

1.5 Dipolo elétrico

Nesta seção estudaremos uma configuração de carga muito simples que possui enorme importância para as aplicações. Primeiramente usaremos esta configuração como exemplo para o cálculo do campo elétrico. Depois estudaremos como um objeto com esta configuração de carga se comporta quando se encontra numa região com campo elétrico não nulo. A configuração consiste em uma carga pontual q e outra $-q$ separadas por uma distância d . Então o conjunto é neutro. Mas, devido ao fato de que estas duas cargas ocupam posições diferentes, cria-se um campo elétrico não nulo em volta destas cargas.

Para calcular o campo, vamos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que a carga q fique na posição $\langle x=0, y=0, z=d/2 \rangle$ e a carga $-q$, na posição $\langle x=0, y=0, z=-d/2 \rangle$.

Como primeiro exercício do cálculo de campo, vamos calcular o campo no ponto com coordenadas $\langle x>0, y=0, z=0 \rangle$. Há duas formas de fazer isto: uma mais intuitiva e geométrica e a outra mais formal com vetores. A segunda acaba sendo mais fácil, mas, para criar uma ligação entre intuição geométrica e cálculo formal, faremos os dois cálculos. Primeiramente o geométrico: há duas contribuições para o campo elétrico. Supondo um determinado sinal de carga, por exemplo, $q > 0$, podemos representar estas contribuições simbolicamente com vetores deslocamento como está indicado na figura 1.5.1.

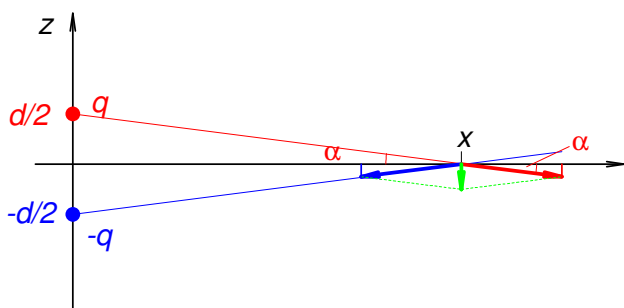


Fig. 1.5.1 Representação para o cálculo do campo de duas cargas.

Obviamente as componentes na direção do eixo x se cancelam, e as componentes na direção z são iguais. Então precisamos calcular apenas uma destas componentes z , por exemplo, a da carga q , e depois multiplicamos o resultado

por 2. Com a hipótese $q > 0$, temos que o módulo da contribuição é

$$\frac{kq}{(\text{distância})^2} = \frac{kq}{x^2 + (d/2)^2} \quad (1.5.1)$$

Este módulo precisa ser multiplicado com o fator $\sin \alpha$ para obter a componente na direção z . Percebemos que o ângulo α aparece também no triângulo formado pela posição da carga, da origem e do ponto $\langle x > 0, y = 0, z = 0 \rangle$. Então temos

$$\sin \alpha = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \quad (1.5.2)$$

Multiplicando (1.5.1) e (1.5.2) e acrescentando ainda o fator 2, que toma conta da contribuição da carga $-q$, e acrescentado ainda direção e sentido ($-\hat{z}$), obtemos o resultado desejado:

$$\vec{E}(x,0,0) = -\hat{z} \frac{k q d}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}} \quad (1.5.3)$$

O cálculo formal é muito simples e não há necessidade de supor determinados sinais das cargas. Precisamos apenas dos vetores posição das cargas e o ponto onde se quer calcular o campo. Chamando estes vetores de \vec{r}_q , \vec{r}_{-q} e \vec{r} , temos:

$$\vec{r}_q = \hat{z} \frac{d}{2}, \quad \vec{r}_{-q} = -\hat{z} \frac{d}{2}, \quad \vec{r} = \hat{x} x \quad (1.5.4)$$

Substituindo estes na fórmula (1.4.9), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,0,0) &= \frac{k q (\hat{x} x - \hat{z} d/2)}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{k(-q)(\hat{x} x + \hat{z} d/2)}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}} = \\ &= -\hat{z} \frac{k q d}{\left(x^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Chegamos então ao mesmo resultado.

Na maioria das aplicações, o ponto de observação fica muito longe desta configuração de cargas. Muito longe significa que a distância $|x|$ é grande em comparação com a distância d que separa as duas cargas. Temos um excelente exemplo nas aplicações químicas. A molécula da água contém o átomo de oxigênio que puxa as cargas negativas e a distribuição das cargas elétricas dentro desta molécula tem um centro de carga positiva, ligeiramente afastado do centro da carga negativa. A distância entre estes centros é ainda muito menor que o tamanho da molécula. Então neste caso d é uma fração de nanômetro. Muitas vezes estamos interessados em forças que esta molécula possa exercer sobre cargas que se encontrem a uma distância de alguns micrômetros. Logo podemos ter $|x| \approx 100000 \times d$.

Isto justifica estudar o comportamento assintótico do campo para grandes distâncias. Para elaborar a forma assintótica, botamos o valor grande x em evidência:

$$\vec{E}(x,0,0) = \frac{-\hat{z} k q d}{|x|^3} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (1.5.6)$$

Com $d \ll |x|$ podemos aproximar $1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2$ por 1 e obtemos:

$$\vec{E}(x,0,0) \xrightarrow{|x| \gg d} \frac{-\hat{z} k q d}{|x|^3} \quad (1.5.7)$$

Um aspecto interessante neste comportamento assintótico é que o campo depende de d e q apenas através do produto qd . Enquanto estamos apenas interessados nesta região assintótica, podemos caracterizar a configuração por este produto. Falta mais um aspecto desta configuração que precisa ser descrito: a orientação do par de cargas no espaço. Esta pode ser descrita com ajuda de um vetor unitário que aponta da carga $-q$

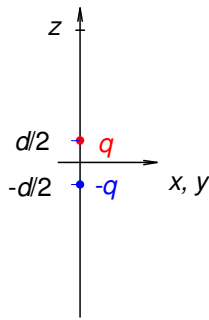
até a carga q . No caso calculado, isto seria o vetor \hat{z} . Podemos juntar esta característica com o produto qd e definir um vetor chamado *vetor dipolo*:

$$\vec{p} \stackrel{def.}{=} qd \hat{z} \quad (1.5.8).$$

Com este vetor, nosso resultado fica da seguinte forma:

$$\vec{E}(x,0,0) \underset{|x| \gg d}{\sim} -k \frac{\vec{p}}{|x|^3} \quad (1.5.9)$$

Outro aspecto interessante é a dependência com a distância $|x|$. O campo gerado por esta configuração cai cúbicamente para grandes distâncias. Então este campo diminui de intensidade com o afastamento mais rapidamente do que o campo de uma carga.



Poderíamos calcular o campo gerado pelas duas cargas logo para um ponto genérico \vec{r} . Mas vamos deixar este cálculo para uma outra ocasião. Por enquanto vamos nos contentar com mais um ponto nos eixos de coordenadas. Desta vez vamos calcular o campo num ponto com coordenadas $\langle x=0, y=0, z>$.

Fig. 1.5.2 Ilustração para o cálculo do campo num ponto no eixo z .

Neste ponto, o cálculo do campo é extremamente simples:

$$\vec{E}(0,0,z) = k \frac{q \hat{z}}{(z-d/2)^2} + k \frac{(-q) \hat{z}}{(z+d/2)^2} \quad (1.5.10)$$

Também nos pontos do eixo- z , veremos qual é o comportamento assintótico do campo para pontos muito afastados. Primeiramente botamos o z e fatores em comum em evidência:

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{kq \hat{z}}{z^2} \left\{ \frac{1}{\left(1-d/2z\right)^2} - \frac{1}{\left(1+d/2z\right)^2} \right\} \quad (1.5.11)$$

Com esta manobra geramos um número $d/2z$ muito pequeno em comparação com 1. Se desprezásemos este número completamente, chegaríamos ao resultado $\vec{E}(0,0,z) = 0$. Mas este procedimento significa “jogar fora o bebê junto com a água do banho”, ou como se um garimpeiro jogasse as pepitas de ouro fora junto com os cascalhos. Para ver o que significa fazer uma aproximação de $\vec{E}(0,0,z)$ para grandes valores de z , sem perda da parte essencial, escrevemos a série de Taylor da função $f(\epsilon) = (1+\epsilon)^n$. Temos

$$f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{1}{2} f''(0)\epsilon^2 + \frac{1}{2 \times 3} f'''(0)\epsilon^3 + \dots \quad (1.5.12)$$

Os coeficientes são: $f(0)=1$, $f'(0)=n$, $f''(0)=n \times (n-1)$, No nosso caso $n=-2$ e $\epsilon = \mp d/2z$. Se $d/2z$ é muito pequeno em comparação com 1, os termos de

mais alta ordem são sucessivamente menos importantes. Fazer uma aproximação de $\vec{E}(0,0,z)$ para grandes valores de z sem “jogar fora o bebê junto com a água do banho” significa truncar esta série de Taylor depois do primeiro termo que leva a um resultado $\vec{E}(0,0,z) \neq 0$. No nosso caso o primeiro termo que contribui com algo diferente de zero é o termo de ordem ε^1 , ou seja, o termo linear. Então basta fazer a aproximação

$$\boxed{(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon \quad \text{para} \quad |\varepsilon| \ll 1} \quad (1.5.13)$$

Enfeitei esta fórmula com uma moldura dupla por ser um tipo de aproximação de uso muito frequente. Qualquer engenheiro ou cientista das ciências quantitativas deve ter esta fórmula “no sangue”. Veremos um exemplo: Você como engenheiro formado, após longo período de desemprego, ficou feliz de ganhar um emprego na prefeitura. Sua tarefa é cuidar dos jardins da cidade. O gramado de uma praça circular deve ser renovado. Seu jardineiro mediu o diâmetro da praça e você calculou a quantidade de grama que deve ser comprada. Você sabe que seu jardineiro costuma errar as medidas por 1%. Quantos % de grama você compra a mais para não faltar? Resposta: a área da praça depende quadraticamente do diâmetro. Então $n = 2$ e você deve comprar 2% a mais. Se você não entendeu o que esta história tem a ver com a fórmula (1.5.13), deve fazer os exercícios E1.5.1 e E1.5.2 desta seção.

Agora estamos prontos para fazer a aproximação para o campo elétrico.

$$\vec{E}(0,0,z) \xrightarrow{d \ll z} \frac{kq\hat{z}}{z^2} \left\{ \left(1 + \underbrace{(-2)}_n \underbrace{\left(-\frac{d}{2z} \right)}_\varepsilon \right) - \left(1 + \underbrace{(-2)}_n \underbrace{\left(+\frac{d}{2z} \right)}_\varepsilon \right) \right\} \quad (1.5.14)$$

Percebemos que os termos de ordem zero cancelam. Os termos de ordem 1 não cancelam e obtemos:

$$\vec{E}(0,0,z) \xrightarrow{d \ll z} 2 \frac{kqd\hat{z}}{z^3} \quad (1.5.15)$$

De novo, podemos escrever este resultado em termos do vetor dipolo. Além disso podemos facilmente generalizar o resultado para poder incluir valores negativos de z (pense um pouco!) e temos finalmente:

$$\vec{E}(0,0,z) \xrightarrow{d \ll |z|} 2 \frac{k\vec{p}}{|z|^3} \quad (1.5.16)$$

Percebemos novamente uma queda cúbica com a distância. Num capítulo futuro calcularemos o campo para um ponto genérico e se verifica que esta queda cúbica ocorre também para pontos fora dos eixos de coordenada. Então uma configuração neutra de duas cargas tem um campo que diminui com a distância cubicamente para grandes distâncias. Pode-se mostrar que a queda do campo de uma configuração neutra é cada vez mais rápida quanto mais cargas ela contém¹. Isto nos deixa suspeitar que as

¹ Esta frase é um tanto imprecisa. O campo de qualquer configuração neutra pode ser escrito como soma de campos de 2^n -polos ($n=1$ corresponde ao dipolo). O campo de um 2^n -polo decai como $r^{-(n+2)}$, sendo r a distância que separa o observador da configuração. No caso de 1,01 mol de elétrons e 1,01 mol de prótons, a parcela principal é algo como um 2^{80} -polo cujo campo decai como r^{-82} . Mas em geral o

forças de curto alcance que encontramos no dia a dia (quando batemos a nossa cabeça na quina da mesa) são também forças elétricas e o curto alcance se deve ao fato de que os corpos neutros são compostos de números imensos de cargas. Nos exercícios vocês podem ver esta queda mais rápida do campo para o caso de uma configuração neutra de quatro cargas.

A região assintótica pode ser descrita também mantendo a distância do ponto de observação fixo e mandando $d \rightarrow 0$. Para não acabar com um campo zero, deve-se tomar este limite de tal forma que o valor da carga q aumente tal que qd fique constante. Neste limite, nossa configuração de cargas se chama de *dipolo elétrico*.

Agora vamos abordar a questão como um corpo neutro com centro positivo ligeiramente deslocado do centro negativo se comporta dentro de um campo elétrico. Então vamos imaginar que uma configuração, que no limite $d \rightarrow 0$ corresponde a um dipolo, é introduzida numa região onde existe um campo elétrico diferente de zero. Seja $\vec{E}(x, y, z)$ este campo. Ao introduzir as duas cargas modificamos o campo. Pode haver duas modificações: A primeira sempre ocorrerá; trata-se da adição das contribuições das duas cargas. A segunda modificação não ocorre sempre; isto depende da maneira como o campo $\vec{E}(x, y, z)$ foi gerado. Em princípio a introdução do dipolo pode provocar um deslocamento das cargas que geraram o campo e conseqüentemente uma alteração do campo. Vamos supor que isto não aconteça, supondo que as cargas são fixas. Então esta segunda modificação supostamente não ocorre. A primeira modificação, a simples adição do próprio campo do dipolo, não resulta em nenhuma força sobre o dipolo e podemos ignorar esta modificação. Então vai atuar uma força

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}_q) + (-q)\vec{E}(\vec{r}_{-q}) \quad (1.5.17)$$

sobre o objeto que contém esta configuração de duas cargas. Nesta fórmula \vec{r}_q e \vec{r}_{-q} são as posições das cargas q e $-q$ respectivamente.

Primeiramente vamos considerar o caso simples de um campo elétrico uniforme, isto é, um campo constante. Neste caso a força total é obviamente zero. Mas isto não significa que o corpo que leva a configuração das cargas não sofrerá nenhum efeito do campo. Com a figura 1.5.3 entendemos imediatamente que haverá um torque.

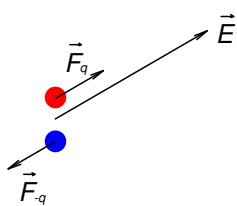


Fig.1.5.3 Dipolo num campo elétrico uniforme.

Lembramos da definição de torque dado na Física I. Um conjunto de forças \vec{F}_k , $k=1,2,\dots$ que atua em pontos \vec{r}_k , $k=1,2,\dots$ exerce um torque relativo à origem dado por

$$\vec{\tau} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k \quad (1.5.18)$$

Nesta fórmula “ \times ” é o produto vetorial, que deve ter sido ensinado na Física I. Mais tarde usaremos este tipo de produto intensamente e daremos mais informação a respeito deste produto em lugar oportuno. Mas, no momento, podemos limitar-nos aos conhecimentos adquiridos na Física I. Em geral o torque depende da escolha da origem.

número de partículas não é exatamente uma potência de 2 e em geral sobra algum campo de um dipolo, mas este é na maioria dos casos pequeno, a não ser que tenhamos um pedaço de matéria polarizada.

Mas, quando a soma das forças é zero, o torque não depende desta escolha. Este é justamente o caso do dipolo num campo uniforme. Podemos utilizar que o torque não depende da origem e escolher a origem de tal forma que o cálculo do torque fique facilitado. Escolho a posição da carga $-q$ como origem. Neste caso $\vec{r}_{-q} = 0$ e somente um termo sobrevive no somatório. Além do mais, com esta escolha o vetor posição da carga q pode ser escrito como

$$\vec{r}_q = \frac{\vec{p}}{q} \quad (1.5.19)$$

Então obtemos

$$\vec{\tau} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = 0 + \vec{r}_q \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.5.20)$$

Boto o resultado numa moldura porque bem mais tarde neste curso voltaremos a este resultado.

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad (1.5.21)$$

É bom mencionar que o campo gerado pelas próprias cargas da nossa configuração estudada não contribui para o torque.

Finalmente vamos considerar o caso de um dipolo num campo não uniforme. A fórmula (1.5.17) descreve a força resultante. Quando falamos de dipolo, temos sempre o limite $d \rightarrow 0$ em mente. Então as duas posições \vec{r}_q e \vec{r}_{-q} são quase iguais. Se colocamos o fator q em evidência na fórmula (1.5.17), obtemos a diferença da função \vec{E} em dois pontos muito próximos. Isto deve acionar na cabeça de um bom aluno imediatamente a ideia de usar o conceito de derivada. Usando $\vec{r}_q - \vec{r}_{-q} = \vec{p}/q$, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q[\vec{E}(\vec{r}_q) - \vec{E}(\vec{r}_{-q})] = q\left[\vec{E}\left(\vec{r}_{-q} + \frac{\vec{p}}{q}\right) - \vec{E}(\vec{r}_{-q})\right] = \\ &= \frac{\vec{E}(\vec{r}_{-q} + q^{-1}\vec{p}) - \vec{E}(\vec{r}_{-q})}{q^{-1}} \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

Se mandamos agora $d \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$ de tal forma que o produto dq se mantém constante, temos o caso de um dipolo no campo não uniforme. Mas, mandando $q \rightarrow \infty$, significa mandando $q^{-1} \rightarrow 0$ e a expressão final da fórmula (1.5.22) vira uma derivada. Uma derivada de uma função vetorial pode criar certa confusão na cabeça. Então, para evitar tal confusão, vamos olhar apenas uma das componentes do vetor, por exemplo, a componente x . Tomando o limite, obtemos

$$\begin{aligned} F_x &= \lim_{q^{-1} \rightarrow 0} \frac{E_x(\vec{r}_{-q} + q^{-1}\vec{p}) - E_x(\vec{r}_{-q})}{q^{-1}} = \\ &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

Há uma maneira prática de escrever este resultado com a ajuda do operador Nabla²

² O nome Nabla foi dado a este operador pelo teólogo William Robertson Smith (1846–1894). Com a forma do símbolo, ele se lembrou de uma harpa que se chama נבל (*nével*) em hebraico ou *vúβλα* (*nábla*) em grego.

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.5.24)$$

Com este operador podemos escrever a (1.5.23) na forma

$$F_x = (\vec{p} \cdot \nabla) E_x \quad (1.5.25)$$

O operador $(\vec{p} \cdot \nabla)$ é simplesmente

$$(\vec{p} \cdot \nabla) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.5.26)$$

A fórmula (1.5.25) descreve a componente x da força. As outras componentes são naturalmente análogas. Uma vez que nos recuperamos do susto de derivar uma função vetorial, podemos juntar as expressões das três componentes e escrever tudo em forma vetorial:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (1.5.27)$$

Este resultado vale tanto para dipolos permanentes como para dipolos que foram induzidos pelo próprio campo. Então a fórmula (1.5.27) pode em princípio ser usada para calcular a força que atua sobre um pedacinho de papel neutro perto de um bastão eletrizado. Na presença do bastão, o papel está cheio de dipolos induzidos e sobre cada um destes dipolos atua uma força descrita pela (1.5.27). A força sobre o papel é a soma destas forças.

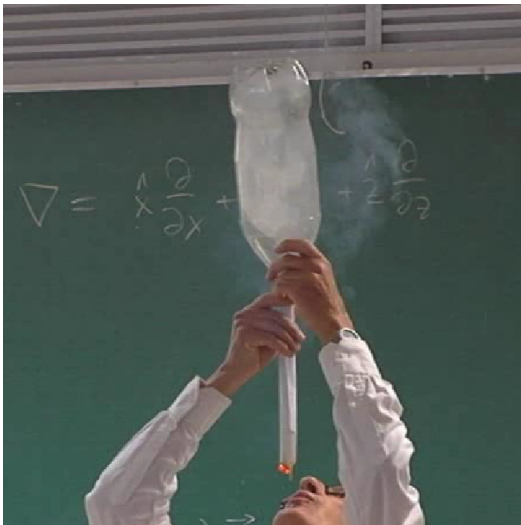


Fig. 1.5.4 Enchendo uma garrafa PET com fumaça.

Hoje a aula estava carregada de fórmulas complicadas e é bom relaxar com um experimento lindo que mostra uma aplicação das forças elétricas que atuam sobre dipolos induzidos e também sobre algumas partículas eletricamente carregadas. A indústria tem problemas com a poluição do ar com partículas de fumaça que saem das chaminés. As forças elétricas podem ser usadas para retirar estas partículas dos gases que se jogam na atmosfera. Simplesmente fios condutores altamente carregados são esticados no volume da fumaça e as partículas de fumaça são polarizadas e atraídas para os fios.

Algumas partículas também recebem carga elétrica ao tocar num fio e depois sofrem uma força ainda maior. Estes atravessam o volume de fumaça com alta velocidade e causam turbulências. Contudo a maior parte das partículas acaba grudando em superfícies dos arames ou outras superfícies, e o volume de gás fica com uma concentração menor de partículas. As figuras 1.5.4-6 mostram uma demonstração deste filtro de fumaça. Na figura 1.5.4 uma garrafa PET é carregada com fumaça de um charuto de folha A4. A Figura 1.5.5 mostra a garrafa cheia de fumaça com a sua tampa, que foi munida de um conector elétrico no qual um fino arame de cobre foi pendurado dentro da garrafa. No lado inferior do arame está um pequeno peso (uma porca) para manter o arame esticado. Este contato é ligado no mesmo gerador eletrostático que usamos para demonstrar as linhas de força. Botando o gerador para funcionar se observam estranhos movimentos turbulentos no volume da garrafa e em poucos

segundos o volume fica praticamente sem fumaça. A Figura 1.5.6 mostra o resultado final. A garrafa parece ainda um pouco turva, mas isto é predominantemente fumaça condensada na parede da garrafa e não fumaça no volume.

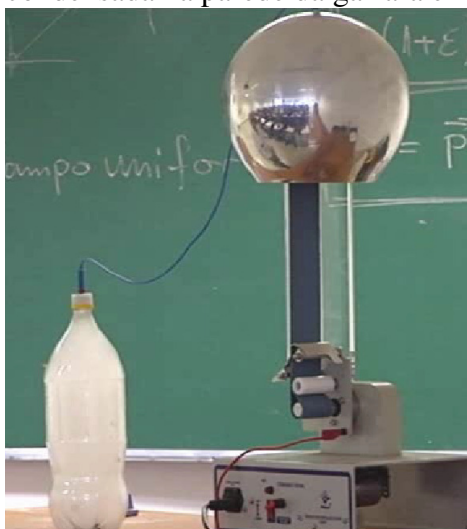
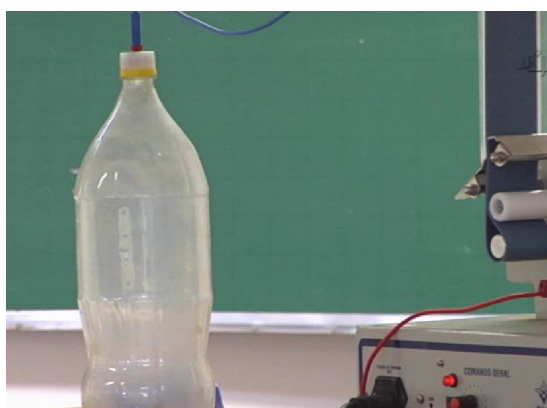


Fig. 1.5.5 Garrafa PET cheia de fumaça. Há um conector (born de pino banana) na tampa da garrafa, e um fio fino de cobre conectado com este conector está pendurado dentro da fumaça. O conector está ligado num gerador eletrostático (por enquanto desligado).

Um aviso para os futuros professores: se você quer mostrar experiências em sala de aula, deve sempre experimentar as demonstrações antes para conhecer tudo o que pode dar errado. Mas, com o filtro de fumaça, o ensaio prévio pode justamente provocar o desastre! O material PET se polariza e ele tem memória. Então depois do ensaio fica alguma configuração não nula de campo elétrico na garrafa. E pode acontecer que a fumaça suma antes de ligar o gerador. Então um ensaio prévio deve ser feito com muita antecedência e também é

recomendável lavar a garrafa e deixá-la secar antes da próxima demonstração.

Fig. 1.5.6 A mesma garrafa da imagem 1.5.5 poucos segundos depois de ligar o gerador.



Exercícios:

E 1.5.1: Uma grandeza y depende de uma grandeza x da seguinte forma: $y = A x^n$. Se o valor de x muda de x_0 para $x_0 + \delta x$, vamos chamar $\delta x / x_0$ de “alteração relativa de x ”. Deduza uma fórmula que permita expressar a alteração relativa de y aproximadamente em termos da alteração relativa de x .

E 1.5.2: Você trocou um fio de uma balança de torção por outro do mesmo material. O fio original tinha um diâmetro de 0,100 mm. O novo fio tem um diâmetro de 0,101 mm. Qual será a alteração percentual da sensibilidade da balança causada pela troca do fio?

E 1.5.3:



Calcule o campo elétrico num ponto do eixo x de uma configuração de cargas situada em volta da origem de coordenadas que consiste em duas cargas q e em duas cargas $-q$ como indicado na figura 1.5.7. Considere x

$\gg d$ e faça uma aproximação adequada (sem jogar fora o bebê junto com a água do banho).

Dica: você pode somar 4 contribuições, ou somar dois campos de dipolo. Com a aproximação adequada você calculou um valor do campo de um *quadrupolo*. No caso de um dipolo a separação da contribuição essencial pode ser obtida fazendo um limite $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$ de tal modo que $dq = \text{const.}$ Qual tipo de limite deve ser tomado no caso do quadrupolo para separar as “pepitas de ouro dos cascalhos”?

E.1.5.4: Escreva os pontos de destaque desta seção.