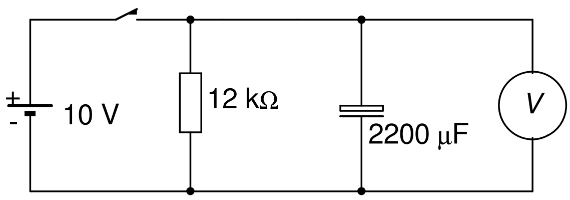
As tarefas desta prática têm valor de prova! Leia além deste roteiro também os comentários sobre elaboração de gráficos e principalmente sobre determinação de inclinações de retas de ajuste no roteiro da primeira experiência!

Circuito RC: Processo de Carga e Descarga de Capacitores

Nesta experiência vamos conhecer a dinâmica de uma combinação de resistor e capacitor chamada *circuito RC*. O circuito RC é de fundamental importância em circuitos eletrônicos. Isto se deve ao fato de que tal combinação fixa uma constante de tempo e com isto determina a rapidez do circuito eletrônico. Além disso, é interessante estudar o comportamento de um capacitor que está sendo carregado ou descarregado, pois o tipo de comportamento encontrado no circuito RC pode ser encontrado em inúmeras outras áreas das ciências exatas e engenharias, por exemplo, no transporte de calor em regime transitório, com substâncias radioativas, em amortecimentos etc. .

Fig. 1 Circuito da tarefa 1



Tarefa 1: Mostre experimentalmente que o descarregamento de um capacitor num circuito RC pode ser descrito por um decaimento exponencial, determine a constante de tempo do processo e use este valor para determinar a capacitância do capacitor.

Detalhamento da tarefa 1:

Monte o circuito da figura 1 com um capacitor eletrolítico de capacitância nominal de $2200\,\mu\mathrm{F}$ e um resistor de $12\,\mathrm{k}\Omega$. Cuidado com a polaridade do capacitor! Em caso de dúvida consulte o professor! Meça a resistência do resistor. Carregue o capacitor a 10,00 V fechando o interruptor (fio de laboratório). Depois abra o interruptor e no mesmo instante dê início na contagem de tempo com um cronômetro. Determine o tempo necessário para a voltagem do capacitor caia até 9,00 V. Depois determine o tempo para chegar de 10,00 V até 8,00V etc. até 1,50 V. Calcule para cada voltagem o logaritmo à base *e* da voltagem dividido por 1 Volt (ou seja, da voltagem sem unidade). Faça um gráfico que mostre estes logaritmos no eixo vertical e os tempos correspondentes no eixo horizontal. Ajuste uma reta nos dados experimentais, determine a inclinação desta reta e use este resultado para determinar a constante de tempo do circuito e o valor da capacitância, com avaliação da incerteza experimental. Na determinação da incerteza experimental deve-se usar o método da reta alternativa (explicado no roteiro da primeira experiência) e deve-se considerar também a incerteza do valor da resistência. Entregue o gráfico e a determinação da constante de tempo e da capacitância no fim da aula. Escreva porque estes resultados podem ser considerados uma prova que o descarregamento do capacitor segue um comportamento de decaimento exponencial.

Tarefa 2: Meça a dependência da voltagem com o tempo para um processo de carregamento de um capacitor (fig. 2) e elabore um gráfico que mostra V no eixo vertical e t no eixo horizontal.

Tarefa 3: Escreva um relatório sucinto dos resultados. Este relatório tem valor de prova.

Teoria do circuito RC

Vamos analisar o circuito da figura 2:

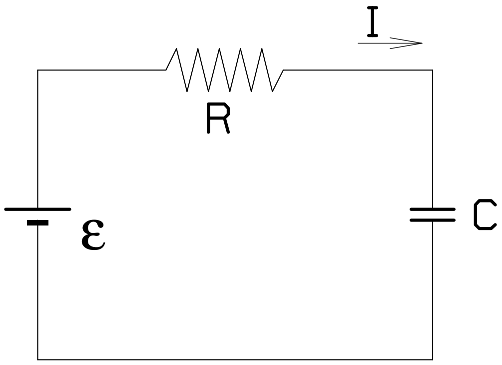


Figura 2 Circuito RC

Para entender o comportamento deste circuito devemos escrever a lei das malhas:

$$\varepsilon = RI + \frac{Q}{C} \tag{1}$$

Nesta equação Q é a carga do capacitor (a carga na placa superior da figura, a carga na outra placa será igual, mas com sinal oposto). Podemos notar que a equação (1) contém duas incógnitas: a corrente I e a carga Q. Portanto esta equação sozinha não é suficiente para entender o circuito. Precisamos de uma relação entre Q e I. Pela própria definição de corrente (I = taxa de passagem de carga) podemos escrever:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{2}$$

Combinando as equações (1) e (2) obtemos:

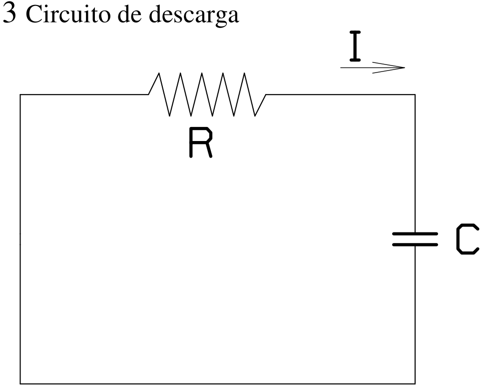
$$\boxed{\varepsilon = R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q} \tag{3}$$

Esta é uma equação muito especial, uma *equação diferencial*. Primeiramente podemos notar que a equação difere das equações que conhecemos na escola de segundo grau (do tipo $x^2 + 4x - 10 = 0$) pelo fato que a incógnita, Q, não é um número mas uma função desconhecida; $Q = Q(t)$. Segundo, a equação impõe uma condição sobre esta incógnita envolvendo valores da incógnita e valores da derivada da mesma. Terceiro, t não é fixo, a equação deve valer para todo t. Quarto, todos os valores da incógnita e das derivadas são tomados no <u>mesmo</u> ponto da variável independente t, isto é $\boxed{\varepsilon = R\left.\frac{dQ}{dt}\right|_t + \frac{1}{C}Q(t)}$ para todo t.

É notável que na física e química quase todas as leis básicas podem ser formuladas como equações diferenciais. Em ciências que tratam de sistemas mais complexos, como por exemplo biologia, economia e história, isto geralmente não é o caso.

Vamos ver como podemos resolver a equação (3). Esta equação é de fato tão simples que não vale a pena utilizar as técnicas dos matemáticos. Podemos adivinhar facilmente a solução e com isto adquirir um pouco de compreensão do problema. Para facilitar vamos resolver primeiramente o problema sem a presença da bateria (circuito da figura 3).

Fig. 3 Circuito de descarga



Na equação (3) isto significa simplesmente igualar a força eletromotriz da bateria a zero:

$$\boxed{R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0} \tag{4}$$

ou escrevendo em outra forma:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}=-\frac{1}{RC}Q} \tag{4}$$

Então estamos procurando uma função que é proporcional à sua própria derivada dela. Sabemos que a função exponencial tem esta propriedade. Verificamos facilmente que as funções

$$Q(t)=Q_0\ e^{\frac{-t}{RC}} \tag{5}$$

são soluções da equação da equação (4). Na expressão (5) Q_0 é uma constante arbitrária. Para qualquer valor de Q_0 temos uma solução. Esta é uma característica geral das equações diferenciais; elas têm um número infinito de soluções. O fato que a solução não é única não é defeito mas é vantagem. Desta forma uma única equação é capaz de descrever um número infinito de situações físicas. Por exemplo, a equação (4) descreve todos os possíveis comportamentos do circuito da figura 3. Qual situação física é realizada num experimento depende das *condições iniciais*. Isto significa que o valor da carga do capacitor no instante $t = 0$ vai determinar a solução. Q_0 é a carga do capacitor no instante t =0.

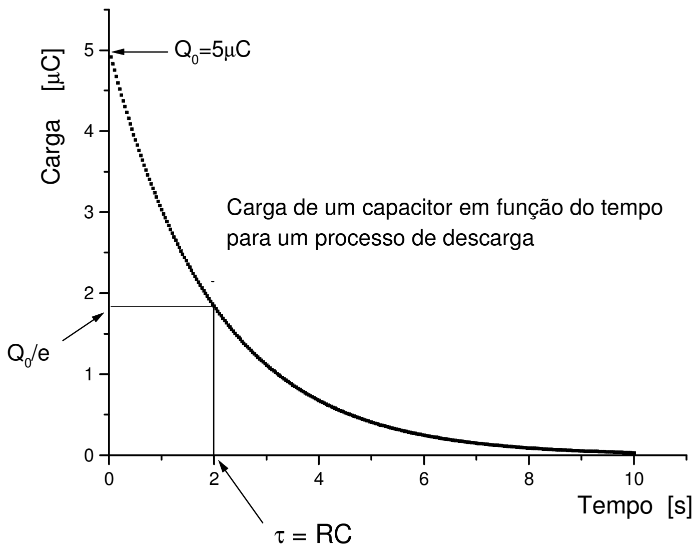


Fig. 4 Descarga de um capacitor

Como podemos ver pela expressão (5), para poder observar algum comportamento interessante no circuito RC sem bateria, é necessário termos uma carga inicial $Q_0 \neq 0$, pois de outra forma teríamos apenas a solução trivial $Q(t) = 0$ para todo t. Então no circuito da figura 2 só podemos observar o processo de *descarga* do capacitor. A figura 4 mostra um gráfico deste tipo de processo.

Podemos agora entender a afirmação que um circuito RC define uma constante de tempo. O expoente na expressão (5) deve ser uma grandeza adimensional. Portanto o produto RC deve ter a dimensão de tempo. De fato podemos verificar que

$$\boxed{1\Omega \cdot 1F = 1s} \tag{6}$$

A constante $\tau = RC$ é chamada *tempo característico do circuito* ou *constante de tempo do circuito*. τ é o tempo no qual a carga do capacitor se reduz por um fator e , onde e é o número de Euler: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2{,}718$. Isto significa: se a carga do capacitor num instante t_1 tinha o valor Q_1 , no instante $t_2 = t_1 + \tau$ ela terá o valor Q_1 / e . Conhecendo este fato, é fácil determinar a constante de tempo a partir de um gráfico Q versus t (veja a figura 4). Na prática não usaríamos um gráfico Q versus t mas um gráfico da voltagem do capacitor em função do tempo. Já que á voltagem do capacitor é proporcional à sua carga, podemos determinar τ deste tipo de gráfico da mesma forma. A figura 5 mostra um circuito que pode ser usado para determinar a constante de tempo de um circuito RC:

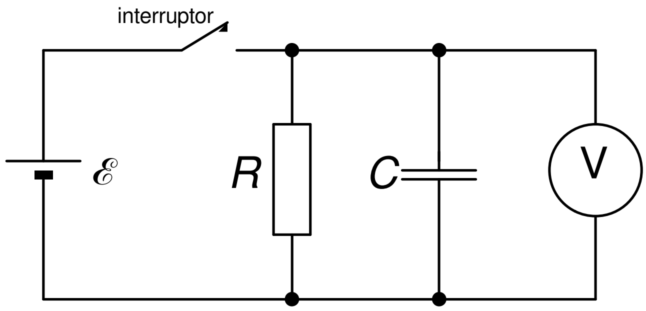


Fig.5 Circuito de descarga

O capacitor seria primeiramente carregado fechando o interruptor. Depois o interruptor é aberto e o capacitor é descarregado através do resistor. Um voltímetro paralelo ao capacitor permite acompanhar a voltagem do capacitor durante o processo de descarga.

Para poder medir a voltagem do capacitor em função do tempo e gerar um gráfico *V* versus *t* com medidas com um voltímetro e cronômetro comum, é necessário que a constante de tempo do circuito seja suficientemente grande de tal forma que nossa capacidade de ler o voltímetro e cronômetro permita acompanhar o processo. Constantes de tempo na ordem de 5 ou 10 segundos são adequadas. Não é fácil realizar um valor $RC = 10\text{s}$. A resistência não deve ultrapassar algumas dezenas de $k\Omega$ para garantir a condição de uma boa medida da voltagem (lembre que a resistência interna do voltímetro deve ser muito maior que a resistência do circuito). Por exemplo, com $R = 10\ k\Omega$ a capacitância teria que ser $C = 1000\ \mu F$. Este valor é bastante grande e geralmente só seria realizável em laboratório com capacitores eletrolíticos. (Veja o apêndice sobre capacitores eletrolíticos).

Agora vamos resolver a equação (3) com a presença da bateria:

$$\boxed{\mathcal{E} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q}$$

Podemos adivinhar facilmente uma solução e: se o capacitor estiver com a mesma voltagem da bateria não haverá diferença de potencial no resistor e consequentemente não haverá corrente. Não tendo corrente a carga do capacitor deve ficar constante. A função constante $Q_P(t) = C\mathcal{E}$ é obviamente uma solução. Botamos um índice P nesta solução para indicar que se trata apenas de uma única solução, logo de um caso Particular. Para encontrar uma solução geral da equação (4) podemos somar as equações (3) e (4):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= R\frac{dQ_P}{dt} + \frac{1}{C}Q_P \\ 0 &= R\frac{dQ_5}{dt} + \frac{1}{C}Q_5 \\ \hline \mathcal{E} &= R\frac{d(Q_P + Q_5)}{dt} + \frac{1}{C}(Q_P + Q_5) \end{aligned} \tag{7}$$

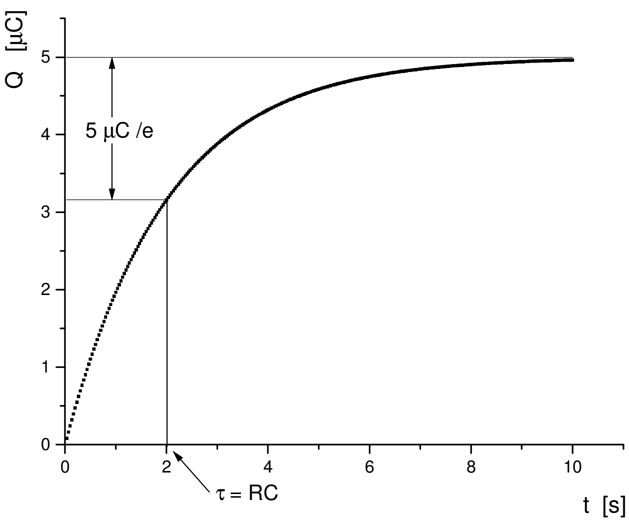
onde Q_5 é a solução dada na expressão (5). A terceira linha do cálculo (7) nos informa que a função $Q(t) = Q_P(t) + Q_5(t)$ é solução da equação (4). Então temos como solução:

$$Q(t) = C\mathcal{E} + Q_0 e^{\frac{-t}{RC}} \tag{8}$$

A constante Q_0 é o parâmetro livre que permite adaptar a solução à condição inicial (ao contrário do caso sem bateria, Q_0 não tem mais a interpretação da carga inicial).

Vamos supor que o capacitor estava inicialmente descarregado; $Q(0) = 0$. Neste caso Q_0 teria o valor $Q_0 = -C\mathcal{E}$, e a solução seria

$$Q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \tag{9}$$



A Figura 6 mostra um exemplo deste comportamento:

Fig 6. Processo de carda de um capacitor.

Este tipo de comportamento representado no gráfico 6 aparece em diversos lugares. Até na construção civil podemos encontrar decaimentos exponenciais como, por exemplo, na acomodação de fundamentos no solo ou na reação lenta de uma peça de concreto após aplicação de uma força. A figura 7 mostra um exemplo disso.

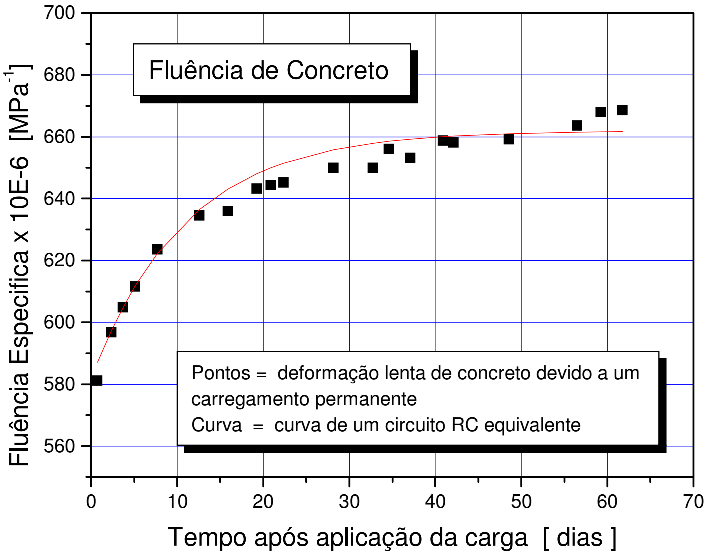


Fig. 7 Fluência de Concreto

(Dados tomados do livro: Concretos massa, estrutural, projetado e compactado com rolo, Ensaios e Propriedades. Atores: Equipe da FURNAS. Editor: Walton Pacelli de Andrade)

Podemos determinar a constante de tempo RC também do gráfico 6, mas esta tarefa requer o conhecimento exato da carga final (no caso do gráfico 6 seriam $5\mu C$). Neste aspecto o gráfico da descarga (Fig. 4) é mais prático. No caso da descarga podemos determinar a constante RC com boa precisão representando o logaritmo da carga (ou da voltagem) do capacitor em função do tempo. Usando a equação (5) (caso de descarga) e calculando os logaritmos Neperianos obtemos:

$$\ln\frac{Q(t)}{1\mu\text{C}} = \ln\frac{Q_0}{1\mu\text{C}} - \frac{1}{RC}t \qquad \text{ou} \qquad (10)$$

$$\ln\frac{V(t)}{1\text{V}} = \ln\frac{V_0}{1\text{V}} - \frac{1}{RC}t \qquad (11)$$

Então, se a teoria da descarga do capacitor for verídica, devemos obter uma reta desta representação. A inclinação desta reta vale $-\frac{1}{RC}$ e permite determinar a constante de tempo. Sabendo o valor exato da resistência podemos desta forma determinar o valor da capacitância.

Capacitores eletrolíticos.

Fig. 8 Peças de alumínio eletroliticamente oxidadas. A camada de óxido protege o alumínio e facilita a aderência de tintas.

Lembramos da fórmula da capacitância de um capacitor de placas paralelas: $C = \varepsilon_0 \kappa A/d$, onde κ é a constante dielétrica do material que isola as duas placas condutoras, A é a área das placas e d a distância entre as placas. Uma maneira de se fazer um capacitor de grande capacitância é com uma distância d muito pequena. Existe uma maneira elegante de formar uma camada isolante muito fina na superfície de certos metais. Por exemplo, em alumínio, tântalo e nióbio pode-se formar uma fina camada de óxido eletroliticamente. Quando se mergulha um pedaço de alumínio numa solução com ácido bórico (H_3BO_3) e se liga o alumínio no pólo positivo de uma fonte e a solução no pólo negativo, começa a crescer uma fina camada de Al_2O_3 na superfície do alumínio. Este processo é usado inclusive para proteger peças de alumínio contra corrosão[1]. A figura 8 mostra um exemplo típico. A camada de óxido é um isolante elétrico que pode ser usado como o dielétrico de um capacitor. Os dados do Al_2O_3 são: $\kappa = 9{,}6$ e rigidez dielétrica $\approx 7\times10^8\,\mathrm{V/m}$. Para garantir realmente uma distância d pequena é necessário que o segundo condutor tenha também um contato tão íntimo com o Al_2O_3 como o próprio alumínio no qual esta camada cresceu. Isto pode ser alcançado usando para o segundo condutor um eletrólito líquido. Capacitores eletrolíticos permitem alcançar grandes valores de capacitâncias, mas eles têm também desvantagens: geralmente eles podem ser usados somente com uma única polaridade. Ligando-os com polaridade inversa destrói a camada de Al_2O_3 e o capacitor é destruído. Outra desvantagem é uma pequena vida útil em comparação com capacitores convencionais.

Num esquema de circuito os capacitores eletrolíticos são desenhados com um traço comum (placa negativa) e um traço "oco" (placa positiva) como na figura 1. Também existe uma convenção de desenhar a placa negativa curvada. A figura 9 mostra estes símbolos.

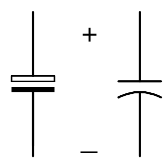
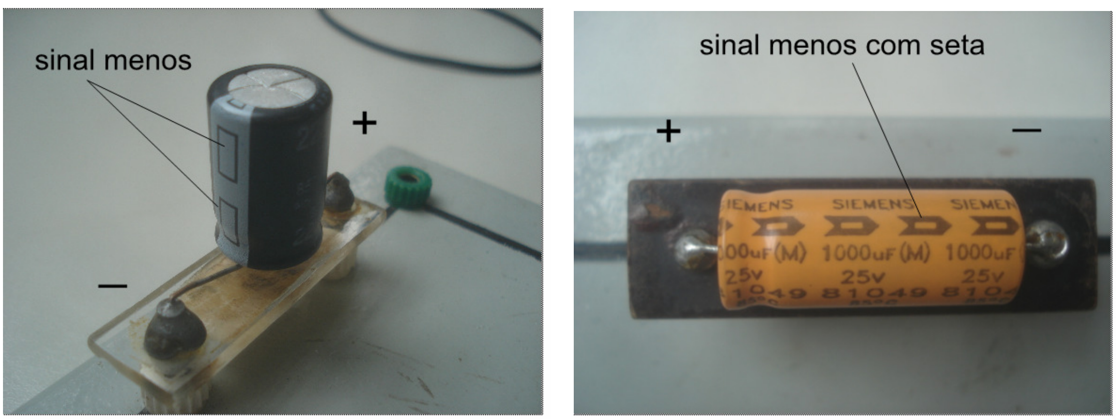


Fig. 9 Símbolos de capacitores eletrolíticos em esquemas eletrônicos.

A figura 10 mostra exemplos de capacitores eletrolíticos do nosso laboratório com indicação de polaridade. O sinal menos do capacitor de $2200\,\mu\mathrm{F}$ tem formato de uma caixinha, mas não deve ser confundido com o traço oco nos esquemas, que são justamente os pólos positivos.

Fig. 10 Capacitores de 2200µF e 1000µF com indicação da polaridade.



[1] No caso de proteção contra corrosão usam-se outros eletrólitos como ácido sulfúrico ou ácido crômico ou ácidos orgânicos.