FUNÇÃO EXPONENCIAL

Professora Laura

1. Potências e suas propriedades

Considere os números $(a > 0, a \neq 1)$, $m \in R, n \in N$ e $x, y, b \in R$

Definição: $a^n = a.a.a.....a$, $(n > 1)$, ou seja, a potência a^n é igual ao número a multiplicado n vezes por a.

Propriedades

- $a^0 = 1$ para todo a não nulo
- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $a^x.a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x.y}$
- $(a.b)^x = a^x.b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, claro para todo b não nulo
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2. Função Exponencial

Definição

Seja $a \in R, a > 0$, e $a \neq 1$. Chamamos de Função Exponencial a função definida por:

$$f : R \rightarrow R \text{ tal que } f(x) = a^x$$

Exemplos:

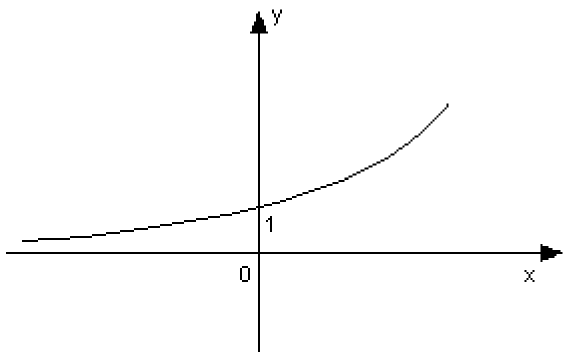
$$f(x) = 3^x;\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ y = (3,75)^x$$

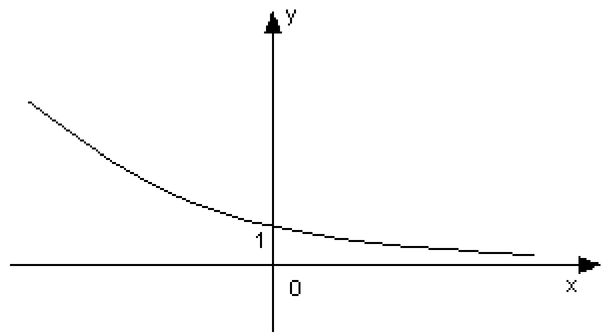
Observe que a condição $a \neq 1$ é necessária, pois, $f(x) = 1^x = 1$ seria uma função constante. Já a condição $a > 0$ é necessária para garantir que a exponencial tenha domínio R. Por exemplo, se $f(x) = (-2)^x$, não existiria $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ou $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ e assim por diante.

Gráfico da Função Exponencial

$$f : R \to R \text{ tal que } f(x) = a^x$$

1° Caso: Se $a > 1$ 2° Caso: Se $0 < a < 1$





Obs.: Veja que no primeiro caso a função é crescente, já no segundo ela decresce. Note ainda que em ambos os casos o gráfico da função $f(x) = a^x$ não toca o eixo-x e além disso a exponencial sempre toca o eixo-y no ponto $y = 1$, isso ocorre pois $a^0 = 1$.

Principais propriedades da Função Exponencial

(I) Domínio: $D_{(f)} = R$

(II) Imagem: $\mathrm{Im}_{(f)} = R_+$ (ou seja, $y > 0$)

(III) Se $a > 1$ então f é crescente
Se $0 < a < 1$ então f é decrescente

(IV) Não existe $x \in R$, tal que $a^x = 0$, ou seja a função exponencial não tem raiz. Assim o gráfico se aproxima do eixo x, mas não o intercepta. Dizemos então que o eixo x é uma assíntota horizontal.

(V) A função exponencial é bijetora. Como conseqüência é inversível (admite função inversa).

(VI) A interseção do gráfico da função exponencial com o eixo y é o ponto $(0,1)$.

(VII) A função exponencial é muito útil para descrever fenômenos nos quais os valores a serem calculados dependem do valor existente em um determinado instante. Assim por exemplo, o crescimento populacional depende do número de indivíduos em um dado momento, a desintegração radioativa depende da quantidade existente de substância num dado instante. A função exponencial é útil na Biologia (produção de bactérias), na Arqueologia (determinação da idade dos fósseis, na Economia (jurus compostos), etc.

3. Equações Exponenciais

As condições impostas à base de uma função exponencial a tornam uma função bijetora. Desse modo, se $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$. Esta propriedade nos permite resolver uma série de equações cuja variável aparece no expoente, e por isso são chamada de equações exponenciais.

Para resolver uma equação exponencial tente transformar a equação dada em outra equivalente, da forma $a^x = a^y$. Para isso use inicialmente as propriedades da potenciação.

Exemplos: Resolva as equações.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \frac{9}{4}$

b) $27^{2x+1} = \sqrt{3^{x+2}}$

c) $3^{3x+1}.9^{2x+3} = 27^{3-x}$

d) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$

e) $10^{2x-2} - 11.10^{x-1} - 1 = 0$

f) $\frac{4^x + 4}{5} = 2^x$

g) $3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 33$

h) $3^{2x-1} = \frac{1}{9^{x+1}}$

I) $(0,1)^{x-5} - \frac{1}{(0,1)^6} = 0$

4. O NÚMERO e (número de EULER)

Dada a seqüência abaixo, calcularemos o seu valor para alguns valores de n.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se $n = 1$ então $a_1 = 2$

Se $n = 2$ então $a_2 = 2,25$

Se $n = 3$ então $a_3 = 2,3703$

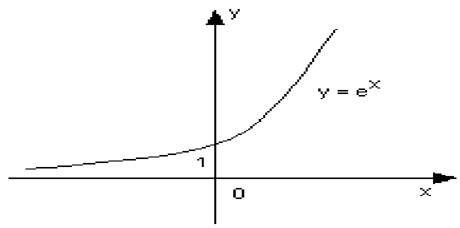
Se $n = 10$ então $a_{10} = 2,5937$

Se $n = 100$ então $a_{100} = 2,7048$

Se $n = 1000$ então $a_{1000} = 2,7181$

Se $n = 10000$ então $a_{10000} = 2,71828$

Quanto n tende para o infinito, o valor de a_n tende a se estabilizar em um número que representamos por e. Seu valor aproximado é $e = 2,71828$. O número e é irracional e é bastante utilizado como base da função exponencial $f(x) = e^x$



5. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Seja a função $f : R \to R$, definida por $f(x) = 2^x$. Então $f(a+1) - f(a)$ é igual a:

a) 2
b) 1
c) $f(a)$
d) $f(1)$
e) $2.f(a)$

2) Seja f de R em R uma função definida por $f(x) = a.3^{bx}$, onde a e b são constantes reais. Dado f(0) = 900 e f(10) = 300, calcule k tal que f(k) = 100

a) 40
b) 25
c) 15
d) 30
e) 20

3) Se $y = 3^{\cos x}$, entado:

a) $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$
b) $y \leq 1$
c) $-1 \leq y \leq 1$
d) $y \geq 3$

4) Calcule x em $3^{x+1} - \frac{18}{3^x} = 25$:

a) 2
b) – 1
c) 0
d) 1
e) 1

5) O produto das raízes da equação $4^{x-1} - 9.2^x + 2 = 0$ é:

a) – 2

b) – 1
c) 0
d) ½
e) 3

6) Os números inteiros x e y satisfazem $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$. Então x é:

a) – 1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

7) Calcule m para que a equação em $x^2 + (2^m - 2)x + 9 = 0$ tenha raízes iguais.

a) m é par
b) m é múltiplo de 6
c) m é um número primo
d) m é múltiplo de 7
e) m é múltiplo de 10

8) A soma das raízes da equação $2^{2x} - 12.2^x + 32 = 0$, vale:

a) 1
b) 0
c) 4
d) 5
e) 3

9) O preço de um automóvel novo é P_0 (em reais). Ele sofre uma desvalorização de 10% ao ano. Expresse a lei que dá o preço P desse automóvel após n anos de uso.

a) $P = P_0 . (0,8)^n$
b) $P = P_0 . (0,81)^n$
c) $P = P_0 . (0,1)^n$
d) $P = P_0 . (0,9)^n$
e) $P = P_0 . (0,5)^n$

10) Num certo ano, uma passagem aérea entre São Paulo e Paris custava mil dólares. Dão pra frente, esse preço vem sofrendo reajustes anuais de 10%. Expresse a lei que dá o preço da passagem aérea entre São Paulo e Paris em função do tempo t, em anos.

a) $P = 1000 . (1,1)^t$
b) $P = 1000 . (1,001)^t$
c) $P = 1000 . (1,2)^t$
d) $P = 1000 . (1,01)^t + 1$
e) $P = 1000 . (1,01)^t$

11) A temperatura interna de uma geladeira (se ela não for aberta) segue a lei $T(t) = 25 . (0,8)^t$, onde t é o tempo (em minutos) em que permanece ligada e T é a temperatura (em graus Celsius). Qual é a temperatura interna da geladeira no instante em que ela foi ligada? Quantos graus Celsius essa temperatura alcançará dois minutos depois que a geladeira começar a funcionar?

a) 200° e 25°
b) 25° e 20°
c) 20° e 30°
d) 25° e 16°

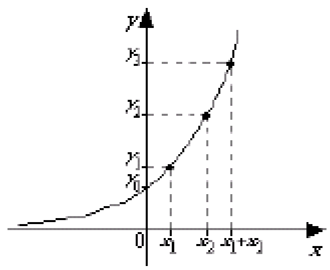
e) 16° e 25°

12) A solução da equação $9^{x-1} + 3^{x-1} = 6$ é um número:

a) entre 2 e 3
b) menor que 0
c) entre 0 e 1
d) entre 1 e 2
e) maior que 3

13) A figura abaixo é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$ no plano cartesiano. Com base nesse gráfico, é correto afirmar que:

a) $y_0 = y_2 - y_1$
b) $y_1 = y_3 - y_2$
c) $y_1 = y_3 + y_0$
d) $y_2 = y_1 \cdot y_0$
e) $y_3 = y_1 \cdot y_2$



Gabarito:

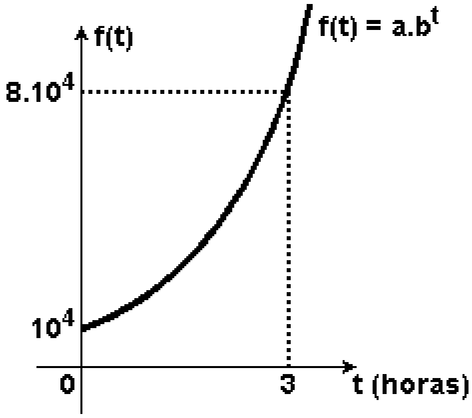
1) c	2) e	3) a	4) a	5) d
6) c	7) c	8) d	9) d	10) a
11) d	12) d	13) d		

6) EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1) (Puccamp) Pesquisadores da Fundação Osvaldo Cruz desenvolveram um sensor a laser capaz de detectar bactérias no ar em até 5 horas, ou seja, 14 vezes mais rápido do que o método tradicional. O equipamento, que aponta a presença de micro-organismos por meio de uma ficha ótica, pode se tornar um grande aliado no combate às infecções hospitalares. Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece à lei $N(t) = m.\,2^{\frac{t}{2}}$, na qual N representa o número de bactérias no momento t, medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, ao fim de 8 horas o número delas era:

a) 3 600 b) 3 200 c) 3 000 d) 2 700 e) 1 800

2) (Mackenzie) O gráfico mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura. Dentre as alternativas abaixo, decorridos 30 minutos do início das observações, o valor mais próximo desse número é:



a) 18.000 b) 20.000 c) 32.000 d) 14.000 e) 40.000

3) (UFSM) Um piscicultor construiu uma represa para criar traíras. Inicialmente, colocou 1.000 traíras na represa e, por um descuido, soltou 8 lambaris. Suponha-se que o aumento das populações de lambaris e traíras ocorre, respectivamente, segundo as leis L(t)=L³10 T(t)=T³2 , onde L³ é a população inicial de lambaris, T³, a população inicial de traíras e t, o número de anos que se conta a partir do ano inicial.

Considerando-se log 2 = 0,3, o número de lambaris será igual ao de traíras depois de quantos anos?
a) 30 b) 18 c) 12 d) 6 e) 3

4) (PUC-SP) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996?
(Dados: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48)
a) 1998 b) 1999 c) 2000 d) 2001 e) 2002

5) (PUC-MG) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função:

$$N(t) = 100.2^{\left(\frac{t}{3}\right)}$$

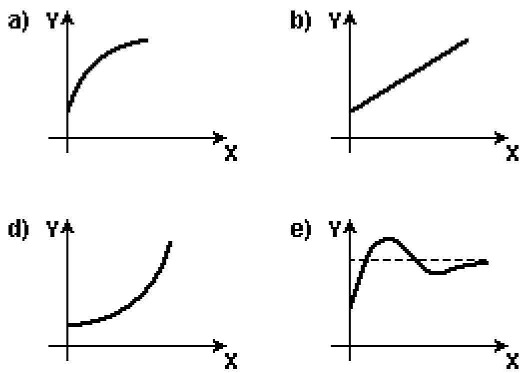
Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51.200 bactérias depois de:
a) 1 dia e 3 horas. b) 1 dia e 9 horas. c) 1 dia e 14 horas. d) 1 dia e 19 horas.

6) (UFF) A população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinquenta anos (em 1953).
Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, conclui-se que a

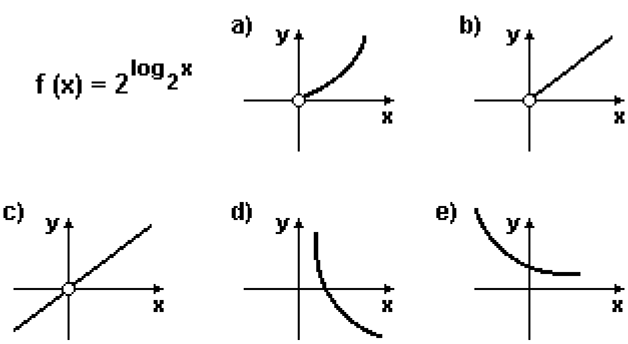
população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos (em 1978), ficou reduzida a aproximadamente:
a) 10% da população existente em 1953
b) 20% da população existente em 1953
c) 30% da população existente em 1953
d) 45% da população existente em 1953
e) 65% da população existente em 1953

7) (UFLA) A tabela abaixo fornece os dados simulados do crescimento de uma árvore. A variável X é o tempo em anos e Y, a altura em dm.O esboço do gráfico que melhor representa os dados da tabela é

X	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Y	15.00	20.70	24.96	27.51	28.83	29.46	29.76	29.89	29.95	29.98	29.99



8) (UFRJ) O gráfico que melhor representa a função mostrada na figura adiante, é:



Gabarito:

1) B	2) B	3) E	4) E
5) A	6) D	7) C	8) B