Programação Linear

Introdução

Prof. Msc. Fernando M. A. Nogueira
EPD - Departamento de Engenharia de Produção
FE - Faculdade de Engenharia
UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora

Programação Linear - Modelagem

Programação Linear consiste em métodos para resolver problemas de Otimização com **restrições** (**injunções**) em que a Função Objetivo é **LINEAR** em relação **as variáveis de controle** x_1, x_2,...,x_n, e o domínio destas variáveis é **injuncionado** por um **sistema de inequações lineares** (*Advanced Engineering Mathematics*).

Vamos ilustrar este parágrafo através de um simples exemplo.

<u>Exemplo 1</u>

Suponha que para construir uma casa popular por mês uma construtura necessite de 2 pedreiros e 4 serventes. Para construir um apartamento no mesmo intervalo de tempo, a mesma construtora necessita de 3 pedreiros e 8 serventes. A construtora possui um efetivo total de 30 pedreiros e 70 serventes contratados.

A construtora obtém um lucro de R$3.000,00 na venda de cada casa popular e de R$5.000,00 na venda de cada apartamento e toda "produção" da construtora é vendida.

Qual é a quantidade ótima de casas populares e apartamentos que a construtora deve construir para que está obtenha lucro máximo.

<u>Solução</u>

Vamos inicialmente representar este problema em forma de tabela.

	Casa Popular	Apart.	Disponibilidade de Mão de Obra
Pedreiro	2	3	30
Servente	4	8	70
Lucro (em mil R$)	3	5	

A Função Objetivo (que deve expressar o lucro total) é dada por:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 \quad (1)$$

onde:

x_1 é a quantidade de casas populares construídas;

x_2 é a quantidade de apartamentos construídos.

A modelagem matemática da Função Objetivo neste exemplo é muito simples, pois o lucro total vai ser dado pela soma do lucro obtido com casas populares e apartamentos multiplicados por suas respectivas quantidades produzidas (x_1 e x_2).

Por exemplo, se a construtora construir 2 casas populares (x_1=2) e 3 apartamentos (x_2=3) o lucro total vai ser:

$$f(x_1, x_2) = 3 \times 2 + 5 \times 3 = 21 \qquad (2)$$

Como o lucro está dado em milhares de Reais, a construtora terá um lucro de R$21.000,00.

No entanto, será que este lucro de R$21.000,00 é o melhor resultado que está construtora pode obter ?

Prestando atenção no enunciado do problema, podemos reparar que existe uma limitação de mão de obra (não existem infinitos pedreiros e serventes!) e portanto, este fato limitará a "produção" desta construtora.

Esta limitação é denominada de maneira mais formal de **Restrição** ou **Injunção**.

Vamos ver como estas injunções pode ser modeladas matematicamente:

Para cada casa construída a construtora necessita de 2 pedreiros e para cada apartamento construído a construtora necessita de 3 pedreiros. Existem 30 pedreiros contratados. Portanto, podemos modelar está restrição de maneira matemática por:

$2x_1 + 3x_2 \leq 30$ (inequação de injunção de pedreiros) (3)

De maneira análoga a expressão 50, a construtora necessita de 4 serventes para cada casa construída e 8 serventes para cada apartamento construído. Existem 70 serventes contratados. Esta injunção é dada por:

$4x_1 + 8x_2 \leq 70$ (inequação de injunção de serventes) (4)

Além das inequações 3 e 4, podemos escrever mais duas inequações de injunção apenas para limitar as quantidades construídas de casas e apartamentos para valores positivos por motivos óbvios (não se pode construir -1 (menos um) apartamento ou -2 (menos duas) casas!). Estas inequações são:

$$x_1 \geq 0 \qquad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (6)$$

As inequações 3, 4, 5 e 6 definem um quadrilátero no plano (x_1,x_2) onde qualquer ponto que esteja "dentro" (contido) deste é uma solução possível (viável) para este problema. Cabe então a nós descobrirmos qual destes pontos é a solução ótima.

A figura 1 mostra este quadrilátero.

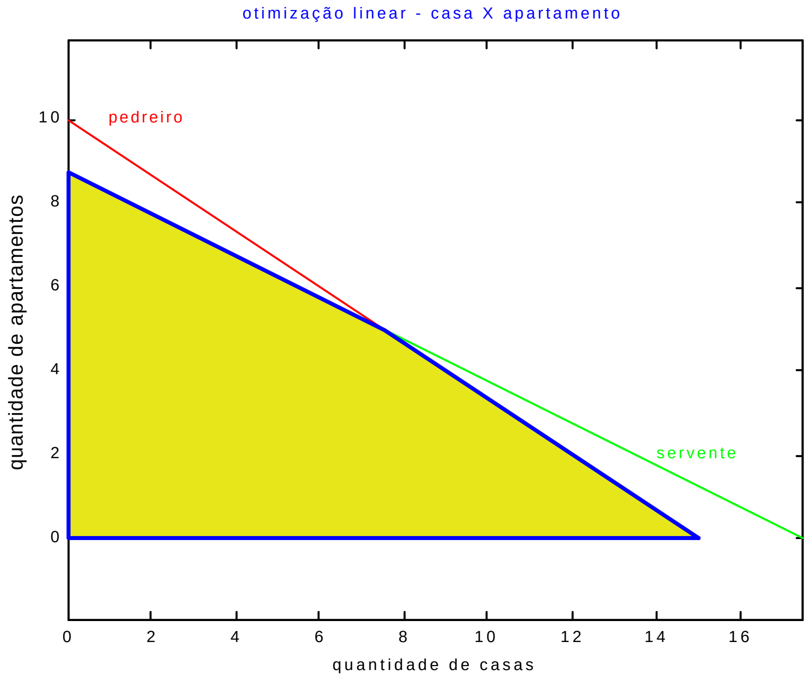

Fig. 1 - Quadrilátero representando a região de soluções viáveis.

O gráfico da figura 1 mostra, por exemplo, se a construtora construir 15 casas, esta não poderá construir nenhum apartamento, ou seja, x_1=15 e x_2=0. Esta é uma solução possível pois satisfaz as 4 inequações de injunção citadas, porém não é a ótima.

As inequações 5 e 6 "forçam" que a solução esteja no primeiro quadrante, a inequação 3 "força" a solução estar sobre ou abaixo da reta $2x_1 + 3x_2 = 30$

(linha vermelha) e a inequação 4 "força" a solução estar sobre ou abaixo da reta $4x_1 + 8x_2 = 70$ (linha verde).

Se fizermos $f(x_1, x_2) = \text{constante}$ estaremos determinando as "curvas de nível" da Função Objetivo:

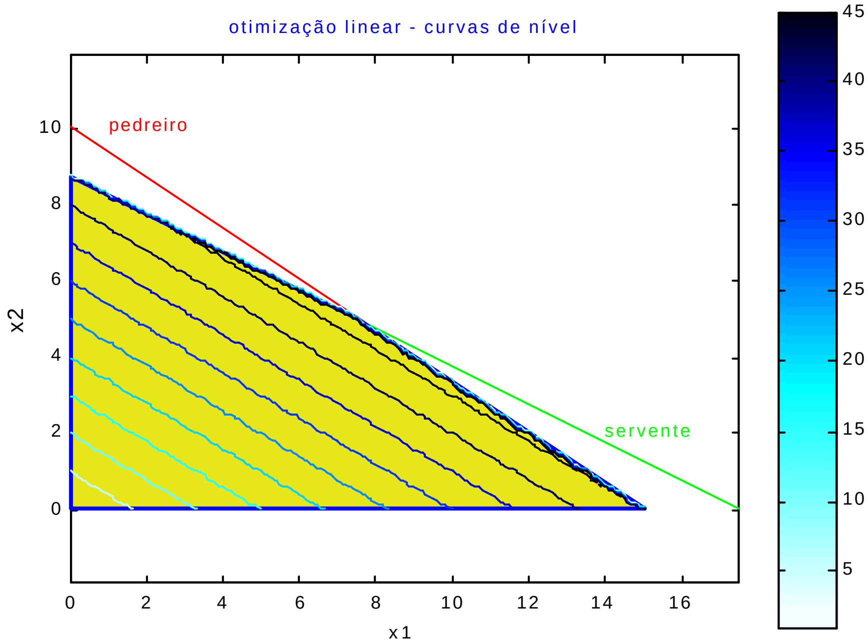

Fig. 2 - Quadrilátero representando a região de soluções viáveis e curvas de nível.

As curvas de nível estão indicando que os valores da Função Objetivo estão aumentando a medida que estas aproximam-se das retas delimitadoras referente as injunções do pedreiro e do servente (linhas vermelha e verde). Todos os pontos (x_1,x_2) que estão sobre uma mesma curva de nível caracterizam um mesmo valor para Função Objetivo (mesmo lucro no caso), porém combinações diferentes de quantidades de casas populares e apartamentos construídos.

A figura 3 mostra a Função Objetivo e as suas respectivas curvas de nível projetadas sobre o plano (x_1,x_2).

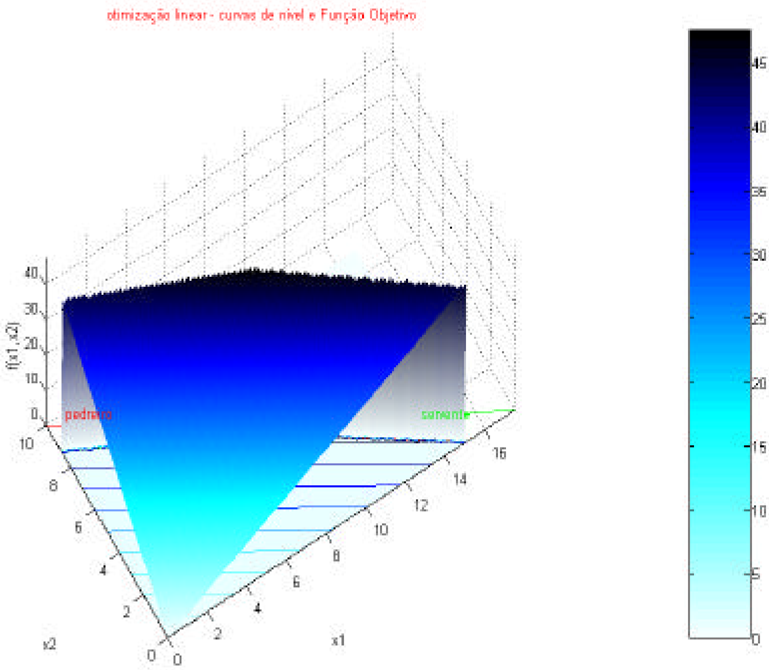

Fig. 3 - Quadrilátero representando a região de soluções viáveis, curvas de nível e Função Objetivo.

A figura 4 mostra o mesmo gráfico da figura 3, porém de outro ponto de vista.

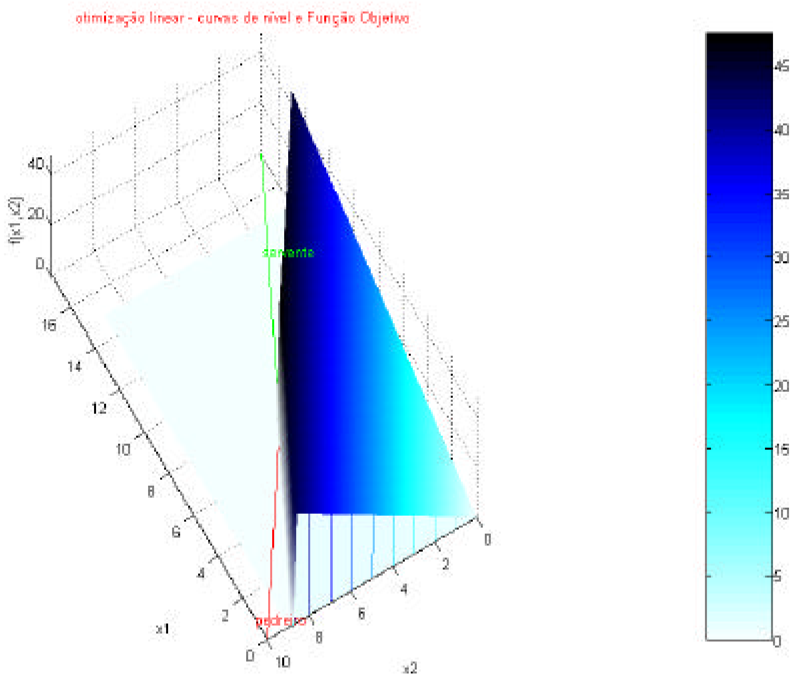

Fig. 4 - Quadrilátero representando as soluções viáveis, curvas de nível e Função Objetivo de outro ponto de vista.

Neste exemplo a solução ótima será a interseção da "equação da reta do pedreiro" (linha vermelha) e a "equação da reta do servente" (linha verde), ou seja, x_1=7.5 e x_2=5.0.

O próximo exemplo trata este mesmo problema, porém vamos incluir mais uma restrição referente ao trabalho do carpinteiro na construção das casas populares e apartamentos.

Exemplo 2

Suponha que para construir uma casa popular por mês uma construtura necessite de 2 pedreiros, 4 serventes e 1 carpinteiro. Para se construir um apartamento no mesmo intervalo de tempo, a mesma construtora necessita de 3 pedreiros, 8 serventes e 3 carpinteiros. A construtora possui um efetivo total de 30 pedreiros, 70 serventes e 20 carpinteiros contratados.

A construtora obtém um lucro de R$3.000,00 na venda de cada casa popular e de R$5.000,00 na venda de cada apartamento e toda "produção" da construtora é vendida.

Qual é a quantidade ótima de casas populares e apartamentos que a construtora deve construir para que está obtenha lucro máximo.

Solução

Da mesma maneira que procedemos no exemplo 1, vamos inicialmente representar este problema em forma de tabela.

	Casa Popular	Apart.	Disponibilidade de Mão de Obra
Pedreiro	2	3	30
Servente	4	8	70
Carpinteiro	1	3	20
Lucro (em mil R$)	3	5	

A Função Objetivo é a mesma do exemplo 1:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 \tag{7}$$

onde:

x_1 é a quantidade de casas populares construídas;

x_2 é a quantidade de apartamentos construídos.

As inequações de injunção são:

$2x_1 + 3x_2 \leq 30$ (inequação de injunção de pedreiros) (8)

$4x_1 + 8x_2 \leq 70$ (inequação de injunção de serventes) (9)

$x_1 + 3x_2 \leq 20$ (inequação de injunção de carpinteiros) (10)

$$x_1 \geq 0 \tag{11}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{12}$$

Temos agora 5 equações, sendo que o ponto oriundo da interseção da "equação do pedreiro" com a "equação do servente" (ponto A) é diferente do ponto oriundo da interseção da "equação do servente" com a "equação do carpinteiro" (ponto B).

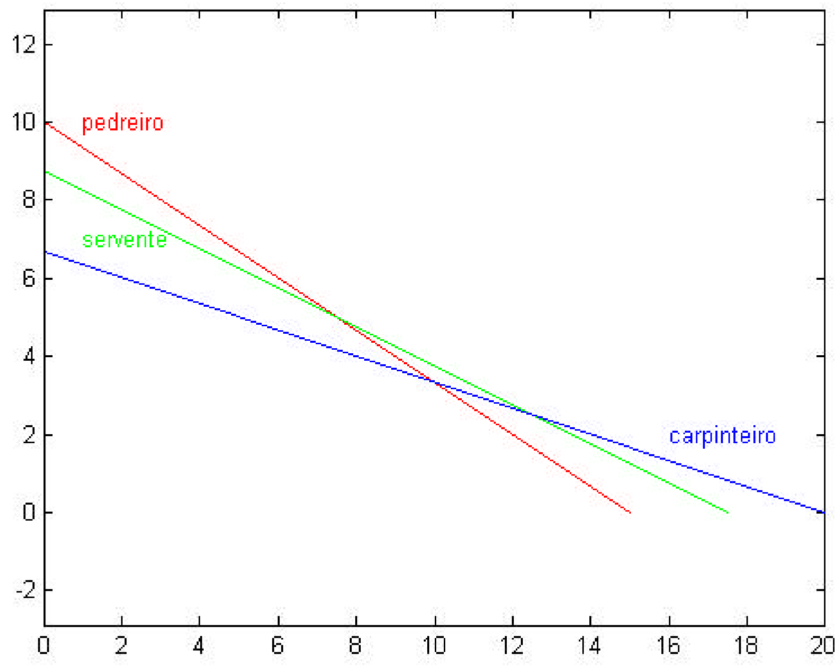

Fig. 5 - Equações das retas que delimitam a região de soluções viáveis.

Olhando o gráfico da figura 5, vemos que a solução sem a restrição devida ao carpinteiro é a solução que obtivemos no exemplo anterior (ponto A) por motivos óbvios (é o mesmo exemplo!), porém com o acréscimo da injunção do carpinteiro, a solução ótima agora passa a ser o ponto B cuja coordenada é x_1=10.0 e x_2=3.33.

A figura 6 mostra o quadrilátero da região viável.

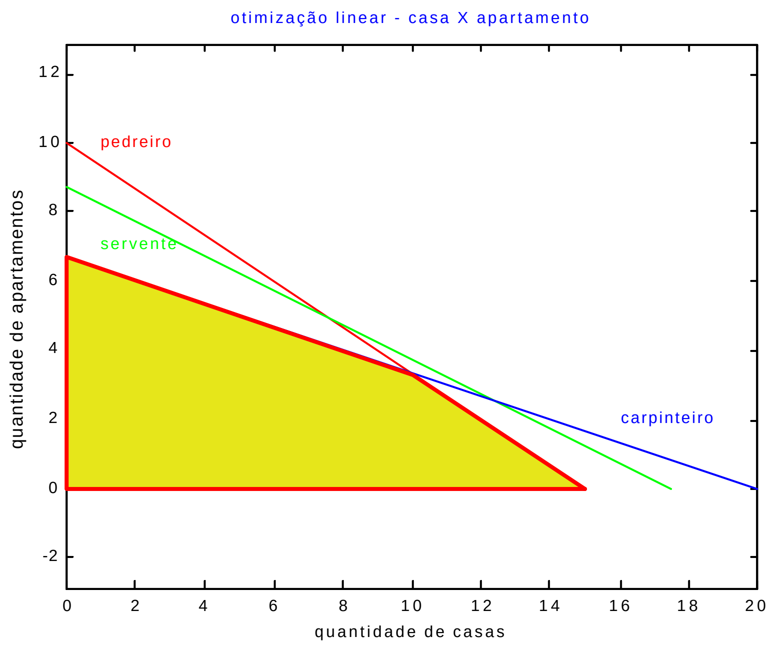

Fig. 6 - Quadrilátero representando a região de soluções viáveis.

É importante reparar que ao acrescentarmos mais uma injunção (a do carpinteiro) a área do quadrilátero diminui, estando de acordo com nossa intuição, uma vez que menos soluções viáveis são possíveis agora.

A figura 7 mostra as curvas de nível e o quadrilátero deste exemplo.

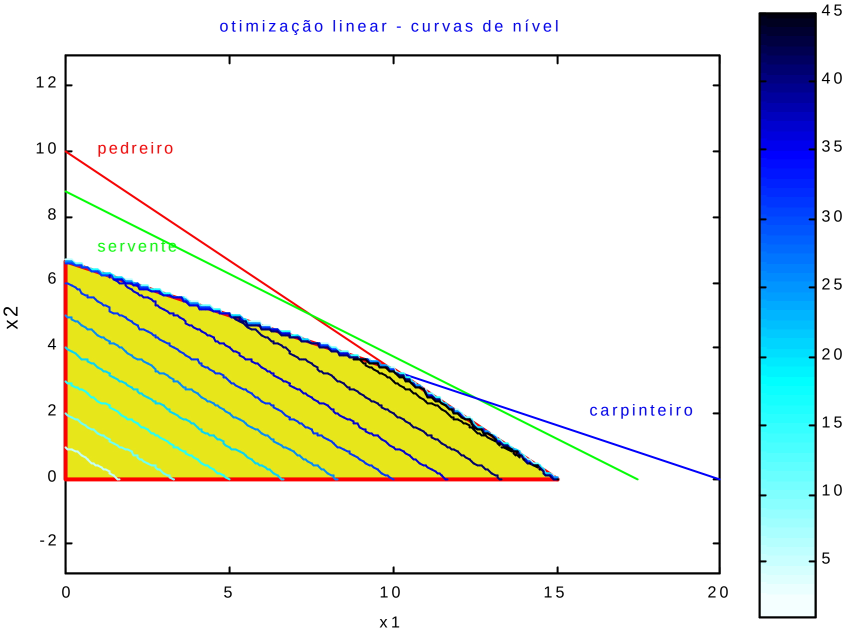

Fig. 7 - Quadrilátero representando a região de soluções viáveis e curvas de nível.

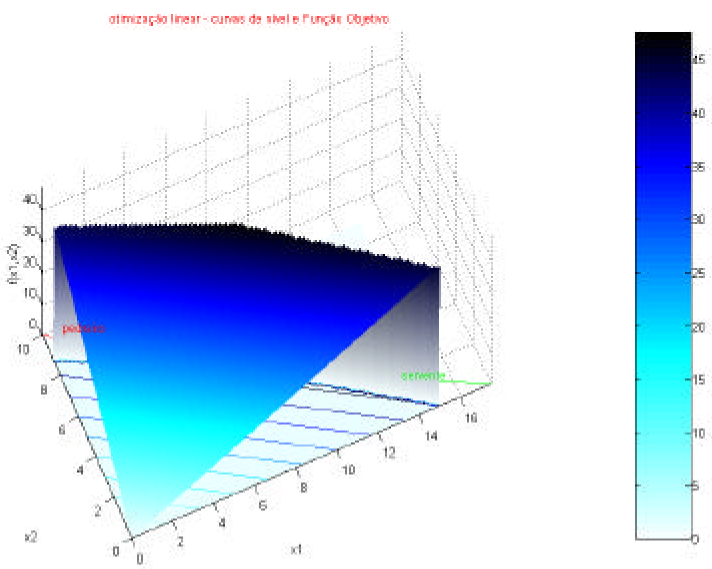

Fig. 8 - Quadrilátero representando a região de soluções viáveis, curvas de nível e Função Objetivo.

Como vimos nos exemplos 1 e 2, a solução gráfica para os problemas de Programação Linear é possível quando temos até duas variáveis de controle, porém a maioria dos problemas práticos envolve mais variáveis o que exige a utilização de outros métodos de solução.

O método mais empregado para a solução de problema de Programação Linear é o Método Simplex.

Formulação do Problema

De maneira formal, o problema de Programação Linear consiste em determinar o valor da solução ($x_1, x_2, \ldots x_n$) que maximize a Função Objetivo dada por:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{13}$$

De maneira mais elegante, a expressão 13 pode ser dada por:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{14}$$

Precisamos maximizar z obedecendo às m restrições (injunções) impostas às n variáveis x_j:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ \ldots. \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases} \tag{15}$$

ou de maneira mais elegante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \leq b_i \text{, para } i=1,2,\ldots,m \tag{16}$$

onde:

$x_j \geq 0$ é a variável j a ser designada ou produzida;

c_j é o coeficiente de lucro (ou de custo) para a variável x_j;

z é a Função Objetivo a ser maximizada;

a_{ij} é o coeficiente da variável x_j na injunção i;

b_i é o valor limite da restrição i;

j=1,2,...,n é o número de variáveis; e

i=1,2,...,m é o número de injunções impostas.

Utilizando notação matricial, o problema de Otimização Linear pode ser escrito como:

Maximizar

$$z = CX \tag{17}$$

sujeita às restrições

$$A.X \leq B \tag{18}$$

onde:

$C = \lfloor c_j \rfloor$ é um vetor linha

$X = \lfloor x_j \rfloor$ e $B = \lfloor b_i \rfloor$ são vetores colunas; e

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ é uma matriz m x n.

Utilizando a notação matricial, o exemplo 2 fica:

$$z = C.X = [3 \quad 5].\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Sujeita às restrições:

$$A.X \leq B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Alguns comentários tornam-se interessantes neste momento:

1) As inequações de injunção delimitam uma área ou região (no caso de 3 ou mais variávies de controle) fechada ou convexa de soluções viáveis, denominada região de injunções (ou de restrições).

2) Devido a todas as equações (e inequações) envolvidas serem lineares, o valor ótimo da Função Objetivo z só pode ocorrer em um dos vértices da região das soluções viáveis (Teorema Fundamental da Programação Linear).

3) Para determinarmos a solução ótima basta procurarmos o valor da Função Objetivo nos vértices da região de soluções viáveis. Estes vértices correspondem à interseção de pelo menos duas equações de injunção.