

### 3.2 Potencial e condutores

Para podermos trabalhar com o potencial elétrico, precisamos de uma boa compreensão do conceito gradiente. Então é bom reforçar as lembranças do curso de cálculo. A operação de calcular o gradiente gera um campo vetorial a partir de um campo escalar. Já falamos um pouco sobre as maneiras de visualizar um campo vetorial. Podemos usar desenhos de vetores representativos, ou seja, uma “tabela desenhada”, ou podemos traçar linhas de força (que poderíamos melhor chamar de linhas de campo, porque nem sempre se trata de campos de força). Como podemos visualizar um campo escalar?

Uma forma é com a ajuda de *superfícies de nível*. Este método é bem conhecido pelos geógrafos. No caso deles se trata da tarefa de representar um campo num mundo bidimensional. Eles querem representar a altura do terreno acima do nível do mar. Em mapas, eles juntam pontos que têm a mesma altura acima do nível do mar com uma linha. Fazendo isto com vários valores de altura gera-se um sistema de curvas conhecidas como *curvas de nível*. Analogamente podemos gerar famílias de superfícies no espaço tridimensional que correspondem a determinados valores do campo escalar que queremos visualizar. Por exemplo, o potencial elétrico de uma carga pontual seria representado com a ajuda de um conjunto de esferas com centro no lugar da carga. Se escolhermos diferenças de potencial constantes entre superfícies consecutivas, por exemplo 1 V entre cada esfera e seu vizinho, notamos que as esferas perto da carga têm um espaçamento menor do que as esferas mais afastadas. A figura 3.2.1 mostra um exemplo. Mas neste caso representamos apenas um corte bidimensional através do sistema de esfera, porque desenhar esferas é um pouco difícil.

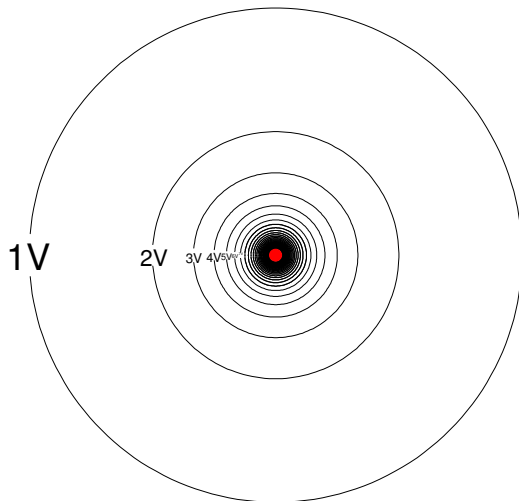


Fig. 3.2.1 Equipotenciais em volta de uma carga positiva.

No caso em que o campo escalar é um potencial, chamamos estas superfícies de nível de *equipotenciais*.

Agora queremos ver como se relacionam as superfícies de nível de um campo escalar com os vetores do campo gradiente deste campo escalar.

Seja  $\phi$  algum campo escalar. O gradiente deste campo é, no final das contas, uma derivada. Derivadas servem para descrever as variações dos valores de uma função na vizinhança de um ponto,

substituindo a verdadeira variação por uma aproximação linear. Então se nos afastarmos de um ponto  $\vec{r}$  com um deslocamento  $\delta\vec{r} = \hat{x}\delta x + \hat{y}\delta y + \hat{z}\delta z$ , alteramos o valor da função por

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z + O_{\text{superior}}(\delta\vec{r}) = \\ &= (\text{grad}\phi) \cdot \delta\vec{r} + O_{\text{superior}}(\delta\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.2.1),$$

onde  $O_{\text{superior}}(\delta\vec{r})$  representa um termo de erro de ordem superior, o que significa que

$$\lim_{|\delta\vec{r}| \rightarrow 0} \frac{O_{\text{superior}}(\delta\vec{r})}{|\delta\vec{r}|} = 0 \quad (3.2.2).$$

Repare que o termo principal  $(\text{grad } \phi) \cdot \delta\vec{r}$  depende linearmente do vetor de deslocamento  $\delta\vec{r}$ . Então temos ali um mapeamento linear. Este mapeamento é chamado de *diferencial da função*  $\phi$  e é escrito como  $d\phi$ . O valor  $(\text{grad } \phi) \cdot \delta\vec{r}$  resulta da aplicação do mapeamento  $d\phi$  no vetor  $\delta\vec{r}$ :<sup>1</sup>

$$d\phi[\delta\vec{r}] = (\text{grad } \phi) \cdot \delta\vec{r} \quad (3.2.3).$$

Agora imagine que estamos andando numa superfície de nível da função  $\phi$ . Pela própria definição de superfície de nível, este passeio não altera os valores da função:  $\phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \phi(\vec{r})$ . Então para passeios numa superfície de nível vale

$$0 = \phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = (\text{grad } \phi) \cdot \delta\vec{r} + O_{\text{superior}}(\delta\vec{r}) \quad (3.2.4)$$

Dividindo esta igualdade por  $|\delta\vec{r}|$  e tomando o limite  $|\delta\vec{r}| \rightarrow 0$ , obtemos com a (3.2.2)

$$(\text{grad } \phi) \cdot \left( \lim_{|\delta\vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}}{|\delta\vec{r}|} \right) = 0 \quad (3.2.5)$$

O vetor

$$\vec{t} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{|\delta\vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}}{|\delta\vec{r}|} \quad (3.2.6)$$

é um vetor normalizado do plano tangencial da superfície de nível no ponto  $\vec{r}$ . Como o nosso passeio na superfície de nível era completamente arbitrário, podemos gerar qualquer vetor tangencial normalizado.

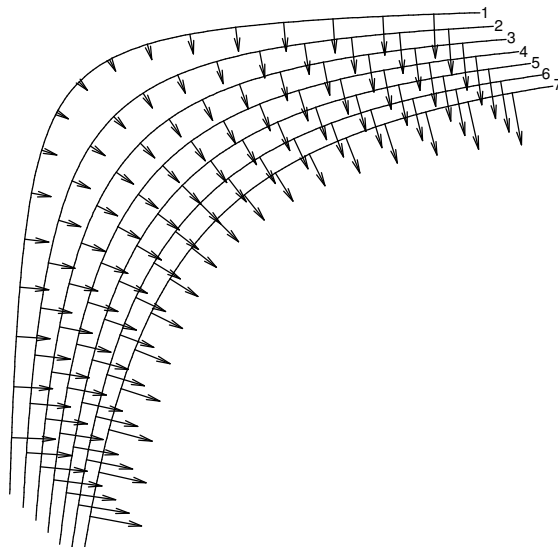


Fig. 3.2.2 Exemplo de curvas de nível de uma função definida no plano e representação do gradiente desta função.

Então a igualdade (3.2.5) significa que o vetor gradiente está perpendicular ao plano tangente. Se andarmos na direção e no mesmo sentido do gradiente, temos  $(\text{grad } \phi) \cdot \delta\vec{r} \geq 0$ . Portanto o sentido do gradiente é tal que ele aponta para a superfície vizinha de maior valor da função. O módulo é inversamente proporcional à densidade das superfícies de nível. A figura 3.2.2 mostra um exemplo de superfícies<sup>2</sup> de nível e

gradiente de uma função.

<sup>1</sup> Repare como fica a última frase usando o vocabulário dos matemáticos Brasileiros: “O valor  $(\text{grad } \phi) \cdot \delta\vec{r}$  resulta da aplicação da aplicação  $d\phi$  no vetor  $\delta\vec{r}$ ”!

<sup>2</sup> Na verdade, curvas, porque o desenho é apenas bidimensional.

No caso do potencial elétrico devemos inverter o sinal do gradiente para obter o campo elétrico. Então o campo elétrico fica perpendicular às equipotenciais e aponta na direção da equipotencial vizinha de menor valor.

Com esta preparação matemática vamos agora analisar o potencial macroscópico e o campo elétrico macroscópico numa situação estática que envolve condutores. Sabemos que numa situação estática o campo elétrico macroscópico é zero dentro de um condutor. Conseqüentemente o potencial elétrico macroscópico é constante dentro de um condutor em equilíbrio. Então a superfície de um condutor em equilíbrio é sempre uma equipotencial. Se houver campo elétrico macroscópico diferente de zero fora do condutor, as linhas de força necessariamente terminam na superfície do condutor formando um ângulo reto com a superfície. Podemos ver este detalhe aproximadamente com as fileiras de fubá. A figura 3.2.3 mostra um exemplo.

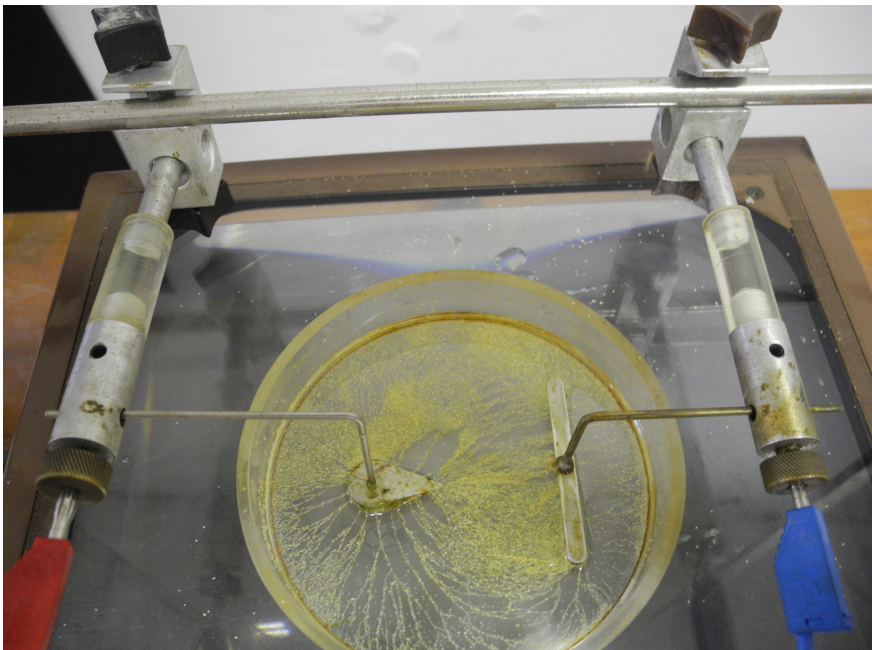


Fig. 3.2.3 Linhas de força reveladas por fileiras de grãos de fubá; As linhas terminam nos objetos metálicos fazendo um ângulo reto com a superfície do metal. Como sempre neste tipo de experiência, precisa-se de um pouco de benevolência na interpretação, pois os grãos grudam e as linhas não são perfeitas.

Na figura 3.2.3 um dos corpos metálicos tem aproximadamente a forma de um ferro de passar roupa com uma ponta. Na imagem parece haver uma densidade de linhas maior perto desta ponta. Isto é um fenômeno interessante. Para entender este fato, vamos esboçar as linhas de força na vizinhança de uma ponta fina de alguma agulha eletricamente carregada. O que sabemos com o resultado da presente seção é que no nosso esboço as linhas têm que terminar na agulha perpendicular à superfície. Então o esboço resulta em algo parecido com a figura 3.2.4.

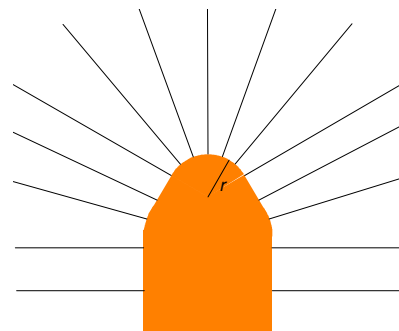


Fig. 3.2.4 Esboço das linhas de força na vizinhança da ponta de uma agulha.

Pela exigência de terminarem perpendiculares à superfície metálica, as linhas da parte curvada necessariamente divergem uma da outra. Se o raio de curvatura (na figura indicado com  $r$ ) for pequeno, esta disposição geométrica leva a uma densidade de linhas muito grande perto da ponta. Com a lei de Gauss podemos concluir algo sobre o módulo do campo nesta região. Imagine linhas de força numa região sem carga elétrica como exemplificado na figura 3.2.5

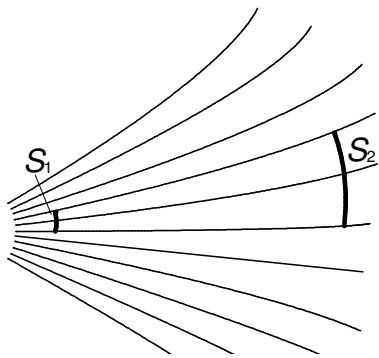


Fig. 3.2.5 Exemplo de linhas de força do campo elétrico numa região sem cargas.

Vamos escolher alguma superfície pequena  $S_1$  perpendicular às linhas de força. As linhas que passam pela beirada desta superfície formam um tubo. Mais adiante, seguindo as linhas de força no sentido do campo, podemos marcar outra superfície  $S_2$ , também perpendicular às linhas. As superfícies  $S_1$  e  $S_2$  formam junto com a parte lateral do tubo uma superfície fechada (se orientamos  $S_1$  e  $S_2$

adequadamente). Se não há carga na região, o fluxo do campo elétrico através desta superfície é zero. As partes laterais não apresentam fluxo porque o campo é tangencial às linhas que formam esta superfície lateral. Então o fluxo através de  $S_1$  tem que compensar o fluxo através de  $S_2$ . Agora imagine que escolhemos  $S_1$  tão pequena que tanto a integral sobre  $S_1$  quanto a sobre  $S_2$  podem ser substituídas por simples multiplicações de campo com vetor superfície. Como os vetores superfície têm a mesma direção do campo, podemos concluir que as duas áreas de  $S_1$  e  $S_2$  são inversamente proporcionais aos respectivos valores dos módulos do campo. Se adotamos a convenção de nunca terminar e nem criar uma linha de força em lugar sem carga elétrica, temos o mesmo número de linhas de força atravessando as superfícies  $S_1$  e  $S_2$ . Portanto a densidade superficial (número por área) das linhas é proporcional ao módulo do campo.

Com os conhecimentos adquiridos com esta pequena reprise da lei de Gauss, podemos voltar para a análise do campo perto da ponta de uma agulha. Como vimos na figura 3.2.4, a densidade de linhas cresce muito perto da ponta e isto indica que perto da ponta há enormes valores do campo elétrico. Então descobrimos uma maneira de criar campos elétricos intensos. Basta carregar uma agulha condutora que possui uma ponta muito fina, com pequeno raio de curvatura da ponta.

Uma aplicação deste “efeito ponta” é o para-raio. A ideia deste dispositivo é provocar um raio em lugar onde ele não apresenta perigo para evitar a formação de um raio em lugar inconveniente. O para-raio tem uma ponta e em situações de grandes diferenças de potencial entre a Terra e partes de uma nuvem, aparecem perto desta ponta valores tão elevados do campo elétrico que o ar se ioniza. Nesta região ionizada nasce o raio. A ionização do ar pode ocorrer de duas formas: as forças elétricas que atuam nos elétrons das moléculas do ar podem ser suficientes para arrancar os elétrons, ou a outra possibilidade é por impacto de partículas eletricamente carregadas. Partículas carregadas eventualmente presentes no ar são aceleradas pelas forças elétricas e destroem moléculas numa subsequente colisão.

Há também uma aplicação negativa ou inversa do “efeito ponta”. Quando se trabalha com alta tensão, precisa-se evitar a formação de faíscas. Então precisam-se construir os equipamentos evitando pontas finas. Todas as superfícies condutoras nestes equipamentos devem ser suaves com grandes raios de curvatura.

Há ainda uma aplicação científica interessante. Normalmente os elétrons presentes dentro de um metal não conseguem sair do metal para o espaço vazio. As forças elétricas exercidas pelos núcleos positivos dos átomos impedem a saída dos elétrons.

Mas quando se aplica um campo elétrico de extrema intensidade na superfície com orientação apontando para a superfície, existe a possibilidade de arrancar elétrons. Este fenômeno é conhecido por *emissão de elétrons por campo*. Precisa-se de campos elétricos na ordem de  $10^9 \text{ V/m}$  até  $10^{10} \text{ V/m}$  para poder arrancar elétrons de um metal. Numa ponta fina de uma agulha com raio de curvatura de algumas dezenas de nanômetros podem-se gerar campos desta ordem de grandeza. Se houver pequenas elevações na superfície da ponta da agulha, a emissão de elétrons é mais intensa nestes lugares. Isto pode ser usado para formar imagens da superfície da ponta. A ponta é montada no centro de um recipiente esférico de vidro. Na superfície interna do recipiente é posta uma camada de um material fluorescente que emite luz quando atingido por elétrons de alta energia<sup>3</sup>. Entre a ponta no centro e esta camada de material fluorescente se aplica alta tensão, sendo a agulha negativa e o material fluorescente positivo. Os elétrons emitidos seguem as linhas de campo em linha reta e formam uma imagem da ponta na superfície do recipiente. Para não perturbar a viagem dos elétrons da ponta até a tela esférica com colisões, é necessário criar um bom vácuo no recipiente. Hoje este tipo de microscópio é ultrapassado; há métodos de formar imagens de superfícies que permitem melhor resolução.

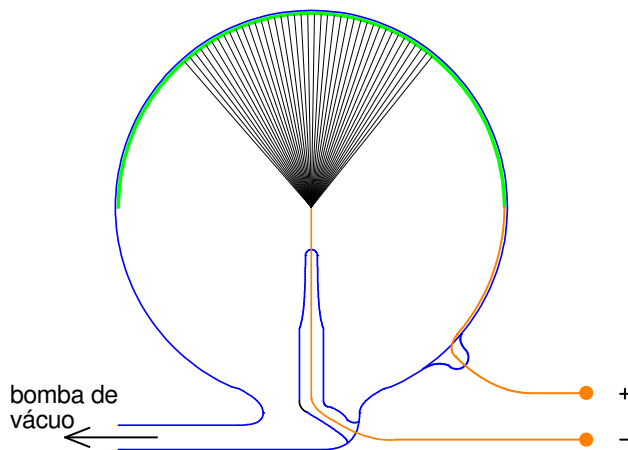


Fig. 3.2.6 Esquema de um microscópio de emissão por campo. A tela fluorescente está representada em verde, as partes de vidro em azul e as partes metálicas em abóbora.

Os condutores empenham um papel extremamente importante em quase todas as aplicações da eletricidade. Mas a presença de um condutor cria certo problema para o pesquisador ou para o engenheiro que quer calcular o campo elétrico. Nas seções 1.5 e

1.6 vimos como o campo elétrico pode ser calculado para uma dada configuração de carga elétrica. Mas, quando colocamos um corpo carregado perto de um condutor, a configuração de carga geralmente não é dada. Já que as cargas dentro do condutor têm mobilidade permitindo deslocamentos arbitrariamente grandes dentro do condutor, a própria configuração de carga se torna uma incógnita. Sabemos apenas que a carga fica na superfície, mas não sabemos como ela se distribui nas superfícies.

Pense no exemplo da experiência que descrevemos na seção 1.2 (figura 1.2.13 e 1.2.14). Mostramos nesta experiência que uma chapa de alumínio entre um bastão eletrizado e uma bolinha de isopor impede a atração da bolinha. Naquela ocasião argumentamos de forma qualitativa que uma redistribuição das cargas na chapa de metal e no suporte da chapa cria uma cortina de cargas com sinal oposto ao daquelas do bastão, e esta cortina impede a atração da bolinha. Mas se quiséssemos calcular o campo, teríamos um problema que não poderia ser resolvido com os métodos das seções 1.5 e 1.6 porque a própria distribuição das cargas é desconhecida.

Nesta situação o potencial elétrico é a ferramenta adequada para calcular o campo. Quando se quer calcular algo, tem-se que usar aquilo que é conhecido. Então não

<sup>3</sup> Este tipo de substância se usava nos antigos tubos de televisão onde a imagem era formada por impacto de elétrons nesta superfície fluorescente.

adianta partir da configuração de cargas, pois esta não é conhecida. Por outro lado sabemos que o potencial é constante dentro de um condutor numa situação estática. Então podemos partir de certos valores do potencial nos condutores do problema. Esta abordagem é usada na *teoria do potencial*. Grande parte desta teoria foi elaborada por Gauss. Aqui, no ciclo básico, não vamos nos aprofundar nesta teoria. Veremos apenas a formulação do problema e uma aplicação muito simples, porém extremamente importante.

A ideia é formular todo o problema da eletrostática inteiramente em termos do potencial. Podemos recompor a lei de Coulomb juntando a lei de Gauss com a lei da existência do potencial. Simplesmente escrevemos o campo elétrico na forma  $-\text{grad}V$  e substituímos isto na lei de Gauss. Mas neste caso é mais prático usar a forma diferencial da lei de Gauss, ou seja, a fórmula 2.3.21.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{E} &= -\text{grad}V \\ & & \Downarrow & \\ \text{div grad}V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Repare que usamos letras em negrito porque estamos aqui sempre tratando dos campos macroscópicos. Para o campo verdadeiro, que contém flutuações devido à agitação térmica das partículas microscópicas, um potencial não deve nem existir. A divergência de um gradiente corresponde à aplicação do operador de Laplace:

$$\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.2.8)$$

Então a junção da lei de Gauss com a lei da existência de potencial fica na forma sucinta:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2.9)$$

Isto é uma equação diferencial parcial, o que significa uma equação diferencial contendo derivadas parciais da função incógnita. Problemas em que a própria configuração de carga nas superfícies dos condutores é desconhecida se resolvem da seguinte maneira: a equação diferencial (3.2.9) é resolvida apenas nas regiões fora dos condutores e a presença dos condutores entra na questão apenas em forma de *condição de contorno*. Isto significa que se procuram somente soluções da equação cujos valores nas superfícies dos condutores tenham os valores dos potenciais destes condutores. No espaço fora dos condutores, onde as cargas não têm mobilidade, a distribuição de carga, ou seja, a função  $\rho$ , é supostamente conhecida. Desta forma se consegue formular um problema bem determinado em que a desconhecida distribuição de cargas nas superfícies dos condutores não aparece como incógnita.

Veremos um exemplo. Considere uma enorme chapa metálica plana. Uma carga quase<sup>4</sup> pontual de valor  $q$  se encontra numa distância  $d$  da chapa. Vamos supor que  $d$  seja muito menor que as dimensões da chapa e que a carga se encontre bem no centro, ou seja, longe das beiradas de tal forma que possamos considerar a chapa como infinitamente grande. A presença desta carga vai deslocar as cargas móveis dentro do metal e aparecerá alguma carga superficial na chapa. Queremos saber como será o campo elétrico nesta situação, e que cargas superficiais aparecerão no metal. Podemos ainda supor que a chapa metálica esteja conectada com um fio de cobre que se estende para bem longe onde vamos escolher o valor de potencial como zero. Então o potencial da chapa também é zero.

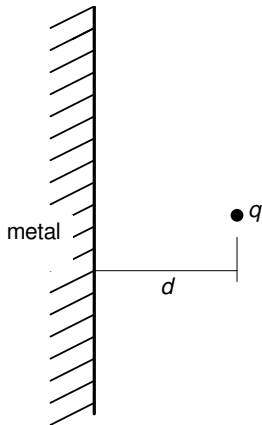


Fig. 3.2.7 Carga na frente de uma placa metálica.

Para resolver a equação diferencial (3.2.9) com a condição de contorno  $V = 0$  na chapa, usaremos o “método Becker”. O senhor Becker foi o meu Professor de Cálculo que me impressionou certa vez com o seguinte comentário: “Se você escreve uma função no papel e mostra que ela é solução de uma equação diferencial, ninguém tem o direito de perguntar de onde veio esta solução, desde que você mostre que ela é solução.” - Especialmente numa prova, a solução pode ter vindo do seu vizinho!

Então podemos tirar uma solução “do bolso”. No caso o “bolso” é a coleção das coisas que já sabemos. Já conhecemos a solução deste problema. A questão é somente como a reconhecemos. Bem, as linhas do campo elétrico precisam entrar na placa metálica perpendicularmente. Vasculhando nossa memória visual, lembramos da figura 1.4.11. Esta figura mostrava as linhas de força por volta de duas cargas de sinais opostos. Esta imagem nos fornece a dica para achar a solução. Imagine uma segunda carga pontual de valor  $-q$  atrás da placa na posição que seria a imagem da posição da carga  $q$  num espelho cuja face espelhada coincide com a superfície da placa. E, além disso, imagine que tiramos a placa de metal totalmente fora. Então sobram apenas as duas cargas. A figura 3.2.8 mostra as linhas de força desta configuração agora de forma calculada e desenhada e não realizada experimentalmente com fubá.

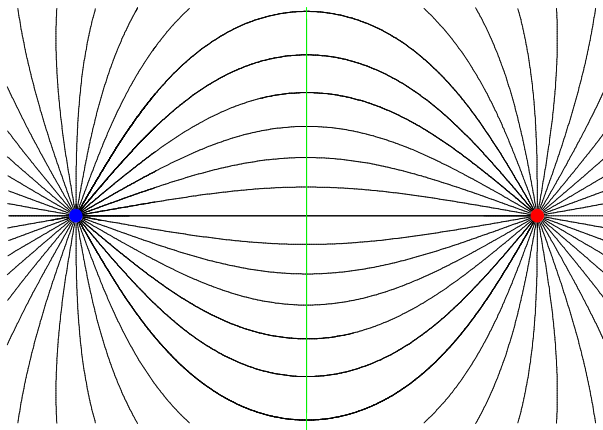


Fig. 3.2.8 Linhas de força do campo de duas cargas de sinais opostos com mesmo módulo. As linhas de força atravessam o plano que fica simetricamente entre as cargas perpendicularmente.

O potencial gerado por estas duas cargas naturalmente cumpre as leis da eletrostática; então este potencial é solução da equação (3.2.9). Além disso, por simetria, o potencial no plano especular é zero. Pois as distâncias  $r_1$  e  $r_2$  das duas cargas

<sup>4</sup> Supomos uma carga quase pontual, para evitar densidade de carga infinitamente alta de tal forma que a equação (3.2.9) possa ser usada sem problemas. De fato o físico Dirac inventou uma generalização do conceito de função que permite descrever mesmo cargas pontuais com uma densidade de carga. Os matemáticos desenvolveram depois uma teoria rigorosa destas funções generalizadas.

para qualquer ponto no plano são iguais e com

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_{-q}|} \right\} \quad (3.2.10)$$

resulta  $V(\vec{r})=0$  no plano especular. Então este potencial cumpre a condição de contorno de ser zero na superfície da placa. Dentro da placa este potencial não coincide com o potencial que existe no mundo real, mas isto não interessa, pois estamos apenas procurando uma solução fora no metal. Então temos uma solução do problema. Pode-se mostrar que este tipo de problema tem no máximo uma solução. No apêndice formulamos e demonstramos um teorema a respeito. Com este *teorema da unicidade* sabemos que temos não apenas uma solução, mas a solução do problema.

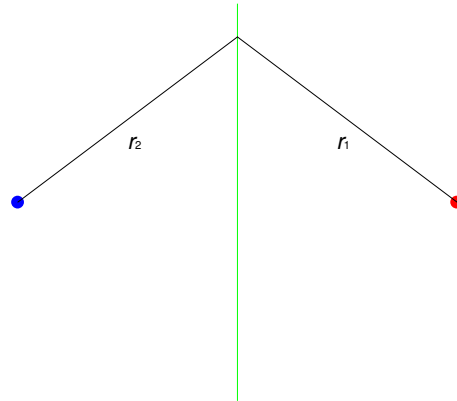


Fig. 3.2.8 As distâncias  $r_1$  e  $r_2$  das duas cargas para qualquer ponto no plano especular são iguais.

Então o campo elétrico no semiespaço fora do metal (no lado da carga) é idêntico ao campo gerado por duas cargas pontuais. Na verdade este campo é gerado pela carga  $q$  e por uma distribuição na superfície do metal. Quem quiser calcular a densidade local de carga na superfície do metal pode fazer isto com a lei de Gauss, com a fórmula 2.4.15. Para a carga  $q$  não faz diferença se as forças que atuam são geradas por esta distribuição superficial, ou por uma carga imagem no outro lado de plano especular. Então podemos concluir que uma carga na frente de um metal plano é atraída como se visse uma imagem de si mesma no espelho, mas a imagem tem o sinal de carga oposto. Concluimos que a força de atração é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre placa e carga.

Com este resultado podemos entender por que é tão difícil arrancar um elétron de um metal. Poder-se-ia pensar que deve ser completamente impossível arrancar um elétron porque, ao atravessar a superfície, a viagem começa com uma distância  $d = 0$  então com uma força infinitamente grande. Mas há duas razões que permitem a saída de elétrons. Primeiramente devemos nos lembrar de que todo o nosso argumento é válido apenas no contexto da idealização macroscópica. Então no momento da passagem, quando  $d = 0$ , não podemos tomar nossa descrição ao pé da letra. Em segundo lugar há um efeito quântico, que discutiremos na Física IV, que permite que partículas consigam escapar de uma região cercada por uma barreira de energia potencial mesmo tendo uma energia cinética menor que a altura da barreira. Ou seja, as partículas quânticas se comportam como se cavassem um túnel através da barreira. Por isto este efeito é chamado *efeito túnel*.

### Exercícios:

**E 3.2.1:** Minas Gerais tem muitos morros. É um ótimo exercício passear num fim de semana nestes morros pensando na noção de gradiente. Pense na função altura geográfica. Ande numa linha de nível e imagine o gradiente da função altura nos lugares



por onde você passa. Depois ande na direção do vetor gradiente e imagine a densidade das linhas de nível que você está atravessando. Quando você chegar ao topo do morro, pense no vetor gradiente existente neste ponto. Ainda no topo, imagine agora uma curva de nível que fica 0,5 m abaixo do nível da sua posição. Esta curva é uma linha fechada. Imagine os vetores gradiente nesta curva. Para onde eles apontam? Agora imagine que a altura acima do nível do mar fosse o potencial elétrico num mundo bidimensional. Imagine então os vetores do campo elétrico naquela curva de nível que está 0,5 m abaixo da sua posição. Para onde este campo aponta? O que você poderia afirmar sobre a carga elétrica na sua região neste mundo bidimensional imaginado?

**E 3.2.2:** Uma carga pontual  $q$  se encontra na frente de uma placa metálica plana e infinitamente extensa, como discutido nesta seção. Calcule a densidade superficial de carga  $\sigma$  na superfície da placa. Repare que se trata de uma densidade que depende da posição! Use coordenadas cilíndricas para escrever esta função (o eixo  $z$  do sistema de coordenadas deve conter a carga e a carga imagem). Uma vez determinado  $\sigma$ , integre esta função sobre toda a placa.

**E 3.2.4:** Se um desenho de linhas de força for bem feito, a densidade (= número de linhas por área) deve ser proporcional ao módulo do campo. Verifique com pontos no plano especular se a figura 3.2.8 está bem feita. Repare que a densidade de linhas é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre linhas vizinhas no desenho.

**E 3.2.5:** Escreva os pontos de destaque da seção.

### 3.2 Apêndice

**Teorema de unicidade:** Considere corpos condutores  $K_1, \dots, K_N$  que ocupam volumes  $V_1, \dots, V_N$  no espaço físico  $\mathbb{E}$ . Os volumes  $V_1, \dots, V_N$  são considerados conjuntos fechados:  $V_k = \bar{V}_k$ . Seja  $\rho$  uma densidade contínua de carga no restante do espaço, isto é, no conjunto de pontos  $\mathbb{E} \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N)$ . Esta distribuição de carga  $\rho$  seja diferente de zero apenas dentro de alguma esfera de raio finito<sup>5</sup>. Os potenciais elétricos dos corpos  $K_1, \dots, K_N$  sejam  $V_1, \dots, V_N$  respectivamente. Então existe no máximo uma solução da equação diferencial (3.2.9) cuja extensão contínua para o fecho  $\overline{\mathbb{E} \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N)}$  cumpre as condições de ter os respectivos valores  $V_1, \dots, V_N$  nas superfícies dos condutores e que vai para zero no infinito pelo menos como  $\sim 1/r$  (ou mais rápido).

#### Demonstração:

Vamos supor que existam duas soluções  $V_A$  e  $V_B$ , ambos satisfazendo a equação diferencial (3.2.9) no conjunto de pontos  $\mathbb{E} \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N)$ , ambos (continuados continuamente até  $\overline{\mathbb{E} \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N)}$ ) tendo os valores  $V_1, \dots, V_N$  nas superfícies dos condutores  $K_1, \dots, K_N$  e ambos caindo pelo menos como  $\sim 1/r$  no infinito. Subtraindo a equação

<sup>5</sup> Na verdade a restrição para uma esfera finita não é necessária para o teorema, Mas sem ela pode ocorrer que não exista nenhuma solução da equação diferencial com as propriedades especificadas.

$$\Delta V_B = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2.11)$$

da equação

$$\Delta V_A = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2.12)$$

percebemos que a função  $\phi \stackrel{\text{def.}}{=} V_A - V_B$  satisfaz a equação

$$\Delta\phi = 0 \quad (3.2.13).$$

Nas superfícies dos condutores esta função é zero já que  $V_A$  e  $V_B$  coincidem nestas superfícies. Também  $\phi$  cai pelo menos como  $\sim 1/r$  no infinito. Se as soluções  $V_A$  e  $V_B$  forem realmente diferentes, existe algum ponto  $\vec{r}_*$  em  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)}$  onde  $\phi$  é diferente de zero. Sem restrição da generalidade podemos supor que  $\phi(\vec{r}_*) > 0$ . Se  $\phi(\vec{r}_*) < 0$  basta trocar os papéis de  $V_A$  e  $V_B$ . Como  $\phi = 0$  nas superfícies dos condutores, o ponto  $\vec{r}_*$  seguramente não fica nas superfícies dos condutores mas no interior de  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)}$ , ou seja, em  $\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)$  se supusermos que os conjuntos  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_N$  são fechados. Como  $\phi$  cai pelo menos como  $\sim 1/r$  no infinito, podemos escolher alguma esfera finita tal que os valores de  $\phi$  nos pontos da superfícies desta esfera que pertencem a  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)}$  sejam menores que  $\phi(\vec{r}_*)/2$ . Além disso, podemos escolher esta esfera tal que ela contenha o ponto  $\vec{r}_*$  e tenha alguma intersecção não vazia com pelos menos um dos  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_N$ . Seja  $\mathbb{F}$  esta esfera e vamos defini-la incluindo sua superfície de tal forma que ela seja um conjunto fechado ( $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ ). Então  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)} \cap \mathbb{F}$  é um conjunto compacto e a função contínua  $\phi$  assume um máximo dentro deste conjunto. Este máximo não é trivial, ou seja, a função  $\phi$  não é constante, pois  $\phi = 0$  em alguma das superfícies dos condutores dentro de  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)} \cap \mathbb{F}$  e  $\phi(\vec{r}_*) > 0$ . Este máximo não pode ser menor que  $\phi(\vec{r}_*)$ . Como os valores de  $\phi$  na beirada de  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)} \cap \mathbb{F}$  são todos menores que  $\phi(\vec{r}_*)/2$ , concluímos que o máximo é atingido num ponto  $\vec{r}_{\max}$  no interior de  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)} \cap \mathbb{F}$ . Existe algum ponto  $\vec{r}_N$  na vizinhança de  $\vec{r}_{\max}$  onde o gradiente de  $\phi$  é diferente de zero e onde  $\phi(\vec{r}_{\max}) > \phi(\vec{r}_N) > \phi(\vec{r}_*)/2$ . A superfície de nível correspondente ao valor  $\phi(\vec{r}_N)$  está contida no interior de  $\overline{\mathbb{E} \setminus (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \dots \cup \mathbb{V}_N)} \cap \mathbb{F}$ . Esta superfície de nível  $S$  é uma superfície fechada. Em nenhum ponto desta superfície de nível, o gradiente de  $\phi$  aponta para fora. Em  $\vec{r}_N$  e numa vizinhança de  $\vec{r}_N$ , o gradiente é diferente de zero. Então  $\oint_S (\text{grad } \phi) \cdot d\vec{S} \neq 0$  para esta superfície. Mas com o teorema de Gauss temos  $\oint_{\partial V} (\text{grad } \phi) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\text{grad } \phi) dV$ . Então  $\oint_S (\text{grad } \phi) \cdot d\vec{S} \neq 0$  contradisse a equação  $\Delta\phi = 0$ . Portanto as duas soluções  $V_A$  e  $V_B$  têm que coincidir.