GEOMETRIA ANALÍTICA

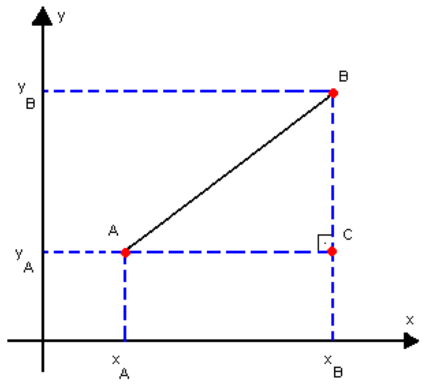
Professora Laura Aguiar

Distância entre Dois Pontos

Sejam os pontos **A**(x_A, y_A) e **B**(x_B, y_B) e sendo **d(A, B)** a distância entre eles, temos:

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, vem:

$$[d(A,B)]^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [d(A,B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Exemplos

1) São dados A (3, -1), B (1, 1) e C (5, 5)

   a) Calcule o perímetro do triângulo ABC.
   b) Mostre que ABC é um triângulo retângulo

2) Obtenha o ponto P do eixo das ordenadas que dista 10 unidades do ponto Q (6, -5).

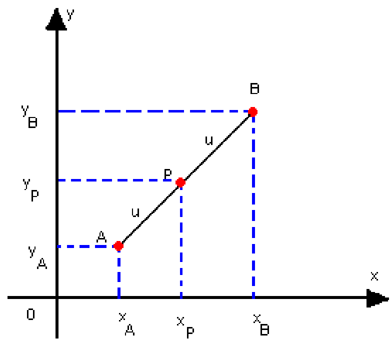
3) Qual é o ponto P, pertence ao eixo das abscissas, que dista 13 unidades do ponto Q (-8, 5)?

Ponto Médio

Dados os pontos A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e P, que divide $\overline{AB}$ ao meio, temos:

Note que o ponto P é o ponto médio do segmento AB, com isso suas coordenadas serão as coordenadas médias dos pontos A e B. Veja:

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



Exemplos

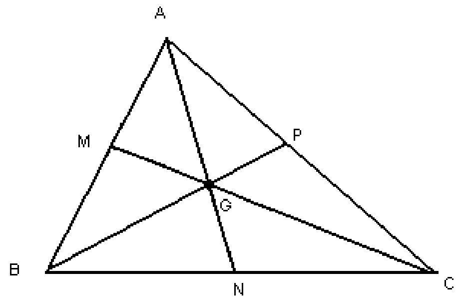
1) Determine o ponto médio do segmento com extremidades A (4, 6) e B (8, 10)

2) Determine o simétrico de A (3, 8) em relação ao ponto Q (-2, 1)

3) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD são os pontos A (2, 3) e B (5, 4). O ponto de interseção das diagonais AC e BD é Q (4, 6). Obtenha C e D. (sugestão: o ponto comum as diagonais de um paralelogramo é ponto médio de cada uma delas)

Baricentro de um triângulo

Seja o triângulo com vértices A, B e C, em que M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Portanto, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$ são as medianas desse triângulo:



Chamamos de baricentro, e denotamos por G, o encontro das medianas de um triângulo. As coordenas do ponto G são dadas por:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_c}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Exemplos

1) Encontre as coordenas do baricentro de um triângulo que têm como coordenadas os pontos A(1, 2), B(-2, 5) e C(5, -3).

Condições de alinhamento de três pontos e Área de um Triângulo

Dados três pontos quaisquer, A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C) no plano cartesiano, ocorre apenas uma das duas situações:

I – Os três pontos estão alinhados   II – São Vértices de um triângulo

Se os pontos estiverem alinhados temos que :

$$D=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$$

Por outro lado, se os pontos não estiverem alinhados, a área do triângulo determinado por eles é dada por:

$$A=\frac{1}{2}|D|$$

Exemplos

1) Verificar se os pontos A (2, 5), B (3, 7) e C (5, 11) são ou não colineares.

2) Determinar **a** de modo que os pontos A(4, 2), B(5, 8) e C(3, a) sejam colineares.
3) A área do triângulo cujos vértices são (1, 0), (3, 4) e (4, -1) é igual a:

4) Um valor de K, de modo que a área do triângulo determinado pelos pontos A(0, 1), B(-2, 4) e C(K, K – 1) seja 10 unidades é:

5) Determine a área da região do plano limitada pelas retas y = 3x, x + y = 4 e y = 0.

Exercícios

1) (CESGRANRIO) A área do triângulo, cujos vértices são (1,2), (3,4) e (4,-1), é igual a:
a) 6   b) 8   c) 9   d) 10   e) 12

2) (CESGRANRIO) O ponto Q é o simétrico do ponto P(x,y) em relação ao eixo dos y. O ponto R é o simétrico do ponto Q em relação à reta y=1. As coordenadas de R são:

a) (x, 1-y) b) (0, 1) c) (-x, 1-y) d) (-x, 2-y) e) (y, -x)

3) (UEL) Seja AC uma diagonal do quadrado ABCD. Se A = (-2, 3) e C = (0, 5), a área de ABCD, em unidades de área, é:

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) 8 d) $8\sqrt{2}$ e) 16

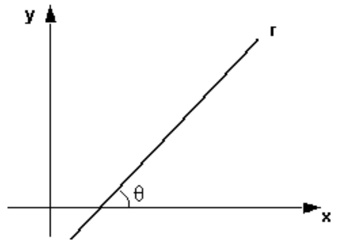
Gabarito

1) a	**2) d**	**3) a**

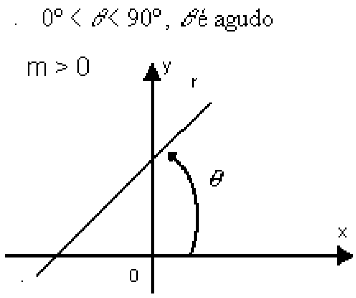
Coeficiente Angular

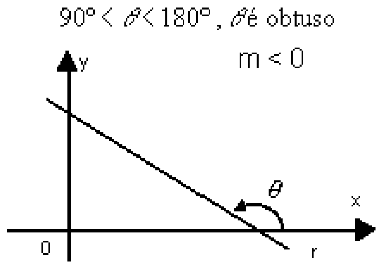
Dada uma reta r qualquer, definimos como coeficiente angular dessa reta, a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas.

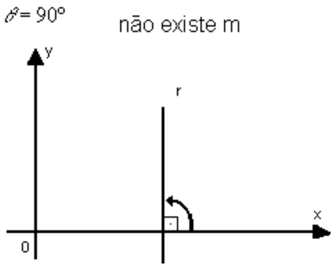
$$m = tg\theta$$

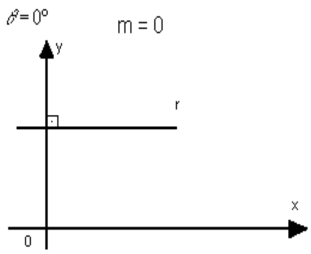


No caso mostrado acima se tem que m é positivo, mas também podem ocorrer as seguintes situações:

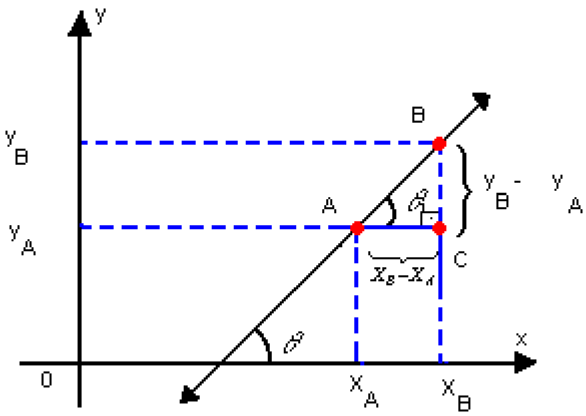








Para determinar o coeficiente angular de uma reta, precisamos de dois pontos que pertençam a esta reta, para assim termos que:



$$m = tg\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemplos

1) Determine a inclinação da reta que passa pelos pontos A (3, 7) e B (5, 9).

2) Calcule o coeficiente angular da reta AB em cada um dos seguintes casos:

   a) A (2, 6) e B (4, 14)
   b) A (-3, 5) e B (1, -1)
   c) A (-5, -1) e B (-3, - 4)

Equação Fundamental da Reta

Agora buscaremos uma equação que represente uma reta, para tal utilizaremos a equação fundamental da reta, que é obtida através do coeficiente angular.

Seja **r** uma reta de coeficiente angular **m**. Sendo P(X_0, Y_0), um ponto conhecido da reta r e Q(x, y) um ponto qualquer de r diferente de P, podemos escrever:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow$$

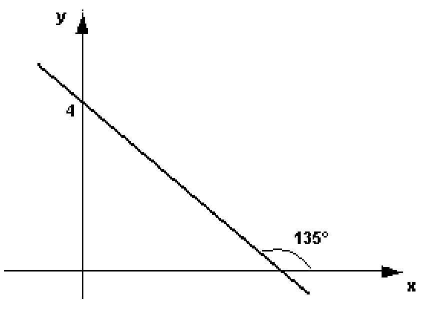
$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Utilizaremos a equação acima como referência para obter uma equação qualquer de uma reta.

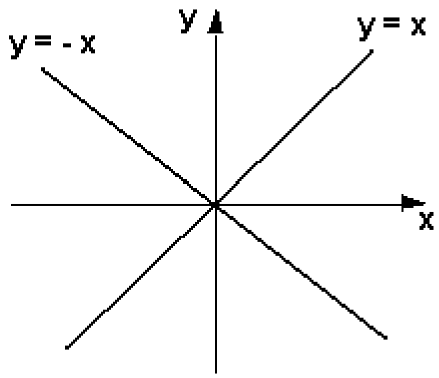
Exemplos

1) Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto P(-2, 1) e tem coeficiente angular m= - 3.

2) Determinar uma equação da reta r do gráfico.
3) Obtenha uma equação da reta que passa pelo ponto A(2, 5) e B(4, 1)



Observação: Duas retas importantes no estudo da geometria analítica são as bissetrizes, dos quadrantes pares e dos quadrantes ímpares.



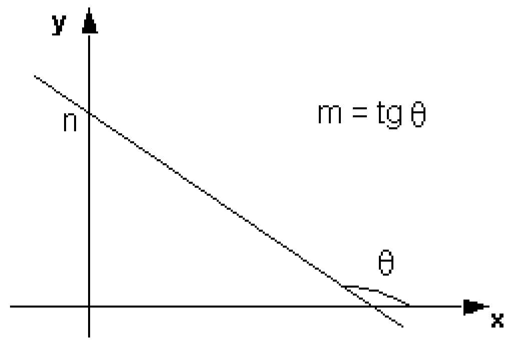
Equação Reduzida da Reta

A equação reduzida da reta é aquela que se encontra na forma:

$$y = mx + n$$

Essa equação é importante pois, além de representar a reta analiticamente deixa explícito os valores de m e n, onde:

- m é o coeficiente angular da reta, ou seja, a tangente que a reta forma com o eixo x.
- n é o chamado coeficiente linear e sua interpretação geométrica é o ponto onde a reta intercepta o eixo das ordenadas.



Equação Geral da Reta

A equação geral da reta, não possui nenhuma interpretação geométrica relevante, mas é importante devido a sua aplicabilidade em algumas expressões analíticas, sua forma é:

$$Ax + By + C = 0$$

Exemplos

1) Determinar a equação reduzida e geral da reta que passa pelos pontos A e B nos casos:

   a) A(- 2, 3) e B(7, 1)
   b) A(2, 6) e B(- 4, 1)

Exercícios:

1) (UNESP) Seja A a intersecção das retas r, de equação y = 2x, e s, de equação y = 4x-2. Se B e C são as intersecções respectivas dessas retas com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC é:

a) ½ b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

2) (PUC) Os pontos A (-1; 1), B (2; -1) e C (0; -4) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD. A equação da reta suporte da diagonal BD, desse quadrado, é:

a) x + 5y + 3 = 0 b) x - 2y - 4 = 0 c) x - 5y - 7 = 0

d) x + 2y - 3 = 0 e) x - 3y - 5 = 0

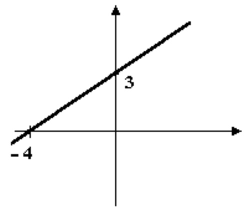
3) (UNITAU) A equação da reta que passa pelos pontos (3,3) e (6,6) é

a) y = x b) y = 3x c) y = 6x d) 2y = x e) 6y = x

4) (UNICAMP) Calcule a e b positivos na equação da reta ax + by = 6 de modo que ela passe pelo ponto (3,1) e forme com os eixos coordenados um triângulo de área igual 6.

5) (CESGRANRIO) A equação da reta mostrada na figura a seguir é:

a) 3x + 4y - 12 = 0 b) 3x - 4y + 12 = 0 c) 4x + 3y + 12 = 0
d) 4x - 3y - 12 = 0 e) 4x - 3y + 12 = 0



Gabarito

1) A	2) C	3) A	4) a=1;b=2	5) B

Retas Concorrentes

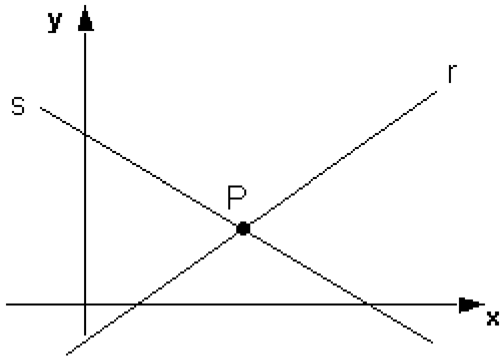
Dadas duas retas em um plano, temos que podem ocorrer dois casos básicos de posição de uma reta em relação a outra:

- As retas são concorrentes - As retas são paralelas

No primeiro caso, o fato de elas serem concorrentes implica que elas possuem um ponto em comum, que chamamos de ponto de interseção das retas, um resultado interessante em Geometria Analítica é a obtenção desse ponto, veja a figura:

Para obtermos o tal ponto P, devemos resolver um sistema em que as equações são as equações das retas concorrentes, assim P é a solução do sistema:

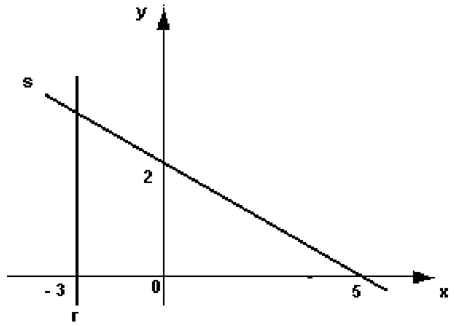
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$



Exemplos

1) Obtenha o ponto de interseção das retas de equações 2x – y – 5 = 0 e 3x + y –10 = 0

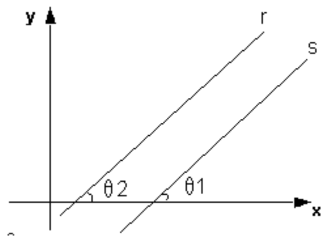
2) Obtenha o ponto de interseção das retas r e s do gráfico



3) Encontre a interseção da reta –3x + 2y = 12 com os eixos coordenados.

Retas Paralelas

A outra posição relativa entre duas retas é o paralelismo, isso ocorre quando as duas retas não têm nenhum ponto em comum, ou seja, não se interceptam.



Veja que nesse caso, o fato das retas não se interceptarem acarreta o fato dos seus coeficientes angulares sem os mesmos, visto que o ângulo formado com o eixo dos x é o mesmo.

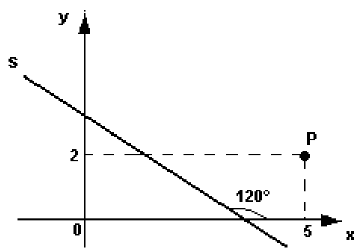
Com isso podemos concluir que: se duas retas r e s são paralelas, seus coeficientes angulares serão iguais, ou seja, $m_r = m_s$

Exemplos

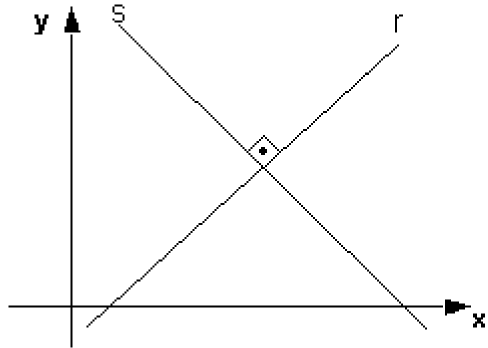
1) São dadas as seguintes retas: r: y = 3x + 5 ; s: y = 3x – 2 ; t: 6x – 2y + 10 = 0 ; u: y = 5x
Descrever a posição relativa entre
a) r e s b) r e t c) s e u

2) Para que valor de **a** as retas r: 3x + 2y – 1 = 0 e s: ax + 5y + 3 = 0 são paralelas?

3) Obter uma equação da reta r que passa pelo ponto P(5, 2) e é paralela à reta s do gráfico.



Retas Perpendiculares



Um caso especial de concorrência entre retas é que, quando elas são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de 90° , além de possuírem um ponto P de interseção entre elas, existe uma importante relação entre seus coeficientes angulares.

Se r e s são retas perpendiculares, então:

$$m_r.m_s = -1$$

Exemplos

1) Obter uma equação geral da reta s que passa pelo ponto P(2, -3) e é perpendicular a reta r: x + 2y + 5 = 0

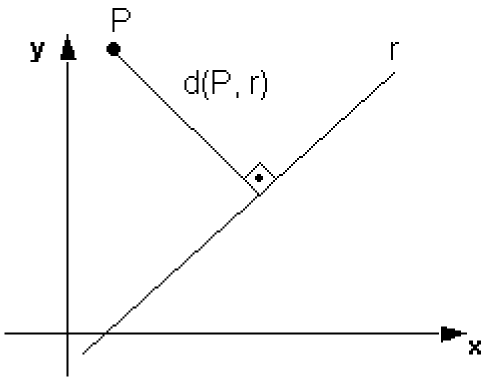
2) Qual é a equação reduzida da mediatriz do segmento AB, dados A(3, 9) e B(1,5)?

3) Determinar o simétrico do ponto P(5, 2) em relação à reta r: 2x + y + 2 = 0

Distância de Ponto a Reta

Seja um ponto $P(x_o, y_o)$ e uma reta r de equação $Ax + By + C = 0$, temos que a distância do ponto P a reta r é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_o + By_o + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Exemplos

1) Calcular a distância do ponto P(2, 1) à reta r: 3x – 4y + 8 = 0

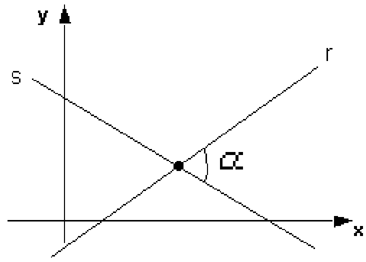
2) Calcular a distância entre as retas r: 12x+ 5y + 38 = 0 e s: 12x + 5y + 25 = 0

3) Considere os pontos A(0, 0), B(2, 3) e C(4, 1). O comprimento da altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC, vale:

Ângulo formado por duas Retas

Definimos o ângulo formado por duas retas, como sendo o menor ângulo gerado por sua interseção. Sendo assim dadas duas retas r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente, o ângulo α formado por r e s é calculado por:

$$tg\alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s} \right|$$



Exercícios

1) (UFES) Dados no plano cartesiano os pontos A (-2,1) e B (0,2), determine:

a) uma equação da reta que passa por A e B; Resp.: y = 1/2 x + 2

b) uma equação da reta que passa por A e é perpendicular ao segmento AB. Resp.: y = - 2x – 3

2) (FATEC) Se A (-1,3) e B (1,1), então a mediatriz do segmento AB encontra a bissetriz dos quadrantes pares no ponto:

a) (-1,1) b) (-3/4, 3/4) c) (-2, 2) d) (-1/2, 1/2) e) (-1/4, 1/4)

3) Considere o triângulo cujos vértices são os pontos A(0,0), B(2,2) e C(2,-2). Se ax + by = c é a equação cartesiana da reta que contém a altura deste triângulo relativa ao lado AB, então 5b/a é:

a) 2 b) 5 c) 7 d) 1 e) 4

4) (UEL) Considere os pontos A(0;0), B(2;3) e C(4;1).A equação da reta paralela à reta AC, conduzida pelo ponto B, é:

a) x - 4y + 10 = 0 b) x + 4y -11 = 0 c) x - 4y -10 = 0

d) 2x + y - 7 = 0 e) 2x - y -1 = 0

Gabarito

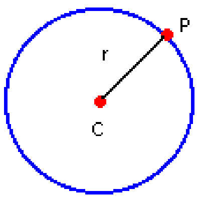
1)a:y=1/2.x +2; b:y=-2x -3	2) a	3)b	4) a

A CIRCUNFERÊNCIA

O Lugar Geométrico

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância r de um ponto C fixado, chamado centro da circunferência

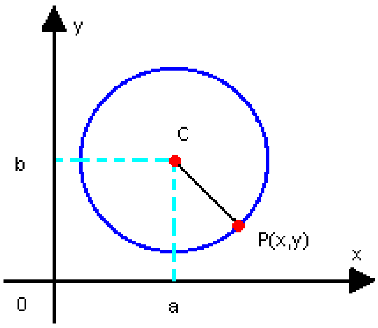
Isso significa que se um ponto qualquer P(x, y), movimentar-se sobre a circunferência, sua coordenadas variarão, mas a distância de P ao centro da circunferência será sempre igual a medida do raio.



Equação Reduzida da Circunferência

Assim, sendo C(a, b) o centro e P(x, y) um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P, denotada por d(C, P), é o raio dessa circunferência. Então:

$$d(P,C)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Leftrightarrow$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



Com isso definimos a equação reduzida da circunferência, como sendo:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Onde C(a, b) é o centro da circunferência e r é o raio da circunferência.

Exemplos

1) Obter a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos casos:

   a) C(4, 6) e R = 3
   b) C(0, 2) e R = $\sqrt{5}$
   c) C(-3, 1) e R = $\frac{3}{2}$

2) Determinar o centro e o raio da circunferência que tem por equação:

   a) $(x-6)^2+(y-2)^2=16$ b) $(x+4)^2+(y-1)^2=3$

3) Obter a equação reduzida da circunferência de centro C(3, 2) e que passa pelo ponto (0, 6)

Equação Geral da Circunferência

A equação geral da circunferência é obtida ao efetuarmos os produtos notáveis presentes na equação reduzida e organizando os termos da forma:

$$x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Fazendo: $\alpha=2a,\ \beta=2b$ e $\gamma=a^2+b^2-r^2$ temos,

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

Exemplos

1) Obtenha a equação geral da circunferência que passa pelos pontos A(3, 6) e B(4, -1), cujo centro pertence ao eixo das ordenadas.

2) Transforme a equação geral abaixo em equação reduzida e obtenha centro e raio.

a) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ b) $x^2+y^2+6=0$

c) $3x^2+3y^2-3x+6y+3=0$ d) $25x^2+25y^2-10x-50y+1=0$

3) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos A(0, 5) e B(1, 0), cujo centro pertence a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

Identificando uma Equação como uma Circunferência

Para que uma equação represente uma circunferência ela deve respeitar dois requisitos básicos:

- Os coeficientes dos termos quadráticos devem ser iguais.
- O raio obtido deve ser maior que zero.

Exemplos

1) Qual é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x-2)^2+(y-3)^2=-16$

2) Qual das equações a seguir representa uma circunferência?

a) $x^2-y^2+3x-6y+8=0$ b) $2x^2+3y^2-2x+4y+1=0$

c) $x^2+y^2-2xy+2x-1=0$ d) $3x^2+3y^2-6x+24y+24=0$

3) (UFRS) A equação $x^2+y^2+4x-6y+m=0$ representa uma circunferência se, e somente se:

a) m > 0 b) m < 0 c) m > 13 d) m > -13 e) m < 0

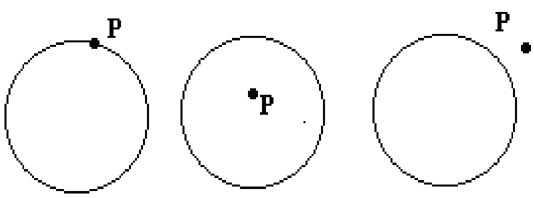
Posição Relativa entre um Ponto e uma Circunferência

Seja uma circunferência λ de centro C, raio r e um ponto P do plano cartesiano, temos que:

Se $d(C,P)=r \Leftrightarrow P \in \lambda$

Se $d(C,P)<r \Leftrightarrow P$ interior a r

Se $d(C,P)>r \Leftrightarrow P$ exterior a r

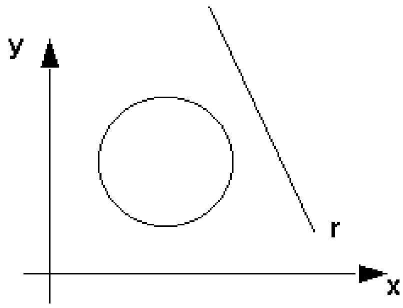


P pertence a L P está interior a L P está exterior a L

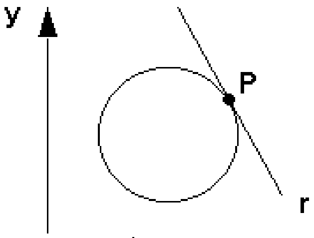
Posição Relativa entre uma Reta e uma Circunferência

Seja uma reta r e uma circunferência λ, podem ocorrer as seguintes situações:

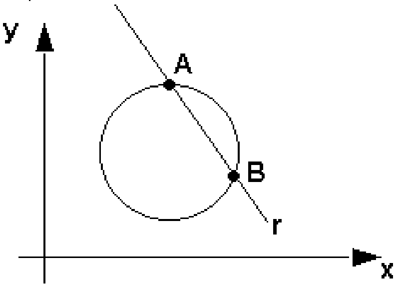
a) Se $r \cap \lambda = \varnothing \Leftrightarrow r$ externa a λ



b) Se $r \cap \lambda = \{P\} \Leftrightarrow r$ tangente a λ



c) Se $r \cap \lambda = \{A, B\} \Leftrightarrow r$ secante a λ



Note que dada uma reta e uma circunferência, elas podem ter um ponto de interseção, dois ou nenhum ponto de interseção. Um resultado importante é determinar se elas são tangentes, secantes ou externas. Para tal devemos resolver um sistema em que as equações são a da reta e a da circunferência e, daí:

- Se o sistema tiver uma única solução, reta e circunferência são tangentes.
- Se o sistema tiver duas soluções, reta e circunferência são secantes.
- Se o sistema não tiver soluções, reta e circunferência são externas.

Exemplos

1) Diga qual é a posição relativa e encontre o ponto de interseção entre a reta e a circunferência, se existir.

   a) 3x + 4y + 4 = 0 e $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
   b) x – y + 1 = 0 e $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$

2) (UFPA) A reta de equação x + 2y = 0 intercepta a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ de centro C, nos pontos A e B. Determine:

   a) os pontos A, B e C. A(4, -2), B(-4, 2) e C(-1, -2)
   b) A área do triângulo ABC. 10

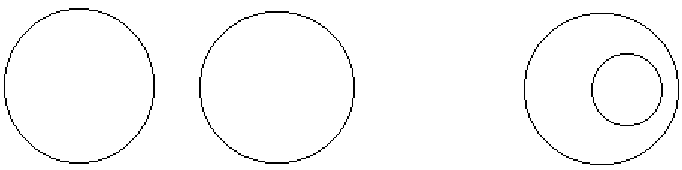
3) (UFRS) O eixo das abscissas determina na circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ uma corda de comprimento:

   a) $2\sqrt{5}$ b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Posição Relativa entre Duas Circunferências

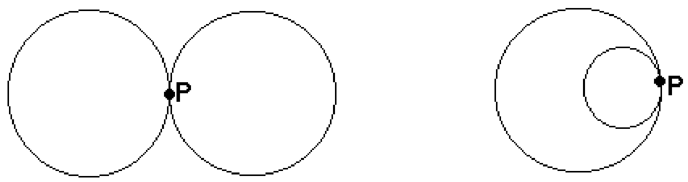
Sejam λ e ρ duas circunferências, temos que:

- Se $\lambda \cap \rho = \varnothing \Rightarrow$ as circunferências estarão externa ou interna uma a outra.



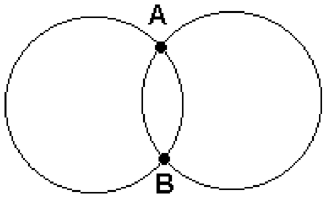
EXTERNAS INTERNAS

- Se $\lambda \cap \rho = \{P\} \Rightarrow$ as circunferências estão tangentes, internamente ou externamente.



- Se $\lambda \cap \rho = \{A, B\} \Rightarrow$ as circunferências são secantes.

Para obtermos os pontos de interseção também devemos resolver o sistema em que as equações são as equações das circunferências.



Exemplo

1) Diga se as circunferências de equações $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ e $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$, são tangentes, secantes ou externas e encontre o ponto de interseção.

Exercícios complementares

1) (UFJF) Dada a equação da reta r: y = x – 2, a área da região limitada pela reta r, pelo eixo das ordenadas e pela reta s perpendicular à reta r no ponto (3, 1), é:

   a) 10 u. a b) 9 u. a c) 18 u. a d) 12 u. a e) 16 u. a

2) (UFJF) A maior altura de um triângulo retângulo isósceles, inscrito numa circunferência de centro no ponto (0, 0), mede 5 cm. A equação dessa circunferência é:

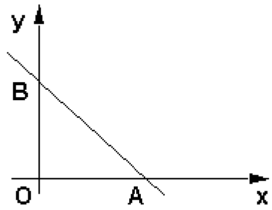
   a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 50$ c) $x^2 + y^2 = 5$

   d) $2x^2 + 2y^2 = 25$ e) $4x^2 + 4y^2 = 25$

3) (UFJF) O triângulo AOB, cujos vértices estão sobre os eixos coordenados, como mostra a figura abaixo, é isóscele e tem área 18 cm2. A equação da reta que passa pelos pontos A e B são dadas por:

a) x – y + 6 = 0 b) x + y + 6 = 0 c) 2 + 2y – 6 = 0

d) x + y – 6 = 0 e) x – y – 6 = 0



4) (UFJF) Considere a circunferência e a reta de equações $x^2 + (y-1)^2 = 2$ e y = x + 1, respectivamente. Podemos afirmar que:

a) a reta é tangente à circunferência

b) a reta não intercepta a circunferência

c) a reta é secante a circunferência

d) a reta passa por três pontos da circunferência

5) (UFJF) O raio e o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ são, respectivamente:

a) 5, (2, 3) b) $2\sqrt{3}$, (-3, 2) c) 5, (-2, 3) d) $2\sqrt{3}$, (2, -3)

6) (UFJF) Sendo A, B e C os vértices de um triângulo de coordenas (1, 2), (5, 5) e (8, 9), respectivamente, então esse triângulo é:

a) retângulo e não isósceles

b) retângulo e isósceles

c) equilátero

d) isósceles e não retângulo

7) (UFV) O gráfico da equação $x^3y + xy^3 - xy = 0$ consiste de:

a) duas retas e uma parábola

b) duas parábolas e uma reta

c) dois círculos e uma reta

d) duas retas e um círculo

e) um círculo e uma parábola

8) (UFJF) A equação da circunferência no ponto (2, - 4) e tangente ao eixo das ordenadas é dada por:

a) $x^2 + 4x + y^2 - 8y = 16$ b) $x^2 - 4x + y^2 + 8y = -4$

c) $x^2-4x+y^2+8y=-16$ d) $x^2-4x+y^2+8y=16$

9) (UFJF) Consideramos as circunferências C1 e C2 de equações $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ e $x^2+y^2-4x+6y-4=0$, respectivamente. É correto afirmar que:

a) C1 é tangente ao eixo das abscissas

b) C1 e C2 se intersectam em um único ponto

c) C1 e C2 se intersectam em dois pontos

d) C1 e C2 não se intersectam

10) (UFJF) Consideramos a reta y = - 2x + 2. Se $P_0(x_0, y_0)$ é o ponto dessa reta mais próximo da origem dos eixos coordenados, então podemos afirmar que:

a) $x_0=\frac{2}{5}$ b) $y_0=\frac{4}{5}$ c) $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=\frac{2}{5}$ d) $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=\frac{4}{5}$

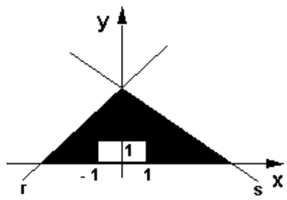
11) (UFJF) Sejam r e s as retas cujas equações são, respectivamente, y = - x + 3 e y = (3/2)x + 3. A área da região sombreada na figura abaixo, em unidades de área, é:

a) 5,5

b) 3,5

c) 11

d) 7



12) (UFV) Considere a equação $x^2+y^2-6x+4y+p=0$. O maior valor inteiro de p para que a equação acima represente uma circunferência é:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 8 e) 10

13) (UFJF) A uma tela de computador está associado um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no canto inferior esquerdo. Um certo programa gráfico pode ser usado para desenhar na tela somente retas de inclinações iguais a 0°, 30°, 45° e 90° em relação ao eixo horizontal. Então, considerando-se os pontos a seguir, o único que não pode estar sobre uma reta , a partir da origem, desenhada por este programa é:

a) $(0,10\sqrt{3})$ b) $(10\sqrt{3},0)$ c) $(10\sqrt{3},10\sqrt{3})$
d) $(10\sqrt{3},5\sqrt{3})$ e) $(10\sqrt{3},10)$

14) (UFJF) Considere, no plano cartesiano, uma circunferência de raio 3, intersectando o eixo x, tangente à reta y = 4 e cujo centro pertence à reta x = 5. A soma das abscissas dos pontos de interseção dessa circunferência com o eixo x é igual a:

a) 6 b) $5+\sqrt{8}$ c) 10 d) $10+2\sqrt{8}$ e) 12

15) (UFJF) Sobre o conjunto dos pontos de interseção da circunferência $x^2+(y-2)^2=2$ com a reta mx – y + 2 = 0, onde m é real, podemos afirmar que:

a) contém um único ponto

b) é o conjunto vazio

c) contém dois pontos

d) contém três pontos

e) depende de m

16) (UFJF – Adaptada) Os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 - y^2 + x + y = 0$ estão melhor representam:

a) uma circunferência

b) duas retas perpendiculares

c) duas retas paralelas

d) um quadrado

e) uma hipérbole

17) (UFJF) Dada a reta de equação 5x – 3y + 8 = 0 e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, a equação da reta perpendicular á reta dada, contendo o centro da circunferência, é:

a) 3x + 5y – 7 = 0 b) – 2x + 3y – 2 = 0 c) 3x + 5y – 4 = 0

d) 4x + 6 = 0 e) – 2x + 3 y + 5 = 0

18) (UFJF) As posições relativas dos pontos A(- 1, 2), B(2, 1) e C(1, 1), em relação à circunferência de equação $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$, são:

a) A e B são internos e C está contido na circunferência

b) Os três pontos estão contidos na circunferência

c) A é interno, B é externo e C está contido na circunferência

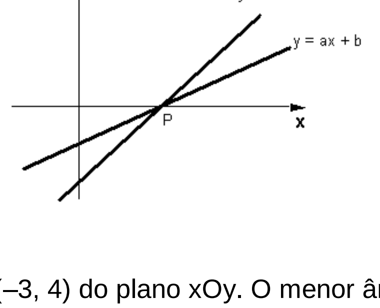
d) A é externo, B é interno e C está contido na circunferência

e) A, B e C são externos a circunferência

19) (UFJF) Dados os pontos A(1, 3) e B(2, -1), pode-se afirmar que a mediatriz do segmento AB intercepta o eixo Ou no ponto de ordenada igual a:

a) 2 b) ½ c) 5/8 d) 0 e) 2/3

20) (UFJF) Sejam y = ax + b e y = cx + d as equações de duas retas, que se interceptam no ponto P, pertencente ao eixo x, representadas no plano cartesiano abaixo:



a) a > c e b < d

b) a > c e b > d

c) a < c e b < d

d) a < c e b > d

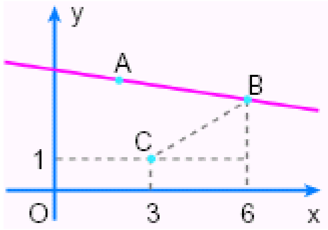
e) a = c e b < d

21) (Cesgranrio) Considere os pontos M(0, 0), N(4, 3) e P(–3, 4) do plano xOy. O menor ângulo positivo formado pelas retas MN e MP é:

a) 75° b) 80° c) 85° d) 90°

22) (UFMG) Na figura, A = (2, 3) e BC = $\sqrt{10}$. A equação da reta AB é:

a) x + 4y – 14 = 0
b) x – 4y + 14 = 0
c) 4x + y – 14 = 0
d) 4x – y + 14 = 0

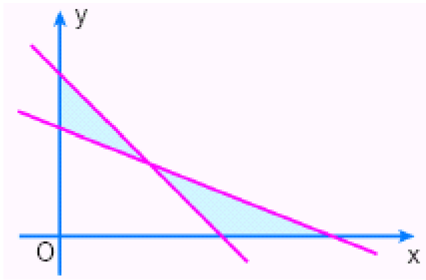


23) (Fuvest) Uma reta r determina, no primeiro quadrante do plano cartesiano, um triângulo isósceles, cujos vértices são a origem e os pontos onde a reta intercepta os eixos Ox e Oy. Se a área desse triângulo é 18, a equação de r é:

a) x – y = 4
b) x + y = 4
c) x + y = 2
d) x + y = 6

24) (Cesgranrio) As retas y = – 3x + 3 e y = (- x/2) + 2 mostradas na figura. A área da região colorida é:

a) 2,9 b) 3,0
c) 3,1 d) 3,2



25) (Mack-SP) A reta r, determinada por A(2, –5) e B(3, k), tem coeficiente angular 2k. A equação da reta s paralela à reta r e que passa pela origem é:

a) 10x + y = 0
b) x – 10y = 0
c) 10x – y – 25 = 0
d) y = 10x

26) (UFPE) Qual a área da região, no plano cartesiano, determinada pelas desigualdades $y \le 0$, $x + y \le 10$ $3x - y \le 6$?

a) 24 b) 30 c) 35 d) 60

27) (Santa Casa-SP) Seja 3x – 4y + 4 = 0 a equação da reta suporte de um dos lados de um triângulo equilátero. Se um dos vértices desse triângulo é o ponto (1, –2), o seu perímetro é:

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$

28) (UFAL - Adaptação) Sejam o ponto P(2, 1) e o ponto Q, de abscissa 4, localizado no 1º quadrante. Se a distância de Q a P é igual à distância de Q ao eixo das abscissas, então Q é um ponto de ordenada:

a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) 5/2 d) 3

29) (UFES) A área do triângulo limitado pelas retas y = x, y = 2x e x + y = 6 vale:

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 2

30) (PUC-SP) Os pontos A(–1, 1), B(2, –1) e C(0, –4) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD. A equação da reta suporte da diagonal BD desse quadrado é:

a) $x + 5y - 3 = 0$
b) $x - 2y - 4 = 0$
c) $x - 5y - 7 = 0$
e) $x + 2y - 3 = 0$

GABARITO

1) b	2) d	3) d	4) c	5) a	6) d	7) d	8) c	9) d	10) d
11) a	12) a	1 3) d	14) c	15) c	16) b	17) a	18) c	19) c	20) d
21) d	22) a	23) d	24) a	25) d	26) a	27) c	28) c	29) b	30) c

BIBLIOGRAFIA:

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações** – **Ensino Médio**. Volume 1, Ática, 2007.

FACCHINI, Walter. **Matemática Para a Escola de Hoje** – **Ensino Médio**. FTD, 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro. **Matemática – Volume Único – Ensino Médio**. Atual, 2007.