

## 4.2 Cálculo de capacitâncias

Com os métodos que combinam a lei de Gauss com simetria, podemos calcular valores de capacitâncias para três geometrias de capacitores. Para uma, este cálculo é exato e para as demais geometrias, é uma aproximação que pode ser muito boa dependendo dos parâmetros geométricos do capacitor.

Começamos com o caso da simetria esférica, que permite um cálculo exato. Imagine um capacitor que consiste de uma esfera condutora concentricamente posicionada dentro de uma cavidade condutora também esférica. Seja  $a$  o raio da esfera interna e  $b$  o raio da cavidade. A forma externa do condutor com cavidade nem interessa. Para calcular a capacitância deste arranjo, imaginamos uma carga  $q$  na esfera interna e uma carga  $-q$  na externa. De fato neste caso a carga no condutor externo também não terá nenhuma importância sobre a diferença de potencial entre os condutores. Mas, para manter o esquema discutido na seção anterior, podemos imaginar o  $-q$  no condutor com cavidade.

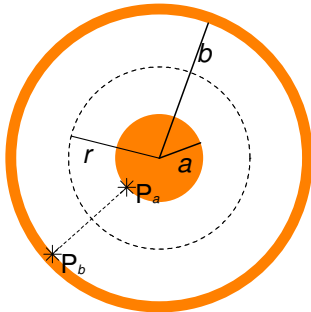


Fig. 4.2.1 Capacitor esférico. Está mostrada também uma superfície Gaussiana esférica de raio  $r$  e um caminho de integração entre dois pontos  $P_a$  e  $P_b$ .

Uma maneira de calcular a diferença de potencial entre os condutores é através do campo. Este caminho de cálculo é indicado quando a determinação do campo é facilitada pela simetria. No caso precisamos do campo na região entre os condutores:  $a \leq r \leq b$ . Com os argumentos de simetria, que explicamos na seção 2.5, o campo elétrico nesta região tem que ter a forma

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \hat{r}(\theta, \varphi) E_r(r) \quad (4.2.1),$$

onde  $r, \theta$  e  $\varphi$  são as coordenadas esféricas com origem no centro das esferas do capacitor.  $\hat{r}(\theta, \varphi)$  é o vetor unitário que aponta na direção radial para fora. Escolhendo uma superfície Gaussiana esférica com raio  $r$ , temos com a lei de Gauss:

$$\oiint_{\partial\mathcal{O}_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.2.2).$$

Então o campo na região  $a \leq r \leq b$  é

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \hat{r}(\theta, \varphi) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.2.3).$$

Para calcular a diferença de potencial, vamos usar um caminho de integração reto numa linha radial e obtemos:

$$\begin{aligned} V^A - V^B &= \int_{P_a}^{P_b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_a^b = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} \end{aligned} \quad (4.2.4).$$

Este resultado pode ser substituído na definição de capacitância:

$$C = \frac{q}{V_c} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (4.2.5)$$

Percebemos que uma maneira de obter valores grandes para a capacitância é uma escolha dos raios tal que  $b-a$  fique pequeno.

Veremos um exemplo com valores concretos para adquirir uma intuição a respeito das ordens de grandeza de valores de capacitâncias. Vamos supor uma esfera interna de um metro de diâmetro: então  $a=0,5\text{ m}$  e o raio  $b$  apenas um milímetro maior que o  $a$ . Neste caso obtemos

$$C = 4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \frac{0,500 \text{ m } 0,501 \text{ m}}{0,001 \text{ m}} = 2,79 \times 10^{-8} \text{ F} \quad (4.2.6)$$

Então, apesar da nossa intenção de escolher um valor pequeno para  $b-a$ , este capacitor enorme tem apenas uma capacitância de aproximadamente 28 nF!

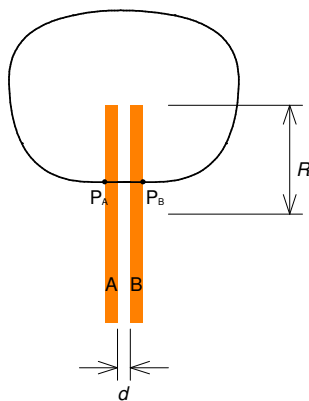
É interessante ver o que acontece com a capacitância quando mandamos  $b$  para infinito.  $C$  não se aproxima de zero, mas o limite é  $4\pi\epsilon_0 a$ . Neste limite, não deve fazer nenhuma diferença se substituirmos a forma esférica da cavidade por uma forma geométrica qualquer. Então no limite de uma cavidade com paredes infinitamente afastadas da esfera central, a capacitância se torna uma propriedade somente da esfera de raio  $a$ . Por esta razão o valor  $4\pi\epsilon_0 a$  é também chamado de *capacitância de uma esfera de raio a*.

O aluno atento que está cursando a disciplina de Fenômenos de Transporte concomitantemente deve ter percebido que o cálculo da capacitância de um capacitor esférico é idêntico ao cálculo da resistência térmica de uma isolamento térmica esférica. O inverso da capacitância corresponde à resistência térmica e o resultado

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C = 4\pi\epsilon_0 a \neq 0 \quad (4.2.7)$$

corresponde ao resultado curioso segundo o qual uma camada esférica de isolante térmico infinitamente grossa não resulta num isolamento térmico perfeito.

Agora vamos calcular a capacitância de um capacitor cujos condutores são placas planas e paralelas. Vamos supor discos circulares de raio  $R$  e vamos imaginar estes discos muito próximos um do outro de tal forma que a distância  $d$  que as separa é muito menor que o raio;  $d \ll R$ . Com as aproximações que faremos resulta que a espessura dos discos não influencia nos resultados e não precisamos especificar estes valores.



A figura 4.2.2 mostra esta configuração. Mas neste desenho a distância  $d$  nem é tão pequena em comparação com  $R$ . Mantivemos  $d$  relativamente grande para poder enxergar os detalhes e deixamos a condição  $d \ll R$  por conta da imaginação. Então, por favor, imaginem talvez um  $d/R \approx 10^{-6}$  ou algo ainda menor.

Fig. 4.2.2 Capacitor de placas paralelas. A figura mostra também dois caminhos entre pontos  $P_A$ ,  $P_B$ .

Primeiramente vamos calcular o campo elétrico na região entre as placas do capacitor e longe da beirada das placas. Quando estamos longe da beirada, esperamos que a distribuição de carga e o campo tenham simetria plana. Vamos escolher coordenadas cartesianas com o eixo  $z$  perpendicular às placas e com o valor  $z=0$  na superfície interna do condutor A. Com “superfície interna” queremos dizer a superfície que está voltada para o outro condutor. A simetria implica que o campo deve ter a forma

$$\vec{E}(z) = \hat{z} E_z^{\text{int}}(z) \quad \text{para pontos entre as placas e longe da beirada} \quad (4.2.8).$$

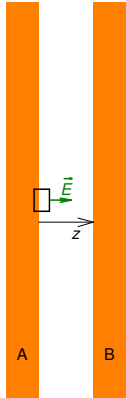


Fig. 4.2.3 Coordenada  $z$  para descrição do campo na região entre as placas e longe da beirada. É mostrada também uma superfície Gaussiana.

Colocamos um índice “int” na componente  $z$  do campo para indicar que se refere somente à região interna do capacitor e bem longe da beirada. Nesta região vamos imaginar uma superfície Gaussiana em forma de uma caixa cujo fundo fica dentro do condutor A e cuja tampa de área  $a$  fica na distância  $z$  da superfície do condutor A. Tal superfície está indicada na figura 4.2.3 com um pequeno retângulo. O fluxo do campo elétrico através desta superfície é  $a E_z^{\text{int}}(z)$ . Como a carga dentro da caixa independe de  $z$ , segue, com a lei de Gauss, que  $E_z^{\text{int}}(z)$  não depende de  $z$ . Então o campo entre as placas e longe das beiradas é uniforme. Seja  $q_{\text{caixa}}$  a carga dentro da caixa correspondente à superfície Gaussiana. Então a lei de Gauss informa

$$a E_z^{\text{int}} = \frac{q_{\text{caixa}}}{\epsilon_0} \quad (4.2.9)$$

ou

$$E_z^{\text{int}} = \frac{q_{\text{caixa}}}{\epsilon_0 a} = \frac{\sigma_{\text{A, int, longe beirada}}}{\epsilon_0} \quad (4.2.10)$$

onde  $\sigma_{\text{A, int, longe beirada}}$  é a densidade de carga superficial no lado interno da placa A na região longe da beirada. A (4.2.10) corresponde ao resultado (2.4.15) de seção 2.4. Então a simetria aproximada válida longe da beirada implica também que esta densidade é aproximadamente constante.

Com o resultado (4.2.10), podemos escrever a voltagem no capacitor em termos da densidade  $\sigma_{\text{A, int, longe beirada}}$  ;

$$V^A - V^B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_z^{\text{int}} d = \frac{\sigma_{\text{A, int, longe beirada}} d}{\epsilon_0} \quad (4.2.11)$$

Falta determinar a carga no condutor A. Na figura 4.2.2 mostramos também dois pontos  $P_A$  e  $P_B$  nos respectivos condutores com as mesmas coordenadas  $x$  e  $y$  e ambos longe da beirada dos discos. A diferença de potencial entre estes pontos pode ser calculada de duas formas: podemos integrar pelo caminho mais curto e obtemos o resultado  $E_z^{\text{int}} d$ , ou podemos integrar saindo pelo outro lado da placa, do lado externo, e seguir uma linha de força do campo elétrico para tornar o fator cosseno do produto escalar  $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  mais simples. A figura mostra um esboço deste caminho de integração. É apenas um esboço e não garantido que a linha de força tenha exatamente esta forma. Mas uma coisa é clara; este caminho é muito mais longo do que o caminho reto. Lembrem

que devemos imaginar um  $d/R \approx 10^{-6}$  e as figuras mostram um  $d$  exageradamente grande! A integral neste caminho longo também tem que dar o resultado  $E_z^{\text{int}} d$ . Concluimos que o campo na parte externa deve ser muito mais fraco do que o campo na parte interna. Com a lei de Gauss, a densidade superficial na parte externa das placas é relacionada com o campo na superfície externa (lembrem do resultado na seção 2.4 da fórmula 2.4.15). Então, na avaliação da carga total no condutor  $A$ , vamos simplesmente desprezar a carga localizada na parte externa da placa. Resta somente uma região complicada, a saber, a região perto da beirada (tanto na parte externa como na interna). Nesta região a densidade superficial de carga varia e fica na mesma ordem de grandeza do valor  $\sigma_{A, \text{int, longe beirada}}$ . O que podemos fazer com esta contribuição para a carga em  $A$ ? O seguinte argumento mostra que esta parcela também pode ser desprezada: a quantidade de carga na região interna vale  $\pi(R-l_b)^2 \sigma_{A, \text{int, longe beirada}}$ , onde  $l_b$  é a largura de beirada onde as coisas começam a ficar complicadas. Para grandes valores de  $R$ , esta parcela de carga cresce como  $R^2$ . Por outro lado, a carga na região da beirada é proporcional à circunferência e cresce apenas como  $R$ . Então para valores muito grandes de  $R$  a parcela complicada da beirada começa a ser desprezível. Com estas aproximações podemos dizer

$$q^A \approx A \sigma_{A, \text{int, longe beirada}} \quad (4.2.12)$$

onde  $A = \pi R^2$  é a área da face interna da placa. Substituindo este resultado e a (4.2.11) na definição da capacitância, obtemos o valor aproximado da capacitância de um capacitor de placas paralelas:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.2.13)$$

É interessante comparar este resultado com o resultado do capacitor esférico. Quando olhamos uma esfera numa escala muito pequena em comparação com o raio da esfera, a superfície esférica parece plana. Sabemos isto do nosso dia a dia quando olhamos o chão debaixo dos nossos pés que é perfeitamente plano apesar de ser um pedacinho de esfera terrestre. Então esperamos que o resultado do capacitor esférico se transforme no resultado (4.2.13) quando  $b-a \ll a$ . De fato neste caso temos  $4\pi ab \approx 4\pi a^2$ ; este valor toma o papel do  $A$  da fórmula (4.2.13), e o  $b-a$  é a distância entre os condutores.

Fig. 4.2.4 Capacitor com placas paralelas parcialmente superpostos. Somente a parte superposta contribui apreciavelmente para a capacitância.

Este resultado é uma característica bastante geral. Quando a distância entre os condutores fica muito pequena, o valor da capacitância pode aproximadamente ser descrita pela expressão do capacitor de placas paralelas. Isto é especialmente interessante quando somente uma parte dos condutores tem distâncias pequenas. A figura 4.2.4 mostra um exemplo com placas planas. Neste caso as placas estão lateralmente deslocadas e praticamente somente a parte sobreposta das placas contribui apreciavelmente para a capacitância. A parcela sobreposta pode ser facilmente alterada e isto pode ser usado para construir capacitores cuja capacitância é ajustável. A figura 4.2.5 mostra uma

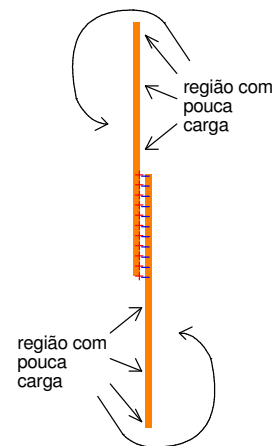


imagem deste tipo de capacitor. Eles são usados em rádios para sintonia com uma estação de rádio.



Fig. 4.2.5 Capacitor variável. Um sistema de placas paralelas está montado num eixo giratório que permite mergulhar este sistema para dentro de um segundo sistema de placas paralelas. Os dois sistemas formam os dois condutores do capacitor. Quanto mais um sistema fica mergulhado dentro do outro, maior será a capacitância.

Com a fórmula da capacitância (4.2.13) temos condições de entender mais alguns detalhes das aplicações de capacitores. Na seção anterior mencionamos

aplicações para sensoriamento e medições. Um bom exemplo disso fornece o microfone de capacitor. Um microfone é um dispositivo que transforma uma vibração mecânica, geralmente vindo pelo ar em forma de onda sonora, num sinal elétrico. Imaginem um capacitor de placas paralelas com uma placa fixa e com a outra em forma de um filme fino de metal depositado numa membrana que pode vibrar com o som. A vibração altera a distância entre as placas e provoca uma alteração da capacitância. Se a tensão neste capacitor for mantida constante, estas alterações da capacitância provocam fluxos de carga que podem ser registradas por um circuito eletrônico.

O terceiro tipo de capacitor que pode ser tratado com as técnicas da lei de Gauss é um capacitor feito de cilindros coaxiais. Este precisa também de aproximações. No caso estas aproximações se tornam boas quando a diferença do raio interno do condutor externo e do raio do condutor interno for muito pequena comparada com o comprimento do capacitor. Seguindo o conselho didático que não se deve tirar dos alunos a possibilidade de descobrir as coisas sozinho, não vamos expor os detalhes deste cálculo aqui. O exercício E 4.2.2 corresponde ao cálculo desta capacitância. Vale dar um conselho aos alunos: O professor que tira dos alunos a possibilidade de descobrir as coisas sozinho atua de forma inadequada. **Mas nada adianta atuar de forma certa, se o aluno se furta a esta oportunidade buscando as respostas na internet!**

Os capacitores cilíndricos aparecem nos laboratórios naturalmente. Muitos sinais elétricos são enviados de um lugar para outro através de cabos coaxiais. Estes têm um arame cilíndrico central e, isolado dele, uma tela metálica que forma um cilindro oco.



Estes dois condutores formam um capacitor cilíndrico. A figura 4.2.6 mostra um cabo coaxial cujas camadas foram cortadas de forma escalonada para mostrar cada camada. Em volta do condutor externo há ainda uma capa preta de plástico de proteção. Uma moeda de um Real serve para comparação de tamanho.

Fig. 4.2.6 Cabo coaxial.

**Exercícios:**

**E 4.2.1:** A esfera do nosso gerador de alta tensão que usamos, por exemplo, na experiência da gaiola de Faraday (Fig. 2.4.1), tem um diâmetro de 25 cm. Calcule a capacitância desta esfera. Calcule a quantidade de carga armazenada nela se a diferença de potencial entre a esfera e o infinito (paredes da sala) for de 100 kV. Calcule a energia armazenada no capacitor formado pela esfera e a parede da sala nesta condição. Quando você leva um choque neste gerador, esta energia é depositada no seu corpo. Quando você deixa uma massa  $m$  cair no seu pé de uma altura de um metro, você também deposita energia no seu corpo (no caso no pé). Calcule qual deve ser a massa  $m$  para ter o mesmo valor de energia do choque elétrico.

**E 4.2.2:** Deduza uma fórmula da capacitância de um capacitor cilíndrico muito comprido.

**E 4.2.3:** Escreva os pontos de destaque desta seção.