Movimento Harmônico Amortecido

1 – Objetivos Gerais:

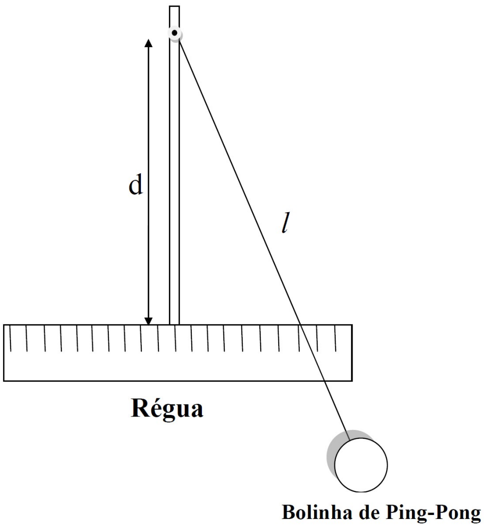
- Determinar o período de oscilação do pêndulo T;
- Determinar a constante de amortecimento γ.

***Anote a incerteza dos instrumentos de medida utilizados:** σ_{ap}*

2 – Experimento:

1. Meça a massa *m* e o diâmetro *D* da bolinha;

2. Pendure a bolinha pela haste e fixe a régua na base da haste, como mostra a figura, de modo tal que a bolinha fique **embaixo** da régua, mesmo quando afastada da sua posição de equilíbrio. **O comprimento do fio deverá ser o maior possível**;



3. Meça o comprimento do pêndulo *l,* desde o ponto de suspensão até o centro da bolinha;

4. Meça o comprimento, d do fio, desde o ponto de suspensão até a régua;

5. Afaste a bolinha da posição de equilíbrio até uma posição x_1, tal que o ângulo θ_0 seja da ordem de 10^o. Isto pode ser estimado calculando

$$\theta_0 \approx \tan\theta_0 = \frac{A_0}{d} = \frac{(x_1 - x_0)}{d} \approx 0{,}17$$

6. Anote a posição de equilíbrio x_0 (fio na vertical) do pêndulo;

7. Meça o tempo para 10 oscilações completas da bolinha. Calcule a partir desta medição o período T;

8. Repita os procedimentos do *item 7* mais 5 vezes, e encontre o período médio $\langle T \rangle$ mais a incerteza associada δT , e $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, juntamente com $\delta\omega$

9. Começando com a posição x_1 complete a tabela 1 com valores de x_n para $t_n = n(T/2)$;

Dica: Para facilitar a leitura das amplitudes, pode-se soltar a bolinha da máxima elongação lida anteriormente para se fazer a leitura da máxima elongação posterior. Ao fazer a leitura das posições x_n tente se posicionar em frente à régua para evitar os erros de paralaxe. Faça sempre a leitura da máxima posição **do fio** em frente à régua e não **da bolinha**, pois o fio intersecta a régua num ponto bem definido enquanto a posição da bolinha não está bem definida;

10. Com os valores de x_n complete as outras colunas da tabela 1;

11. Faça um gráfico em papel milimetrado de A_n em função de n;

12. Faça um gráfico em papel milimetrado de $|A_n|$ em função de n;

13. Faça um gráfico em papel milimetrado de $\ln|A_n|$ em função de n;

14. Determine o valor de γ a partir da expressão (23);

15. A partir dos valores obtidos de γ e de ω determine o valor de ω_0 . Compare este valor com o valor teórico $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$;

16. Usando o valor de γ obtido, obtenha uma estimativa da viscosidade do ar. Compare com o valor obtido para o óleo na experiência de viscosidade.

n	x_n	$A_n = x_{n+1} - x_0$	$\mid A_n \mid$	$\ln\mid A_n \mid$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Tabela 1*: Amplitude de osclilação*

3 – <u>Introdução Teórica</u>:

Numa experiência anterior estudamos os movimentos periódicos. Podemos ver, tanto na experiência das molas quanto na experiência dos pêndulos, que a grandeza x que oscila responde, quando as oscilações são pequenas, à equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$ para uma mola de constante elástica *k* ligada a uma massa *m* e $\omega = \sqrt{g/l}$ para um pêndulo simples. Em particular consideramos uma solução do tipo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

onde *A* e ϕ são duas constantes arbitrárias que dependem das condições iniciais. Esta última expressão descreve o **Movimento Harmônico Simples (MHS).**

Da expressão (2) podemos deduzir que a oscilação continua permanentemente. Entretanto observamos que, na prática, a amplitude de oscilação *A* não é constante mas decresce com o tempo, até o movimento cessar. Isto pode ser incluído na expressão anterior considerando uma amplitude *A(t)* no lugar de uma constante:

$$x(t)=A(t)\cos(\omega t+\phi) \tag{3}$$

Neste caso a expressão (3) não é solução da equação (1).

Nos cursos teóricos vimos que as oscilações descritas pela expressão (2) resultam de uma alternância entre a energia cinética (*T*) e a energia potencial (*V*), mas a energia total $E=T+V$ se conserva.

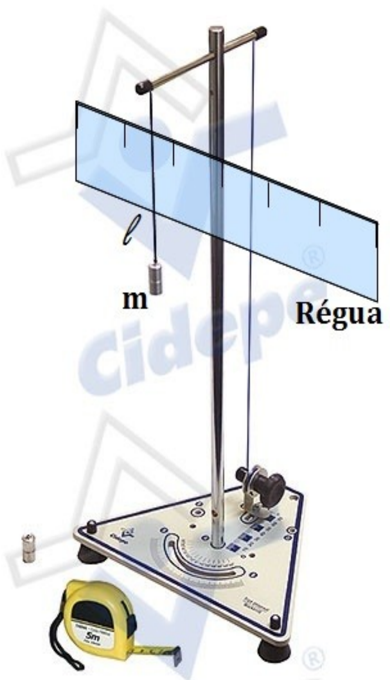
O que acontece na prática é que há forças de atrito que resultam numa dissipação da energia total que escapa do nosso sistema em forma de calor. Portanto a expressão (3) será solução de uma equação que inclua a força dissipativa.

<u>Seja agora o pêndulo indicado na figura 1</u>: Na experiência do viscosímetro estudamos a força de arrasto cujo módulo é

$$|\mathrm{F_D}|=3\pi\eta \mathrm{D}\,\mathrm{v}=\rho\,\mathrm{v} \tag{4}$$

onde chamamos $\rho\equiv 3\pi\eta D$. Dado que $\mathrm{v}=\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}}$ e o arco *a* é $a=l\theta$, temos finalmente que

$$F_D=-\rho l\frac{d\theta}{dt}. \tag{5}$$



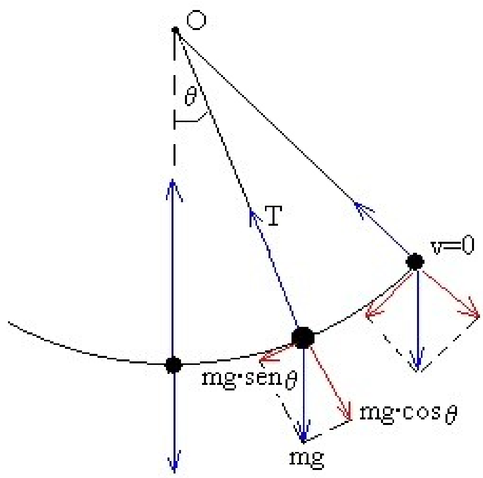


***Figura 1**: Pêndulo simples amortecido*

A componente da força peso na direção perpendicular ao fio, para um ângulo θ pequeno. é

$$F_{\perp}=-P\,sen\,\theta=-m\,g\,sen\,\theta\approx-m\,g\,\theta\,. \tag{6}$$

A força de arrasto $F_D=-\rho\,v$ é sempre contrária à velocidade e está na mesma direção da força $F_{\perp}$.

Aplicando a segunda lei de Newton, sendo a força resultante a soma das expressões (5) e (6), temos:

$$m\,l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\rho\,l\frac{d\theta}{dt}-m\,g\,\theta \tag{7}$$

Dividindo esta equação por *ml* podemos escrever:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\gamma\frac{d\theta}{dt}+\omega_0^2\theta=0 \tag{8}$$

onde chamamos $\gamma=\frac{\rho}{2m}$ e $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$. Esta última é a frequência angular que teria o pêndulo se não houvesse atrito ($\gamma=0$).

Vemos que o coeficiente γ é diretamente proporcional à viscosidade do ar

$$\gamma=(\frac{3\pi\,D}{2m})\,\eta \tag{9}$$

A expressão (8) é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. Portanto admite uma solução do tipo:

$$\theta(t)=B\,e^{\lambda t}. \tag{10}$$

Substituindo a proposta (10) na equação (8) vemos que será realmente uma solução se

$$B\,e^{\lambda t}\{\lambda^2-2\gamma\lambda+\omega_0^2\}=0. \tag{11}$$

Isto é, se

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \tag{12}$$

Estas duas raízes serão reais e negativas se $\gamma\geq\omega_0$. Neste caso o amortecimento é tão grande que o movimento do pêndulo não é mais oscilatório.

A situação da nossa experiência é a contrária, isto é, $\gamma<\omega_0$ e as raízes serão complexas.

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad e \quad \lambda_2 = \lambda_1^* \,. \tag{13}$$

Definindo:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad temos \quad \lambda_1 = -\gamma + i\,\omega \tag{14}$$

a solução geral será

$$\theta(t) = B_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + B_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \tag{15}$$

Como a solução tem de ser real devemos ter $B_1 = B_2^* = |B| e^{i\phi}$, e substituindo em (15) obtemos

$$\theta(t) = |B| e^{-\gamma t} [e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}]. \tag{16}$$

Usando a relação de Euler $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ obtemos:

$$\theta(t) = 2|B| e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi). \tag{17}$$

Finalmente vemos na figura que o deslocamento do fio do pêndulo na altura da régua com relação à posição vertical (x_0) é

$$\Delta x = x - x_0 = d \tan\theta(t). \tag{18}$$

onde d é o comprimento do fio até a régua (na posição vertical). Como o ângulo é pequeno podemos aproximar $\tan\theta(t) \approx \theta(t)$ e escrever

$$\Delta x = d\,\theta(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi), \tag{19}$$

onde chamamos $A = 2d|B|$.

Decaimento exponencial:

Na relação (19) observamos que os deslocamentos Δx oscilam com uma frequência angular ω e com uma amplitude variável, que decresce exponencialmente com o tempo. O tempo caraterístico deste amortecimento é $\tau = 1/\gamma = \frac{2\mathrm{m}}{\rho}$. Como ρ independe do material da esfera podemos afirmar que uma esfera de ferro do mesmo tamanho de uma bola de ping-pong e com massa, digamos, quatrocentas vezes maior que esta última, terá um tempo caraterístico de amortecimento quatrocentas vezes maior. Em síntese, o amortecimento de um pêndulo de ferro de um metro de comprimento, depois de um minuto de oscilações será imperceptível enquanto esse amortecimento, no mesmo intervalo de tempo, será notório para uma bola de ping-pong.

Veja que a força de amortecimento (força de arrasto) é essencialmente a mesma para a esfera de ferro (do mesmo diâmetro) que a esfera de ping-pong. Entretanto o efeito desta força e muito maior sobre a bola de ping-pong.

Podemos considerar o Movimento Harmônico Amortecido como um movimento harmônico com período fixo $T=\frac{2\pi}{\omega}$ mas amplitude variável. Isto é

$$\Delta x=A(t)\cos(\omega t+\phi) \quad com \quad A(t)=A_0 e^{-\gamma t}. \tag{20}$$

<u>Consideremos agora que em nosso caso</u> $\gamma \ll \omega$.

Podemos ver então que se o pêndulo for solto em *t=0* com velocidade $\mathrm{v}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}=0$ podemos considerar $\phi=0$. Logo o movimento do pêndulo vem descrito pela expressão

$$\Delta x=A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t). \tag{21}$$

O pêndulo atinge seu máximo afastamento em relação com a vertical a cada semi-período, isto é, quando $\cos(\omega t_n)=\pm 1$ para $t_n=n(\frac{T}{2})$. Neste caso será

$$A_n \equiv |x_{n+1}-x_0|=A_0 e^{-\gamma t_n}=A_0 e^{-\gamma n(\frac{T}{2})}. \tag{22}$$

Tomando o logaritmo desta última expressão obtemos:

$$\ln(A_n)=\ln(A_0)-(\frac{\gamma T}{2})n \tag{23}$$

ou

$$Y=B+AX \tag{24}$$

onde, $Y=\ln(A_n)$, $B=\ln(A_0)$, $A=\frac{\gamma T}{2}$ e $X=n$. Pode-se construir um gráfico da função, dada na equação (22), numa escala linear e obter os valores de *A* e *B* diretamente a partir do gráfico.

Bibliografia:

- Curso de Física Básica - vol. 2, H.Moysés Nussenzveig;
- Fundamentos de Física - vol. 2, Halliday-Resnick;
- Física experimental - Manual de Laboratório para Mecânica e Calor, R. Axt V. H. Guimarães.