

2.5 Aplicações da lei de Gauss para distribuições de carga com simetria

Para distribuições de carga com alto grau de simetria, a lei de Gauss permite calcular o campo elétrico com muita facilidade. Precisamos explicar o conceito de simetria. O que significa simetria? Por exemplo, todo mundo vai concordar que uma perfeita esfera possui simetria. Mas o que queremos dizer com isto? Aqui na eletrostática, usaremos uma noção de simetria que corresponde a transformações do nosso espaço físico do referencial usado.

Com transformação do espaço físico quero dizer uma substituição de pontos do espaço por outros pontos do espaço, ou seja, temos um mapeamento¹ que mapeia o espaço em si. Se usamos o símbolo \mathbb{E} para o conjunto de todos os pontos do espaço, uma transformação do espaço é um mapeamento $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$. Mas, para falar de simetrias, não interessa qualquer tipo de transformação. Vamos admitir somente transformações que conservam distâncias de pares de pontos. Isto significa que para quaisquer pontos A e B do espaço a distância entre A e B deve ser igual à distância entre os pontos imagem $T(A)$ e $T(B)$:

$$\text{para todo } A \text{ e } B \in \mathbb{E}: \quad d(A, B) = d(T(A), T(B)) \quad (2.5.1).$$

Temos as seguintes transformações que cumprem esta condição: translações, giros, imagens especulares e combinações destas operações. A figura 2.5.1 mostra exemplos destas operações.

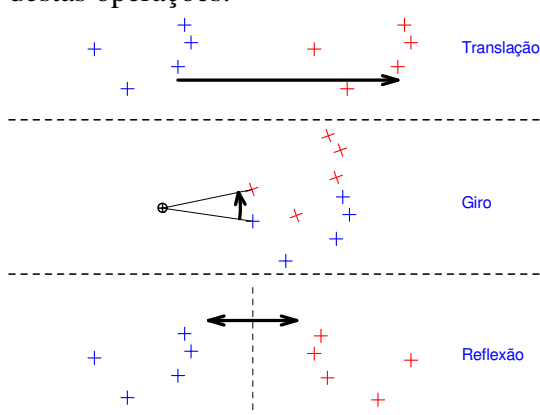


Fig. 2.5.1 Exemplos de transformações do espaço que conservam distâncias. Os pontos originais são mostrados em azul e os pontos imagem em vermelho.

Seja T uma destas transformações que conservam distâncias. Agora imaginem algum objeto físico O material no espaço. Podemos construir um novo objeto \tilde{O} colocando o material do objeto O que se encontrava no ponto A no ponto $T(A)$.

Fazendo isto com todos os pontos no espaço que contém alguma matéria do objeto O , obtemos o novo objeto \tilde{O} . Se ninguém nota a diferença dos objetos O e \tilde{O} , vamos dizer que o objeto O possui T como *elemento de simetria*.

Veremos exemplos; para começar, um contraexemplo: imagine uma bola perfeitamente esférica. Esta bola possui simetria de translação? Se transladamos esta bola, obtemos uma bola igual, mas todo mundo vai notar que a nova bola está em outro lugar. Então o objeto novo pode ser distinguido do objeto original e a bola não possui simetria de translação. Mas obviamente qualquer giro por volta de qualquer eixo que passa pelo centro da bola é uma operação de simetria da bola. Também qualquer tomada de imagem de espelho com plano especular que contém o centro da bola é um elemento de simetria da bola.

Como primeiro exemplo da aplicação da lei de Gauss para distribuições de cargas com simetria, investigaremos logo uma distribuição com simetria esférica. Uma distribuição

¹ Os matemáticos brasileiros usariam o termo “aplicação”.

de carga no espaço é também um objeto físico, e a nossa definição de elemento de simetria pode ser aplicada. Vamos dizer que uma distribuição de carga tem simetria esférica, se ela tiver exatamente os mesmos elementos de simetria de uma bola perfeitamente simétrica. Se colocarmos a origem de coordenadas no centro da bola e usarmos coordenadas esféricas $\langle r, \theta, \varphi \rangle$, que se relacionam com as cartesianas da forma

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.5.2),$$

temos uma distribuição de carga com simetria esférica exatamente quando a densidade de carga é uma função somente da coordenada r . Isto ocorre porque as coordenadas θ e φ sofrem alterações quando aplicamos os elementos de simetria: giro e reflexão. Somente r não muda nestas operações.

O campo elétrico gerado por uma distribuição com simetria deve ter a mesma simetria. Se ele não tivesse esta simetria, poder-se-ia detectar a aplicação da transformação T observando mudanças do campo elétrico. Então se a distribuição, por exemplo, possui simetria esférica, o campo gerado por esta distribuição também tem que ter simetria esférica. Para ver quais são as consequências da simetria esférica para o campo, vamos escrever o campo elétrico usando as coordenadas esféricas. Vamos escrever o vetor $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ na base ortonormal $\langle \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi} \rangle$ que, no ponto com coordenadas $\langle r, \theta, \varphi \rangle$, aponta nas direções dos eixos de coordenadas. Estes vetores básicos podem ser definidos derivando o vetor posição $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$ em relação às coordenadas r, θ, φ :

$$\hat{r} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{\left| \partial \vec{r} / \partial r \right|}, \quad \hat{\theta} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \vec{r} / \partial \theta}{\left| \partial \vec{r} / \partial \theta \right|}, \quad \hat{\varphi} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \vec{r} / \partial \varphi}{\left| \partial \vec{r} / \partial \varphi \right|}, \quad (2.5.3).$$

O leitor deve desenhar estes vetores numa figura que mostre os eixos de coordenadas x, y, z e os ângulos θ e φ para um ponto qualquer (Exercício 2.5.3). Note que estes vetores básicos dependem da posição. Então eles são funções das coordenadas. Olhando com mais cuidado, você descobre que estes vetores dependem de θ e φ , mas não dependem de r . Então numa notação mais cuidadosa devemos escrever $\langle \hat{r}(\theta, \varphi), \hat{\theta}(\theta, \varphi), \hat{\varphi}(\theta, \varphi) \rangle$. Vamos escrever $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ nesta base:

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \hat{r}(\theta, \varphi) E_r(r, \theta, \varphi) + \hat{\theta}(\theta, \varphi) E_\theta(r, \theta, \varphi) + \hat{\varphi}(\theta, \varphi) E_\varphi(r, \theta, \varphi) \quad (2.5.4).$$

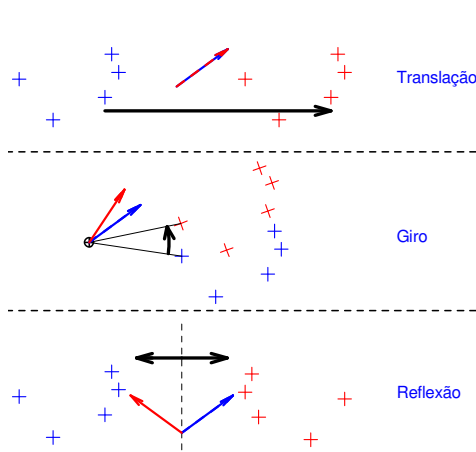


Fig. 2.5.2 Comportamento de vetores nas translações, giros e reflexões.

Quando aplicamos uma transformação T do espaço físico que conserva as distâncias, devemos observar que um vetor sofre também determinadas alterações. Por exemplo, um giro vai correspondentemente girar o vetor. Interessante é o comportamento de um vetor na reflexão num espelho. A componente do vetor paralela ao plano do espelho não sofre nada com a transformação especular, e a componente perpendicular ao plano do espelho muda de sinal.

A translação não altera vetores. A figura 2.5.2 mostra os comportamentos de vetores sob translações, giros e reflexões.

Agora vamos olhar para um ponto P com coordenadas $\langle r, \theta, \varphi \rangle$ e considerar a reflexão num espelho que contém todo o eixo de coordenadas z e o ponto P . Este plano contém também a origem, ou seja, o centro da esfera; com isto sabemos que a reflexão neste espelho é um elemento de simetria. Como P fica dentro do plano de espelho, o ponto imagem de P coincide com o próprio P . Consequentemente o vetor $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ tem que coincidir com o vetor espelhado. \hat{r} e $\hat{\theta}$ ficam dentro do plano de espelho e $\hat{\varphi}$ está perpendicular ao espelho. Consequentemente o vetor campo espelhado neste ponto é

$$\text{vetor espelhado} = \hat{r}(\theta, \varphi) E_r(r, \theta, \varphi) + \hat{\theta}(\theta, \varphi) E_\theta(r, \theta, \varphi) - \hat{\varphi}(\theta, \varphi) E_\varphi(r, \theta, \varphi) \quad (2.5.5).$$

Se o vetor espelhado coincide com o vetor original, segue imediatamente que $E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0$. Agora consideramos um plano especular que contém a origem, o ponto P e que fique perpendicular ao vetor $\hat{\theta}$. Com o mesmo tipo de argumento que acabamos de usar, segue $E_\theta(r, \theta, \varphi) = 0$. Então sobra apenas

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \hat{r}(\theta, \varphi) E_r(r, \theta, \varphi) \quad (2.5.6)$$

Se aplicamos um giro, o vetor básico $\hat{r}(\theta, \varphi)$ é girado de tal forma que ele coincide exatamente com o vetor original no novo ponto. Então o vetor $\hat{r}(\theta, \varphi)$ já toma conta de toda a mudança que $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ deve sofrer. Consequentemente $E_r(r, \theta, \varphi)$ não deve sofrer nenhuma mudança num giro. Mas, como θ e φ são afetadas por giros, concluímos que a função $E_r(r, \theta, \varphi)$ não pode depender destas coordenadas. Então estes argumentos de simetria restringem o campo elétrico bastante. Este deve ter a forma

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \hat{r}(\theta, \varphi) E_r(r) \quad (2.5.7)$$

Somente uma única função $E_r(\cdot)$ precisa ser determinada. Esta última tarefa pode ser resolvida com a ajuda da lei de Gauss.

Para determinar o valor incógnito $E_r(r)$, escolhemos uma superfície Gaussiana em forma esférica com centro na origem e com raio r . A lei de Gauss informa que

$$\oiint_{\partial \odot_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\odot_r} \rho dV \quad (2.5.8)$$

Nesta fórmula indicamos a superfície e o volume da esfera de raio r com os desenhos “ $\partial \odot_r$ ” e “ \odot_r ” respectivamente. O interessante é que a integral de superfície pode ser calculada apesar do fato de não conhecermos a função \vec{E} completamente. Já vimos na seção 2.3 como se calcula uma integral de superfície sobre uma esfera. Usando as coordenadas esféricas, obtemos

$$\oiint_{\partial\mathcal{O}_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E}(r, \theta, \varphi) \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad (2.5.9)$$

Substituindo a expressão (2.5.7) do campo, obtemos

$$\oiint_{\partial\mathcal{O}_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} E_r(r) \hat{r}(\theta, \varphi) \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad (2.5.10).$$

Mas $\hat{r}(\theta, \varphi) \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) = 1$ e $E_r(r) r^2$ não depende das variáveis de integração e pode ser tirado das integrais. Então sobra

$$\oiint_{\partial\mathcal{O}_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = r^2 E_r(r) \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\varphi d\theta = 4\pi r^2 E_r(r) \quad (2.5.11)$$

Substituindo isto na lei de Gauss, obtemos

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{O}_r} \rho dV \quad (2.5.12).$$

Este resultado permite determinar a função incógnita $E_r(\cdot)$:

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint_{\mathcal{O}_r} \rho dV \quad (2.5.13)$$

e temos o campo perfeitamente determinado:

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{\hat{r}(\theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint_{\mathcal{O}_r} \rho dV \quad (2.5.14)$$

Veremos um exemplo com uma distribuição esférica bem simples: imagine uma esfera de raio R homogeneamente preenchida com carga elétrica. Neste caso a integral de volume do lado direito resulta simplesmente na carga total da esfera, se $r \geq R$ e numa fração da carga total no caso $r < R$ sendo esta fração determinada pela razão dos volumes das esferas com raio r e R . Então

$$\iiint_{\mathcal{O}_r} \rho dV = \begin{cases} Q_{total} & \text{para } r \geq R \\ Q_{total} \frac{r^3}{R^3} & \text{para } r < R \end{cases} \quad (2.5.15)$$

Então o campo elétrico deste tipo de bola carregada é

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{\hat{r}(\theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \begin{cases} Q_{total} & \text{para } r \geq R \\ Q_{total} \frac{r^3}{R^3} & \text{para } r < R \end{cases} \quad (2.5.16)$$

Percebemos que o campo fora da bola coincide com o campo de uma carga pontual no centro da bola com o valor de carga igual da carga total da bola. Este resultado já tinha sido visto na Física II para o caso do campo gravitacional.

Para distribuições de carga $\rho(r)$ mais gerais podemos calcular a integral do lado direito da fórmula (2.5.14) usando as coordenadas esféricas. Depois de ter visto como se transforma uma integral de superfícies sobre uma superfície esférica numa integral

dupla com coordenadas esféricas², é fácil descobrir como é uma integral de volume em coordenadas esféricas. Imagine que estejamos no ponto com coordenadas $\langle r_q, \theta_q, \varphi_q \rangle$ coletando as contribuições para a integral de volume neste ponto. Quando variamos o ângulo θ_q por um valor infinitesimal $\delta\theta_q$, avançamos uma distância $r_q \delta\theta_q$. Se variamos o ângulo φ_q por um valor infinitesimal $\delta\varphi_q$, avançamos uma distância $r_q \sin \theta_q \delta\varphi_q$, e este avanço ocorre numa direção perpendicular ao avanço associado à variação da coordenada θ_q . Se variamos a coordenada r_q por um valor infinitesimal δr_q , avançamos simplesmente um δr_q numa direção perpendicular aos avanços anteriores. O leitor deve fazer um desenho desta situação, um desenho parecido com a figura 2.2.9! Os três avanços abrangem um volume $r_q \delta\theta_q r_q \sin \theta_q \delta\varphi_q \delta r_q$. Correspondentemente podemos escrever a integral da (2.5.14) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \iiint_{\odot_r} \rho dV &= \int_{r_q=0}^r \int_{\theta_q=0}^{\pi} \int_{\varphi_q=0}^{2\pi} \rho(r_q) r_q^2 \sin \theta_q d\varphi_q d\theta_q dr_q = \\ &= 4\pi \int_{r_q=0}^r \rho(r_q) r_q^2 dr_q \end{aligned} \quad (2.5.17).$$

Agora consideramos um caso que permite o cálculo do campo apenas de forma aproximada. Imagine que tenhamos um cilindro muito comprido com uma densidade de carga elétrica que depende apenas do raio ρ , isto é, da distância do eixo do cilindro. Se estamos interessados em pontos cuja distância do centro do cilindro for muito menor que o comprimento do cilindro, podemos aproximadamente substituir o cilindro finito por um infinitamente comprido. Com esta manobra obtemos um objeto altamente simétrico. Os elementos de simetria são: translações na direção do eixo do cilindro, giros por volta do eixo do cilindro, giros de 180° por volta de eixos que cruzam o eixo do cilindro perpendicularmente, reflexões com planos especulares que contêm o eixo do cilindro e reflexões com plano especular perpendicular ao eixo do cilindro. Neste caso o uso de coordenadas cilíndricas é mais indicado. Estas se relacionam com as coordenadas cartesianas (com o eixo do cilindro como eixo z) da seguinte forma:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.5.18)$$

e a base ortonormal associada é

$$\hat{z}(\varphi) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|}, \quad \hat{\rho}(\varphi) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|}, \quad \hat{\varphi} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} \quad (2.5.19).$$

Deixamos a elaboração da forma geral do campo baseado em argumentos de simetria como exercício para o leitor (Exercício 2.5.7). O tipo de argumentação é completamente análoga àquela do caso esférico. O resultado é

$$\vec{E}(\rho, \varphi) = E_\rho(\rho) \hat{\rho}(\varphi) \quad (2.5.20)$$

² Veja a seção 2.2, a discussão que leva à fórmula 2.2.14.

Somente a função E_z é desconhecida. Ela pode ser determinada com a lei de Gauss. Para este fim escolhemos uma superfície gaussiana em forma de cilindro de altura h e raio z e eixo coincidente com o eixo do cilindro da distribuição de carga. Precisamos da integral de fluxo do campo da forma (2.5.20) integrado sobre a superfície deste cilindro. As duas tampas deste cilindro não contribuem com nada para a integral de fluxo porque o campo é perpendicular aos vetores superfície das tampas. Para a parte lateral do cilindro observamos que uma variação infinitesimal $\delta\varphi$ da coordenada angular φ resulta num deslocamento de $z\delta\varphi$. Uma variação δz aparece diretamente como deslocamento perpendicular ao anterior, e o vetor unitário perpendicular ao pedaço infinitesimal de superfície é o vetor $\hat{z}(\varphi)$. Consequentemente obtemos

$$\oiint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{z=z_0}^{z_0+h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} E_z(z) \hat{z}(\varphi) \cdot \hat{z}(\varphi) z d\varphi dz = h 2\pi z E_z(z) \quad (2.5.21)$$

Inserindo isto na lei de Gauss, obtemos uma equação que permite determinar a função incógnita E_z .

$$\begin{aligned} h 2\pi z E_z(z) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{z_0}^{z_0+h} \int_{\varphi_q=0}^z \int_{\varphi_q=0}^{2\pi} \rho(z_q) z_q d\varphi_q dz_q = \\ &= \frac{2\pi h}{\epsilon_0} \int_{z_q=0}^z \rho(z_q) z_q dz_q \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Então a função incógnita é

$$E_z(z) = \frac{1}{\epsilon_0 z} \int_{z_q=0}^z \rho(z_q) z_q dz_q \quad (2.5.23)$$

Este resultado pode ser substituído na forma geral do campo:

$$\vec{E}(z, \varphi) = \frac{\hat{z}(\varphi)}{\epsilon_0 z} \int_{z_q=0}^z \rho(z_q) z_q dz_q \quad (2.5.24)$$

Como no caso da esfera, veremos um exemplo simples. Imagine um cilindro infinitamente comprido de raio R uniformemente carregado. Neste caso não tem sentido falar da carga total do cilindro, pois esta seria infinita. Mas podemos falar de uma densidade linear total da carga que seria $\lambda = 2\pi \int_{z_q=0}^R \rho(z_q) z_q dz_q$. Quando

$z \geq R$, a integral no lado direito da (2.5.23) engloba toda a densidade linear do cilindro e quando $z < R$, temos uma fração, que pode ser calculada com uma regra de três das áreas envolvidas: então o campo é

$$\vec{E}(z, \varphi) = \frac{\hat{z}(\varphi)}{2\pi\epsilon_0 z} \begin{cases} \lambda & \text{para } z \geq R \\ \lambda \frac{z^2}{R^2} & \text{para } z < R \end{cases} \quad (2.5.25)$$

Para $z \gg R$ obtemos o resultado da linha infinitamente comprida que tínhamos calculado na seção 1.6 (fórmula 1.6.21). Naquela ocasião falamos que não era

necessário decorar o resultado, porque mais tarde aprenderíamos um método simples de obtê-lo em poucos segundos. Este método simples é esse que acabamos de explicar. O aluno que enfrenta a lei da Gauss pela primeira vez certamente acha que trocamos apenas um método complicado por outro ainda mais complicado. Mas, com um pouco de contemplação calma, percebe-se que o método da lei de Gauss é realmente uma questão de poucos segundos: sem grandes argumentos de simetria, a forma geral do campo (2.5.20) é algo completamente óbvio. Depois a integral de fluxo é também óbvia: um produto de $E_z(z)$ vezes a circunferência do cilindro Gaussiano, vezes a sua altura. Do outro lado da lei de Gauss temos carga (λ vezes altura) dividida por ϵ_0 . A altura cancela dos dois lados e temos

$$E_z(z) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi z} \quad (2.5.26)$$

Pronto, o aluno que medita e incorpora estes passos será capaz de reproduzir este resultado em segundos.

Como não existem cilindros infinitamente compridos no mundo real, o resultado da simetria cilíndrica (2.5.24) serve para problemas práticos apenas como uma aproximação.

Há ainda mais uma simetria que permite um cálculo simples do campo elétrico com a ajuda da lei de Gauss. É o caso da simetria plana. Mas não é bom tirar dos jovens a possibilidade de descobrir as coisas sozinhos. Então vamos deixar este caso como exercício (Exercício 2.5.9).

Exercícios:

E 2.5.1: Além de translações, giros e reflexões num plano especular, existe mais uma transformação do espaço físico que conserva distâncias. É a transformação que substitui o vetor posição \vec{r} pelo vetor posição $-\vec{r}$. Mostre que esta transformação pode ser obtida combinando uma reflexão num plano especular com um giro.

E 2.5.2: Calcule os vetores básicos da base ortonormal $\langle \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi} \rangle$ explicitamente expressando estes vetores na base $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$.

E 2.5.3 Consideramos um sistema de coordenadas esféricas. Faça um desenho dos eixos de coordenadas x , y e z , desenhe os ângulos θ_q, ϕ_q para um ponto com coordenadas $\langle r_q, \theta_q, \phi_q \rangle$ e desenhe o volume gerado por variações pequenas destas coordenadas.

E 2.5.4: Faça um gráfico da função $E_r(r)$ para o campo elétrico gerado por uma esfera homogeneamente carregada de raio R com carga total Q .

E 2.5.5: Calcule o campo elétrico gerado pela distribuição de carga dada por $\rho(r) = Ar^{-1} \exp[-r^2/2a^2]$, onde r é a coordenada radial num sistema de coordenadas esféricas.

E 2.5.6: Faça o análogo do exercício 2.5.3 para um sistema de coordenadas cilíndricas.

E 2.5.7: Elabore os detalhes que levam à forma geral do campo (2.5.20).

E 2.5.8: Calcule o campo elétrico gerado pela distribuição de carga dada por $\rho(z) = B z^{-1} \exp[-z/R]$ onde z é a coordenada radial num sistema de coordenadas cilíndricas.

E 2.5.9: Sejam x , y e z as coordenadas de um sistema cartesiano de coordenadas. Considere uma distribuição de carga dada por uma função que depende apenas de z e suponha que esta função é par, isto é $\rho(z) = \rho(-z)$. (a) Determine os elementos de simetria desta distribuição. (b) Determine a forma geral do campo gerado por esta distribuição. (c) Use a lei de Gauss para determinar o campo em termos de integrais da função ρ . (d) Considere o caso particular que $\rho(z) = \text{const.}$ para $|z| \leq D/2$ e $\rho(z) = 0$ para $|z| > D/2$. Compare o valor do campo encontrado na região $|z| > D/2$ com o resultado obtido na seção 1.6, isto é, com a fórmula (1.6.38).

E 2.5.10: Na seção 1.4 constava o exercício: “Mostre que a má definição da expressão

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}$$

para $\vec{r} = \vec{r}_q$ não cria problemas para a integral (1.4.14). Dica: Para a integração, use coordenadas esféricas com o ponto \vec{r} como origem.” Provavelmente muitos alunos não conseguiram resolver este exercício na época. Agora temos muito mais prática com integrais de volume calculadas em coordenadas esféricas. Tente resolver esta questão agora!

E 2.5.11: Escreva os pontos de destaque desta seção.