

## 2.2 Densidade de Corrente, integrais de fluxo e o teorema de Gauss-Ostrogradski

A *densidade de corrente* é uma ferramenta para descrever o escoamento de massa, de energia térmica, carga elétrica e outras grandezas extensivas. Utilizaremos o exemplo do escoamento de massa para introduzir esta noção de forma intuitiva. Podemos, por exemplo, imaginar água fluindo numa cachoeira. Queremos uma grandeza adequada para descrever quanta água flui e para onde ela flui.

Imagine um instrumento de medida que tenha a forma de um anel preso na ponta de uma vara de tal forma que o anel possa ser facilmente introduzido no fluxo da água. A

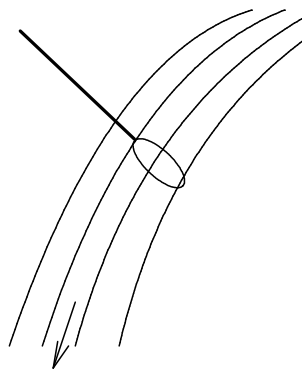


Fig. 2.2.1 Medidor de corrente inserido numa cachoeira.

figura 2.2.1 mostra este medidor inserido no fluxo de uma suposta cachoeira. Vamos imaginar que este anel esteja equipado na sua face interior com sensores que permitam avaliar quanta massa de água passa pelo anel por segundo. No momento não importa como estes sensores poderiam funcionar. Chamaremos a grandeza medida por este instrumento de *corrente* ou também de *fluxo* e vamos escrevê-la com o símbolo  $I$ , o mesmo símbolo frequentemente usado para corrente elétrica. Mais precisamente deveríamos falar de *corrente de massa* e correspondentemente escrever  $I_m$ . Os valores desta grandeza podem ser escritos como múltiplos da unidade kg/s. Analogamente podemos definir *corrente de calor*  $I_Q$  (com unidade J/s=W) ou *corrente de carga elétrica*  $I_{El}$  (com unidade C/s=A).

Há um detalhe importante que precisa ser mencionado: os sensores devem ser capazes de distinguir em qual sentido a água passa. Então o medidor é assimétrico. A figura 2.2.2 indica esta assimetria. Simbolicamente desenhamos os sensores de forma assimétrica. No lado de fora do anel existe uma seta que indica para o usuário do instrumento com qual orientação ele inseriu o anel na cachoeira. Água que passa na direção da seta indicadora é contabilizada pelos sensores como contribuição positiva, enquanto água que atravessa o anel no sentido contrário seria contada como uma contribuição negativa. Correspondentemente podemos ter correntes de massa positivas e negativas mesmo que a massa não possa ser negativa.

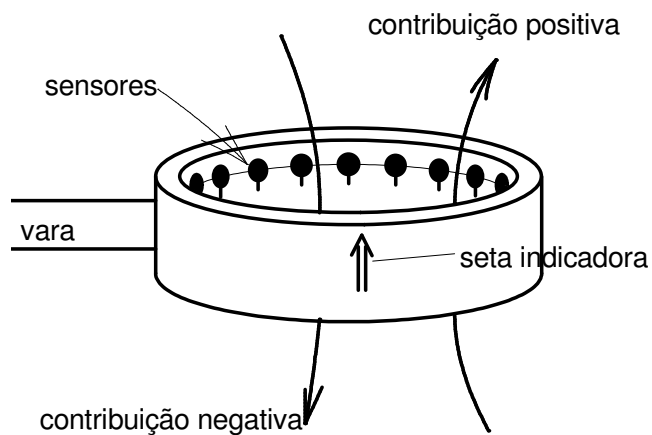


Fig. 2.2.2 Assimetria do medidor de corrente

A noção de corrente é útil e importante, mas ela tem um defeito. Queremos descrever como a água da cachoeira flui. Mas a corrente não depende somente da cachoeira, mas também do medidor. Se usássemos um medidor com o dobro da área do anel

mediríamos valores de corrente duas vezes maiores. Então a grandeza corrente possui uma natureza dupla: ela contém um aspecto objetivo que depende somente da cachoeira e um aspecto subjetivo correspondente à nossa escolha de medidor. Gostaríamos de definir uma grandeza puramente objetiva que descrevesse como a água escoava. Se usarmos a noção de corrente como ponto de partida, deveremos abstrair os aspectos subjetivos desta noção.

Conhecemos este tipo de processo de abstração com a noção de densidade de massa. Tudo mundo conhece a pegadinha que se costuma aplicar em crianças: “o que é mais pesado: um kg de chumbo ou um kg de algodão?” O que leva a criança a uma resposta errada é a falta de diferenciação entre densidade e massa. A densidade é uma noção associada aos materiais enquanto a massa é associada aos corpos. Para poder passar da

noção de massa para a noção de densidade, temos que abstrair o aspecto do tamanho do corpo. Isto é feito dividindo a massa do corpo pelo volume do mesmo.

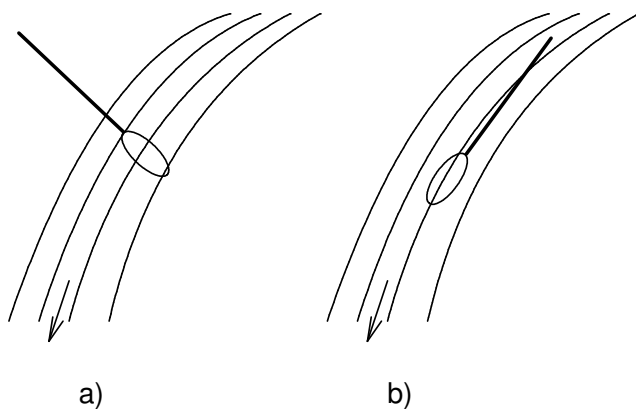


Fig. 2.2.3 O mesmo medidor pode indicar valores diferentes dependendo da orientação do medidor.

Poderíamos tentar a mesma coisa com a grandeza corrente. Para livrar esta noção do aspecto subjetivo do tamanho do medidor, poderíamos dividir

a corrente pela área do medidor e com isto definir uma nova grandeza: *densidade de corrente* ou *densidade de fluxo*. Mas neste caso esta divisão não resolve todo o problema. Como podemos ver na figura 2.2.3, o mesmo medidor (com a mesma área) pode ser inserido no mesmo local da cachoeira de formas diferentes que resultarão em medidas completamente diferentes. As duas maneiras de inserir o medidor mostradas na figura 2.3 diferem na orientação do medidor. Na orientação a) a água passa em grandes quantidades pelo anel medidor, enquanto na orientação b) a água passa pelos lados sem atravessar o medidor. Então na orientação b) a leitura no medidor seria praticamente zero.

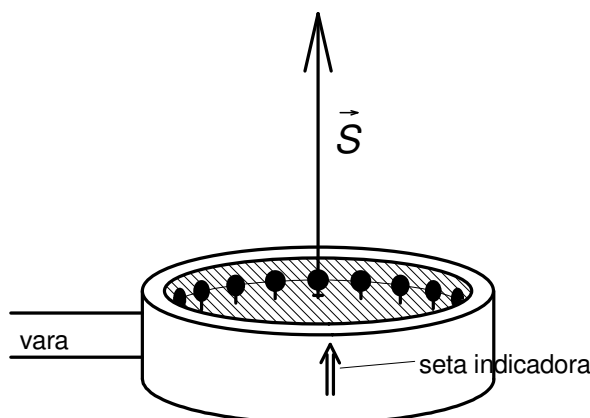


Fig. 2.2.4 Definição do vetor superfície que caracteriza o detector.

Temos que caracterizar os aspectos geométricos do medidor de forma completa para poder abstraí-los. O mero tamanho da área do medidor não é o suficiente. Uma forma muito adequada de caracterizar o medidor, tanto no que diz respeito ao tamanho como também da orientação, é com ajuda de um *vetor superfície*  $\vec{S}$ . As três características (módulo, direção e sentido) deste vetor são definidas

da seguinte forma: o módulo de  $\vec{S}$  é a área do medidor. A direção de  $\vec{S}$  é

perpendicular ao anel e o sentido é o sentido da seta indicadora no medidor. Como a grandeza que caracteriza os aspectos geométricos do medidor é um vetor, não podemos aplicar o processo de divisão, pois a divisão de um escalar por um vetor não existe. Para ver como a abstração pode ser feita neste caso, vamos voltar mais uma vez para a noção de densidade de massa e vamos analisar a divisão de um ponto de vista um pouco diferente: ao final, a divisão é nada mais do que o inverso da multiplicação. Correspondentemente podemos encarar a densidade de massa também de outra forma: um valor de densidade de massa  $\rho$  é uma função linear que permite determinar o valor da massa a partir de um valor de volume.

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &= \rho[V] \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Na segunda linha desta fórmula, escrevemos a massa não como um produto  $\rho V$ , mas como valor  $\rho[V]$  de uma função  $\rho$ , para enfatizar que o valor de densidade  $\rho$  pode ser considerado um mapeamento<sup>1</sup>. Desta forma podemos abstrair os aspectos geométricos do medidor da grandeza corrente:

O valor da *densidade de corrente* é o mapeamento linear que permite calcular o valor da corrente para cada vetor de superfície  $\vec{S}$  do medidor.

Ou escrito como fórmula:

$$I = \text{densidade de corrente}[\vec{S}] \quad (2.2.2)$$

No caso da densidade de massa, a aplicação do mapeamento  $\rho[\cdot]$  pode ser escrita como um produto. Para mapeamentos lineares de vetores, isto também é possível. Nos espaços vetoriais associados ao nosso espaço Euclidiano, podemos escrever os mapeamentos lineares que mapeiam vetores em escalares com ajuda do produto escalar. Desta forma podemos escrever a equação (2.2.2) com ajuda de um vetor  $\vec{j}$ :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} \quad (2.2.3)$$

O ponto “ $\cdot$ ” entre  $\vec{j}$  e  $\vec{S}$  indica o produto escalar. O vetor  $\vec{j}$  é o valor da nova grandeza que queríamos definir, isto é, o valor da *densidade de corrente*. Na equação (2.2.3) não escrevemos o índice “m” de massa, porque esta equação define agora a noção de densidade de corrente de forma geral. Esta definição vale para qualquer tipo de corrente, seja de massa, corrente elétrica, corrente térmica ou qualquer outra corrente.

Há uma diferença importante entre densidade de massa e densidade de corrente. Na equação (2.2.1) basta conhecer a massa para um único valor não nulo de volume para determinar a densidade de forma única<sup>2</sup>. Esta unicidade permite escrever a densidade de massa como um quociente  $m/V$ . Na equação (2.2.3) não basta conhecer a corrente para

<sup>1</sup> Uso aqui a palavra “mapeamento” que corresponde ao termo em inglês “mapping”. Os matemáticos no Brasil preferem o termo “aplicação”. O termo aplicação é um tanto infeliz. A aplicação de uma função num elemento do domínio leva a um elemento do espaço imagem. Chamar uma função de aplicação é como confundir  $f(\cdot)$  com o valor  $f(x)$ .

<sup>2</sup> Embora para diminuir erros experimentais na prática mediríamos várias massas para vários volumes.

um único vetor superfície arbitrário e não nulo para determinar o vetor  $\vec{j}$  de forma única. Por isso  $\vec{j}$  não pode ser escrito como quociente.

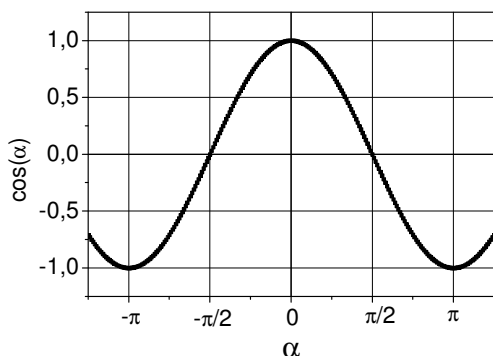
Agora veremos como o vetor  $\vec{j}$  pode ser determinado experimentalmente. Isto tornará este conceito novo um pouco menos misterioso. O produto escalar na equação (2.2.3) pode ser escrito em termos dos módulos dos vetores e do ângulo  $\alpha(\vec{j}, \vec{S})$  entre  $\vec{j}$  e  $\vec{S}$ :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} = |\vec{j}| |\vec{S}| \cos(\alpha(\vec{j}, \vec{S})) \quad (2.2.4)$$

O módulo de  $\vec{S}$  é a área  $A$  do medidor, e esta área conhecemos para um dado medidor. Por exemplo, se o medidor tiver a forma de um anel circular de raio interno  $r$ , teríamos  $|\vec{S}| = A = \pi r^2$ . Podemos determinar o vetor  $\vec{j}$  com a ajuda da equação (2.2.4) da seguinte forma: Inserimos o medidor no ponto espacial onde queremos determinar  $\vec{j}$  (para o nosso exemplo intuitivo, num determinado ponto da cachoeira) e medimos a corrente  $I$  para diversas orientações do medidor. Para todas estas medidas o produto  $|\vec{j}| |\vec{S}|$  terá sempre o mesmo valor, pois a única característica que estamos variando é a orientação do medidor. Então somente o termo  $\cos(\alpha(\vec{j}, \vec{S}))$  sofrerá alterações pelas mudanças de orientação. Podemos procurar aquela orientação que resulta no maior valor de  $I$ . Esta orientação é aquela com  $\cos(\alpha(\vec{j}, \vec{S})) = 1$ , pois este é o maior valor que o cosseno pode atingir (compare com a figura 2.2.5). Para este valor máximo de corrente vale  $I_{MAX} = A |\vec{j}|$ . Então temos a receita para determinar o módulo do vetor  $\vec{j}$ :

$$|\vec{j}| = \frac{I_{MAX}}{A} \quad (2.2.5)$$

Para o módulo da densidade de corrente, o processo de abstração da geometria do medidor resulta então realmente numa divisão. Mas, para podermos dividir, tivemos que



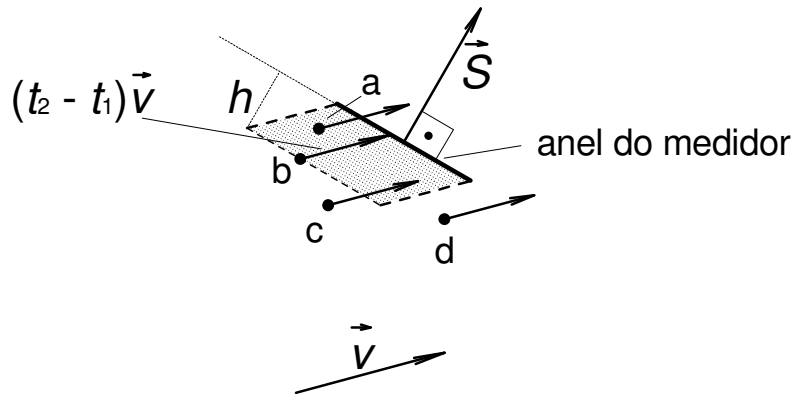
procurar primeiramente uma orientação especial do medidor. Esta orientação especial, que maximiza a corrente, fornece também a direção e o sentido do vetor  $\vec{j}$ : nesta orientação especial o vetor  $\vec{S}$  aponta na mesma direção do vetor  $\vec{j}$  e os dois vetores têm o mesmo sentido.

Fig. 2.2.5 A função cosseno.

No caso do escoamento de água, poderíamos ter pensado ainda numa outra grandeza para descrever o escoamento: simplesmente a velocidade da água. Note, no entanto, que velocidade não seria grandeza adequada para descrever o fluxo de energia térmica. Mesmo com o transporte de massa, podemos ter problemas com a grandeza velocidade quando processos de difusão se sobrepõem ao movimento macroscópico. No caso do exemplo da cachoeira, a velocidade seria uma boa ferramenta para descrever o

escoamento. Vamos ver como se relacionam velocidade e densidade de fluxo neste caso.

Vamos imaginar um fluido uniforme de densidade de massa  $\rho$  que se desloca com uma velocidade  $\vec{v}$ . Imaginemos que, inserido neste fluido, esteja um medidor de corrente de massa. A figura 2.2.6 mostra esta situação. O desenho é feito com uma projeção ortogonal. O plano da figura escolhido é perpendicular ao plano do anel do medidor de tal forma que o anel apareça somente como uma linha.



massa do fluido que atravessará o anel do medidor num dado intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ . Este cálculo é simples: basta determinar em que região ficam aquelas partículas de água no instante  $t_1$  que conseguem atravessar o anel do medidor durante o intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ .

Fig.2.2.6 Determinação da região ocupada no instante  $t_1$  pelas partículas de fluido que conseguem atravessar o medidor durante o intervalo  $[t_1, t_2]$

Esta região é obtida arrastando a superfície do detector para trás pelo negativo do vetor deslocamento  $(t_2 - t_1)\vec{v}$ . Na figura esta região é marcada de cinza. Por exemplo, o ponto a indicado na figura atravessa o detector no intervalo  $[t_1, t_2]$ , pois o vetor deslocamento com base no ponto a intercepta a linha do medidor. A partícula de fluido no ponto b iria apenas chegar no medidor no final do intervalo. A partícula que estava no ponto c atravessará o medidor, mas não dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$ , e a partícula no ponto d nunca passará pelo medidor. A massa de fluido que atravessa o medidor durante o intervalo  $[t_1, t_2]$  é o produto da densidade de massa do fluido com o volume da região marcada. Este volume é a área do medidor vezes a altura  $h$  indicada na figura. Temos então

$$m = \rho h |\vec{S}| \quad (2.2.6)$$

Podemos escrever a altura  $h$  como o módulo do vetor deslocamento  $(t_2 - t_1)\vec{v}$  vezes o cosseno do ângulo ente  $\vec{v}$  e  $\vec{S}$ :

$$h = |(t_2 - t_1)\vec{v}| \cos(\angle(\vec{v}, \vec{S})) \quad (2.2.7)$$

Inserindo a (2.2.7) na (2.2.6), dividindo por  $t_2 - t_1$  e utilizando a relação entre produto escalar, módulos e ângulos de vetores, obtemos finalmente a corrente de massa:

$$I_m = \frac{m}{t_2 - t_1} = \rho |\vec{v}| |\vec{S}| \cos(\angle(\vec{v}, C)) = \rho \vec{v} \cdot \vec{S} \quad (2.2.8)$$

Como este resultado vale para qualquer  $\vec{S}$ , podemos concluir, com a definição de densidade de corrente (2.2.3), que a densidade de corrente de massa é dada por

$$\boxed{\vec{J}_m = \rho \vec{v}} \quad (2.2.9)$$

Podemos utilizar a mesma equação para a densidade de corrente elétrica. Basta substituir a densidade de massa  $\rho$  por uma densidade de carga elétrica. Mas no caso elétrico é frequente termos várias espécies eletricamente carregadas na mesma região espacial. Esta situação é típica em eletrólitos e plasmas. Por exemplo, no ácido clorídrico (HCl em H<sub>2</sub>O) teríamos íons negativos Cl<sup>-</sup> e íons positivos OH<sub>3</sub><sup>+</sup>. Quando é aplicado um campo elétrico, estes íons migram. Os íons positivos migram no sentido do campo, e os negativos, no sentido contrário. Podemos ter também mais do que duas espécies, por exemplo, em soluções de vários sais minerais. Cada espécie  $e$  tem sua densidade de carga elétrica  $\rho_e$  e sua velocidade de migração  $\vec{v}_e$ . Neste caso a densidade de corrente elétrica seria uma soma sobre todas as espécies:

$$\boxed{\vec{J}_{El} = \sum_e \rho_e \vec{v}_e} \quad (2.2.10)$$

Definimos a densidade de corrente, vimos como ela pode ser determinada com medidas de correntes e vimos expressões que relacionam densidades de correntes com velocidades e densidades. Com isto temos quase um quadro completo deste tipo de grandeza. Falta apenas uma pequena correção na nossa definição. A correção é pequena, mas essencial. Definimos o valor de uma densidade de corrente como mapeamento linear que relaciona o vetor de superfície  $\vec{S}$  com o valor da corrente. Falamos que a duplicação da área do medidor duplicaria o valor da corrente. Mas será que esta linearidade existe mesmo? Imagine que inserimos uma série de medidores na nossa cachoeira, como indicado na figura 2.2.7, todos na mesma orientação e no mesmo ponto de medida, mas com diversos valores diferentes de área. Quando a área do medidor atinge valores tão grandes que o diâmetro do medidor ultrapassa a largura da própria cachoeira, a proporcionalidade de área e de corrente certamente deixa de valer, pois neste caso o aumento do tamanho do medidor somente acrescentará área vazia sem fluxo de água.

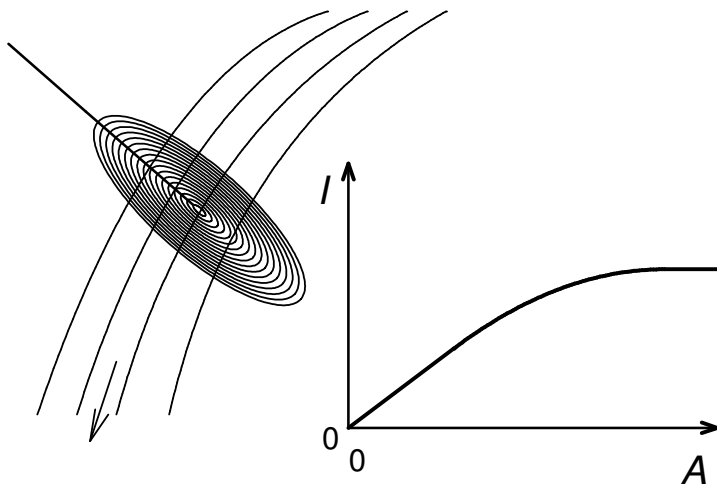


Fig. 2.2.7 Uma série de medidores inseridos na cachoeira mostram que a corrente não depende linearmente do vetor superfície. Para grandes áreas do detector aparecem desvios da linearidade.

A definição de densidade de corrente dada pela equação (2.2.3) tem que ser

interpretada como um caso limite para pequenos medidores:

A densidade de corrente num ponto  $P$  é o vetor  $\vec{j}$  tal que para qualquer vetor superfície  $\vec{S}$  vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_{\epsilon \vec{S}} - \vec{j} \cdot (\epsilon \vec{S})}{\epsilon} = 0 \quad (2.2.11)$$

onde  $I_{\epsilon \vec{S}}$  é a corrente medida com um medidor no ponto  $P$  com vetor superfície  $\epsilon \vec{S}$ .

Repare que desta forma a densidade de corrente é um conceito local. Isto é, para cada ponto no espaço, o vetor  $\vec{j}$  pode ser outro. Geralmente as grandezas físicas têm um comportamento amigável e a função espacial  $\vec{j}$  é suave de tal forma que dentro de pequenas regiões o vetor  $\vec{j}$  fica aproximadamente constante. Se limitamos o tamanho do medidor de corrente tal que o medidor caiba inteiramente numa destas regiões de uniformidade, podemos voltar para a nossa antiga definição (2.2.3).

O conhecimento da função espacial  $\vec{j}$  permite calcular a corrente através de superfícies grandes. Imagine uma superfície. Com superfície queremos dizer um conjunto bidimensional imaginado de pontos no nosso espaço físico tridimensional. Não queremos falar de uma superfície física de um corpo, pois se botássemos um corpo material dentro do fluxo íamos perturbar o próprio fluxo. A corrente que atravessa esta superfície imaginada pode ser calculada a partir do campo  $\vec{j}$ . Para tal fim dividimos a superfície em um grande número de pequenas superfícies como é mostrado na figura 2.2.8.

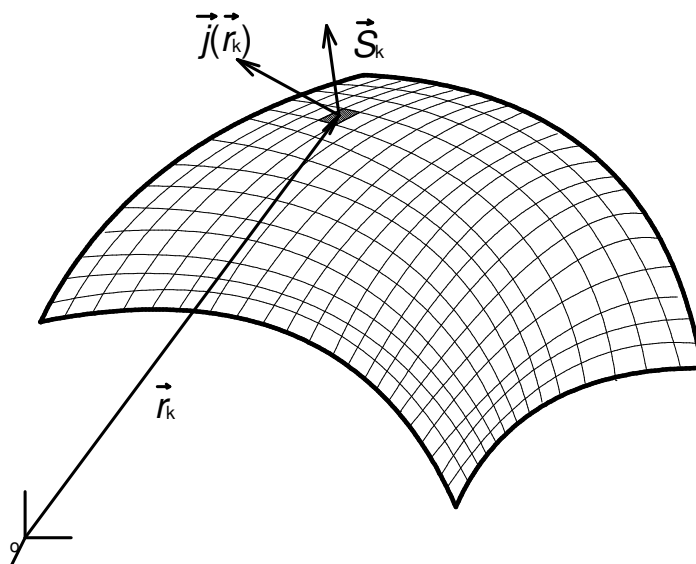


Fig. 2.2.8

Divisão de uma superfície em pequenas superfícies para fins de cálculo da corrente a partir da densidade de corrente.

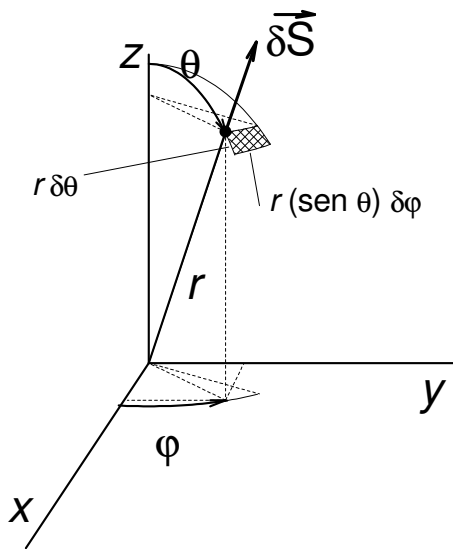
Se a divisão for suficientemente fina, cada pedacinho de superfície será tão pequeno que dentro dela a função  $\vec{j}$  é

razoavelmente uniforme e a fórmula simples (2.2.3) pode ser aplicada para cada pedaço. A corrente total através da superfície grande é obtida somando as correntes através de todos os pedacinhos:

$$I_{total} \approx \sum_k \vec{j}(\vec{r}_k) \cdot \vec{S}_k \quad (2.2.12)$$

Nesta equação descrevemos o lugar do  $k$ -ésimo pedacinho com ajuda de um vetor posição  $\vec{r}_k$  que aponta para o centro do pedacinho. A função  $\vec{j}$  deve ser avaliada nestes pontos. Como os pedacinhos não são infinitamente pequenos, a fórmula (2.2.12) fornece somente uma aproximação. Mas podemos tomar o limite tomando pedacinhos de tamanho cada vez menor e de maior número e no limite obtemos o valor exato da corrente. Este limite é a integral de superfície da função  $\vec{j}$  sobre a superfície:

$$I_{total} = \iint \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \stackrel{def.}{=} \lim_{\max|\vec{S}_k| \rightarrow 0} \sum_k \vec{j}(\vec{r}_k) \cdot \vec{S}_k \quad (2.2.13)$$



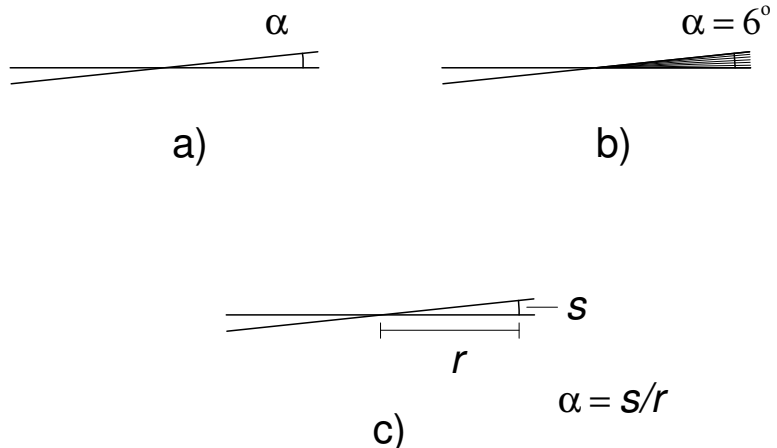
Veremos um exemplo de como montar uma integral de superfície. Vamos considerar um pedaço de uma esfera de raio  $r$ . Pode ser a esfera inteira, uma semiesfera ou qualquer fração de uma esfera. Para a integração sobre uma superfície esférica é conveniente usar coordenadas esféricas. A figura 2.2.9 mostra a descrição de um ponto com coordenadas esféricas. Junto ao ponto desenhamos uma pequena superfície gerada pela variação das coordenadas angulares.

Fig. 2.2.9 Construção do vetor superfície de um pedacinho de superfície esférica gerado pela variação das coordenadas angulares.

Se as variações forem muito pequenas, este pedacinho de superfície fica aproximadamente com formato de retângulo. Para avaliar os comprimentos dos lados deste retângulo, convém lembrar das diversas formas de medir ângulos. Imagine duas retas que se cruzam formando 4 ângulos como na figura 2.2.10a). Para medir um destes ângulos, pode-se fazer uma comparação com algum padrão de ângulo que seria uma unidade da grandeza ângulo. O grau é uma unidade de ângulo muito usada.

Fig. 2.2.10 Medidas de ângulo.

A figura 2.2.10b) mostra esta comparação com a unidade grau. Existe uma outra forma de medir ângulos: podemos usar o comprimento de arco do segmento do círculo que cabe entre as duas retas. Mas este comprimento sozinho não permite uma medida satisfatória, pois o





comprimento do arco dependerá do raio do círculo que usamos. Temos que nos tornar independentes desta escolha. Já somos especialistas nesta tarefa de nos tornarmos independentes de escolhas. Lembrem somente da noção de densidade de massa em que nos tornamos independentes do tamanho de um objeto ou da densidade de corrente em que eliminamos a dependência da escolha do medidor de fluxos. No caso do ângulo temos que dividir pelo raio do círculo. A figura 2.2.10c) ilustra esta forma de medir ângulos. Costuma-se escrever o valor do ângulo neste caso com uma especificação de “unidade” radiano. Mas  $s/r$  é um quociente de dois comprimentos e, portanto, um número puro e não há unidade nenhuma. Um “rad” depois de um valor de ângulo pode, na melhor das hipóteses, ser interpretado como um comentário que indica que aqui se usou a maneira da figura 2.2.10c) para especificar um valor de ângulo.

Com a medida de ângulos em radianos, podemos escrever os lados do retângulo gerado pela variação dos ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  de maneira simples. Basta notar que uma variação do ângulo  $\theta$  gera um círculo de raio  $r$ , e a variação do ângulo  $\varphi$  gera um círculo de raio  $r \sin \theta$ . Correspondentemente os lados deste retângulo são:  $r \delta\theta$  e  $r(\sin \theta) \delta\varphi$ , e a área deste pedacinho, que é o módulo do vetor superfície, vale  $A = |\delta\vec{S}| = r^2 (\sin \theta) \delta\theta \delta\varphi$ . O vetor normal do pedacinho de superfície é o vetor unitário na direção do próprio vetor posição do ponto escolhido. O vetor superfície do pedacinho é então  $\delta\vec{S} = \hat{r} r^2 (\sin \theta) \delta\theta \delta\varphi$ . A integral de superfície de um campo vetorial  $\vec{j}$  toma a forma de uma integral dupla nas variáveis  $\theta$  e  $\varphi$ :

$$\iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = r^2 \iint \vec{j} \cdot \hat{r} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.2.14)$$

Os limites de integração dependem naturalmente do exato formato da superfície. Se for, por exemplo, a esfera inteira,  $\theta$  percorreria o intervalo de 0 até  $\pi$  e  $\varphi$  de 0 até  $2\pi$ . Para o hemisfério “norte” ( $z \geq 0$ ) seria  $\theta$  de 0 até  $\pi/2$  e  $\varphi$  de 0 até  $2\pi$ .

Um tipo de fluxo será particularmente importante, a saber, o fluxo que sai de volumes. Seja  $V$  um volume. Usando a notação dos matemáticos, vamos denotar a superfície do volume com o símbolo  $\partial V$  (não é derivada – significa simplesmente superfície de  $V$ ). Chamaremos superfícies que são superfícies de volumes de *superfícies fechadas* ou *superfícies Gaussianas*, e as integrais de superfície deste tipo são escritas com uma bola para indicar que se trata de uma superfície fechada. Os físicos costumam orientar os vetores superfície de pequenas partes da superfície sempre para fora do volume. Com esta orientação uma integral

$$\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.2.15)$$

tem o significado de uma taxa líquida de saída de substância do volume  $V$ . Taxa líquida significa tudo que sai menos aquilo que entra.

Um dos propósitos desta aula é deixar os conceitos de cálculo vetorial, que foram apresentados para vocês no curso de cálculo, intuitivamente claros. A compreensão intuitiva destes conceitos é fundamental para enxergar a simplicidade e beleza das leis do eletromagnetismo, e isto ajuda tremendamente no uso das fórmulas para resolver problemas práticos. Vamos ajudar a intuição com aquilo que o Brasileiro adora fazer: tomar banho. Imagine você está debaixo do seu chuveiro. Enquanto você toma seu banho, você imagina uma superfície fechada em volta de você. Claro, é apenas uma superfície imaginada, uma superfície de integração; se fosse uma superfície materializada (um saco plástico) o seu banho seria prejudicado!

Fig. 2.2.11 O banho matemático.



Agora você calcula rapidamente a integral (2.2.15) de fluxo de água nesta superfície. Calcular integrais de superfície embaixo do chuveiro pode não ser a atividade mais relaxante, mas neste caso a integral é simples. Se você pensa um pouco, vai perceber que a integral é simplesmente zero, pois tudo que entra no volume acaba saindo como está indicado na figura 2.2.11 simbolicamente com as setas. Imagine agora que este sujeito embaixo do chuveiro abra a boca e beba água. O que acontece agora com a integral? A integral mede a taxa líquida de saída. Com o banhista tomando água, tem

mais água entrando do que saindo. Consequentemente a integral se tornará negativa. Deixamos a interpretação de um valor positivo desta integral por conta da sua imaginação.....

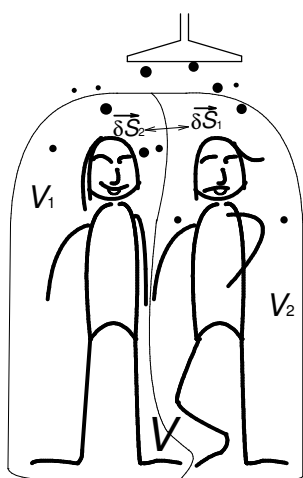
$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} &= 0 && \text{normalmente} \\ \oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} &< 0 && \text{banhista bebe água} \\ \oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} &> 0 && \text{banhista .....} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Esta história sugere uma bela interpretação da integral (2.2.15); esta integral mede a *quantidade de fonte* dentro do volume  $V$ . O banhista bebendo água seria uma fonte negativa. Fontes negativas são também chamadas de sumidouros:

$$\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \text{quantidade total de fonte do campo } \vec{j} \text{ no volume } V \quad (2.2.17)$$

Esta é uma nova grandeza que é associada com um campo vetorial  $\vec{j}$  e com um volume  $V$ . Veremos quais são as propriedades desta grandeza. Vamos tornar o banho mais interessante botando um segundo banhista embaixo do chuveiro:

Fig.2.2.12 A quantidade de fonte é aditiva.



Obviamente a quantidade de fonte do volume total  $V = V_1 \cup V_2$  é a soma das quantidades de fonte de cada volume parcial mostrado na figura 2.2.12:

para  $V = V_1 \cup V_2$  com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  vale 
$$\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\partial V_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \oiint_{\partial V_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$
 (2.2.18)

Este fato parece óbvio, mas precisa de uma confirmação matemática. Uma possível diferença entre  $\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$  e da soma  $\oiint_{\partial V_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \oiint_{\partial V_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}$  poderia vir da superfície interna que separa os volumes  $V_1$  e  $V_2$ . Esta superfície não aparece na integral  $\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , mas ela aparece nas integrais  $\oiint_{\partial V_1} \vec{j} \cdot d\vec{S}$  e  $\oiint_{\partial V_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Mas, na hora de somar estas duas últimas integrais, as contribuições da superfície separadora se cancelam. Isto ocorre porque cada vetor superfície  $\delta\vec{S}$  de pequenos pedaços de superfície aparece duas vezes e com orientações opostas como indicado na figura 2.2.12. Ou seja, o que um dos volumes ganha através da superfície separadora o outro necessariamente perde e na soma dos dois a contribuição da superfície interna se cancela.

O resultado (2.2.18) significa que a grandeza quantidade de fonte é aditiva que nem a massa. Repare que massa tem exatamente o mesmo comportamento: a massa contida num volume  $V = V_1 \cup V_2$  com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  é a soma das massas contidas nos volumes  $V_1$  e  $V_2$ . Esta propriedade de ser aditiva justifica a introdução de uma densidade para a grandeza quantidade de fonte exatamente na mesma forma como se define isto para a massa. A densidade de massa num ponto é definida como limite de quocientes massa por volume:

$$\rho_m(\vec{r}) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\text{massa contida em } V}{V} \quad (2.2.19)$$

onde todos os volumes  $V$  da seqüência de volumes  $V$  usada neste limite contém o ponto  $\vec{r}$  como indicado na figura 2.2.13.

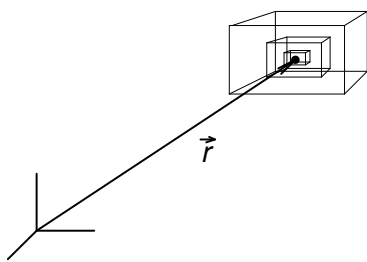


Fig. 2.2.13 Definição de densidade local com uma seqüência de volumes.

O limite é necessário quando as condições físicas não forem uniformes. Neste caso a densidade é uma grandeza local que pode variar de ponto a ponto.

A densidade de massa é um quociente de massa por volume. Inversamente recuperamos a massa multiplicando densidade por volume. Mas, quando as condições físicas não forem uniformes, esta multiplicação deve ser uma multiplicação especial ou detalhada. Esta multiplicação especial é a integral. Obtemos a massa total num volume grande integrando a densidade:

$$\text{massa no volume } V = \iiint_V \rho_m(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.2.20)$$

Podemos escrever equações análogas às equações (2.2.19) e (2.2.20) para a grandeza quantidade de fonte. A densidade da grandeza quantidade de fonte recebe um nome especial; ela é chamada de *divergência do campo vetorial*  $\vec{j}$ :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \right)} \quad (2.2.21)$$

Inversamente obtemos a quantidade de fonte para um volume grande integrando a densidade sobre o volume

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\vec{r}} \quad (2.2.22)$$

Este resultado é interessante; ele estabelece uma igualdade de uma integral de volume com uma integral de superfície. Enquanto não tivermos uma maneira de calcular a divergência de forma simples, este resultado não terá grande utilidade. Mas, num instante, veremos que  $\operatorname{div} \vec{j}$  pode ser calculado facilmente.

Seja o campo  $\vec{j}$  dado. Queremos calcular aquela grandeza definida pela equação (2.2.21). Para facilitar as contas, vamos escolher como volume um pequeno paralelepípedo alinhado com os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  como aqueles da figura 2.2.13. A figura 2.2.14 mostra um paralelepípedo com especificações das grandezas relevantes.

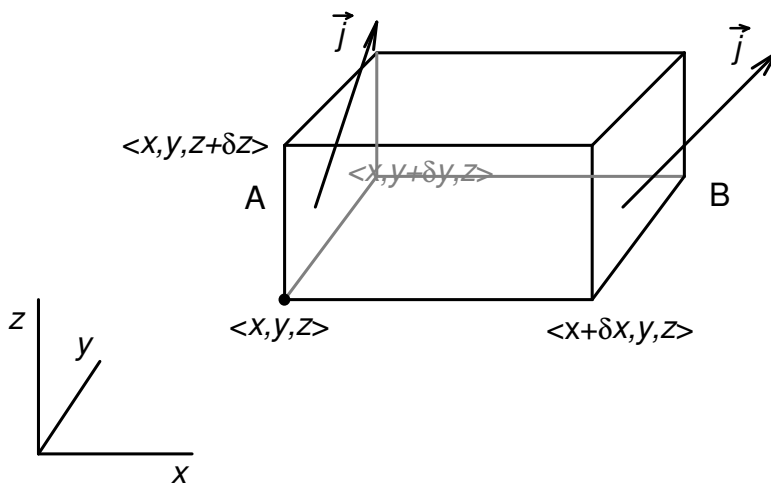


Fig. 2.2.14 Cálculo da divergência. Os vetores da densidade de corrente nas faces A e B podem ser ligeiramente diferentes.

A integral de fluxo tem contribuições das seis faces do paralelepípedo. Basta calcular as contribuições de duas faces opostas e o resto pode ser facilmente adivinhado. Vamos escolher as faces com os seguintes vértices:

face A :  $\langle x, y, z \rangle, \langle x, y, z + \delta z \rangle, \langle x, y + \delta y, z + \delta z \rangle, \langle x, y + \delta y, z \rangle$  e

face B :  $\langle x + \delta x, y, z \rangle, \langle x + \delta x, y, z + \delta z \rangle, \langle x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \rangle, \langle x + \delta x, y + \delta y, z \rangle$

Os vetores normais destas faces são  $-\hat{x}$  da face A e  $+\hat{x}$  da face B. Desta maneira os produtos escalares dos vetores  $\vec{j}$  nestas duas faces são as componentes  $x$  destes vetores:  $+j_x$  na face B e  $-j_x$  na face A. A contribuição das faces A e B para a integral de fluxo é então:

contribuição das faces A e B para o fluxo =

$$= \int_{z'=z}^{z+\delta z} \int_{y'=y}^{y+\delta y} j_x(x+\delta x, y', z') dy' dz' - \int_{z'=z}^{z+\delta z} \int_{y'=y}^{y+\delta y} j_x(x, y', z') dy' dz' \quad (2.2.23)$$

No fim do cálculo devemos dividir pelo volume  $\delta x \delta y \delta z$  e mandar os três deltas para zero. Neste limite todas as parcelas na expressão (2.2.23) que são de ordem superior em  $\delta x$ ,  $\delta y$  ou  $\delta z$  desaparecem. Por esta razão podemos cometer erros de ordem superiores sem alterar o resultado final. Isto significa que podemos substituir as integrais por simples multiplicações:

$$\begin{aligned} & \int_{z'=z}^{z+\delta z} \int_{y'=y}^{y+\delta y} j_x(x+\delta x, y', z') dy' dz' - \int_{z'=z}^{z+\delta z} \int_{y'=y}^{y+\delta y} j_x(x, y', z') dy' dz' = \\ & \delta y \delta z j_x(x+\delta x, y, z) - \delta y \delta z j_x(x, y, z) + \text{erro de ordem superior em } \delta y \text{ e } \delta z \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Acrescentamos ainda somente outro erro de ordem superior em  $\delta x$  substituindo a diferença  $j_x(x+\delta x, y, z) - j_x(x, y, z)$  por uma derivada multiplicada por  $\delta x$ :

$$j_x(x+\delta x, y, z) - j_x(x, y, z) = \delta x \frac{\partial j_x}{\partial x} + \text{erro de ordem superior em } \delta x \quad (2.2.25)$$

Juntando as equações (2.2.23), (2.2.24) e (2.2.25), dividindo pelo volume e tomando o limite  $\delta x \delta y \delta z \rightarrow 0$ , obtemos a contribuição das faces A e B para a densidade de fonte:

$$\begin{aligned} & \text{contribuição das faces A e B para } \text{div } \vec{j} = \\ & = \lim_{\delta x \delta y \delta z \rightarrow 0} \frac{\delta x \delta y \delta z \frac{\partial j_x}{\partial x} + \text{erro de ordem superior em } \delta x, \delta y, \delta z}{\delta x \delta y \delta z} \quad (2.2.26) \\ & = \frac{\partial j_x}{\partial x} \end{aligned}$$

Vendo este resultado, é evidente quais são as contribuições das outras faces do paralelepípedo. Podemos escrever diretamente o resultado final:

$$\boxed{\text{div } \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}} \quad (2.2.27)$$

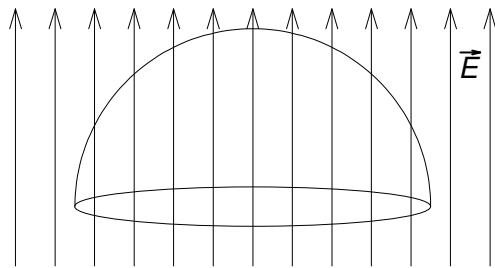
A junção do resultado (2.2.22) com uma representação explícita do  $\text{div } \vec{j}$  em algum sistema de coordenadas, como a equação (2.2.27), constitui o teorema de Gauss-Ostrogradski. Este teorema foi descoberto diversas vezes e de fato Gauss não foi o primeiro a descobri-lo. Talvez Joseph Louis Lagrange tenha sido o primeiro a perceber este fato matemático em 1762. Carl Friedrich Gauß reinventou o teorema em 1813, depois George Green reinventou o teorema em 1825 e finalmente o teorema foi reinventado mais uma vez por Michail Ostrogradski em 1825. Ostrogradski forneceu a primeira demonstração formal do teorema. Este teorema foi inventado tantas vezes que não faria nada mal se você, aluno, o reinventasse mais uma vez. De fato isto é, na verdade, o único jeito de aprender as coisas, reinventando-as!

Na aula de hoje a nossa motivação de estudar integrais de superfície de campos vetoriais era o fluxo de alguma substância como a massa ou a carga elétrica. Mas o teorema de Gauss vale independentemente desta interpretação, e os conceitos de integral de superfície podem ser formulados também para campos vetoriais que não descrevem nenhum transporte de substância. Mas, como a interpretação de coisas fluindo é tão bonita e intuitiva, costuma-se chamar o tipo de integral  $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  de integral de fluxo mesmo que o campo  $\vec{E}$  não descreva nenhum escoamento. No eletromagnetismo usaremos integrais deste tipo para o campo elétrico e, mais tarde, também para o campo magnético  $\vec{B}$ . Correspondentemente chamamos  $\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  de fluxo elétrico e  $\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$  de fluxo magnético. Mas, atenção! Nestes casos não tem nada fluindo. Trata-se apenas de uma analogia matemática.

**Exercícios:**

**E 2.2.1:** Escreva os pontos de destaque desta seção. Depois elabore textos explicativos para cada ponto.

**E 2.2.2:** Uma calota esférica de raio  $R$  está imersa num campo elétrico uniforme  $\vec{E} = E \hat{z}$ . A beirada circular da calota fica no plano  $xy$ . Calcule o fluxo de campo



elétrico  $\Phi_E = \iint_{\text{semiesfer.}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  através da

superfície semiesférica. Sugestão: Use as coordenadas esféricas para descrever a superfície de integração em forma paramétrica. Na integral dupla sobre os parâmetros, o elemento de superfície  $d\vec{S}$  corresponde ao termo  $R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$ . De que outra maneira  $\Phi_E$  poderia ser

calculado?

Fig.2.2.15 Calota e campo uniforme.

**E 2.2.3:** Um fluido escoar com velocidade  $\vec{v} = 5\text{ms}^{-1}\hat{i} + 3\text{ms}^{-1}\hat{j} - 2\text{ms}^{-1}\hat{k}$ . Um medidor de corrente de massa de área  $A = 1\text{cm}^2$  mede uma corrente de  $10^{-3}\text{kg/s}$  quando posto no fluxo com orientação na direção  $\hat{i}$ . Calcule a densidade do fluido e o módulo da densidade de corrente de massa.

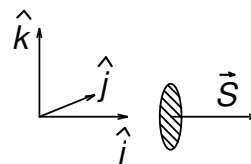


Fig. 2.2.16  
Representação simbólica de uma ortonormal  $\langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \rangle$  ortonormal base ortonormal

**E 2.2.4:** Num dia de chuva o Senhor Kubo corre 100m da casa para a padaria em 40 s. As gotas de chuva caem verticalmente com velocidade de 5 m/s. Na média caem 10 litros de água por metro quadrado por hora. O corpo do

Senhor Kubo tem aproximadamente a forma de um paralelepípedo como indicado na figura (30cm x 40cm x 90cm). Calcule a quantidade de chuva que o Sr. Kubo apanha.

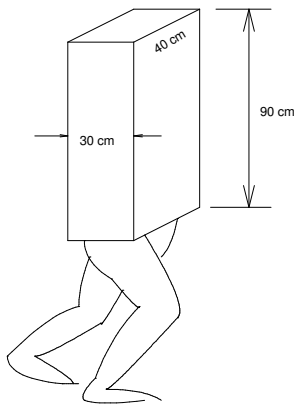


Fig. 2.2.17 O Senhor Kubo correndo na chuva.

**E.2.2.5:** Com variações  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  das coordenadas  $x, y, z$ , geramos um pequeno volume em forma de tijolo. Calculamos o fluxo de um campo vetorial através da superfície deste tijolo, dividimos o resultado pelo volume do tijolo e tomamos o limite  $\delta x \delta y \delta z \rightarrow 0$ . Com este procedimento descobrimos a expressão da divergência em coordenadas cartesianas (fórmula (2.2.27)). Faça a mesma coisa gerando um pequeno volume variando as coordenadas esféricas  $r, \theta, \varphi$  para deduzir a expressão da divergência em coordenadas esféricas.