FUNÇÕES

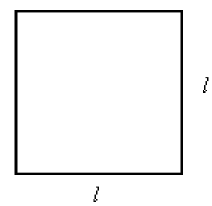
Professora Laura Aguiar

1) Noção Intuitiva

Com frequência em matemática encontramos relações entre duas grandezas variáveis. Observe o exemplo abaixo:

Seja um quadrado cujo o lado mede l. Designando por $P = 4l$ a medida do perímetro desse quadrado, podemos estabelecer entre P e l a seguinte relação:

$$P = 4l$$



Notamos então , que a medida P do perímetro depende da medida l do lado do quadrado, o que pode ser verificado pela seguinte tabela:

Medida do Lado (l)	Medida do Perímetro (P)
0,5	2
1	4
1,2	4,8
2	8
3	12
4,5	18

Pela tabela observamos que:

- A medida l do lado do quadrado é uma grandeza variável
- A medida P do perímetro do quadrado é uma grandeza variável
- Todos os valores de l está associado a um valor de P
- A cada valor de l está associado um único valor de P

Sendo assim, dizemos então:

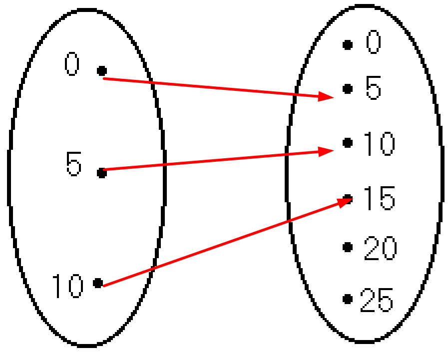
- A medida P do perímetro do quadrado está dada em função de l
- A relação $P = 4l$ chama-se lei de associação ou fórmula matemática desta função
- Na lei de associação temos que l é a variável independente e P é a variável dependente.

2) A Noção de Função através de Conjuntos

Vamos agora, estudar função, usando a teoria dos conjuntos, pois as colunas vistas na tabela do item anterior representam conjuntos numéricos.

Veja o exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{0,5,10\}$ e $B = \{0,5,10,15,20,25\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x + 5$, com $x \in A, y \in B$.



DEFINIÇÃO: Sendo A e B dois conjuntos não vazios e uma relação f de A em B, essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e somente um elemento y de B

Pode-se escrever:

$f : A \to B$ (lê-se: f é uma função de A em B).

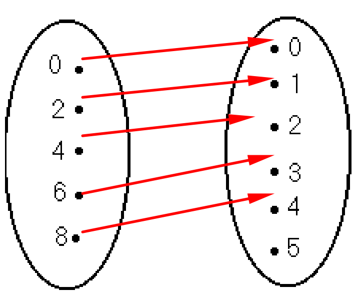
Observação: Podemos usar a seguinte notação para a lei de associação que define uma função:

$$y = x + 5 \text{ ou } f(x) = x + 5$$

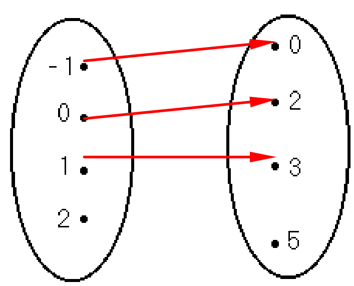
A lei da função pode ser indicada de uma forma ou de outra, pois y e $f(x)$ significam o mesmo na linguagem matemática

EXEMPLO: Observe os diagramas abaixo, que representam relações de A em R, assinale com F aquelas que são funções e com R as que não são funções.

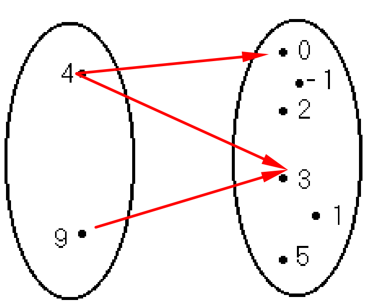
a)



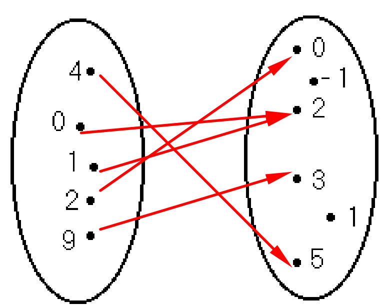
b)



b)



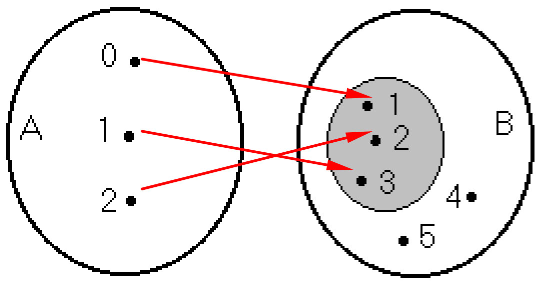
d)



3) Domínio, Imagem e Contra – Domínio de uma Função

Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; vamos considerar a função $f : A \to B$ definida por $y = x + 1$ ou $f(x) = x + 1$

Observando o diagrama da função, vamos definir:



- O conjunto A é denominado domínio da função, que indicamos por D. No exemplo acima $D = \{0, 1, 2\}$. O domínio da função também é chamado campo de definição ou campo de existência da função.
- O conjunto $\{1, 2, 3\}$, que é um subconjunto de B, é denominado o conjunto imagem da função e indicamos por $\mathrm{Im} = \{1, 2, 3\}$
- O conjunto B, tal que $\mathrm{Im} \subset B$, é denominado contradomínio da função.

No exemplo acima: 1 é a imagem de 0 pela função; $f(0) = 1$
2 é a imagem de 1 pela função; $f(1) = 2$
3 é a imagem de 2 pela função; $f(2) = 3$

EXEMPLO

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determine:

a) o conjunto imagem da função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2$
b) o conjunto imagem da função $f : A \to B$ definida por $f(x) = 2x + 2$
c) o conjunto imagem da função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 1$

4) Estudo do Domínio de uma Função

Quando definimos uma função, o domínio D, que o conjunto de todos os valores possíveis da variável x, pode ser dado explícita ou implicitamente. Assim:

- Se é dado apenas $f(x) = 2x - 5$, sem explicitar o domínio D, está implícito que x pode ser qualquer número real, ou seja $D = R$.

- Se dado $f(x)=2x-5$, com $1 \le x \le 10$, está implícito que o domínio da função dada é $D=\{x \in R, 1 \le x \le 10\}$.
- Se é dado apenas $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$, sem explicitar o domínio, está implícito que x pode ser qualquer número real diferente de 2, com isso, $D=\{x \in R, x \neq 2\}$.
- Se é dado apenas $f(x)=\sqrt{x-2}$, sem explicitar o domínio D, está implícito que $x-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$. Assim $D=\{x \in R; x \ge 2\}$

Logo, quando o domínio de uma função não está explícito, devemos considerar para este domínio todos os valores reais em x que tornam possíveis em R as operações indicadas na fórmula matemática que define a função.

Veja o Exemplo:

Determinar o domínio da função $f(x)=\sqrt{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

Exemplos:

Determinar o domínio das seguintes funções definidas por:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$ b) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9x+20}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+3}$ g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3}+\dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$

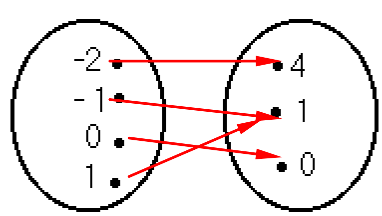
h) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+9}$ i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}$ j) $f(x)=\sqrt{x-2}$

5) Função Sobrejetora, Função Injetora, Função Bijetora

Vamos considerar os seguintes exemplos:

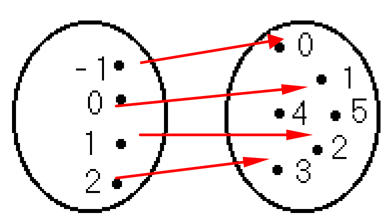
1°) $A=\{-2,-1,0,1\}$, $B=\{0,1,4\}$ e $f: A \to B$ definida por $y=x^2$

Você observa que não há elemento de B que não seja imagem de um elemento de A, isto é, chegam flechas em todos os elementos de B. O **conjunto imagem é igual ao contradomínio** da função. Neste caso dizemos que a função f é sobrejetora.



f **é sobrejetora** $\Leftrightarrow \mathrm{Im}_{(f)} = CD_{(f)}$

2°) $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{0,1,2,3,4,5\}$ e $f: A \to B$ definida por $y=x+1$

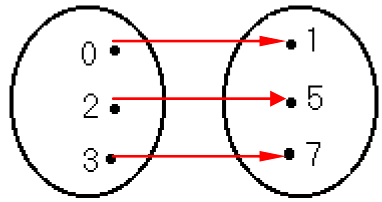


Você observa que não existe elemento de B que seja imagem de mais de um elementos de A, isto é, em cada elemento de B que é imagem de um elemento de A chega apenas uma flecha. Neste caso dizemos que a função é injetora.

f **é injetora** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3°) $A = \{0, 2, 3\}, B = \{1, 5, 7\}$ e $f : A \to B$ definida por $y = 2x + 1$

Você observa que não existe um elemento de B que não seja imagem de um elemento de A (f é sobrejetora); cada elemento imagem de um único elemento de A (f é injetora). Neste caso, a função f, é ao mesmo tempo, sobrejetora e injetora, dizemos uma função bijetora.



de B é quando que f é

f **é bijetora** $\Leftrightarrow$ f **é sobrejetora** e f **é injetora**

EXEMPLO: Marque V ou F nas sentenças abaixo:

a) A função $f : R_+ \to R_+$ definida por $y = x^2$ é injetora
b) A função $f : R \to R$ definida por $y = x + 1$ é bijetora
c) A função $f : \{0, 1, 2, 3\} \to R$ definida por $y = x + 1$ não é sobrejetora
d) A função $f : \{0, 1, 2, 3\} \to N$ definida por $y = x + 1$ é injetora
e) A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é bijetora
f) A função $f : N \to R$ definida por $y = x$ é bijetora.

6) Função Par e Função Ímpar

Seja a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$
Veja que:
$f(-1) = 1 = f(1); f(-2) = 4 = f(2); f(-\sqrt{2}) = 2 = f(-\sqrt{2})$

Qualquer que seja $x \in D$ **ocorre** $f(x) = f(-x)$ **; neste caso , dizemos que a função f é par.**

Agora seja a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x$
Veja que:
$$f(1) = 2,\ f(-1) = -2;\ f(2) = 4,\ f(-2) = -4;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Para todo $x \in D$ **ocorre** $f(x) = -f(-x)$ **, neste caso dizemos que f é uma função ímpar**

EXEMPLO: Classifique as funções como pares ou ímpares.

a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = -x^3$
d) $y = 4x - 1$ e) $y = 7x^4$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

7) Função Crescente e Função Decrescente

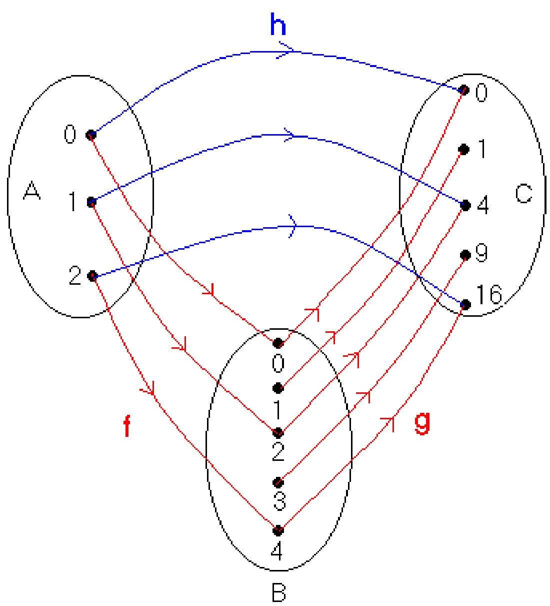
Uma função $y = f(x)$ é **crescente** num conjunto A se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função $y = f(x)$ é **decrescente** num conjunto A se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

8) Função Composta

Dados os conjuntos $A = \{0,1,2\}, B = \{0,1,2,3,4\}, C = \{0,1,4,9,16\}$ e as funções $f : A \to B; f(x) = 2x$ e $f : B \to C; f(x) = x^2$

Então:



$f = \{(0,0);(1,2);(2,4)\}$

e

$g = \{(0,0);(1,1);(2,4);(3,9);(4,16)\}$

Observamos que:

- A cada $x \in A$ associa-se um único $y \in B$ tal que $y = 2x$;
- A cada $y \in B$ associa-se um único $z \in C$ tal que $z = y^2$;
- A cada $x \in A$ associa-se um único $z \in C$ tal que $z = y^2 = (2x)^2 = 4x^2$.

Então podemos afirmar que vai existir uma função h de A em C definida por $h(x) = 4x^2$ que indicamos por $g \circ f$ ou $g(f(x))$ (lê-se g composta com f)

Logo: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \{(0,0),(1,4),(2,16)\}$ ou $h(x) = 4x^2$

A função $h(x)$ chama-se composta de g com f

EXEMPLOS

1) Sendo $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 3x$, calcular $g(f(x))$ e $f(g(x))$

2) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6; g(x) = x + 1$, pede-se:

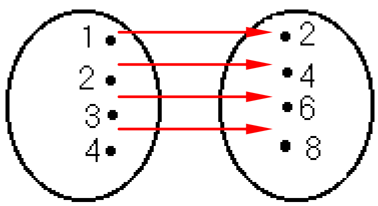
a) Calcular $f(g(x))$
b) Achar x de modo que $f(g(x)) = 0$

3) Dados $f(x) = 3x - 1; f(g(x)) = 6x + 8$ calcular $g(x)$.

9) Função Inversa

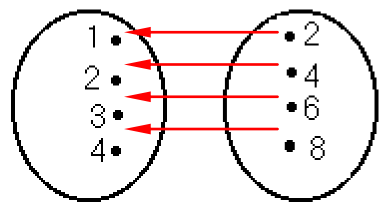
Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, consideremos as funções:
$f : A \to B$ definida por $y = 2x$
$g : B \to A$ definida por $y = \frac{x}{2}$

f



$f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$\text{Im} = \{2, 4, 6, 8\}$

g



$g = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$
$D = \{2, 4, 6, 8\}$
$\text{Im} = \{1, 2, 3, 4\}$

Observe que:

- A função g pode ser obtida invertendo-se a ordem dos elementos de cada um dos pares ordenados que pertencem a função f
- $D_{(f)} = \text{Im}_{(g)}$ e $\text{Im}_{(f)} = D_{(g)}$
- As funções f e g são bijetoras.

A função g é chamada **função inversa** da função f

Indica-se função inversa por f^{-1}

Observação importante:

A função $y = f(x)$ define uma correspondência de x para y, isto é, dado o valor de x podemos obter o valor de y que lhe corresponde através da função f.

A função inversa de f, que é indicada por f^{-1}, define uma correspondência contrária, isto é, de y para x, e indicamos $x = f^{-1}(y)$

As funções que possuem inversa são chamadas funções inversíveis. Então podemos definir:

Da uma função bijetora $f: A \to B$, chama-se função inversa de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que $(a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$

Processo Algébrico para o cálculo da Função Inversa

a) Achar a expressão que representa a inversa da função $y = x + 2$

b) Determinar a função inversa da função $f(x) = \dfrac{x+5}{2x-3}$, com $x \neq \dfrac{3}{2}$.

10) EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Sendo $f(x) = x^3$, $f: R \to R$, assinale V ou F

a) $f(2) = f(-2)$ b) $f(1) > f(0)$ c) $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) - 5$
d) $f(\sqrt{2}.\sqrt{3}) = f(\sqrt{2}).f(\sqrt{3})$

2) (FUVEST) Seja f uma função tal que $f(x+3) = x^2 + 1$ para todo x real. Então $f(x)$ é igual a:

a) $x^2 - 2$ b) $10 - 3x$ c) $-3x^2 + 16x - 20$ d) $x^2 - 6x + 10$ e) $x^2 + 6x - 16$

3) (UGF) Se $f(3x) = \dfrac{x}{2} + 1$ então $f(x-1)$ é igual a:

a) $\dfrac{x+5}{6}$ b) $\dfrac{3x-1}{2}$ c) $\dfrac{5x+3}{2}$ d) $\dfrac{3x}{2}$ e) $3x - 2$

4) (UFJF) Seja $f: R^* \to R$ tal que $2f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -5x$, então $f(3)$ é igual a:

a) –15 b) –11 c) $-\dfrac{85}{9}$ d) $-\dfrac{5}{3}$ e) $\dfrac{85}{3}$

5) (UFJF) Sendo $A = \{1,2,3,4,5\}$ e sabendo que o gráfico da função injetiva $f: A \to A$ passa pelos pontos $(1,3), (2,5)$ e $(3,4)$, podemos concluir que:

a) O gráfico de f passa pelo ponto $(3,1)$
b) A função f admite inversa
c) A função f é crescente
d) A função f é decrescente
e) O gráfico de f passa pelo ponto $(5,4)$

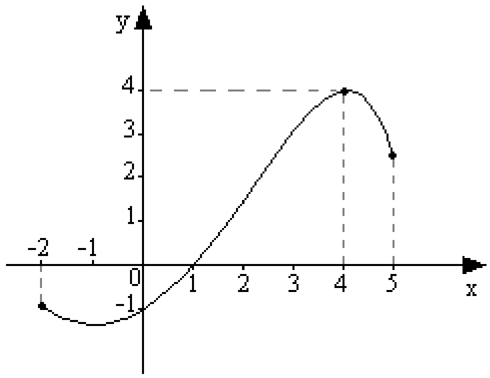
6) (UFV) Se f e g são funções reais tais que $f(x)=2x-2$ e $f(g(x))=x+2$, para todo $x \in R$, então $g(f(2))$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

7) (UFJF) Seja $f: R \to R$, dada por $f(x)=ax-8$ tal que $f(f(1))>1$. O menor valor inteiro positivo possível para a é:

a) um número ímpar b) um número primo c) um múltiplo de 3
d) um múltiplo de 5 e) um múltiplo de 7

8) (UFJF) A figura abaixo representa, no plano cartesiano, o gráfico de uma função $y=f(x)$ definida no intervalo $[-2,5]$.



Com base nesse gráfico, é **incorreto** afirmar que:
a) $f(4) > f(5)$
b) o conjunto imagem de *f* contém o intervalo $[-1,4]$
c) $f(x)<0$ se $-2 \le x \le 0$;
d) $f(f(1))=0$
e) O conjunto $\{x \in [-2,5];\ f(x)=3\}$ possui exatamente dois elementos.

9) (UFMG) Seja $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$. Se $x \neq 0$, uma expressão para $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é:

a) x^2+1 b) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$ c) $\dfrac{1}{x^2+1}$ d) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ e) Nenhuma anterior

10) (UFMG) Se f é uma função tal que $f(1)=3$ e $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para qualquer x e y reais, então $f(2)$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 8

11) (UFMG) Uma função $f: R \to R$ é tal que $f(5x)=5f(x)$ para todo número real x. Se $f(25)=75$, então o valor de $f(1)$ é:

a) 3 b) 5 c) 15 d) 25 e) 45

12) (UFMG) O conjunto solução da inequação $\dfrac{1}{x}<x$ é:

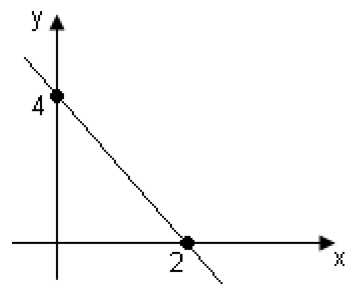
a) $\{x \in R; x>1\}$
b) $\{x \in R; -1<x<0$ ou $x>1\}$
c) $\{x \in R; x>1$ ou $x<-1\}$
d) $\{x \in R; x>-1\}$

13) (UFMG) Sendo $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ para $x>0$, o valor de $f\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ c) $\sqrt[4]{x}$ d) $\sqrt{x}$ e) $\dfrac{1}{x}$

14) (UFMG) O gráfico da função $f(x)=ax+b$ está representado nessa figura. O valor de $a+b$ é:

a) -2
b) 2
c) $\dfrac{7}{2}$
d) $\dfrac{9}{2}$
e) 6



15) (UFMG) Suponha que o número $f(x)$ de funcionários necessários para distribuir, em um dia, contas de luz entre x por cento de moradores, numa determinada cidade, seja dado pela função $f(x)=\dfrac{300x}{150-x}$.
Se o número de funcionários necessários para distribuir, em um dia, as contas de luz foi 75, a porcentagem de moradores que a receberam é:

a) 25 b) 30 c) 40 d) 45 e) 50

Gabarito:

1) FVFV	2) d	3) a	4) c	5) b
6) b	7) d	8) c	9) d	10) d
11) a	12) a	13) c	14) b	15) b