Pêndulos

Pêndulo Simples e Pêndulo Físico

1 – Objetivos Gerais:

- Determinar experimentalmente o período de oscilação de um pêndulo físico e de um pêndulo simples;
- Determinar experimentalmente o comprimento do pêndulo simples que tenha o mesmo período que um pêndulo físico em forma de barra;
- Determinar a aceleração da gravidade.

Anote a incerteza dos instrumentos de medida utilizados: σ_{ap}

2- Experimentos:

2.1 - O centro de oscilação do pêndulo físico em forma de barra:

1. Meça a distância L (em m) entre os pontos P e O sobre a barra – não se esqueça de anotar a incerteza do equipamento;
2. Suspenda a barra retangular pelo orifício da extremidade (ponto P), sem se esquecer da porca de proteção;
3. Meça o tempo de 10 oscilações completas e determine o período de uma oscilação (T) do barra suspensa pelo ponto P;

   *Execute este processo 3 vezes e determine o período para cada uma das medidas. Complete a tabela 1 com todas as medidas de tempo (10 oscilações) e os seus correspondentes períodos T. Explique por que foi medido o tempo de 10 oscilações e depois calculado o T correspondente. Calcule o período médio $\langle T \rangle$ de oscilação da barra suspensa pelo ponto P;

Figura 1: Montagem do pêndulo físico em forma de barra

   ****A incerteza na medida do tempo de 10 oscilações da tabela 1 esta associada ao tempo de reação do operador do cronômetro, tempo entre dois disparos do cronômetro. Para medir esse tempo de reação, pressione**

o botão de disparo e, imediatamente após o disparo (tente fazer isso o mais rápido que puder) pressione o mesmo botão para parar a medição do tempo de sua reação (δT).

4. Agora, suspenda a barra pelo ponto O e repita o mesmo procedimento do *item (3),* completando a tabela 1 com as suas medidas;

2.2 - Medida experimental da aceleração da gravidade:

5. Mantenha a barra suspensa pelo ponto O. Regule o comprimento do fio do **pêndulo simples, com o cilindro de alumínio (**Figura 2), até que a **marca central** do corpo suspenso esteja alinhada com a extremidade inferior barra;

Figura 2*:Ajuste do comprimento do fio do pêndulo simples*

6. Meça 4 vezes o tempo de 10 oscilações completas para o pêndulo simples e encontre o período de oscilação para este primeiro comprimento (L_1) .

   *Repita o procedimento acima para outros 3 comprimentos diferentes do pêndulo simples: $L_2 = 10{,}00\,cm,\; L_3 = 25{,}00\,cm,\; L_4 = 40{,}00\,cm$. Complete a tabela 2 com as medidas de tempo (10 oscilações) para cada um dos comprimentos L, com os seus respectivos períodos de oscilação. Calcule o período médio $\langle T \rangle$ e o valor da incerteza na medida δT para cada um dos comprimentos do pêndulo simples;

Quando o pêndulo se movimenta em pequenas oscilações (ângulo α pequeno(fig 3), de uns 10^o , ou menos), adiantamos que a relação entre o período, *T*, e o comprimento do fio, *L,* é dada, em muito boa aproximação, por

$$T = bL^a \tag{1}$$

onde *b* e *a* são constante.

7. Faça um gráfico de $\langle T \rangle$ *vs.* L em papel com escala logarítmica e trace a reta que melhor se ajusta aos pontos;

2.4 – Questões e Discussão dos resultados:

Atenção! As questões abaixo enumeradas não devem ser escritas, no relatório, como perguntas/respostas. A discussão dos resultados deve ser feita em forma de texto contínuo e auto-contido.

8. Compare o período médio para a suspensão pelo ponto *P*, $\langle T \rangle_P$, com o período médio medido para a suspensão pelo ponto *O*, $\langle T \rangle_O$. Comente e explique;
9. Compare o período médio da primeira medida do pêndulo simples, para L_1 , com os dois período médios encontrados para o pêndulo físico nos *itens (3) e (4)* e comente seus resultados;
10. A partir do gráfico do *item (7)* encontre os valores de *a* e *b* da relação na eq.(01). Caso seja necessário, consulte a Apostila de Análise Dados – Linearização de gráficos;
11. Qual é a forma da relação entre o período e o comprimento do fio a partir dos valores de *a* e *b;*
12. Com os valores obtidos no *item 12*, encontre o valor da aceleração da gravidade local, *g*. Discuta seus resultados, tendo como base o valor médio aproximado do valor da aceleração da gravidade, $g = 9{,}78\, m/s^2$;
13. O valor encontrado para o coeficiente linear *b* está de acordo com o esperado? Explique!
14. Discuta a validade da afirmação:

    "O ponto de oscilação O, denominado de centro de oscilação, é o ponto por onde deve ser suspenso o pêndulo físico para que ele tenha o mesmo período de oscilação do pêndulo simples de mesmo comprimento L".

3 - Introdução teórica:

3.1 - O pêndulo simples:

O pêndulo simples ideal consiste em uma massa presa a um fio de massa desprezível como mostra a figura ao lado. O pêndulo simples é feito com um objeto pequeno e pesado (para que o atrito com o ar possa ser desprezado) pendurado na extremidade de um cordel bem fino e resistente.

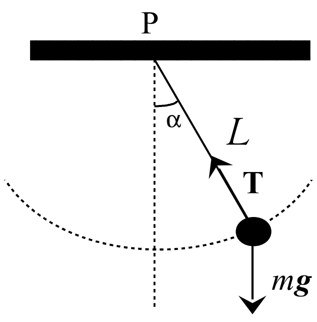


Figura 3: Pêndulo simples

São duas as forças que atuam sobre a bolinha de massa *m*: a força peso ***mg*** e a força de tensão do fio **T**. Para um pêndulo que faz um ângulo α com a posição de equilíbrio, o torque τ produzido pela força gravitacional em relação ao ponto de suspensão **P**, tem valor $\tau = mgL\, sen\, \alpha$, que é o produto da intensidade da força (*mg*) pela distância da direção da força ao ponto de suspensão ($L\, sen\, \alpha$). A força de tensão **T** no fio não produz torque, já que sua direção passa sempre pelo ponto de suspensão.

Levando em conta o momento de inércia *I* da bolinha em relação ao ponto de suspensão, $I = mL^2$, chegamos à equação para α :

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \tau \rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgLsen\,\alpha}{mL^2} \rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\,\alpha \qquad (2)$$

O sinal negativo é necessário porque a aceleração $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ atua sempre no sentido de diminuir α . Para ângulos α pequenos, podemos substituir na equação acima $sen\,\alpha \simeq \alpha$ (ângulo em radianos!)

Neste caso, a equação (2) torna-se:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}\alpha \qquad (3)$$

Cuja solução geral tem a forma:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad (4)$$

onde α_0 é **amplitude** de oscilação, ω é a **frequência** de oscilação e φ é a **fase inicial** de oscilação.

Na equação (4) o valor de ω é definido como $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e os valores da amplitude α_0 e da fase inicial φ dependem da posição e velocidade iniciais do pêndulo.

Exercício: Verificar que $\alpha(t)=\alpha_0\cos(\omega t+\varphi)$, com $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$, é solução da Equação (3).

Sabendo-se o valor da frequência ω podemos achar o período T_S das oscilações do pêndulo simples, oscilando em pequenas amplitudes, como

$$T_S=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5}$$

3.2 - O pêndulo físico:

O pêndulo físico é um objeto extenso posto para oscilar em torno de um ponto **P**, por onde passa o eixo de suspensão. Além do ponto de suspensão, distinguimos dois outros pontos no pêndulo físico: o **centro de gravidade G** e o ponto **O**, denominado centro de oscilação, que determina o comprimento L do pêndulo simples equivalente, ou seja, de mesmo período do pêndulo físico considerado.

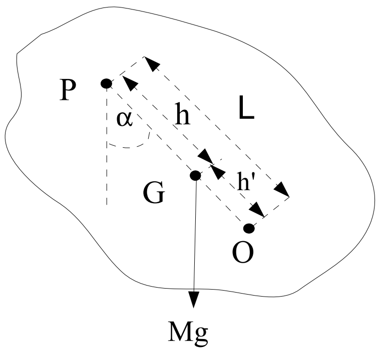


Figura 4: Pêndulo físico

O centro de gravidade **G** é o ponto onde a resultante das forças gravitacionais atua. Se o eixo de suspensão passar por esse ponto, o corpo não oscila: ele gira em torno do ponto de suspensão.

A equação de movimento do pêndulo físico é

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\tau\rightarrow\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\frac{\tau}{I}=\frac{-Mgh\,sen\,\alpha}{I}=-\frac{Mgh}{I}sen\,\alpha \tag{6}$$

Como no caso do pêndulo simples, restringimos as oscilações a serem pequenas, de modo que vale a aproximação $sen\,\alpha\simeq\alpha$. Com isso a Equação (6) se reduz a

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\frac{Mgh}{I}\alpha \tag{7}$$

A solução dessa equação é a mesma do pêndulo simples, Equação (4), bastando que se escolha $\omega=\sqrt{\frac{Mgh}{I}}$. Como $T=\frac{2\pi}{\omega}$, o período T_F do pêndulo físico é

$$T_F=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{8}$$

3.3 - *A determinação do comprimento do pêndulo simples equivalente ao pêndulo físico:*

Igualando as expressões (5) e (8), é possível encontrar o comprimento L do pêndulo simples equivalente ao pêndulo físico:

$$T_S = T_F \rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{9}$$

resultando em

$$L = \frac{I}{Mh} \tag{10}$$

O pêndulo simples de comprimento L tem o mesmo período do pêndulo físico considerado. O ponto *O*, localizado a uma distância L do ponto de suspensão *P*, sobre a linha que une *P* e o centro de gravidade *G*, é denominado *centro de oscilação* do pêndulo físico.

3.4- *Pontos Conjugados:*

No cálculo do momento de inércia do pêndulo físico, frequentemente é usado o teorema dos eixos paralelos, porque é fácil encontrar em tabelas o momento de inércia das principais figuras geométricas em relação a um eixo passando pelo centro de gravidade da figura. Por exemplo, se o momento de inércia de um objeto de massa M em relação ao centro de gravidade é I_{CG} e o tal objeto é usado como pêndulo físico suspenso por um ponto situado a uma distância h do centro de gravidade, o teorema dos eixos paralelos assegura que o momento de inércia do objeto em relação ao eixo que passa pelo ponto de suspensão é

$$I = I_{CG} + Mh^2 \tag{11}$$

É conveniente definir o raio de giração K como

$$I_{CG} = MK^2 \quad . \tag{12}$$

Essa definição permite expressar o momento de inércia como

$$I = MK^2 + Mh^2 = M(K^2 + h^2) \tag{13}$$

Introduzindo a expressão (13) do momento de inércia na expressão (8) do período T_F do pêndulo físico, obtemos

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + h^2}{gh}} \tag{14}$$

Observe que *h* é a distância do ponto de suspensão do pêndulo ao centro de gravidade. Para estudar a variação do período T_F com a distância *h*, podemos fazer um gráfico $T_F(h) \times h$, representado na Figura 5.

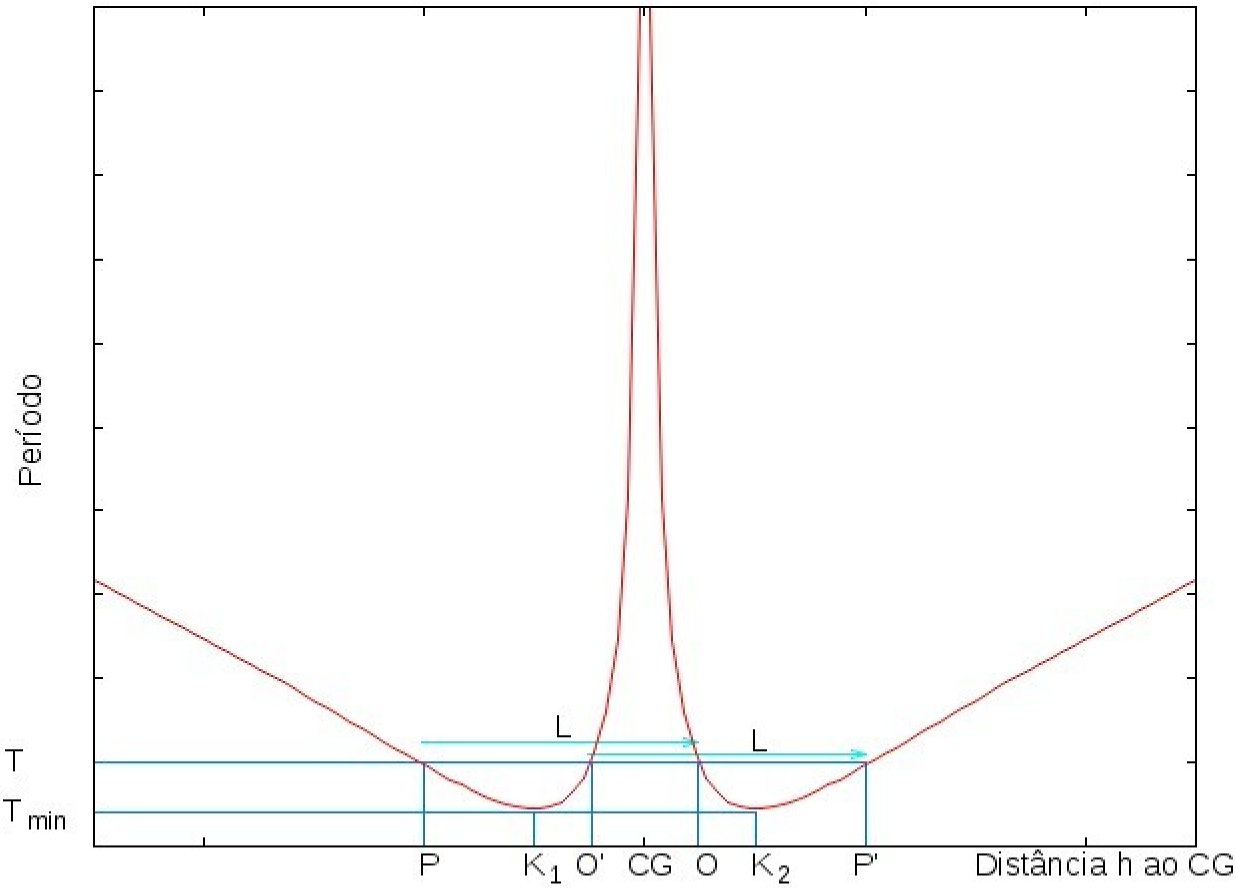


***Figura 5**: Período do pêndulo físico como função da distância do ponto de suspensão ao CG*

A Figura 5 apresenta dois ramos simétricos em relação ao centro de gravidade *CG*, o que significa que, com exceção dos pontos de período mínimo, há sempre quatro pontos com o mesmo período de oscilação, dois de um lado do *CG* e os outros dois simetricamente localizados do outro lado. Na Figura 5, os pontos de suspensão *P, P*', *O* e *O'* têm o mesmo período.

Existem dois pontos com o período mínimo: são os pontos de suspensão K_1 e K_2, simetricamente dispostos em relação ao *CG*. É fácil mostrar, tomando a derivada do período T_F em relação a h em (14) e igualando o resultado a zero, que a condição de mínimo da função é obtida nos pontos $h=\pm K$:

$$\frac{dT_F}{dh}=2\pi\frac{1}{2}\left(\frac{K^2}{gh}+\frac{h}{g}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{K^2}{gh^2}+\frac{1}{g}\right]=0$$
$$logo,-\frac{K^2}{gh^2}+\frac{1}{g}=0\rightarrow h^2=K^2\rightarrow h=\pm K \quad (15)$$

Diz-se que o ponto P é o conjugado de O e o ponto P' é o conjugado de O'. A distância entre os pontos conjugados PO é a mesma que entre os pontos $P'O'$ e igual a L, o comprimento do pêndulo simples equivalente.

Quando o pêndulo físico oscila em torno do eixo horizontal que passa pelo ponto P, este ponto recebe o nome de ponto de suspensão. O ponto O, conjugado de P, recebe o nome de centro de oscilação. Se colocarmos o pêndulo para oscilar em torno do ponto O, ele vai oscilar com o mesmo período que oscilava quando estava suspenso pelo ponto P. Nesse caso O passa a ser o ponto de suspensão e P o centro de oscilação.

O centro de oscilação O é chamado também de centro de percussão, porque se o pêndulo receber uma pancada neste ponto, ele vai girar em torno do ponto de suspensão P, e o ponto de suspensão não sentirá nenhuma pancada. Os cabos de martelos e marretas são dimensionados de modo que o centro de percussão O fique localizado na parte metálica e o ponto de suspensão conjugado P na empunhadura. Desse modo não há vibração no cabo quando o instrumento bate em um prego ou uma pedra. Os cabos mal dimensionados transmitem a vibração da pancada para a mão.

Comparando as Figuras 4 e 5 é fácil ver que $L=h+h'$, onde h é a distância do ponto de suspensão P ao CG e h' é a distância do centro de oscilação O ao CG.

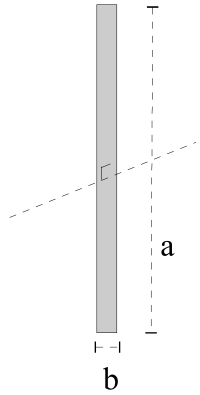


Figura 6: Pêndulo físico em forma de barra

3.5 - ***Determinação do centro de oscilação do pêndulo físico em barra:***

O momento de inércia de uma barra homogênea com comprimento a, largura b e espessura uniforme, em relação a um eixo de rotação perpendicular passando pelo centro da barra, é dado por $I_{CG}=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$. Devido à simetria e homogeneidade da barra, o centro de gravidade está localizado no meio da barra, a uma distância $h=a/2$ da extremidade. Usando o teorema dos eixos paralelos, obtemos o momento de inércia da barra I_E em relação a um eixo de rotação que passa pela extremidade da barra:

$$I_E=I_{CG}+M(a/2)^2=\frac{1}{12}M(4a^2+b^2) \tag{16}$$

Como a largura b é pequena comparada ao comprimento a, podemos aproximar a expressão (16) como

$$I_E\simeq\frac{1}{3}Ma^2 \tag{17}$$

Substituindo I_E e h na expressão (10), calculamos o comprimento do pêndulo simples equivalente

$$L=(2/3)a \tag{18}$$

3.6 – *Análise de dados*

Na maioria das vezes, o valor médio, ou média aritmética, de várias determinações independentes de uma grandeza física, que varia aleatoriamente, fornece a melhor estimativa do valor esperado dessa grandeza. Se *n* é o número total das determinações independentes x_i da mesma grandeza x, então o valor médio será calculado por

$$\langle x \rangle = \sum_{i-1}^{n} \frac{x_i}{n} \tag{19}$$

O desvio padrão da média, ou desvio padrão experimental da média, é definido como sendo

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \tag{20}$$

Esta expressão dá uma estimativa da maior ou menor incerteza da média $\langle x \rangle$ em relação a uma média mais geral, que seria a média de diversas médias.

- ***<u>Incertezas em medidas físicas diretas</u>***:

Quando uma grandeza física de interesse é obtida diretamente a partir de um instrumento, ou aparelho, de medida, diz-se que o procedimento é feito por uma medida direta. Sejam, por exemplo, *n* determinações de uma mesma grandeza *x* obtidas diretamente por um mesmo aparelho de medida. O valor médio $\langle x \rangle$ da grandeza representa o valor esperado, ou a melhor estimativa, dessa grandeza. Nesse procedimento, a *<u>incerteza na medida</u>* δx deve incluir, não somente a incerteza aleatória expressa pelo desvio padrão da média σ_m, mas também a incerteza intrínseca σ_{ap} do aparelho de medida, isto é,

$$\delta x = \sqrt{\sigma_{ap}^2 + \sigma_m^2} \tag{21}$$

O resultado final da medida da grandeza x deverá ser corretamente apresentado como:

$$x = \langle x \rangle \pm \delta x \tag{22}$$

Quando se faz a medida da grandeza *x* somente uma vez, não se terá a disposição uma incerteza aleatória no processo de medida. Nesse caso, $\sigma_m = 0$ na Eq.20 e a incerteza na medida x será apresentada somente como a incerteza intrínseca do aparelho, isto é, $f=f(x,y)$.

- ***Incertezas em medidas físicas indiretas***:

Na maioria dos experimentos, a medição de uma grandeza f de interesse é feita de maneira indireta, sendo esta grandeza obtida a partir de medidas de uma ou mais grandezas primárias. O cálculo de *f* é feito a partir de uma função conhecida das grandezas primárias. Estas grandezas são também denominadas grandezas de entrada, enquanto a grandeza *f* é denominada grandeza de saída. Um exemplo é o cálculo da densidade de um objeto, no qual se mede a massa e o volume do mesmo. A massa e volume são as grandezas de entrada enquanto a densidade é a grandeza de saída. A partir do conceito da incerteza de uma medida direta, é possível estimar a incerteza combinada ou propagada para a grandeza indireta. Seja, por exemplo, o caso em que a grandeza indireta *f* é obtida a partir das duas grandezas independentes *x* e *y* tal que

$$f=f(x,y) \tag{23}$$

Nesse caso a expressão para δf é

Relação funcional	Valor médio	Incerteza propagada
$f(x,y)=ax\pm by$; a,b=constante	$\langle f\rangle=a\langle x\rangle\pm b\langle y\rangle$	$\delta f=\sqrt{a^2(\delta x)^2+b^2(\delta y)^2}$
$f(x,y)=xy$	$\langle f\rangle=\langle x\rangle\langle y\rangle$	$\delta f=\sqrt{\langle y\rangle^2(\delta x)^2+\langle x\rangle^2(\delta y)^2}$
$f(x,y)=\frac{x}{y}$	$\langle f\rangle=\frac{\langle x\rangle}{\langle y\rangle}$	$\delta f=\frac{1}{\langle y\rangle}\sqrt{\langle y\rangle^2(\delta x)^2+\langle x\rangle^2(\delta y)^2}$

Tab. 1: Expressões para os cálculos dos valores médios e incertezas propagadas de algumas grandezas *f(x;y)* que possuem duas variáveis independentes, onde, δx e δy são as respectivas incertezas nas medidas diretas de *x* e *y*.

Bibliografia:

- Tipler, Paul A. (2000). *Física (2 volumes),* 4ª Ed., LTC
- Halliday, Resnick, Walker (2002). *Fundamentos de Física 2*, 6ª Ed., LTC

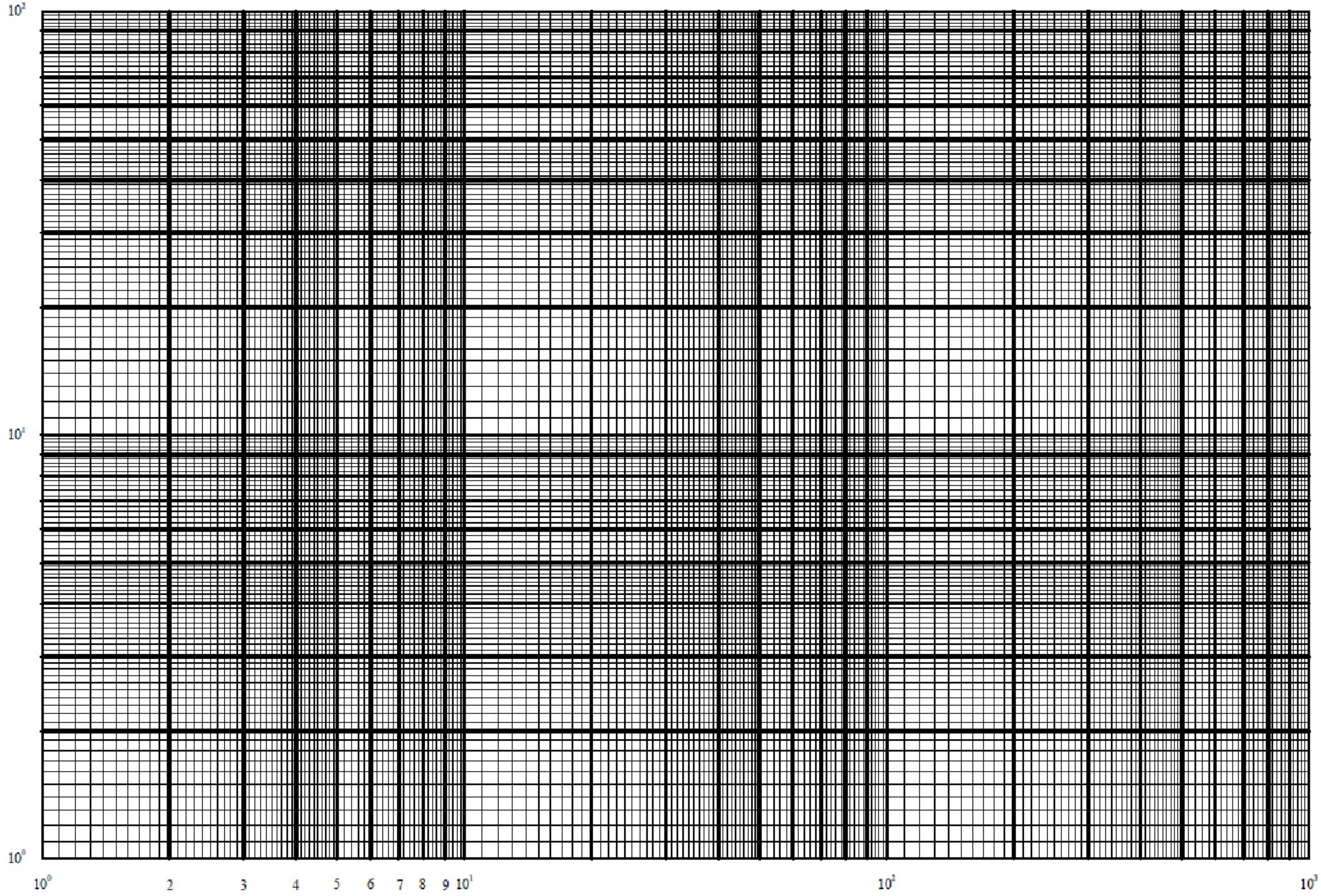
<u>Tabelas</u>:

	Barra suspensa Ponto P		Barra suspensa Ponto O	
N	$10\mathrm{T}_P \pm \delta\, 10\mathrm{T}_P$	$T_P \pm \delta T_P(s)$	$10\mathrm{T}_O \pm \delta\, 10\mathrm{T}_O$	$T_O \pm \delta T_O$
1				
2				
3				
4				
$\langle T \rangle \pm \delta T$				

Tabela 01

Comp. Fio (m)	10 T_1	T_1	10 T_1	T_2	10 T_1	T_3	10 T_1	T_4	$\langle T \rangle$	δT

Tabela 02



Papel para gráfico em escala log-log