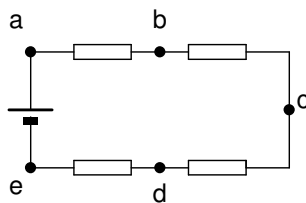


**Tarefa 1:** Na ausência de campos magnéticos variáveis no tempo a tensão elétrica (ou voltagem) pode ser considerada uma diferença de potencial

$$V_{ab} = \Phi(a) - \Phi(b) \tag{2.1}$$

Conseqüentemente, a soma das voltagens numa malha num circuito é necessariamente zero:



$$V_{ab} = \Phi(a) - \Phi(b)$$

$$V_{bc} = \Phi(b) - \Phi(c)$$

$$V_{cd} = \Phi(c) - \Phi(d)$$

$$V_{de} = \Phi(d) - \Phi(e)$$

$$V_{ea} = \Phi(e) - \Phi(a)$$

$$(2.2)$$

---

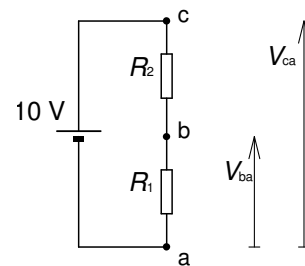

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de} + V_{ea} = 0$$

Fig. 1

Este fato é conhecido como lei das malhas. Monte um circuito como aquele da figura 1 e verifique a lei das malhas.

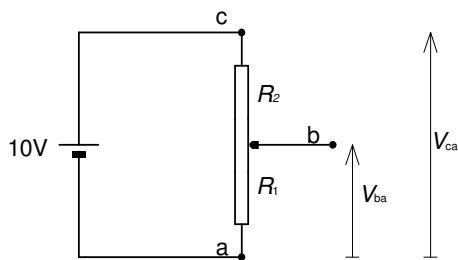
**Tarefa 2:** Meça as resistências de dois resistores, com resistências nominais de  $R_1 = 500\Omega$  e  $R_2 = 1k\Omega$ , usando o multímetro na modalidade de ohmímetro. Depois monte o circuito da figura 2 e meça as voltagens  $V_{ca}$  e  $V_{ba}$ . Calcule com os valores de  $R_1$  e  $R_2$  e  $V_{ca}$  qual deveria ser o valor de  $V_{ba}$  e compare este valor

Fig. 2 Divisor de voltagem



teórico com o valor medido de  $V_{ba}$ . Esta comparação requer avaliações da incerteza experimental tanto do valor teórico  $V_{ba}^{Teórico}$  como do valor medido

$$V_{ba}^{medido}$$



**Fig. 3** Divisão de voltagem com ajuda de um potenciômetro.

**Tarefa 3:** O circuito da figura 2 é um exemplo de *divisor de voltagem*, pois  $V_{ba}$  é uma fração da voltagem  $V_{ca}$ . Existem realizações de divisor de voltagem que permitem variar continuamente a fração da

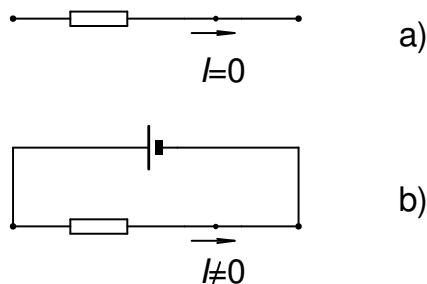
voltagem original. Estes dispositivos são chamados de potenciômetros. Num Potenciômetro os dois resistores  $R_1$  e  $R_2$  formam um único resistor que pode ser acessado lateralmente por um contato móvel que faz o papel do ponto b da figura 2. Monte o circuito da figura 3 com o potenciômetro cilíndrico que está na bancada e observe as voltagens  $V_{ba}$  variando a posição do contato móvel. Existem também potenciômetros em forma redonda (veja exemplares na bancada).

**Tarefa 4 (individual)** Elabore um relatório sucinto dos resultados das tarefas 1 e 2.

As tarefas 1 – 3 envolvem conceitos novos como voltagem, diferença de potencial e resistência. É essencial que você estude o texto subsequente que explica estes conceitos e fornece informação sobre a avaliação dos erros experimentais.

## Voltagem, lei de Ohm e resistência.

A corrente que passa por um condutor depende das condições físicas impostas sobre o condutor. Se mantivermos o condutor isolado de outros objetos a corrente é zero, como indicado na figura 4a . Por outro lado, ligando o condutor (resistor) numa fonte elétrica de alimentação observa-se uma corrente, como indicado na figura 4b. O valor da corrente depende da fonte. Girando o botão da nossa fonte regulável alteramos as



condições físicas e consequentemente os valores da corrente provocadas num resistor ligado na fonte se alteram. Queremos definir uma grandeza física que caracterize esta condição física que provoca correntes nos resistores. Vamos chamar esta grandeza física de *tensão elétrica* ou *voltagem*.

Fig. 4 É preciso criar condições físicas especiais no resistor para provocar corrente nele. A voltagem é uma

grandeza para caracterizar estas condições.

Neste contexto vimos uma lei ou regularidade muito importante na tarefa 2 na última aula. Na tarefa 2 da aula passada submetemos dois resistores sempre às mesmas condições físicas (provocadoras de corrente) ligando-as em paralelo. Provocamos diversos valores diferentes das correntes variando as condições da fonte. Mas, algo ficou invariável: o quociente das duas correntes  $I_B / I_A$  não se alterou com as mudanças da posição do botão da fonte e nem com mudanças da polaridade da fonte, pois os dados ficaram numa reta que passa pela origem. Este fato é a famosa **lei de Ohm**.  $I_B / I_A$  não depende da condição física que criamos com a fonte, mas, este quociente depende sim dos condutores. Quando substituímos o resistor de  $500\Omega$  por um de  $1k\Omega$  obtivemos uma reta com inclinação diferente. A lei de Ohm vale para condutores metálicos e alguns outros tipos de condutores. Mas existem também condutores que não obedecem esta lei.

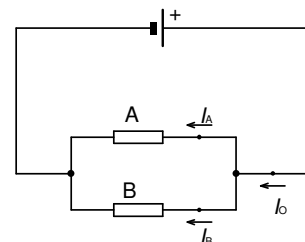


Fig. 5 Lembrando da tarefa 2 da última aula.

Podemos usar a corrente num dos dois resistores para caracterizar a condição física que provoca a corrente no outro resistor. Por exemplo, podemos usar a corrente  $I_B$  para quantificar a voltagem aplicada nos resistores. Mas, a corrente  $I_B$  não é a voltagem! Quantificar a voltagem com a corrente  $I_B$  significa usar os valores da corrente para comparar valores de voltagem no seguinte sentido: se uma voltagem  $V_1$  provoca no resistor B um valor de corrente  $I_B = I_1$  então a voltagem  $V_2$  que provoca no resistor B uma corrente  $I_B = n \cdot I_1$  tem o valor de  $n$  vezes o valor  $V_1$ . A lei de Ohm garante que o resultado deste tipo de comparação não dependa da escolha do resistor B. Convenciona-se algum valor de voltagem facilmente reprodutível como unidade. O

sistema internacional de unidades usa uma unidade, chamada *Volt* (V) que é relacionada com a unidade de corrente Ampère e com a unidade de potência (energia/tempo). Em geral a passagem de corrente por um condutor é acompanhada por um fluxo de energia elétrica para dentro do condutor e este fato pode ser usado para definir uma unidade da tensão elétrica: quando a taxa de fluxo de energia elétrica para dentro de um condutor que é percorrido por uma corrente de 1 Ampère for 1 Watt então a tensão elétrica entre os terminais do condutor vale 1 Volt. A figura 6 mostra como este tipo de padrão poderia ser realizado em princípio com medidas térmicas numa situação estacionária. Pode-se usar também um condutor (motor) que libera a energia elétrica em forma de trabalho mecânico para realizar um padrão do Volt.

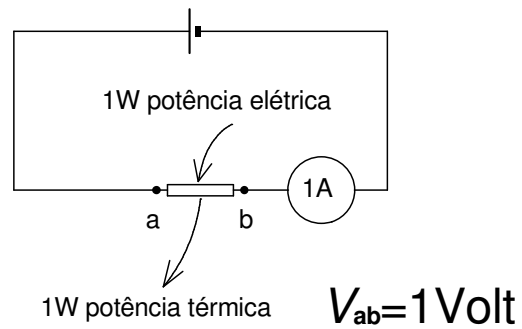


Fig. 6 Realização do padrão de 1 Volt.

O instrumento para medir tensão elétrica é chamado *voltímetro*. Como vimos acima este instrumento pode ser simplesmente uma combinação de amperímetro e um resistor, como mostra a figura 7.

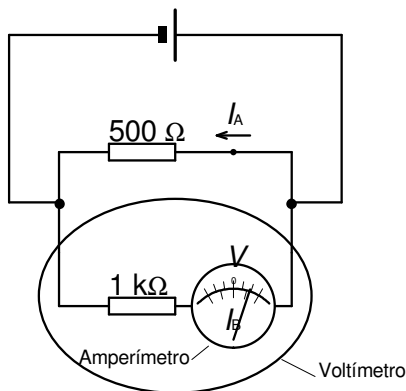
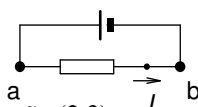


Fig. 7 Uma combinação de amperímetro e resistor forma um voltímetro. No amperímetro mostramos duas escalas uma calibrada em unidades de corrente e outra calibrada em unidades de voltagem. Na figura este voltímetro está sendo usado para medir a tensão nos terminais do resistor A de  $500 \Omega$ .

É importante notar que a voltagem é uma grandeza definida não para um ponto num circuito, mas para um par de pontos<sup>1</sup>. Esta é uma diferença importante entre as grandezas corrente e voltagem:

**A corrente é definida para um ponto num circuito. A voltagem é definida entre dois pontos de um circuito.**

O quociente da voltagem aplicada num condutor e a corrente que flui no condutor é chamado resistência



$$R_{def.} = \frac{V_{ab}}{I} \quad (2.3)$$

Fig. 8 Da equação (2.3)

<sup>1</sup> Mais tarde veremos que existem até situações que a voltagem não é nem relacionada com um par de pontos, mas é associada com um caminho.

Para condutores que obedecem à lei de Ohm esta grandeza é somente uma propriedade do condutor<sup>2</sup> e não depende nem de  $V_{ab}$  e nem de  $I$ . O quociente Volt/Ampère pode ser usado como unidade da grandeza resistência. Como esta unidade é frequentemente usada, criou-se uma abreviação da mesma com o nome de Ohm ( $\Omega$ ):

$$\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\text{V}}{\text{A}} \quad (2.4)$$

Como se vê na figura 7, o voltímetro é um condutor. Este condutor tem que obedecer a lei de Ohm para que o instrumento funcione de forma confiável. O valor da resistência deste condutor é chamado de resistência interna do voltímetro. O valor da resistência interna determina o fator de proporcionalidade entre a escala de corrente (num instrumento real geralmente não visível) e a escala de voltagem. Pode-se medir uma dada voltagem usando um valor da resistência interna pequena e correntes  $I_B$  grandes ou com uma resistência interna grande e correntes  $I_B$  pequenas. Esta segunda opção é melhor por que a corrente que atravessa o voltímetro constitui uma alteração do funcionamento do circuito que pretende ser medido. Então uma medida com um voltímetro com resistência pequena seria algo análogo a uma medida de espessura de placa de borracha apertando a placa com o paquímetro. Um voltímetro ideal teria uma resistência interna infinitamente grande. Claro que isto não é factível por que precisaria de um amperímetro infinitamente sensível.

Como podemos saber qual é o valor da resistência interna de um voltímetro? Nos instrumentos analógicos vem escrita uma informação, por exemplo, na seguinte forma:  $20k\Omega/V$ . Desta informação calcula-se a resistência interna multiplicando este valor com a voltagem do fundo de escala. O fundo de escala é o valor máximo que o instrumento pode medir. Por exemplo, se rodarmos a chave rotatória que escolhe o fundo de escala numa posição de 10 V, o voltímetro trabalha como um instrumento que pode medir no máximo 10 V e cuja resistência interna é  $R_i = (20k\Omega/V) \cdot 10V = 200k\Omega$ . Se medirmos com este instrumento uma voltagem de

3V, a corrente que atravessa o instrumento será  $I = V / R_i = \frac{3V}{200k\Omega} = 15\mu A$ .

Os voltímetros digitais costumam ter resistências internas bem altas. No manual dos instrumentos usados no nosso laboratório encontramos a informação que a *Impedância de entrada* é de  $10M\Omega$  para todas as faixas. Isto significa que a resistência interna vale  $10^7 \Omega$  independente do fundo de escala.

Então **um bom voltímetro deve ter uma resistência interna muito alta. Contrariamente, um bom amperímetro deve ter uma resistência interna muito baixa.**

Os nossos voltímetros são digitais e são instrumentos de multiuso. Este tipo de instrumento é chamado de *multímetro*. Vocês devem usar os fios nas entradas “COM” e  $V/\Omega$ . A roda de escolha de função deve ficar no setor V DC ou  $V=$ . Cuidado para não usar  $V \approx$  ou V AC esta última serve somente para voltagem alternada (que oscila com 60 Hz). Dentro do setor de  $V=$  deve-se escolher um fundo de escala apropriado que englobe os valores que queremos medir e que seja menor possível para permitir maior resolução do instrumento.

---

<sup>2</sup>  $R$  pode depender da temperatura do condutor. Quando afirmamos que  $R$  é uma propriedade do condutor consideramos a temperatura uma das características do condutor.

## O Ohmímetro

Os nossos voltímetros digitais podem ser usados também como amperímetro e como ohmímetro. Nesta última função eles servem para medir resistências. Este tipo de instrumento, que tem estas três funções, é chamado de multímetro. Alguns multímetros possuem até mais funções, como por exemplo: medidor de capacitância, termômetro, medidor de fator de amplificação de transistores, frequencímetro etc..

O princípio do ohmímetro é simples: dentro do instrumento existe uma fonte de voltagem bem determinada que é ligada ao resistor a ser medido e o amperímetro determina a corrente resultante. Dos dados da voltagem e da corrente pode-se determinar a resistência. O valor da resistência é indicado diretamente no mostrador do instrumento.

É importante obedecer a seguinte regra na hora de medir com um ohmímetro: nunca meça com um ohmímetro num circuito ligado na fonte. A medida num circuito ligado geralmente resulta em valores completamente errados e pode até danificar o instrumento. A maneira correta de medir uma resistência de um resistor é isolando o resistor, ou seja tirando ele do circuito, e ligando ele diretamente aos fios do ohmímetro.

## O divisor de Voltagem

O divisor de voltagem é um circuito muito usado na eletrônica. Num pequeno rádio de pilha precisa-se de muitas voltagens diferentes e seria muito pouco prático fornecer estas voltagens com uma dúzia de pilhas diferentes. O divisor de voltagem é usado para fornecer estas voltagens a partir da voltagem da bateria. Para entender o funcionamento do divisor aplicamos a lei das malhas no circuito da figura 9

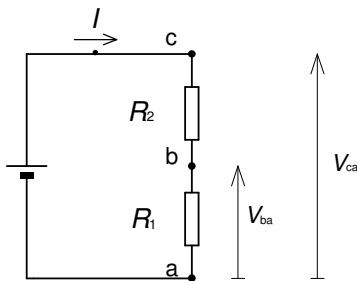


Fig. 9 Divisor de voltagem com definição das grandezas relevantes.

Isto fornece  $V_{ba} + V_{cb} + V_{ac} = 0$  ou, usando  $V_{ac} = -V_{ca}$ ,

$$V_{ca} = V_{ba} + V_{cb} \quad (2.5)$$

Usando ainda que a corrente é a mesma em toda a malha obtemos com a definição da resistência

$$V_{ca} = IR_1 + IR_2 \quad (2.6)$$

e

$$V_{ba} = IR_1 \quad (2.7)$$

Supondo agora que os resistores obedeçam à lei de Ohm sabemos que  $R_1$  e  $R_2$  não dependem da corrente e isto permite resolver a equação (2.6) para  $I$ . O valor obtido pode ser inserido na (2.7) e isto fornece o resultado desejado:

$$V_{ba} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{ca} \quad (2.8)$$

Repare que o fator

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

é um número puro (grandeza adimensional) e este número fica sempre entre 0 e 1. É este o fator de redução da voltagem que o divisor fornece. O resultado é bem intuitivo e pode ser memorizado facilmente, considerando que  $R_1 + R_2$  é a resistência total da combinação dos dois resistores: a voltagem se divide na mesma proporção das resistências.

### Avaliação das incertezas

Um resultado experimental sem avaliação de erro não tem valor algum. Então é importante saber como avaliar os possíveis erros numa medida de voltagem. Os fabricantes de voltímetros fornecem informação no manual referente à precisão do instrumento. Nos voltímetros analógicos costuma-se especificar uma incerteza percentual. Esta percentagem refere-se ao fundo de escala usado. Então se medirmos a voltagem de uma pilha de 1,5 V usando o fundo de escala de 10V e a incerteza especificada pelo fabricante for de 5% o possível erro da medida será  $\delta V = 10 \text{ V} \cdot 5\% = 0,5 \text{ V}$  e não  $\delta V = 1,5 \text{ V} \cdot 5\% = 0,075 \text{ V}$ .

Para os voltímetros digitais do nosso laboratório encontramos no manual a informação que a incerteza para todos os fundos de escala de voltagem DC ("Direct Current" = voltagem constante no tempo e não alternada) é de 0,5% do módulo da leitura mais o valor que corresponde à cifra 1 no dígito menos significativo da leitura. Então veremos um exemplo. Suponha que você mediu a voltagem de uma pilha com o fundo de escala de 2 V. O resultado foi a leitura no mostrador 1.500. Este valor significa 1,500 V. Então o possível erro seria

$$\delta V = 1,500 \text{ V} \cdot 0,005 + 0,001 \text{ V} = 0,0085 \text{ V}$$

e o resultado da medida pode ser escrito como

$$V = (1,500 \pm 0,009) \text{ V}$$

Neste resultado arredondamos a incerteza, adequando a representação ao número de dígitos disponível na leitura.

Na modalidade de ohmímetro a avaliação de erro para os nossos instrumentos obedece a seguinte tabela:

Fundo de escala	Incerteza
200Ω	± (0,5%Leitura + 3 no dígito menos significativo) (Minipa) ± (0,8%Leitura + 3 no dígito menos significativo) (HGL)
2kΩ	± (0,5%Leitura + 1 no dígito menos significativo) (Minipa) ± (0,5%Leitura + 1 no dígito menos significativo) (HGL)
20kΩ	
200kΩ	
2MΩ	
20MΩ	± (1,0%Leitura + 2 no dígito menos significativo)

Estas regras permitem determinar as incertezas das grandezas medidas. Na tarefa 2 você precisa também da incerteza da previsão teórica

$$V_{ba}^{\text{Teórico}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{ca} \quad (2.9)$$

Como se avalia esta incerteza? **Para isto você não precisa de nenhuma fórmula decorada!** Use a sua inteligência! Sabemos que a resistência do primeiro resistor pode variar entre  $R_1^{\text{medido}} - \delta R_1$  até  $R_1^{\text{medido}} + \delta R_1$ . A resistências 2 pode variar entre  $R_2^{\text{medido}} - \delta R_2$  e  $R_2^{\text{medido}} + \delta R_2$ . A voltagem total pode variar entre  $V_{ca}^{\text{medido}} - \delta V_{ca}$  e  $V_{ca}^{\text{medido}} + \delta V_{ca}$ . Pensando um pouco você é certamente capaz de determinar até onde pode chegar  $V_{ba}^{\text{Teórico}}$ .

## Apêndice 1: Relação entre voltagem e campo elétrico

Há uma ligação entre o conceito de voltagem e campo elétrico. Quando existe uma voltagem  $V_{ab}$  entre os extremos de um fio condutor e o fio é percorrido pela corrente  $I$  então o fio recebe energia elétrica numa taxa (chamada potência) de

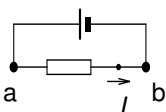


Fig.10 Da equação (2.10).

$$P = V_{ab} I \quad (2.10)$$

Por outro lado, a força que o campo elétrico exerce sobre uma carga  $q$  vale  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Consequentemente sabemos que o campo elétrico faz o trabalho

$$T_q = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.11)$$

numa carga que atravessa o condutor do ponto **a** até o ponto **b**. Se as cargas passam numa taxa  $I$  temos correspondentemente uma taxa de transferência de energia

$$P = I \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.12)$$

Comparando com a (2.10) concluímos

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.13)$$

Quando não há campos magnéticos variáveis no experimento vale  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$  para todos os caminhos fechados e isto permite definir uma função potencial

$$\Phi(b) = \Phi(a) - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.14),$$

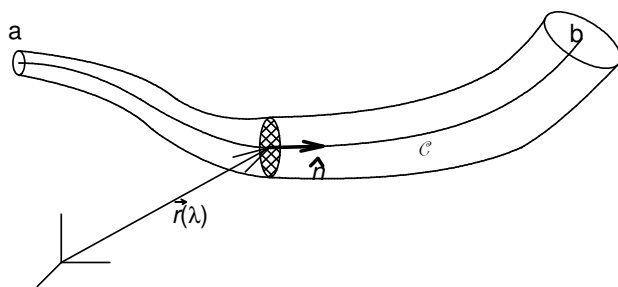
de acordo com a equação (2.1). Quando há campos magnéticos variáveis do tempo isto não vale mais. Neste caso as integrais de caminho do campo elétrico dependem da escolha do caminho. Nestes casos a voltagem não é uma diferença de potencial e a voltagem não é mais associada a dois pontos num circuito, mas depende do trajeto dos fios do voltímetro. No final do semestre estudaremos estas situações.

Na nossa definição operacional de voltagem não usamos a equação (2.10). Usamos a potência somente para estabelecer um padrão de voltagem (isto não depende da fórmula (2.10)). A nossa maneira de comparar valores de voltagem era baseada na lei de Ohm e em medidas de corrente. Consequentemente devemos verificar se a identificação da voltagem com uma integral de caminho do campo elétrico (2.13) está de acordo com nosso conceito de voltagem.

O que move as cargas elétricas num condutor é a força elétrica  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Numa situação estacionária esta força é anulada por uma força média de atrito que os portadores de carga sofrem. Esta força de atrito (muito parecida com a força viscosa) é proporcional à velocidade média dos portadores. Desta proporcionalidade e da linearidade da relação  $\vec{F} = q\vec{E}$  resulta uma proporcionalidade da densidade de corrente (corrente por área<sup>3</sup>) e campo elétrico:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.15)$$

onde  $\vec{j}$  é a densidade de corrente e  $\sigma$  é uma constante de proporcionalidade que depende do material do condutor (e da temperatura).  $\sigma$  se chama *condutividade do material*.



Agora imagine um fio condutor que se estende de um ponto **a** até um ponto **b** ao longo de uma curva  $C$  como mostra a figura 11

Fig. 11 Condutor em forma de fio. A seção transversal reta do fio pode variar com a posição assim como a condutividade do material.

A conservação de carga elétrica exige que numa situação estacionária a corrente que passa através de qualquer seção reta do fio é a mesma ao longo do fio. Esta corrente é a integral da densidade de corrente sobre a seção

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.16)$$

<sup>3</sup> Veja notas de aula na disciplina Fís. III ou fenômenos de transporte na página do ICE



Para fios com geometria simples a densidade de corrente é razoavelmente constante numa seção transversal e podemos usar um tratamento simplificado e substituir a integral por uma simples multiplicação:

$$I = A \vec{j} \cdot \hat{n} \quad (2.17)$$

onde  $A$  é a área da seção e  $\hat{n}$  o vetor normal da superfície que. Agora podemos substituir  $\vec{j}$  com a equação (2.15) :

$$I = A \sigma \vec{E} \cdot \hat{n} \quad (2.18)$$

Vamos dividir esta equação por  $A \sigma$  e integrá-la sobre o caminho  $\mathcal{C}$  usando o fato que  $I$  é constante:

$$I \int_a^b \frac{d\ell}{\sigma A} = \int_a^b \vec{E} \cdot \hat{n} d\ell = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.19)$$

onde  $d\ell$  é o elemento de linha escalar (aquele que fornece o comprimento do caminho  $C_c = \int_a^b d\ell$ ). Na equação (2.19) percebemos que o fator que multiplica a corrente depende somente das propriedades de material do condutor e da sua geometria. Então temos a lei de Ohm se identificamos a integral de caminho do campo elétrico com a voltagem como sugerido na equação (2.13) que era baseada no argumento da potência. A equação (2.19) fornece ainda uma expressão da resistência do condutor em termos da constante de material e dados da geometria do condutor:

$$R = \int_a^b \frac{d\ell}{\sigma A} \quad (2.20)$$

## Apêndice 2: O nome “potenciômetro”

O nome potenciômetro sugere que este instrumento serve para medir algo. Isto parece estranho. Mas, de fato esta invenção foi originalmente usada para medir diferenças de potencial. Depois da invenção das válvulas e dos transistores MOS-FET (metal-oxide-semiconductor field-effect transistor) temos condições de construir voltímetros de altíssima resistência interna. Antes os pesquisadores resolveram o problema de medir diferenças de potencial elétrico com um mínimo de perturbação do circuito da seguinte forma genial: Usa-se um divisor de voltagem (realizado com um potenciômetro com escala) para dividir uma voltagem bem conhecida gerando assim uma outra voltagem conhecida que pode ser escolhida livremente. A voltagem desconhecida que queremos medir é então comparada com a voltagem conhecida e variável. A comparação é feita com um amperímetro extremamente sensível (chamado galvanômetro). A figura 12 mostra o esquema: a posição do potenciômetro é regulada até o ponto que o galvanômetro indica a corrente zero. Nesta posição sabemos que a voltagem fornecida pelo divisor (conhecida) é igual à voltagem entre os pontos **a** e **b** de algum circuito que

era desconhecida. Neste ponto não há corrente e não perturbamos o circuito.

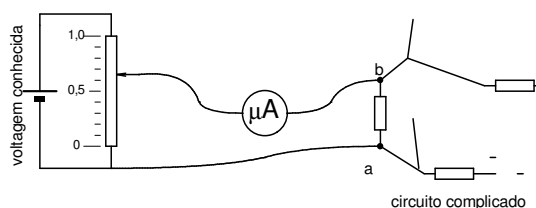


Fig. 12 Medida de diferença de potencial com ajuda de um potenciômetro.