a^2 \Omega_0 & \text{no hemisfério sul} \end{cases} \quad (4.5.34)$$

Então a lei de Gauss (4.5.33) resulta em

$$E_r(r) = \frac{\sigma_N a^2}{\varepsilon_0 \kappa_1 r^2} = \frac{\sigma_S a^2}{\varepsilon_0 \kappa_2 r^2} \quad (4.5.35)$$

Percebemos que o campo elétrico é contínuo na interface dos dielétricos. O campo de deslocamento não é contínuo, mas a parcela normal é contínua, pois ela é zero em ambos os lados. Além disso o campo elétrico obedece à lei $\text{rot } \vec{E} = 0$ e ele termina perpendicular às superfícies nos condutores. Então aparentemente encontramos uma solução do problema. A tensão do capacitor é

$$V_C = \int_a^b E_r dr = \frac{\sigma_N a^2 (b-a)}{\epsilon_0 \kappa_1} = \frac{\sigma_S a^2 (b-a)}{\epsilon_0 \kappa_2} \quad (4.5.36)$$

A carga total na esfera interna é

$$Q_A = \underbrace{2\pi a^2}_{\text{(metade de uma esfera)}} (\sigma_N + \sigma_S) \quad (4.5.37)$$

Da (4.5.36) obtemos os valores de σ_N e σ_S em termos da tensão:

$$Q_A = 2\pi a^2 \left(\frac{\epsilon_0 \kappa_1 V_C ab}{a^2 (b-a)} + \frac{\epsilon_0 \kappa_2 V_C ab}{a^2 (b-a)} \right) \quad (4.5.38)$$

Então obtemos a capacitância

$$C = \frac{Q_A}{V_C} = 2\pi \frac{\epsilon_0 ab}{(b-a)} (\kappa_1 + \kappa_2) \quad (4.5.39)$$

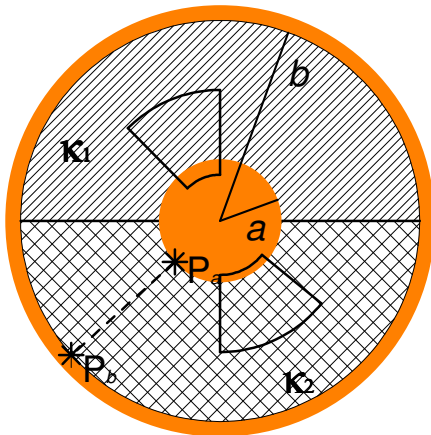


Fig. 4.5.5 Capacitor esférico com dois dielétricos distribuídos em dois hemisférios. A figura mostra também duas superfícies Gaussianas e um caminho de integração.

Exercícios:

E 4.5.1: Um capacitor cilíndrico com raio interno a e raio interno do condutor externo b muito comprido ($L \gg b$) está com seu eixo de simetria apontando na vertical e está preenchido com um líquido até uma altura h . Suponha também $h \gg b$ e $L - b \gg h$. O líquido tem uma constante

dielétrica κ . Calcule a capacitância deste capacitor.

E 4.5.2: Invente um sensor baseado em medidas de capacitâncias que pode ser usado par medir o nível de um líquido dielétrico num tanque. Primeiramente suponha que a constante dielétrica do líquido seja conhecida. Depois modifique sua invenção de tal forma que o sensor sirva também para um líquido com constante dielétrica não conhecida.

E 4.5.3: Escreva os destaques desta seção.

4.5 Apêndice

A densidade macroscópica de carga num ponto \vec{r} é a integral da densidade de carga integrada sobre uma pequena esfera com centro \vec{r} e dividida pelo volume desta esfera:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\substack{\text{esfera de} \\ \text{raio } R \text{ e} \\ \text{centro } \vec{r}}} \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (4.5.40)$$

Podemos escrever este tipo de média de forma mais elegante com a ajuda de uma função que tem o valor $3/(4\pi R^3)$ dentro da esfera de raio R e centro na origem e o valor zero fora desta esfera. Vamos chamar esta função de g :

$$g(\vec{r}) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{para } |\vec{r}| \leq R \\ 0 & \text{para } |\vec{r}| > R \end{cases} \quad (4.5.41)$$

Ela tem a propriedade

$$\iiint g(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1 \quad (4.5.42)$$

onde a integral se estende sobre todo o espaço. A densidade macroscópica na origem de coordenadas seria

$$\rho(0) = \iiint \rho(\vec{r}') g(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (4.5.43)$$

Nesta fórmula se integra sobre o espaço inteiro e a função g garante que somente carga dentro da esfera contribua e ela também toma conta da divisão pelo volume. Se quisermos calcular a densidade macroscópica num outro ponto \vec{r} podemos também usar esta função, mas temos que deslocá-la para esta posição:

$$\rho(\vec{r}) = \iiint \rho(\vec{r}') g(\vec{r}' - \vec{r}) d^3\vec{r}' \quad (4.5.44)$$

Um detalhe está um pouco inconveniente; a função g não é contínua e muito menos diferenciável. Podemos consertar este defeito. Pensando bem, na tomada de uma média macroscópica não especificamos sequer o exato valor do raio da esfera. Então não deve fazer nenhuma diferença se consideramos a contribuição de uma carga na exata superfície da esfera com um peso $1/2$ e a contribuição de uma carga que está já um pouquinho fora da esfera com um peso de $1/100$ no lugar do peso zero. Então podemos substituir a função g por uma outra função diferenciável f que tenha dentro da esfera de raio R essencialmente o valor $3/(4\pi R^3)$ e fora da esfera essencialmente o valor zero, mas que conecte estes valores de forma contínua e diferenciável. A figura 4.5.6 mostra os valores de uma função com um comportamento deste tipo. A função deve satisfazer a mesma condição da função g :

$$\iiint f(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1 \quad (4.5.45)$$

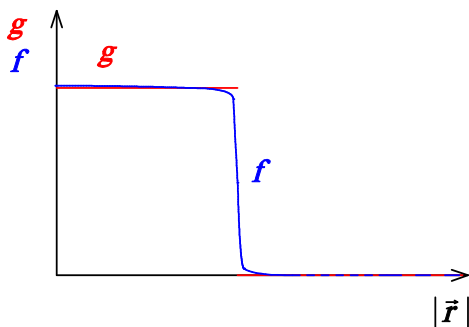


Fig. 4.5.6 Valores das funções g e f em função do módulo do vetor posição. f é uma versão suavizada da função g .

Para poder operar com derivadas sem problemas, vamos substituir a antiga definição de média macroscópica pela definição “suavizada”:

$$\rho(\vec{r}) \stackrel{\text{def.}}{=} \iiint \rho(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3\vec{r}' \quad (4.5.46)$$

Podemos usar a função f também para escrever a definição da polarização de forma mais elegante:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_k \vec{p}_k f(\vec{r}_k - \vec{r}) \quad (4.5.47)$$

onde \vec{r}_k é a posição do k -ésimo dipolo e a soma é tomada sobre todos os dipolos no espaço inteiro. A função f garante que somente os dipolos da esfera de raio R e centro \vec{r} contribuam e ela toma também conta da divisão pelo volume (compare com a definição original (4.5.2)).

Para chegar a uma expressão de densidade de carga associada ao estado de polarização, temos que introduzir as moléculas ou regiões microscópicas correspondentes a estas moléculas. Então vamos dividir todo o espaço em volumes \mathbb{V}_m de tamanho microscópico de tal forma que cada um destes volumes contenha no máximo uma molécula e que todo o espaço seja a união destes volumes; $\mathbb{E} = \bigcup_m \mathbb{V}_m$ com $\mathbb{V}_m \cap \mathbb{V}_k = \emptyset$ para $m \neq k$. Para cada m definimos uma densidade de carga ρ_m que coincida com a densidade verdadeira ρ dentro de \mathbb{V}_m e que seja zero fora de \mathbb{V}_m .

$$\rho_m(\vec{r}) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \rho(\vec{r}) & \text{para } \vec{r} \in \mathbb{V}_m \\ 0 & \text{para } \vec{r} \notin \mathbb{V}_m \end{cases} \quad (4.5.48)$$

Então a densidade verdadeira de carga é

$$\rho(\vec{r}) = \sum_m \rho_m(\vec{r}) \quad (4.5.49)$$

Vamos substituir esta soma na fórmula da densidade macroscópica de carga (4.5.46):

$$\rho(\vec{r}) = \iiint \sum_m \rho_m(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3\vec{r}' \quad (4.5.50)$$

O truque essencial será trocar a ordem de integral e soma:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_m \iiint \rho_m(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3\vec{r}' \quad (4.5.51)$$

Em cada termo deste somatório, a função $f(\vec{r}' - \vec{r})$ está sendo integrada com uma função $\rho_m(\vec{r}')$ que é diferente de zero apenas numa minúscula vizinhança de um ponto \vec{r}_m que é o centro do volume \mathbb{V}_m . No caso, seria conveniente definir o centro de maneira semelhante como se define o centro de massa, mas aqui substituindo massa por carga:

$$\vec{r}_m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\iiint \vec{r}' \rho_m(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{\iiint \rho_m(\vec{r}') d^3\vec{r}'} \quad \text{se } \iiint \rho_m(\vec{r}') d^3\vec{r}' \neq 0 \quad (4.5.52)$$

Obviamente isto funciona somente se tiver carga líquida no volume \mathbb{V}_m . Se este volume for neutro deveremos definir

$$\vec{r}_m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\iiint_{\mathbb{V}_m} \vec{r}' d^3\vec{r}'}{\iiint_{\mathbb{V}_m} d^3\vec{r}'} \quad \text{se} \quad \iiint \rho_m(\vec{r}') d^3\vec{r}' = 0 \quad (4.5.53)$$

Como $\rho_m(\vec{r}')$ é zero fora de \mathbb{V}_m , não faz nenhuma diferença se alteramos os valores das funções $f(\vec{r}' - \vec{r})$ fora do volume \mathbb{V}_m . Então podemos fazer aproximações desde que estas aproximações sejam boas dentro de \mathbb{V}_m . Como \mathbb{V}_m é minúsculo (muito menor que o raio R da esfera de fazer médias) deve ser possível usar uma expansão em série de Taylor por volta do ponto \vec{r}_m :

$$f(\vec{r}' - \vec{r}) \approx f(\vec{r}_m - \vec{r}) + \left(\text{grad } f \Big|_{\vec{r}_m - \vec{r}} \right) \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_m) + \dots \quad (4.5.54)$$

Aqui vamos terminar esta expansão já no termo linear. Substituindo esta aproximação na (4.5.51), obtemos:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_m f(\vec{r}_m - \vec{r}) \iiint \rho_m(\vec{r}') d^3\vec{r}' + \sum_m \left(\text{grad } f \Big|_{\vec{r}_m - \vec{r}} \right) \cdot \iiint \rho_m(\vec{r}') (\vec{r}' - \vec{r}_m) d^3\vec{r}' \quad (4.5.55)$$

A integral $\iiint \rho_m(\vec{r}') d^3\vec{r}' = q_m$ é a carga líquida no volume \mathbb{V}_m e o primeiro termo da (4.5.55) é a densidade da carga líquida na posição \vec{r} . Na tarefa de escrever os pontos de destaque da seção 3.3, deve ter sido mencionado o momento de dipolo de uma distribuição de carga (fórmula 3.3.30). Reconhecemos a integral no segundo termo da (4.5.55) como momento de dipolo das cargas da região \mathbb{V}_m :

$$\vec{p}_m \stackrel{\text{def.}}{=} \iiint \rho_m(\vec{r}') (\vec{r}' - \vec{r}_m) d^3\vec{r}' \quad (4.5.56)$$

O segundo termo da (4.5.55) é a densidade de carga de polarização. Então com (4.5.56) temos

$$\rho_p(\vec{r}) = \sum_m \left(\text{grad } f \Big|_{\vec{r}_m - \vec{r}} \right) \cdot \vec{p}_m \quad (4.5.57)$$

Agora vamos comparar esta expressão com a divergência da polarização. Calculando a divergência da (4.5.47), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{P}(\vec{r}) &= \nabla \cdot \sum_k \vec{p}_k f(\vec{r}_k - \vec{r}) = \\ &= \sum_k \vec{p}_k \cdot \nabla_{\vec{r}} f(\vec{r}_k - \vec{r}) = - \sum_k \vec{p}_k \cdot \nabla_{(\vec{r}_k - \vec{r})} f(\vec{r}_k - \vec{r}) \end{aligned} \quad (4.5.58)$$

onde anotei como um índice no operador nabla a variável à qual se refere a derivada. Comparando as fórmulas (4.5.58) e (4.5.57) verificamos que

$$\rho_p(\vec{r}) = - \text{div } \vec{P}(\vec{r}) \quad (4.5.59).$$

Isto é a fórmula adivinhada (4.5.4). Mas, com esta dedução, percebemos também que nossa expressão do campo de deslocamento (4.5.7) com validade da (4.5.8) é apenas uma aproximação. Poderíamos ter incluído mais termos na série de Taylor (4.5.54). De fato termos de mais alta ordem (termos de quadrupolo) podem ser incluídos na definição do campo de deslocamento. Mas geralmente a aproximação que termina nos termos de dipolo é bastante boa.